



UNIVERZITET U NIŠU
ELEKTRONSKI FAKULTET



Dušan J. Simjanović
**TENZORSKI RAČUN U PROSTORIMA
SIMETRIČNE I NESIMETRIČNE AFINE
KONEKSIJE I PRIMENE U LINEARNOM
PROGRAMIRANJU I PROJEKTOVANJU
FAZI REGULATORA**

- DOKTORSKA DISERTACIJA -



Niš, 2023



UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF
ELECTRONIC ENGINEERING



Dušan J. Simjanović

**TENSOR CALCULUS AT SYMMETRIC AND
NON-SYMMETRIC AFFINE CONNECTION
SPACES WITH APPLICATION IN THE
FIELDS OF LINEAR PROGRAMMING AND
DESIGN OF FUZZY CONTROLLERS**

- DOCTORAL DISSERTATION -



Niš, 2023

Podaci o doktorskoj disertaciji

Mentor:	prof. dr Marko Milojković, redovni profesor, Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet
Naslov:	Tenzorski račun u prostorima simetrične i nesimetrične afine koneksije i primene u linearnom programiranju i projektovanju fazi regulatora
Rezime:	<p>Tema ove disertacije je izučavanje uopštenog pristupa najkraćih rastojanja između dve tačke na površi, čime se došlo do novih pristupa razmatranja teorijski zadatih pojmova diferencijalne geometrije. Važnost dobijenih rezultata tenzorskog računa ogleda se i u primeni u tehnikama linearnog programiranja, gde se primenom skalarnog proizvoda generisanog simetričnim kontravarijantnim metričkim tenzorom na novi način definiše ciljna funkcija i upotpunjuje koncept transportnog problema. Definisani su i površinski fazi skupovi, važan alat u opisivanju neodlučnosti, višeznačnosti i neodređenosti, sa ciljem projektovanja optimalnog upravljanja kod sistema automatskog upravljanja, kao i poboljšanja performansi fazi regulatora. Glavni doprinosi disertacije tiču se određivanja komponenti alternacije dvostrukog kovarijantnog izvoda i ispitivanje odnosa između tenzora i pseudotenzora krivine prostora nesimetrične afine koneksije, kao i uopštavanja pojma invarijante geometrijskog preslikavanja i određivanje familija invarijanti preslikavanja definisanih na prostoru $\mathbb{G}A_N$.</p>

Takođe, posmatrana je primena tenzorskog računa u linearnom programiranju gde je primenom skalarnog proizvoda generisanog simetričnim kontravarijantnim metričkim tenzorom na novi način definisana ciljna funkcija i upotpunjen koncept transportnog problema. Ovim postupkom se, pronalaženjem novog načina određivanja ekstremnih vrednosti funkcija datog sistema može unaprediti automatsko upravljanje.

Pokazano je da se korišćenjem geodezijskih linija površi umesto velikih krugova sfere za određivanje rastojanja između dva fazi broja generalizuju sferični fazi brojevi i time poslednja koordinata posmatra kao funkcija, a ne kao konstanta, omogućavajući donosiocima odluka veći stepen slobode. Korišćenje površinskih fazi skupova i drugih fazi brojeva i različitih načina fazifikacije i defazifikacije pruža mogućnost za bolje i preciznije definisanje ulaznih i izlaznih veličina fazi regulatora, čime se skraćuje vreme potrebno za izvršavanje računskih operacija, poboljšavaju performanse fazi regulatora i sistema automatskog upravljanja.

Naučna oblast:	Elektrotehničko i računarsko inženjerstvo
Naučna disciplina:	Primenjena matematika
Ključne reči:	tenzorski račun, Ričijev tenzor, linearno programiranje, transportni problem, fazi brojevi, fazi regulator
UDK:	629.113-523.6:514.763.5
CERIF klasifikacija:	T 125, Automatizacija, robotika, kontrolni inženjering
Tip licence kreativne zajednice:	CC BY-NC-ND

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral supervisor: PhD Marko Milojković, full professor, University of Niš, Faculty of Electronic Engineering

Title: Tensor Calculus at Symmetric and Non-Symmetric Affine Connection Spaces With Application in the Fields of Linear Programming and Design of Fuzzy Controllers

Abstract: This Ph. D. dissertation is devoted to the study of the general approach of the shortest distances between two points of a surface, leading to new approaches in considering the theoretically defined terms in differential geometry. The importance of the obtained results of tensor calculus is also reflected in the application in linear programming techniques, where applying the scalar product generated by a metric tensor, the objective function is defined in a new way, completing the concept of the transportation problem. Surface fuzzy sets are also defined as an important tool in describing indecision, ambiguity, and indeterminacy, with the aim of designing optimal control in automatic control systems, as well as improving the performance of fuzzy controllers. The main contributions of the dissertation concern the determination of components of the alternation of the double covariant derivative and the examination of the relationship between curvature tensors and pseudotensors of a non-symmetric affine connection space, as well as the generalization of the concept of invariants for geometric mapping, such as the determination of the family of these invariants for mappings defined on the space $\mathbb{G}\mathbb{A}_N$.

Also, in this Ph.D. thesis, the application of tensor calculus in linear programming was observed, where the objective function was defined in a new way and the concept of the transportation problem was completed by applying the scalar product generated by the symmetric contravariant metric tensor. With this procedure, by finding a new way of determining the extreme values of the functions of a given system, automatic control can be improved. It is shown that by using geodesic lines of a surface instead of great circles of the unit sphere to determine the distance between two fuzzy numbers, spherical fuzzy numbers are generalized and thus the last coordinate is viewed as a function instead of as a constant, allowing decision makers a greater degree of freedom. The use of surface fuzzy sets and other fuzzy numbers and different methods of fuzzification and defuzzification provides an opportunity for better and more precise definition of the input and output values of the fuzzy regulator, shortening the time required to perform calculation operations, improving the performance of the fuzzy regulator and the automatic control system.

Scientific Field:	Electrical and Computer Engineering
Scientific Discipline:	Applied Mathematics
Key words:	tensor calculus, Ricci tensor, linear programming, transportation problem, fuzzy numbers, fuzzy controller
UDC:	629.113-523.6:514.763.5
CERIF classification:	T125, Automation, robotics, control engineering
Creative Commons License Type:	CC BY-NC-ND

ZAHVALNOST

U ovim redovima, kako Bog zapoveda, treba pomenuti imena ljudi koji su u većoj meri doprineli tome da stasam kao naučnik, da ova teza dobije svoj konačan oblik i da dođem do odbrane iste. Verujem da će naredni stihovi verno preneti moje osećaje...

Kada muke nadođu, uhvati te tuga neka, u pomoć će doći Jeka.

Kad problemi nagrnu, ko koprive žare, pomoći će mentor Mare.

Kad je slučaj nerešiv, zlo se širi na sve strane, tu je uvek, naš Bane!

Kada muke porastu i kad nisu više male, uskače i Sale!

Kad je lako, može svako, kad je teško, ajde Neško!

U prethodnim redovima pomenute su osobe koje su, svaka na svoj način, i u svoje vreme, pozitivno uticale na moj naučni put. Najviše strpljenja za sve moje pogreške, mnogobrojna pitanja i istrajnost u dokazivanju teorema imao je dr Nenad O. Vesić. Zbog svega toga, zahvaljujem dr Nenadu O. Vesiću - mom drugom mentoru i naučnom saradniku Matematičkog instituta SANU - koji me je uveo u teoriju tenzorskog računa i sa kojim sam objavio više naučnih članaka koji čine ovu disertaciju. Ljubav prema fazi logici razvila mi je prof. dr Jelena M. Ignjatović, dok su me moj mentor, prof. dr Marko T. Milojković i prof. dr Saša S. Nikolić vodili putem saznanja u oblasti Automatike i fazi regulatora, takođe vrlo strpljivo slušajući moja česta, nekada i naporna pitanja. Prof. dr Branislav M. Randelović? Velika je to ljudina! Svakako je zauzeo posebno mesto kod Svevišnjeg, dajući sve od sebe da uspešno pređem zadate mi prepreke. Zahvaljujem Goranu Iliću, direktoru OŠ Vuk Karadžić iz Doljevca i prof. dr Draganu Domazetu, rektoru FIT-a UM, kao i profesorkama matematike Zagi i Kosi koje svakako zauzimaju važno mesto u mom životu. Najviše sam zahvalan svojoj porodici koja je od početka studija do ovih dana bila uz mene, a Bog je svedok koliko smo problema, teških i bezizlaznih situacija prošli. Hvala Mici i Zorki na beskrajnom strpljenju, znam da sa mnom nije lako, na bezrezervnoj podršci, toplim pogledima i rečima ohrabrenja. Sava i Marijana, hvala vam što ste ispunili moje srce...

Mušnikovo (Prizren) i Niš, decembar 2023. g.

Sadržaj

ZAHVALNOST	vii
SPISAK SLIKA	xii
SPISAK TABELA	xiii
UVOD	1
1 OSNOVNI POJMOVI	4
1.1 Površni u E^3	4
1.2 Tenzori	7
1.3 Rimanov i generalisani Rimanov prostor	10
1.4 Prostori simetrične i nesimetrične afine koneksije	14
1.5 Preslikavanja prostora afine koneksije	17
2 KOVARIJANTNI IZVODI I RIČIJEVI IDENTITETI	19
2.1 Komutacione formule pri nesimetričnoj...	19
2.1.1 Motivacija	19
2.1.2 Četiri plus jedna vrsta kovarijantnog diferenciranja	22
2.1.3 Ričijevi Identiteti na osnovu tenzora \hat{a} tipa $(1, 1)$	24
2.1.4 Ričijevi Identiteti na osnovu tenzora \hat{a} tipa (p, q)	31
2.2 Ričijevi identiteti u operatorskom obliku	33
2.2.1 Motivacija	35
2.2.2 Linearno nezavisni tenzori krivine	36
2.2.3 Tenzori krivine Rimanovog i prostora nesimetrične afine koneksije	40
3 INVARIJANTE	56
3.1 Invarijante geometrijskih preslikavanja	56

SADRŽAJ

3.1.1	Osnovne invarijante preslikavanja	56
3.1.2	Pridružene invarijante	57
3.2	Skoro geodezijska preslikavanja trećeg tipa	66
3.2.1	Geodezijske i skoro geodezijske linije i skoro geodezijska preslikavanja	67
3.2.2	Dve vrste invarijanti preslikavanja	68
3.2.3	Prethodni rezultati	70
3.2.4	Invarijante ekvitorzionih skoro geodezijskih preslikavanja	73
3.3	Invarijante preslikavanja u operatorskom obliku	79
3.3.1	Invarijante preslikavanja	80
3.3.2	Invarijante preslikavanja prostora u Ajzenhartovom smislu	82
3.3.3	Invarijante preslikavanja Rimanovih prostora u Ajzenhartovom smislu	83
3.3.4	Invarijante preslikavanja među Rimanovim prostorima u različitom smislu	86
4	TENZORSKI RAČUN I LINEARNO PROGRAMIRANJE	94
4.1	Osnovne osobine linearnog programiranja	94
4.2	Transportni problem i osobine	102
4.3	Osnovno dopustivo (izvodljivo) rešenje Transportnog problema	104
4.4	Transportni problem i metrički tenzor	108
4.5	Generalizovano dopustivo rešenje Transportnog problema	112
5	PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA	117
5.1	Fazi logika	117
5.1.1	Istorija fazi skupova i fazi logike	117
5.1.2	Funkcije pripadnosti, fazi brojevi i njihove osobine	127
5.1.3	Neka uopštenja fazi skupova	134
5.1.4	Definicija i osnovne osobine sferičnih fazi skupova	135
5.2	Površinski fazi skupovi	138
5.2.1	Uvodna razmatranja	139
5.2.2	Definicija i osobine površinskih fazi skupova	140
5.2.3	Primena površinskih fazi skupova	147

SADRŽAJ

5.3	Fazi regulatori	155
5.3.1	Fazi logika i regulatori	155
5.3.2	Fazi regulatori i osobine	157
5.3.3	Primena različitih metoda defazifikacije na projektovanje fazi regulatora	167
6	ZAKLJUČAK	179
	Literatura	196
	BIOGRAFIJA AUTORA	197
	POPIS RADOVA AUTORA	198

SPISAK SLIKA

4.1	Grafički prikaz funkcije $Z(t)$	114
5.1	Grafički prikaz klasičnog skupa sa vrednostima 0 i 1	119
5.2	Grafički prikaz fazi skupa	120
5.3	Grafički prikaz dva fazi skupa	123
5.4	Funkcija pripadnosti unije fazi skupova	124
5.5	Funkcija pripadnosti preseka fazi skupova	124
5.6	Nosač i jezgro fazi skupa	125
5.7	Konveksan i nekonveksan fazi skup	126
5.8	Trougaoni fazi brojevi	131
5.9	Predstavljanje delova trougaone funkcije pripadnosti	132
5.10	Presek funkcija pripadnosti $\mu_{\tilde{A}_1}$ i $\mu_{\tilde{A}_2}$ trougaonih fazi brojeva \tilde{A}_1 i \tilde{A}_2	133
5.11	<i>Crisp</i> vrednosti posmatranih podkriterijuma	150
5.12	Odnos <i>crisp</i> vrednosti posmatranih podkriterijuma	151
5.13	Struktura fazi regulatora	157
5.14	Fazifikacija brzine automobila za dve vrednosti v_0	158
5.15	Implikacija fazi proizvoda	162
5.16	Mamdanijeva (min) fazi implikacija	163
5.17	Primer razlike između metoda Težišta i metoda Gravitacije	166
5.18	Funkcije pripadnosti za vrednosti lingvističkih promenljivih	169
5.19	Proces zaključivanja i upravljanja nuklearnim reaktorom	169
5.20	Upravljačka površina fazi regulatora	169
5.21	Poligon dobijen agregacijom	170
5.22	Odnos grešaka među rešenjima izražen u procentima	171

SPISAK SLIKA

5.23 Dva trapeza sa zajedničkom površinom	173
---	-----

SPISAK TABELA

5.1	Vrednosni indeksi, lingvističke mere kriterijuma i TFB	137
5.2	Indeks rezultata, lingvističke mere kriterijuma, i površinski fazi skupovi	141
5.3	<i>Crisp</i> vrednosti podkriterijuma i njihov odnos	151

UVOD

Naučna istraživanja u inženjerstvu su oduvek bila bazirana na primeni bogatog matematičkog aparata. Posebno u vreme intenzivnog tehnološkog razvoja, primenjena matematika nalazi svoje uporište u različitim inženjerskim granama. Geometrijski problem kretanja duž najkraćih rastojanja na površima daje mogućnost generalizacije promena najrazličitijih veličina u tehnici. Tema ove disertacije je, između ostalog, i izučavanje uopštenog pristupa najkraćih rastojanja između dve tačke na površi, čime se došlo do novih pristupa razmatranja teorijski zadatih pojmova diferencijalne geometrije. Važnost dobijenih rezultata tenzorskog računa ogleda se i u primeni u tehnikama linearnog programiranja, gde se primenom skalarnog proizvoda generisanog simetričnim kontravarijantnim metričkim tenzorom na novi način definiše ciljna funkcija i upotpunjuje koncept transportnog problema. Definisani su i površinski fazi skupovi, važan alat u opisivanju neodlučnosti, višeznačnosti i neodređenosti, sa ciljem projektovanja optimalnog upravljanja kod sistema automatskog upravljanja, kao i poboljšanja performansi fazi regulatora.

Glavni doprinosi disertacije su sledeći:

1. Određivanje komponenti alternacije dvostrukog kovarijantnog izvoda i ispitivanje odnosa između tenzora i pseudotenzora krivine prostora nesimetrične afine koneksije.
2. Uopštavanje pojma invarijante geometrijskog preslikavanja i određivanje familija invarijanti preslikavanja definisanih na prostoru $\mathbb{G}A_N$.
3. Primena tenzorskog računa u linearnom programiranju gde je primenom skalarnog proizvoda generisanog simetričnim kontravarijantnim metričkim

UVOD

tenzorom na novi način definisana ciljna funkcija i upotpunjen koncept transportnog problema. Ovim postupkom se, pronalaženjem novog načina određivanja ekstremnih vrednosti funkcija datog sistema može unaprediti automatsko upravljanje.

4. Korišćenje geodezijskih linija površi umesto velikih krugova sfere za određivanje rastojanja između dva fazi broja čime se generalizuju sferični fazi brojevi i time poslednja koordinata posmatra kao funkcija, a ne kao konstanta, omogućavajući donosiocima odluka veći stepen slobode.
5. Korišćenje površinskih fazi skupova i drugih fazi brojeva i različitih načina fazifikacije i defazifikacije čime se bolje i preciznije definišu ulazne i izlazne veličine fazi regulatora i time poboljšavaju performanse sistema automatskog upravljanja.

U prvom poglavlju su opisani osnovni pojmovi diferencijalne geometrije neophodni za dalji rad: definisane su površi u trodimenzionalnom euklidskom prostoru E^3 zajedno sa njihovim osobinama, prvim kvadratnim formama i osnovama tenzorskog računa na tim površima. Nakon toga, definisani su tenzori u operatorskom i indeksnom obliku, uz podsećanje na definicije Rimanovog i generalisanog Rimanovog prostora zajedno sa odgovarajućim kovarijantnim izvodima i tenzorima krivine. Uopšteni pojmovi Rimanovog i generalisanog Rimanovog prostora do nivoa prostora simetrične i nesimetrične afine koneksije i uopštenja veličina prisutnih u razmatranju Rimanovih i generalisanih Rimanovih prostora upotpunjuju ovaj deo. Definicijom geometrijskih preslikavanja prostora afine koneksije pri, čemu je posebna pažnja posvećena geodezijskim preslikavanjima prostora simetrične afine koneksije i njihovim invarijantama (Tomasovom projektnom parametru i Vejlovom projektnom tenzoru) završava se prvo poglavlje.

U drugom poglavlju pažnja je posvećena kovarijantnim izvodima prostora nesimetrične afine koneksije i odgovarajućim Ričijevim identitetima. Najpre je, na osnovu rezultata koji dokazuju da se na osnovu alternacije dvostrukog kovarijantnog izvoda definisanih na osnovu afine koneksije sa torzijom tenzora tipa $(1, 1)$, ne dobijaju pseudotenzori krivine kao komponente tih razlika, potvrđeno da to isto važi i za alternaciju dvostrukih kovarijantnih izvoda tenzora tipa (p, q)

definisanih na osnovu afine koneksije sa torzijom. Nakon toga, razmotreni su Riči-jevi identiteti, generisani afinom koneksijom sa torzijom, u operatorskom obliku i dobijene su odgovarajuće familije tenzora krivine. Proučeni su i linearno nezavisni tenzori krivine prostora nesimetrične afine koneksije. U ovom poglavlju, uspostavljena je veza između tenzora krivine prostora nesimetrične afine koneksije i tenzora krivine Rimanovog prostora. Razmotren je i slučaj tenzora krivine prostora semi-simetrične afine koneksije.

Naredno, treće poglavlje, posvećeno je invarijantama transformacija afinih koneksija prostora nesimetrične afine koneksije. Rezultati dobijeni u tom poglavlju, uopštenja su odgovarajućih radova koji su poslednjih godina objavljeni u eminentnim međunarodnim časopisima. U tom uopštenju, definisane su dve vrste invarijanti: *vrednosne* i *totalne*. Dobijene invarijante su analizirane u indeksnom i u operatorskom zapisu.

Naredni deo disertacije bavi se primenom tenzorskog računa u linearnom programiranju, preciznije u problemu transporta. Definisanjem konačnodimenzione matricno vrednosne funkcije koja predstavlja matricu koštanja transportnog problema, kao dela linearnog programiranja, i predstavljanjem funkcije koštanja kao kompozicije dva Kronekerova delta simbola sa komponentama matrice koštanja i matrice robe, dobija se odnos između početnog i generalisanog transportnog problema, čime je omogućeno razmatranje slučaja vremenski zavisnih cena.

U petom delu disertacije predstavljena je istorija fazi skupova i fazi logike, različite relacije i operacije na prostorima fazi skupova, kao i neka uopštenja fazi skupova sa posebnim osvrtom na sferične fazi skupove. Definisanjem površinskih fazi skupova/brojeva i nekih njihovih algebarskih osobina, došlo se do poboljšanja i preciznijeg opisivanja neodređenih i višeznačnih odluka, što svakako dovodi do unapređenja pojma sferičnog fazi skupa i konkretnijeg i određenijeg definisanja ulaznih veličina AKO-ONDA pravila. Na taj način, kao i primenom različitih metoda fazifikacije i defazifikacije trougaonih i trapezoidnih fazi brojeva mogu se, skraćanjem potrebnog vremena za izvršavanje računskih operacija, poboljšati performanse fazi regulatora, a samim tim, i sistema automatskog upravljanja sa fazi regulatorima.

GLAVA 1

OSNOVNI POJMOVI

U ovom odeljku će najpre biti navedene definicije osnovnih pojmova od kojih počinju istraživanja u diferencijalnoj geometriji. Nakon toga biće navedena definicija Euklidskog prostora i prikazano kako se uopštenjem metrike Euklidskog prostora došlo do Rimanovih i generalisanih Rimanovih prostora. Na kraju, pomenuće se osnovne definicije u vezi sa prostorima simetrične i nesimetrične affine koneksije.

1.1 Površni u E^3

U ovom odeljku najpre se navode osnovni pojmovi korišćeni u [87].

Definicija 1.1. *Neka je dat podskup U Euklidske ravni E^2 . Ako svakoj tački (uređenom paru) $(u, v) \in U$, po nekom pravilu, odgovara vektor $\mathbf{a}(u, v)$ trodimenzionalnog vektorskog prostora \mathbb{V}^3 , onda je $\mathbf{a}(u, v)$ vektorska funkcija skalarnih argumenata u i v .*

Ako bi prostor \mathbb{V}^3 bio prikazan u pravouglom kordinatnom sistemu sa ortovima $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, onda bi vektor $\mathbf{a}(u, v)$ bio zapisan na sledeći način

$$\mathbf{a}(u, v) = (a_1(u, v), a_2(u, v), a_3(u, v)), \quad (1.1)$$

gde su $a_i(u, v)$ skalarne funkcije (projekcije) pomoću kojih možemo proučavati funkciju $\mathbf{a}(u, v)$.

GLAVA 1. OSNOVNI POJMOVI

Granična vrednost i neprekidnost vektorske funkcije $\mathbf{a}(u, v)$ se definišu analognu slučaju funkcije jedne promenljive.

Parcijalni izvod funkcije $\mathbf{a}(u, v)$ po jednom od argumenata se dobija kao izvod te funkcije pod pretpostavkom da je drugi argument konstanta, tj.

$$\mathbf{a}_u(u, v) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(u + \Delta u, v) - \mathbf{a}(u, v)}{\Delta u}, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{a}_v(u, v) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(u, v + \Delta v) - \mathbf{a}(u, v)}{\Delta v}. \quad (1.3)$$

Parcijalni diferencijali i totalni diferencijal vektorske funkcije $\mathbf{a}(u, v)$ su

$$d_u \mathbf{a} = \mathbf{a}_u du, \quad d_v \mathbf{a} = \mathbf{a}_v dv, \quad d\mathbf{a} = \mathbf{a}_u du + \mathbf{a}_v dv. \quad (1.4)$$

Definicija 1.2. *Parametrizovana površ klase C^k , $k \geq 1$, u E^3 je bijektivno preslikavanje*

$$\mathbf{r} : U \rightarrow E^3 : (u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \mathbf{r}(u, v). \quad (1.5)$$

Definicija 1.3. *Regularna parametrizovana površ klase C^k je parametrizovana površ klase C^k , ako važi $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$ za svako $(u, v) \in U$. Za $k = 1$, površ je glatka.*

Definicija 1.4. *Neka je $U \subset E^2$ otvoren skup. Slika*

$$\mathbf{r}(U) = \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \subset E^3, \quad (1.6)$$

pri preslikavanju (1.5) je **nosač parametrizovane površi \mathbf{r}** .

Definicija 1.5. *Jednačine*

$$u = u(t), \quad v = v(t) \quad (1.7)$$

zovu se **unutrašnje jednačine krive na površi $\mathbf{r}(u, v)$** .

Kriva na površi \mathbf{r} zadata unutrašnjim jednačinama (1.7) se označava sa $\mathbf{r}(t)$.

1.1. POVRŠI U E^3

Definicija 1.6. Ravan koja prolazi kroz tačku M površi $S : \mathbf{r}(u, v)$ i određena je vektorima r_u i r_v čija je početna tačka M naziva se **tangentna ravan** (tangentni prostor) površi S u tački M , i označava se sa $T_M S$.

Definicija 1.7. Prava koja stoji normalno na tangentnu ravan u nekoj tački površi, zove se **glavna normala površi** u posmatranoj tački.

Primedba 1.1. Vektor pravca glavne normale površi $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ određen je vektorskim proizvodom $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$.

Prva osnovna kvadratna forma površi $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ je

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad (1.8)$$

pri čemu je

$$E = r_u \cdot r_u, \quad F = r_u \cdot r_v = r_v \cdot r_u, \quad G = r_v \cdot r_v, \quad (1.9)$$

gde je sa " \cdot " označen skalarni proizvod indukovani jediničnom matricom.

Primedba 1.2. Prva osnovna kvadratna forma površi S nastaje kao rezultat pomeranja iz tačke $M(u, v)$ na površi duž krive c na toj površi u beskonačno blisku tačku $M'(u + du, v + dv) \in S$ i dobija se kvadriranjem totalnog diferencijala (1.4).

Da bi dalje izlaganje bilo konciznije, koristiće se sledeće oznake

$$u = x^1, \quad v = x^2, \quad g_{ij} = r_i \cdot r_j. \quad (1.10)$$

Na ovaj način određena je matrica tipa 2×2 čije su komponente $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$, $g_{22} = G$ i to su komponente kovarijantnog metričkog tenzora \hat{g} tipa $(0, 2)$.

Pod pretpostavkom da je $\det[g_{ij}] = EG - F^2 \neq 0$, definisan je kontravarijantni metrički tenzor čije su komponente određene jednačinom

$$[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1}. \quad (1.11)$$

Jasno je da važi jednakost

$$g^{i\alpha}g_{j\alpha} := \sum_{p=1}^2 g^{ip}g_{jp} = \delta_j^i. \quad (1.12)$$

U jednačini (1.12) prikazana je Ajnštajnova konvencija o sabiranju za dvodimenzionalni prostor pri čemu, kada su jedan gornji i jedan donji indeks identični u proizvodu, onda se podrazumeva sabiranje po tim indeksima počev od 1 do maksimalne vrednosti koju indeks može uzeti (u ovom slučaju, to je 2).

Kristofelovi simboli prve vrste površi $r = r(x^1, x^2)$, prikazani su u sledećoj jednačini

$$\Gamma_{i.jk} = \frac{1}{2}(g_{ji,k} - g_{jk,i} + g_{ik,j}), \quad (1.13)$$

gde je zarezom označeno parcijalno diferenciranje, tj. $g_{ij,k} = \partial g_{ij} / \partial x^k$.

Kristofelovi simboli druge vrste definisani su jednačinom

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{i\alpha}(g_{j\alpha,k} - g_{jk,\alpha} + g_{\alpha k,j}) = g^{i\alpha}\Gamma_{\alpha.jk}. \quad (1.14)$$

1.2 Tenzori

U ovom delu biće predstavljene definicije koje se odnose na posebne geometrijske strukture. Te definicije će biti dvojake. Biće predstavljene najopštije definicije, a onda će se, na osnovu opšteg, dati analogne definicije u posebnom slučaju.

Definicija 1.8. [88] *Tenzor $\overset{r}{\underset{s}{t}}$ tipa (r, s) nad vektorskim prostorom \mathbb{V} je linearno preslikavanje po svim argumentima*

$$\overset{r}{\underset{s}{t}} : \underbrace{\overset{*}{\mathbb{V}} \times \dots \times \overset{*}{\mathbb{V}}}_{r \text{ puta}} \times \underbrace{\mathbb{V} \times \dots \times \mathbb{V}}_{s \text{ puta}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.15)$$

odnosno

$$\overset{r}{\underset{s}{t}} : (\overset{*}{\mathbb{V}})^r \times (\mathbb{V})^s \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.16)$$

1.2. TENZORI

pri čemu

$$((\omega^1, \dots, \omega^r) \in \mathbb{V}^*) \wedge ((v_1, \dots, v_s) \in \mathbb{V}) \Rightarrow \underset{s}{t}^r(\omega^1, \dots, \omega^r; v_1, \dots, v_s) \in \mathbb{R}. \quad (1.17)$$

Neka je nad vektorskim prostorom \mathbb{V} dimenzije N , sa bazom (e_i) i dualnom bazom (e^i) prostora \mathbb{V}^* , zadat tenzor

$$\underset{s}{t}^r : (\mathbb{V}^*)^r \times (\mathbb{V})^s \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.18)$$

Za svaki sistem indeksa $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s$, koji nezavisno jedan od drugog uzimaju vrednosti $1, \dots, N$, određuje se broj

$$\underset{s}{t}^r(e^{i_1}, \dots, e^{i_r}; e_{j_1}, \dots, e_{j_s}) = t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \quad (1.19)$$

Definicija 1.9. [88] Brojevi $t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$, zadati jednačinom (1.19), nazivaju se **komponente** tenzora $\underset{s}{t}^r$ za datu bazu (e_i) vektorskog prostora \mathbb{V} .

Donji (kovarijantni) indeksi u komponenti $t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ odgovaraju baznim vektorima vektorskog prostora \mathbb{V} , dok gornji (kontravarijantni) indeksi odgovaraju baznim vektorima dualnog prostora \mathbb{V}^* .

Teorema 1.1. [88] Ako je $(e_i), (e^i)$ jedan, a $(e_{i'}), (e^{i'})$ drugi par baze i dualne baze vektorskog prostora \mathbb{V} i važe razlaganja

$$e_{i'} = A_{i'}^i e_i, \quad e^{i'} = A_i^{i'} e^i, \quad (1.20)$$

tada za komponente tenzora $\underset{s}{t}^r$ u jednom i drugom paru baza važi

$$t_{j'_1 \dots j'_s}^{i'_1 \dots i'_r} = A_{i'_1}^{i_1} \dots A_{i'_r}^{i_r} A_{j'_1}^{j_1} \dots A_{j'_s}^{j_s} t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}, \quad (1.21)$$

a matrice $[A_{i'}^i]$ i $[A_i^{i'}]$ su inverzne jedna drugoj. \square

Definicija 1.10. [88, 89] (**klasična definicija tenzora**) Tenzor tipa (r, s) (r puta kontravarijantan i s puta kovarijantan) nad vektorskim prostorom \mathbb{V} je sistem od N^{r+s} brojeva (komponentata) $t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ koji se pri smeni baza (1.20) transformišu prema (1.21).

Definicija 1.11. [88, 89] *Neka je $T_s^r(\mathbb{V}) = \{t\}$ skup svih tenzora tipa (r, s) nad vektorskim prostorom \mathbb{V} . Na tom skupu su definisane sledeće operacije:*

- **Sabiranje tenzora istog tipa:** Zbir $\overset{r}{t} + \overset{r}{\tau}$ tenzora $\overset{r}{t}$ i $\overset{r}{\tau}$ tipa (r, s) određen je jednakošću

$$\begin{aligned} \left(\overset{r}{t} + \overset{r}{\tau}\right)(\omega^1, \dots, \omega^r; v_1, \dots, v_s) &= \overset{r}{t}(\omega^1, \dots, \omega^r; v_1, \dots, v_s) \\ &+ \overset{r}{\tau}(\omega^1, \dots, \omega^r; v_1, \dots, v_s). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Sabiranje tenzora t i τ , tipa (r, s) , zadatih klasičnom definicijom se definiše jednačinom

$$(t + \tau)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + \tau_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \quad (1.23)$$

- **Množenje tenzora realnim skalarom:** Proizvod tenzora $\overset{r}{t}$ i realnog skalara α definisan je jednačinom

$$(\alpha t)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \alpha \cdot t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \quad (1.24)$$

Proizvod tenzora t , tipa (r, s) , zadatog klasičnom definicijom i realnog skalara α se definiše jednačinom

$$(\alpha t)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \alpha \cdot t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \quad (1.25)$$

Lako se proverava da je skup $T_s^r(\mathbb{V})$, snabdeven operacijama sabiranja tenzora istog tipa i množenja tenzora skalarom, realan vektorski prostor.

Značajna, za dalje istraživanje u ovoj oblasti, je afina koneksija data sledećom definicijom.

Definicija 1.12. [65, 88, 89, 110] *Afina koneksija ∇ na N -dimenzionalnoj mnogostrukosti $\mathcal{M}_N = \mathcal{M}_N(x^1, \dots, x^N)$ je preslikavanje koje svakom paru polja*

1.3. RIMANOV I GENERALISANI RIMANOV PROSTOR

(X, Y) na \mathcal{M}_N pridružuje polje $\nabla_X Y$ tako da važi

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z, \quad (1.26)$$

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y, \quad (1.27)$$

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \quad (1.28)$$

gde su f i g diferencijabilne funkcije definisane na mnogostrukosti \mathcal{M}_N .

1.3 Rimanov i generalisani Rimanov prostor

Dok su komponente metričkog tenzora u Euklidskom prostoru zadate standardnim skalarnim proizvodom parcijalnih izvoda površi po promenljivama koje je određuju, L. P. Ajzenhart je dao definiciju Rimanovog prostora [27]. U tom uopštenju, broj promenljivih koje određuju Rimanov prostor je Ajzenhart povećao na konačan broj $N \in \mathbb{N}$. U svojim radovima, tu definiciju Rimanovog prostora su koristili J. Mikeš sa svojim saradnicima [65], N. S. Sinjukov [110], i mnogi drugi autori.

Definicija 1.13. [27, 65, 110] N -dimenzionalna mnogostrukost $\mathcal{M}_N = \mathcal{M}_N(x^1, \dots, x^N)$ snabdevena simetričnim metričkim tenzorom \hat{g} tipa $(0, 2)$, čije su komponente g_{ij} , $g_{ij} = g_{ji}$, naziva se **Rimanov prostor** i obeležava se sa \mathbb{R}_N . Operatorski oblik simetričnog metričkog tenzora \hat{g} je $g(X, Y)$.

Pretpostavlja se da je matrica $[g_{ij}]$ regularna, tj. $\det [g_{ij}] \neq 0$.

Kontravarijantni metrički tenzor Rimanovog prostora \mathbb{R}_N je određen jednačinom

$$[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1}. \quad (1.29)$$

Simetričnim metričkim tenzorom \hat{g} je jedinstveno određena afina koneksija $\overset{0}{\nabla}^g, \overset{0}{\nabla}_Y^g X$, čiji su koeficijenti Kristofelovi simboli druge vrste

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{i\alpha} (g_{j\alpha,k} - g_{jk,\alpha} + g_{\alpha k,j}). \quad (1.30)$$

Zakon transformacije Kristofelovih simbola Γ_{jk}^i pri promeni koordinatnog sis-

tema Ox u sistem $O'x'$ je

$$\Gamma_{j'k'}^{i'} = x_{\alpha}^{i'} x_{j'}^{\beta} x_{k'}^{\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + x_{\alpha}^{i'} x_{j'k'}^{\alpha}, \quad (1.31)$$

gde je $x_{\alpha}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\alpha}}$, $x_{j'}^{\beta} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{j'}}$, $x_{j'k'}^{\alpha} = \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}$.

Na osnovu zakona transformacije (1.31) zaključujemo da Kristofelovi simboli druge vrste nisu tenzori, pa se zato nazivaju **parametri**.

Parcijalni izvod tenzora tipa (r, s) , pri čemu je $r^2 + s^2 \neq 0$, nije tenzor. Stoga je uvedeno kovarijantno diferenciranje tenzora na osnovu afine koneksije $\overset{0}{\nabla}^g$ Rimanovog prostora određene Kristofelovim simbolima Γ_{jk}^i .

Definicija 1.14. [65, 110] *Neka je \hat{a} tenzor tipa (r, s) čije su komponente $a_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$. Komponente kovarijantnog izvoda tenzora \hat{a} , na osnovu afine koneksije $\overset{0}{\nabla}^g$ - u pravcu vektora x^k - su zadate sledećom jednačinom*

$$a_{j_1 \dots j_s |^g k}^{i_1 \dots i_r} = a_{j_1 \dots j_s, k}^{i_1 \dots i_r} + \sum_{u=1}^N \Gamma_{\alpha k}^{i_u} a_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_{u-1} \alpha i_{u+1} \dots i_r} - \sum_{v=1}^N \Gamma_{j_v k}^{\alpha} a_{j_1 \dots j_{v-1} \alpha j_{v+1} \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}, \quad (1.32)$$

što su komponente tenzora tipa $(r, s + 1)$.

Zanimljivo je razliku $a_{j_1 \dots j_s |^g m |^g n}^{i_1 \dots i_r} - a_{j_1 \dots j_r |^g n |^g m}^{i_1 \dots i_r}$ rastaviti na činioce. Nakon neophodnog izračunavanja, dobija se Ričijev identitet

$$\begin{aligned} a_{j_1 \dots j_s |^g m |^g n}^{i_1 \dots i_r} - a_{j_1 \dots j_r |^g n |^g m}^{i_1 \dots i_r} &= \sum_{u=1}^N R_{\alpha mn}^{g i_u} a_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_{u-1} \alpha i_{u+1} \dots i_r} \\ &\quad - \sum_{v=1}^N R_{j_v mn}^{g \alpha} a_{j_1 \dots j_{v-1} \alpha j_{v+1} \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

gde su

$$R_{jmn}^{g i} = \Gamma_{jm, n}^i - \Gamma_{jn, m}^i + \Gamma_{jm}^{\alpha} \Gamma_{\alpha n}^i - \Gamma_{jn}^{\alpha} \Gamma_{\alpha m}^i, \quad (1.34)$$

komponente tenzora krivine prostora \mathbb{R}_N .

1.3. RIMANOV I GENERALISANI RIMANOV PROSTOR

Komponente Ričijejevog tenzora i skalarne krivine prostora \mathbb{R}_N su, redom,

$$R^g_{ij} = R^{g\alpha}_{ij\alpha} = \Gamma_{ij,\alpha}^\alpha - \Gamma_{i\alpha,j}^\alpha + \Gamma_{ij}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha - \Gamma_{i\beta}^\beta \Gamma_{j\alpha}^\alpha, \quad (1.35)$$

$$R^g = g^{\gamma\delta} R^g_{\gamma\delta} = g^{\gamma\delta} (\Gamma_{\gamma\delta,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\gamma\alpha,\delta}^\alpha + \Gamma_{\gamma\delta}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha - \Gamma_{\gamma\beta}^\beta \Gamma_{\delta\alpha}^\alpha). \quad (1.36)$$

U operatorskom obliku, a na osnovu afine koneksije $\overset{0}{\nabla}^g$, tenzor krivine prostora \mathbb{R}_N zadat je sledećom jednačinom [65, 88]:

$$R^g(X, Y)Z = \overset{0}{\nabla}_X \overset{0}{\nabla}_Y Z - \overset{0}{\nabla}_Y \overset{0}{\nabla}_X Z + \overset{0}{\nabla}_{[X,Y]} Z. \quad (1.37)$$

U radu [26], L. P. Ajzenhart je generalizovao koncept prethodno predstavljenih Rimanovih prostora.

Definicija 1.15. [26, 89] *N -dimenzionalna mnogostrukost $\mathcal{M}_N = \mathcal{M}_N(x^1, \dots, x^N)$ snabdevena nesimetričnim metričkim tenzorom \hat{g} , čije su komponente g_{ij} , gde je $g_{ij} \neq g_{ji}$ za bar jedan par indeksa $(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$, naziva se **generalisani Rimanov prostor** $\mathbb{G}\mathbb{R}_N$.*

Operatorski oblik nesimetričnog metričkog tenzora \hat{g} je $g(X, Y)$. Simetrični i antisimetrični deo metričkog tenzora \hat{g} su

$$\underline{\hat{g}} = \frac{1}{2}(\hat{g} + \hat{g}^T) \quad i \quad \hat{g}_{\check{v}} = \frac{1}{2}(\hat{g} - \hat{g}^T), \quad (1.38)$$

dok su odgovarajuće komponente simetričnog i antisimetričnog dela metričkog tenzora \hat{g}

$$g_{\underline{ij}} = \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji}) \quad i \quad g_{\check{v}} = \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji}). \quad (1.39)$$

Generalisani Kristofelovi simboli jedinstveno određuju nesimetričnu afinu koneksiju $\nabla^g, \nabla_Y^g X$, čiji su koeficijenti generalisani Kristofelovi simboli druge vrste [89]

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{i\alpha} (g_{j\alpha,k} - g_{jk,\alpha} + g_{\alpha k,j}). \quad (1.40)$$

Kako postoji par $(j, k) \in \{1, \dots, N\}$ za koji je $\Gamma_{jk}^i \neq \Gamma_{kj}^i$, simetrični i antisimetrični delovi generalisanog Kristofelovog simbola su definisani na sledeći

način [89]

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}(\Gamma_{jk}^i + \Gamma_{kj}^i) = \frac{1}{2}g^{i\alpha}(g_{j\alpha,k} - g_{jk,\alpha} + g_{\alpha k,j}), \quad (1.41)$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}(\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i) = \frac{1}{2}g^{i\alpha}(g_{j\alpha,k} - g_{jk,\alpha} + g_{\alpha k,j}). \quad (1.42)$$

Iz jednačine (1.42) direktno sledi da je

$$0 = \Gamma_{i\alpha}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{i\alpha,\beta} - g_{i\beta,\alpha} + g_{\alpha\beta,i}) = -\Gamma_{\alpha i}^\alpha. \quad (1.43)$$

Kako je zadovoljena jednakost

$$\Gamma_{j'k'}^{i'} = x_\alpha^{i'} x_{j'}^\beta x_{k'}^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha, \quad (1.44)$$

antisimetrični deo Γ_{jk}^i generalisanog Kristofelovog simbola su komponente tenzora tipa (1, 2). Tenzor \hat{T}^g tipa (1, 2) čije su komponente $T_{jk}^i = 2\Gamma_{jk}^i$ se naziva **tenzor torzije** prostora $\mathbb{G}\mathbb{R}_N$.

S. M. Minčić je, po ugledu na Ajnštajnova razmatranja, najpre uveo a potom i proučavao četiri tipa kovarijantnog diferenciranja generisanih na osnovu nesimetrične afine koneksije [76, 80, 84]. Ta četiri tipa kovarijantnog diferenciranja tenzora \hat{a} tipa (1, 1), u odnosu na afinu koneksiju prostora $\mathbb{G}\mathbb{R}_N$, zadata su na sledeći način

$$a_{j|gk}^i = a_{j,k}^i + \Gamma_{\alpha k}^i a_j^\alpha - \Gamma_{jk}^\alpha a_\alpha^i, \quad (1.45)$$

$$a_{j|gk}^i = a_{j,k}^i + \Gamma_{k\alpha}^i a_j^\alpha - \Gamma_{kj}^\alpha a_\alpha^i, \quad (1.46)$$

$$a_{j|gk}^i = a_{j,k}^i + \Gamma_{\alpha k}^i a_j^\alpha - \Gamma_{kj}^\alpha a_\alpha^i, \quad (1.47)$$

$$a_{j|gk}^i = a_{j,k}^i + \Gamma_{k\alpha}^i a_j^\alpha - \Gamma_{jk}^\alpha a_\alpha^i. \quad (1.48)$$

Familija tenzora krivine, dobijena na osnovu razlika $a_{j|p|q}^i - a_{j|r|s}^i$ je [76, 80, 84, 138]

$$K_{jmn}^{gi} = R_{jmn}^{gi} + u\Gamma_{jm|gn}^i + u'\Gamma_{jn|gm}^i + v\Gamma_{jm}^\alpha \Gamma_{\alpha n}^i + v'\Gamma_{jn}^\alpha \Gamma_{\alpha m}^i + w\Gamma_{mn}^\alpha \Gamma_{\alpha j}^i, \quad (1.49)$$

1.4. PROSTORI SIMETRIČNE I NESIMETRIČNE AFINE KONEKSIJE

gde su u, u', v, v', w skalarne invarijante.

Familije Ričijevih tenzora i skalarnih krivina prostora $\mathbb{G}\mathbb{R}_N$ su

$$K^g_{ij} = K^{g\alpha}_{ij\alpha} = R^g_{ij} + v\Gamma_{ij|g\alpha}^\alpha - (v' + w)\Gamma_{ij}^\alpha\Gamma_{j\alpha}^\beta, \quad (1.50)$$

$$K^g = g^{\gamma\delta}K^g_{\gamma\delta} = R^g - (v' + w)g^{\gamma\delta}\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha\Gamma_{\delta\alpha}^\beta. \quad (1.51)$$

Simetrična matrica jedinstveno određuje skalarni proizvod [50]. Matrice $[g_{ij}]$ i $[g^{ij}]$, kao simetrične, određuju skalarne proizvode.

Ukoliko je $[dx] = [dx^1 \quad dx^N]^T$, tada je

$$[ds^2] = [dx]^T [g_{ij}] [dx], \quad (1.52)$$

matrično zapisana prva kvadratna forma $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ površi koja odgovara Rimanovom prostoru \mathbb{R}_N .

Naglasimo i to da, ako su $[u^i] = [u^1 \quad u^N]^T$ i $[v_j] = [v_1 \quad v_N]$ matrično prikazani kontravarijantni vektor u^i i kovarijantni vektor v_j , onda se Ajnštajnova konvencija o sabiranju primenjena na $u^\alpha v_\alpha$ svodi na

$$[u^\alpha v_\alpha] = [u^i] I_N [v_j], \quad (1.53)$$

gde je I_N jedinična matrica dimenzije $N \times N$.

1.4 Prostori simetrične i nesimetrične afine koneksije

Naredno uopštenje koncepta afine koneksije jeste uvođenje simetrične afine koneksije i njenih koeficijenata nezavisno od metričkog tenzora. Time su se bavili, i još uvek se bave, mnogi autori. Neki od njih su J. Mikeš sa svojom istraživačkom grupom [65], N. S. Sinjukov [110] i još mnogi drugi.

Definicija 1.16. [65,110] N -dimenziona mnogostrukost $\mathcal{M}_N = \mathcal{M}_N(x^1, \dots, x^N)$ snabdevena afinom koneksijom $\overset{0}{\nabla}$, takvom da je $\overset{0}{\nabla}_X Y - \overset{0}{\nabla}_Y X = [X, Y]$ - gde je $[X, Y] = XY - YX$ komutator - naziva se prostor simetrične afine koneksije i

GLAVA 1. OSNOVNI POJMOVI

obeležava se sa \mathbb{A}_N .

Koeficijenti afine koneksije $\overset{0}{\nabla}$ su L_{jk}^i . Ti koeficijenti zadovoljavaju jednačinu

$$L_{jk}^i = L_{kj}^i. \quad (1.54)$$

Zakon transformacije koeficijenata afine koneksije L_{jk}^i pri promeni koordinatnog sistema Ox u sistem $O'x'$ je

$$L_{j'k'}^i = x_\alpha^{i'} x_{j'}^\beta x_{k'}^\gamma L_{\beta\gamma}^\alpha + x_\alpha^{i'} x_{j'k'}^\alpha, \quad (1.55)$$

gde je, kao i u slučaju transformacije Kristofelovih simbola, $x_\alpha^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}$,
 $x_{j'}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}}$, $x_{j'k'}^\alpha = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}$.

Analogno slučaju Rimanovog prostora, i iz istog razloga, kovarijantni izvod na osnovu afine koneksije $\overset{0}{\nabla}$ je predstavljen u sledećoj definiciji.

Definicija 1.17. [65, 110] *Neka je \hat{a} tenzor tipa (r, s) čije su komponente $a_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$. Komponente kovarijantnog izvoda tenzora \hat{a} , na osnovu afine koneksije $\overset{0}{\nabla}$ - u pravcu vektora x^k - su zadate sledećom jednačinom*

$$a_{j_1 \dots j_s | k}^{i_1 \dots i_r} = a_{j_1 \dots j_s, k}^{i_1 \dots i_r} + \sum_{u=1}^N L_{\alpha k}^{i_u} a_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_{u-1} \alpha i_{u+1} \dots i_r} - \sum_{v=1}^N L_{j_v k}^\alpha a_{j_1 \dots j_{v-1} \alpha j_{v+1} \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}, \quad (1.56)$$

što su komponente tenzora tipa $(r, s + 1)$.

Rastavljanjem razlike $a_{j_1 \dots j_s | m | n}^{i_1 \dots i_r} - a_{j_1 \dots j_s | n | m}^{i_1 \dots i_r}$ na činioce, otkriven je tenzor krivine prostora \mathbb{A}_N čije su komponente

$$R_{jmn}^i = L_{jm, n}^i - L_{jn, m}^i + L_{jm}^\alpha L_{\alpha n}^i - L_{jn}^\alpha L_{\alpha m}^i. \quad (1.57)$$

Komponente Ričijevog tenzora \mathbb{A}_N su

$$R_{ij} = R_{ij\alpha}^\alpha = L_{ij, \alpha}^\alpha - L_{i\alpha, j}^\alpha + L_{ij}^\beta L_{\beta\alpha}^\alpha - L_{i\alpha}^\beta L_{j\beta}^\alpha. \quad (1.58)$$

1.4. PROSTORI SIMETRIČNE I NESIMETRIČNE AFINE KONEKSIJE

U operatorskom obliku, a na osnovu afine koneksije $\overset{0}{\nabla}$, tenzor krivine prostora \mathbb{A}_N je zadat sledećom jednačinom [65, 87]:

$$R(X, Y)Z = \overset{0}{\nabla}_X \overset{0}{\nabla}_Y Z - \overset{0}{\nabla}_Y \overset{0}{\nabla}_X Z + \overset{0}{\nabla}_{[X, Y]} Z. \quad (1.59)$$

Uopštenje prostora \mathbb{A}_N dato je u sledećoj definiciji.

Definicija 1.18. [89] *N-dimenzionalna mnogostrukost $\mathcal{M}_N = \mathcal{M}_N(x^1, \dots, x^N)$ snabdevena afinom koneksijom ∇ , takvom da je $\nabla_X Y - \nabla_Y X \neq [X, Y]$, naziva se prostor nesimetrične afine koneksije \mathbb{GA}_N .*

Koeficijenti afine koneksije ∇ su L_{jk}^i . S obzirom na nesimetričnost afine koneksije ∇ , postoji bar jedan par indeksa (j, k) tako da je $L_{jk}^i \neq L_{kj}^i$. Zbog toga, simetrični i antisimetrični delovi koeficijenata L_{jk}^i su definisani na sledeći način [89]

$$\underline{L}_{jk}^i = \frac{1}{2}(L_{jk}^i + L_{kj}^i) \quad \text{i} \quad \underline{L}_{jk}^i = \frac{1}{2}(L_{jk}^i - L_{kj}^i). \quad (1.60)$$

Zakoni transformacije geometrijskih struktura $L_{jk}^i, \underline{L}_{jk}^i, \underline{L}_{jk}^i$ pri prelasku sa koordinatnog sistema Ox na $O'x'$ su

$$L_{j'k'}^{i'} = x_{\alpha}^{i'} x_j^{\beta} x_{k'}^{\gamma} L_{\beta\gamma}^{\alpha} + x_{\alpha}^{i'} x_{\beta'\gamma'}^{\alpha}, \quad (1.61)$$

$$\underline{L}_{j'k'}^{i'} = x_{\alpha}^{i'} x_j^{\beta} x_{k'}^{\gamma} \underline{L}_{\beta\gamma}^{\alpha} + x_{\alpha}^{i'} x_{j'k'}^{\alpha}, \quad (1.62)$$

$$\underline{L}_{j'k'}^{i'} = x_{\alpha}^{i'} x_j^{\beta} x_{k'}^{\gamma} \underline{L}_{\beta\gamma}^{\alpha}. \quad (1.63)$$

Prostor \mathbb{A}_N određen afinom koneksijom $\overset{0}{\nabla}$, čiji su koeficijenti \underline{L}_{jk}^i - zadati jednačinom (1.60) - je pridružen prostor prostora \mathbb{GA}_N .

Antisimetrični delovi \underline{L}_{jk}^i koeficijenata L_{jk}^i afine koneksije ∇ su, na osnovu jednačine (1.63), komponente tenzora koji je jednak polovini tenzora torzije prostora \mathbb{GA}_N .

Četiri tipa kovarijantnog diferenciranja tenzora \hat{a} tipa $(1, 1)$ na osnovu afine

koneksije prostora $\mathbb{G}\mathbb{A}_N$, S. M. Minčić je uveo na sledeći način [76, 80, 84, 89]

$$a_{j|k}^i = a_{j,k}^i + L_{\alpha k}^i a_j^\alpha - L_{jk}^\alpha a_\alpha^i, \quad (1.64)$$

$$a_{j|k}^i = a_{j,k}^i + L_{k\alpha}^i a_j^\alpha - L_{kj}^\alpha a_\alpha^i, \quad (1.65)$$

$$a_{j|k}^i = a_{j,k}^i + L_{\alpha k}^i a_j^\alpha - L_{kj}^\alpha a_\alpha^i, \quad (1.66)$$

$$a_{j|k}^i = a_{j,k}^i + L_{k\alpha}^i a_j^\alpha - L_{jk}^\alpha a_\alpha^i. \quad (1.67)$$

Na osnovu tako definisana četiri tipa kovarijantnog diferenciranja, i uređujući razlike $a_{j|m|n}^i - a_{j|n|m}^i$, $p, q, r, s \in \{1, 2, 3, 4\}$, S. M. Minčić je dobio šest tenzora krivine i petnaest pseudotenzora krivine prostora $\mathbb{G}\mathbb{A}_N$. N. O. Vesić je [138], analizirajući postupak dobijanja tenzora i pseudotenzora krivine prostora $\mathbb{G}\mathbb{A}_N$, došao do zaključka da pseudotenzori krivine ne igraju ulogu komponenti u razlici $a_{j|m|n}^i - a_{j|n|m}^i$. Zbog toga, pseudotenzori krivine mogu biti posmatrani kao specijalni geometrijski objekti, ali ne i kao objekti koji imaju težinu zakrivljenja prostora.

Familija tenzora krivine prostora $\mathbb{G}\mathbb{A}_N$ je

$$K_{jmn}^i = R_{jmn}^i + uL_{j|n}^i + u'L_{j|n}^i + vL_{jm}^\alpha L_{\alpha n}^i + v'L_{jn}^\alpha L_{\alpha m}^i + wL_{mn}^\alpha L_{\alpha j}^i, \quad (1.68)$$

gde su u, u', v, v', w skalarne invarijante. Familija Ričijevih tenzora prostora $\mathbb{G}\mathbb{A}_N$ je

$$K_{ij} = K_{ij\alpha}^\alpha = R_{ij} + uL_{ij|\alpha}^\alpha + u'L_{i\alpha|j}^\alpha + vL_{ij}^\alpha L_{\alpha\beta}^\beta - (v' + w)L_{i\beta}^\alpha L_{j\alpha}^\beta. \quad (1.69)$$

1.5 Preslikavanja prostora afine koneksije

Na jednoj mnogostrukosti \mathcal{M}_N , moguće je definisati neprebrojivo beskonačno mnogo afinih koneksija u istom koordinatnom sistemu. Razlike koeficijenata tih afinih koneksija su tenzori deformacije.

U diferencijalnoj geometriji, zanimljivo je odrediti zakone transformacije koeficijenata afine koneksije, tenzora krivine, Ričijevih tenzora i, eventualno, skalarne

1.5. PRESLIKAVANJA PROSTORA AFINE KONEKSIJE

krivine pri promeni afine koneksije. Posledično, određuju se geometrijski objekti koji ostaju nepromenjeni pri promeni afine koneksije.

Definicija 1.19. Transformacija afine koneksije ∇ u afinu koneksiju $\bar{\nabla}$, definisanim na mnogostrukosti $\mathcal{M}_N = \mathcal{M}_N(x^1, \dots, x^N)$, naziva se preslikavanje prostora (\mathcal{M}_N, ∇) (na prostor $(\mathcal{M}_N, \bar{\nabla})$).

Posebnu pažnju privlače geodezijska preslikavanja i njihove invarijante. Kriva $\ell = \ell(t) = (\ell^1(t), \dots, \ell^N(t))$, čiji tangentni vektor $\lambda = \frac{d\ell}{dt}$ zadovoljava sistem diferencijalnih jednačina [65, 110]

$$\frac{d\lambda^i}{dt} + L_{\alpha\beta}^i \lambda^\alpha \lambda^\beta = \rho \lambda^i, \quad (1.70)$$

gde je ρ skalarna funkcija, naziva se *geodezijska linija* prostora \mathbb{A}_N .

Transformacija $f : \mathbb{A}_N \rightarrow \bar{\mathbb{A}}_N$ koja svaku geodezijsku liniju prostora \mathbb{A}_N transformiše u geodezijsku liniju prostora $\bar{\mathbb{A}}_N$ naziva se *geodezijsko preslikavanje* [65, 110] prostora \mathbb{A}_N .

Veličine koje ostaju nepromenjene pri geodezijskim preslikavanjima prostora \mathbb{A}_N su Tomasov projektivni parametar i Vejlov projektivni tenzor, i zadate su sledećim jednačinama [65, 110]

$$T_{\underline{jk}}^i = L_{\underline{jk}}^i - \frac{1}{N+1} (L_{\underline{k\alpha}}^\alpha \delta_j^i + L_{\underline{j\alpha}}^\alpha \delta_k^i), \quad (1.71)$$

$$W_{jmn}^i = R_{jmn}^i + \frac{1}{N+1} \delta_j^i R_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1} \delta_{[m}^i R_{jn]} + \frac{1}{N^2-1} \delta_{[m}^i R_{n]j}. \quad (1.72)$$

Kako je u prostoru \mathbb{R}_N , $R^g_{ij} = R^g_{ji}$, Tomasov projektivni parametar i Vejlov projektivni tenzor Rimanovog prostora jednaki su

$$T_{\underline{jk}}^{gi} = \Gamma_{\underline{jk}}^i - \frac{1}{N+1} (\Gamma_{\underline{k\alpha}}^\alpha \delta_j^i + \Gamma_{\underline{j\alpha}}^\alpha \delta_k^i), \quad (1.73)$$

$$W_{jmn}^{gi} = R_{jmn}^{gi} + \frac{1}{N-1} (\delta_m^i R_{jn}^g - \delta_n^i R_{jm}^g), \quad (1.74)$$

i te veličine su invarijante geodezijskog preslikavanja $f : \mathbb{R}_N \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_N$.

GLAVA 2

KOVARIJANTNI IZVODI I RIČIJEVI IDENTITETI

2.1 Komutacione formule pri nesimetričnoj afinoj koneksiji

Ričijevi identiteti [65, 76, 78, 79, 81, 83, 86, 99, 101, 102, 110, 128, 152] su izuzetno važni kao polazna osnova za istraživanja u oblasti diferencijalne geometrije i različitih primena.

Na osnovu simetrične afine koneksije, dobijen je jedan tenzor krivine. Familija tenzora krivine je dobijena prilikom razmatranja Ričijevih identiteta na osnovu nesimetrične afine koneksije [76, 78, 79, 81, 83, 86, 99, 101, 102, 128, 152].

2.1.1 Motivacija

Jedan od Ričijevih identiteta koji su motivisali ovo istraživanje je [27, 76, 78, 79, 81, 83, 86, 99, 101, 102, 128, 152]

$$a_{1\ 2}^i|_m|_n - a_{1\ 2}^i|_n|_m = a_{1\ 1}^\alpha A_{\alpha mn}^i - a_{2\ 2}^\alpha A_{jmn}^\alpha + 4a_{j\ <mn>}^i + 4a_{j\ \leq mn \geq}^i + 2L_{mn}^\alpha a_{j\ 1}^i|_\alpha, \quad (2.1)$$

gde je

2.1. KOMUTACIONE FORMULE PRI NESIMETRIČNOJ...

$$\begin{aligned} A_{1jmn}^i &= R_{jmn}^i + L_{\underline{j}m|n}^i - L_{\underline{j}n|m}^i - L_{\underline{j}m}^\alpha L_{\underline{\alpha}n}^i + L_{\underline{j}n}^\alpha L_{\underline{\alpha}m}^i \\ &\quad - 2L_{\underline{j}m}^\alpha L_{\underline{\alpha}n}^i + 2L_{\underline{j}n}^\alpha L_{\underline{\alpha}m}^i, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} A_{2jmn}^i &= R_{jmn}^i + L_{\underline{j}m|n}^i - L_{\underline{j}n|m}^i - L_{\underline{j}m}^\alpha L_{\underline{\alpha}n}^i + L_{\underline{j}n}^\alpha L_{\underline{\alpha}m}^i \\ &\quad - 2L_{\underline{j}m}^\alpha L_{\underline{\alpha}n}^i + 2L_{\underline{j}n}^\alpha L_{\underline{\alpha}m}^i, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$a_{j<\underline{m}n>}^i = \frac{1}{2}L_{\underline{\alpha}m}^i a_{j,n}^\alpha - \frac{1}{2}L_{\underline{\alpha}n}^i a_{j,m}^\alpha - \frac{1}{2}L_{\underline{j}m}^\alpha a_{\alpha,n}^i + \frac{1}{2}L_{\underline{j}n}^\alpha a_{\alpha,m}^i, \quad (2.4)$$

$$a_{j\leq\underline{m}n\geq}^i = \frac{1}{2}a_\beta^\alpha (L_{m\beta}^i L_{jn}^\alpha - L_{n\beta}^i L_{jm}^\alpha - L_{\alpha m}^i L_{nj}^\beta + L_{\alpha n}^i L_{mj}^\beta). \quad (2.5)$$

Geometrijski objekti A_{1jmn}^i i A_{2jmn}^i su komponente pseudotenzora krivine \hat{A}_1 i \hat{A}_2 tipa (1, 3). Ti objekti su predstavljeni kao komponente krivine prostora $\mathbb{G}\mathbb{A}_N$ ravnopravne sa tenzorima krivine tog prostora.

Razlika $a_{\underline{j}m|n}^i - a_{\underline{j}n|m}^i$, $p, q, r, s \in \{1, 2, 3, 4\}$ je razlika dva tenzora. Postavilo se pitanje da li je svaku od tih razlika moguće zapisati tako da se ona rastavlja na zbir sabiraka u kojima su i kompozicije takođe tenzori. Time bi, između ostalog, i jednakost (2.1) bila drastično pojednostavljena i promenjena.

U radu [138], i na osnovu $L_{jk}^i = L_{\underline{j}k}^i + L_{\underline{j}k}^i$, jednačina (2.1) je pojednostavljena do

$$\begin{aligned} a_{\underline{1}j|\underline{2}m|\underline{2}n}^i - a_{\underline{1}j|\underline{2}n|\underline{2}m}^i &= 2L_{\underline{\alpha}m}^i a_{j|n}^\alpha - 2L_{\underline{\alpha}n}^i a_{j|m}^\alpha \\ &\quad - 2L_{\underline{j}m}^\alpha a_{\alpha|n}^i + 2L_{\underline{j}n}^\alpha a_{\alpha|m}^i + 2L_{\underline{m}n}^\alpha a_{j|\alpha}^i \\ &\quad + a_j^\alpha (R_{\alpha mn}^i + L_{\underline{\alpha}m|n}^i - L_{\underline{\alpha}n|m}^i \\ &\quad \quad - L_{\underline{\alpha}m}^\beta L_{\beta n}^i + L_{\underline{\alpha}n}^\beta L_{\beta m}^i - 2L_{\underline{m}n}^\beta L_{\beta\alpha}^i) \\ &\quad - a_\alpha^i (R_{jmn}^\alpha + L_{\underline{j}m|n}^\alpha - L_{\underline{j}n|m}^\alpha \\ &\quad \quad - L_{\underline{j}m}^\beta L_{\beta n}^\alpha + L_{\underline{j}n}^\beta L_{\beta m}^\alpha - 2L_{\underline{m}n}^\beta L_{\beta j}^\alpha). \end{aligned} \quad (2.6)$$

GLAVA 2. KOVARIJANTNI IZVODI I RIČIJEVI IDENTITETI

Štaviše, u [138] je dobijena familija dvostrukih kovarijantnih izvoda

$$\begin{aligned}
 a_{\underset{v}{j}|\underset{w}{m}|n}^i &= a_{j|m|n}^i + c_v L_{\alpha\underset{v}{m}}^i a_{j|n}^\alpha + c_w L_{\alpha\underset{w}{n}}^i a_{j|m}^\alpha \\
 &+ d_v L_{j\underset{v}{m}}^\alpha a_{\alpha|n}^i + d_w L_{j\underset{w}{n}}^\alpha a_{\alpha|m}^i + d_w L_{m\underset{w}{n}}^\alpha a_{j|\alpha}^i \\
 &+ a_j^\alpha (c_v L_{\alpha\underset{v}{m}|n}^i + c_v c_w L_{\alpha\underset{v}{m}}^\beta L_{\beta\underset{v}{n}}^i + c_v (c_w + d_w) L_{\alpha\underset{v}{n}}^\beta L_{\beta\underset{v}{m}}^i - c_v d_w L_{m\underset{v}{n}}^\beta L_{\beta\alpha}^i) \\
 &- a_\alpha^i (-d_v L_{j\underset{v}{m}|n}^\alpha - d_v (c_w + d_w) L_{j\underset{v}{m}}^\beta L_{\beta\underset{v}{n}}^\alpha - d_v d_w L_{j\underset{v}{n}}^\beta L_{\beta\underset{v}{m}}^\alpha + d_v d_w L_{m\underset{v}{n}}^\beta L_{\beta j}^\alpha) \\
 &+ a_\beta^\alpha (c_w d_v L_{j\underset{v}{m}}^\beta L_{\alpha\underset{v}{n}}^i + c_v d_w L_{j\underset{v}{n}}^\beta L_{\alpha\underset{v}{m}}^i),
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

gde je $v, w \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Ovaj rezultat sugeriše da Ričijev identitet (2.1) jeste tačan, ali da ga treba dodatno transformisati. Naime, sabirci koji se anuliraju u razlici $a_{\underset{12}{j}|\underset{12}{n}|m}^i - a_{\underset{1}{n}|\underset{2}{m}}^i$ nisu skraćeni pa su uzrokovali postojanje pseudotenzora krivine.

Nakon uprošćavanja izraza $a_{\underset{v_1}{j}|\underset{w_1}{m}|n}^i - a_{\underset{v_2}{j}|\underset{w_2}{m}|n}^i$, dokazana je naredna Teorema.

Teorema 2.1 (Prva Teorema o Ričijevim Identitetima). [138] *Familija Ričijevih identiteta izvedena na osnovu nesimetrične afine koneksije ∇ je*

$$\begin{aligned}
 a_{\underset{v_1}{j}|\underset{w_1}{m}|n}^i - a_{\underset{v_2}{j}|\underset{w_2}{m}|n}^i &= (c_{v_1} - c_{w_2}) L_{\alpha\underset{v_1}{m}}^i a_{j|n}^\alpha + (c_{w_1} - c_{v_2}) L_{\alpha\underset{v_2}{n}}^i a_{j|m}^\alpha \\
 &+ (d_{v_1} - d_{w_2}) L_{j\underset{v_1}{m}}^\alpha a_{\alpha|n}^i + (d_{w_1} - d_{v_2}) L_{j\underset{v_2}{n}}^\alpha a_{\alpha|m}^i \\
 &+ (d_{w_1} + d_{w_2}) L_{m\underset{v_1}{n}}^\alpha a_{j|\alpha}^i \\
 &+ a_j^\alpha X_{\alpha mn}^i - a_\alpha^i Y_{jmn}^\alpha + a_\beta^\alpha Z_{jmn\alpha}^\beta
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

gde je

$$\begin{aligned}
 X_{\alpha mn}^i &= R_{\alpha mn}^i + c_{v_1} L_{\alpha\underset{v_1}{m}|n}^i - c_{v_2} L_{\alpha\underset{v_2}{n}|m}^i \\
 &+ [c_{v_1} c_{w_1} - c_{v_2} (c_{w_2} + d_{w_2})] L_{\alpha\underset{v_1}{m}}^\beta L_{\beta\underset{v_2}{n}}^i \\
 &+ [c_{v_1} (c_{w_1} + d_{w_1}) - c_{v_2} c_{w_2}] L_{\alpha\underset{v_1}{n}}^\beta L_{\beta\underset{v_2}{m}}^i \\
 &- (c_{v_1} d_{w_1} + c_{v_2} d_{w_2}) L_{m\underset{v_1}{n}}^\beta L_{\beta\alpha}^i
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

2.1. KOMUTACIONE FORMULE PRI NESIMETRIČNOJ...

$$\begin{aligned}
Y_{jmn}^\alpha &= R_{jmn}^\alpha - d_{v_1} L_{j\underset{\vee}{m}|n}^\alpha + d_{v_2} L_{j\underset{\vee}{n}|m}^\alpha \\
&\quad - [d_{v_1}(c_{w_1} + d_{w_1}) - d_{v_2}d_{w_2}] L_{j\underset{\vee}{m}}^\beta L_{\underset{\vee}{\beta}n}^\alpha \\
&\quad - [d_{v_1}d_{w_1} - d_{v_2}(c_{w_2} + d_{w_2})] L_{j\underset{\vee}{n}}^\beta L_{\underset{\vee}{\beta}m}^\alpha \\
&\quad + (d_{v_1}d_{w_1} + d_{v_2}d_{w_2}) L_{mn}^\beta L_{\underset{\vee}{\beta}j}^\alpha
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
Z_{jmn\alpha}^\beta &= a_\beta^\alpha \{ (c_{w_1}d_{v_1} - c_{w_2}d_{w_2}) L_{j\underset{\vee}{m}}^\beta L_{\alpha n}^i \\
&\quad + (c_{v_1}d_{w_1} - c_{w_2}d_{v_2}) L_{j\underset{\vee}{n}}^\beta L_{\alpha m}^i,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

za $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. □

U radu [138], došlo se do zaključka da su geometrijski objekti $a_{j|k}^i$, $a_{j|k}^i$, $a_{j|k}^i$ linearno nezavisni, a da je geometrijske objekte $a_{j|k}^i$ i $a_{j|k}^i$ moguće na jedinstven način prikazati kao linearne kombinacije prethodna tri linearno nezavisna objekta.

2.1.2 Četiri plus jedna vrsta kovarijantnog diferenciranja

Osnovu daljeg istraživanja čine naredne propozicije.

Propozicija 2.1. *Kovarijantni izvodi definisani jednačinama (1.64, 1.65, 1.66, 1.67) i kovarijanti izvod zadat jednačinom (1.56) zadovoljavaju sledeće jednačine*

$$a_{j_1 \dots j_q | k}^{i_1 \dots i_p} = a_{j_1 \dots j_q | k}^{i_1 \dots i_p} + \sum_{u=1}^p L_{\alpha k}^{i_u} a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{u-1} \alpha i_{u+1} \dots i_p} - \sum_{v=1}^q L_{j_v k}^\alpha a_{j_1 \dots j_{v-1} \alpha j_{v+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}, \tag{2.12}$$

$$a_{j_1 \dots j_q | k}^{i_1 \dots i_p} = a_{j_1 \dots j_q | k}^{i_1 \dots i_p} - \sum_{u=1}^p L_{\alpha k}^{i_u} a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{u-1} \alpha i_{u+1} \dots i_p} + \sum_{v=1}^q L_{j_v k}^\alpha a_{j_1 \dots j_{v-1} \alpha j_{v+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}, \tag{2.13}$$

$$a_{j_1 \dots j_q | k}^{i_1 \dots i_p} = a_{j_1 \dots j_q | k}^{i_1 \dots i_p} + \sum_{u=1}^p L_{\alpha k}^{i_u} a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{u-1} \alpha i_{u+1} \dots i_p} + \sum_{v=1}^q L_{j_v k}^\alpha a_{j_1 \dots j_{v-1} \alpha j_{v+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}, \tag{2.14}$$

GLAVA 2. KOVARIJANTNI IZVODI I RIČIJEVI IDENTITETI

$$a_{j_1 \dots j_q | k}^{i_1 \dots i_p} = a_{j_1 \dots j_q | k}^{i_1 \dots i_p} - \sum_{u=1}^p L_{\alpha k}^{i_u} a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{u-1} \alpha i_{u+1} \dots i_p} - \sum_{v=1}^q L_{j_v k}^{\alpha} a_{j_1 \dots j_{v-1} \alpha j_{v+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}. \quad (2.15)$$

Primedba 2.1. Na osnovu jednačina (1.56, 1.64–1.67), dobija se

$$a_{j_1 \dots j_q | k}^{i_1 \dots i_p} = a_{j_1 \dots j_q | k}^{i_1 \dots i_p} + c_z \sum_{u=1}^p L_{\alpha k}^{i_u} a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{u-1} \alpha i_{u+1} \dots i_p} + d_z \sum_{v=1}^q L_{j_v k}^{\alpha} a_{j_1 \dots j_{v-1} \alpha j_{v+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}, \quad (2.16)$$

za slučaj $z = 0, \dots, 4$, i odgovarajuće koeficijente $c_0 = d_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 1$, $c_4 = -1$, $d_1 = -1$, $d_2 = 1$, $d_3 = 1$, $d_4 = -1$.

Određimo komutacione formule na osnovu kovarijantnih izvoda tenzora \hat{a} tipa $(1, 1)$, \hat{u} tipa $(1, 0)$ i \hat{v} tipa $(0, 1)$.

Propozicija 2.2. U slučaju tenzora \hat{a} tipa $(1, 1)$, tri od geometrijskih objekata $a_{j_0 | k}^i, a_{j_1 | k}^i, a_{j_2 | k}^i, a_{j_3 | k}^i, a_{j_4 | k}^i$ su linearno nezavisna.

Dokaz. Na osnovu jednačine (2.16), broj linearno nezavisnih među geometrijskim objektima $a_{j_0 | k}^i, a_{j_1 | k}^i, a_{j_2 | k}^i, a_{j_3 | k}^i, a_{j_4 | k}^i$ je jednak rangu matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Kako je $\text{Rank}(M) = 3$, tri od geometrijskih objekata $a_{j_0 | k}^i, a_{j_1 | k}^i, a_{j_2 | k}^i, a_{j_3 | k}^i, a_{j_4 | k}^i$ su linearno nezavisni. \square

Posledica 2.1. U slučaju tenzora \hat{u} tipa $(1, 0)$, dva od geometrijskih objekata $u_{j_0 | k}^i, u_{j_1 | k}^i, u_{j_2 | k}^i, u_{j_3 | k}^i, u_{j_4 | k}^i$ su linearno nezavisna.

U slučaju tenzora \hat{v} tipa $(0, 1)$, dva od geometrijskih objekata $v_{j_0 | k}, v_{j_1 | k}, v_{j_2 | k}, v_{j_3 | k}, v_{j_4 | k}$ su linearno nezavisna. \square

2.1. KOMUTACIONE FORMULE PRI NESIMETRIČNOJ...

Posledica 2.2. *Trojke*

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_1 : \begin{cases} a_{j|k}^i \\ a_{j|k}^i \\ a_{j|k}^i \end{cases} & \quad \mathcal{A}_2 : \begin{cases} a_{j|k}^i \\ a_{j|k}^i \\ a_{j|k}^i \end{cases} & \quad \mathcal{A}_3 : \begin{cases} a_{j|k}^i \\ a_{j|k}^i \\ a_{j|k}^i \end{cases} & \quad \mathcal{A}_4 : \begin{cases} a_{j|k}^i \\ a_{j|k}^i \\ a_{j|k}^i \end{cases} \\
 \mathcal{A}_5 : \begin{cases} a_{j|k}^i \\ a_{j|k}^i \\ a_{j|k}^i \end{cases} & \quad \mathcal{A}_6 : \begin{cases} a_{j|k}^i \\ a_{j|k}^i \\ a_{j|k}^i \end{cases} & \quad \mathcal{A}_7 : \begin{cases} a_{j|k}^i \\ a_{j|k}^i \\ a_{j|k}^i \end{cases} & \quad \mathcal{A}_8 : \begin{cases} a_{j|k}^i \\ a_{j|k}^i \\ a_{j|k}^i \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

su trojke linearno nezavisnih geometrijskih objekata $a_{j|k}^i$, $z = 0, \dots, 4$.

Parovi

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}_1 : \begin{cases} u_{|k}^i \\ u_{|k}^i \\ u_{|k}^i \end{cases} & \quad \mathcal{U}_2 : \begin{cases} u_{|k}^i \\ u_{|k}^i \\ u_{|k}^i \end{cases} & \quad \mathcal{U}_3 : \begin{cases} u_{|k}^i \\ u_{|k}^i \\ u_{|k}^i \end{cases} \\
 \mathcal{V}_1 : \begin{cases} v_{j|k} \\ v_{j|k} \\ v_{j|k} \end{cases} & \quad \mathcal{V}_2 : \begin{cases} v_{j|k} \\ v_{j|k} \\ v_{j|k} \end{cases} & \quad \mathcal{V}_3 : \begin{cases} v_{j|k} \\ v_{j|k} \\ v_{j|k} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

su parovi linearno nezavisnih geometrijskih objekata $u_{|k}^i, v_{j|k}$, $z = 0, \dots, 4$. \square

2.1.3 Ričijevi Identiteti na osnovu tenzora \hat{a} tipa (1, 1)

Uopštimo Prvu Teoremu o Ričijevim Identitetima.

Teorema 2.2 (Druga Teorema o Ričijevim Identitetima). *Neka je*

$$X_{jk}^i = \rho_0^1 a_{j|k}^i + \rho_1^1 a_{j|k}^i + \rho_2^1 a_{j|k}^i + \rho_3^1 a_{j|k}^i + \rho_4^1 a_{j|k}^i, \tag{2.19}$$

$$Y_{jk}^i = \rho_0^2 a_{j|k}^i + \rho_1^2 a_{j|k}^i + \rho_2^2 a_{j|k}^i + \rho_3^2 a_{j|k}^i + \rho_4^2 a_{j|k}^i, \tag{2.20}$$

$$Z_{jk}^i = \rho_0^3 a_{j|k}^i + \rho_1^3 a_{j|k}^i + \rho_2^3 a_{j|k}^i + \rho_3^3 a_{j|k}^i + \rho_4^3 a_{j|k}^i, \tag{2.21}$$

GLAVA 2. KOVARIJANTNI IZVODI I RIČIJEVI IDENTITETI

$$U_{jk}^i = \rho_0^4 a_{j|k}^i + \rho_1^4 a_{j|_1k}^i + \rho_2^4 a_{j|_2k}^i + \rho_3^4 A_{j|_3k}^i + \rho_4^4 a_{j|_4k}^i, \quad (2.22)$$

$$V_{jk}^i = \rho_0^5 a_{j|k}^i + \rho_1^5 a_{j|_1k}^i + \rho_2^5 a_{j|_2k}^i + \rho_3^5 a_{j|_3k}^i + \rho_4^5 a_{j|_4k}^i, \quad (2.23)$$

gde je \hat{a} tenzor tipa $(1, 1)$ i $\rho_0^z, \rho_1^z, \rho_2^z, \rho_3^z, \rho_4^z, z \in \{1, \dots, 5\}$, za koje važi da je $\rho_0^z + \rho_1^z + \rho_2^z + \rho_3^z + \rho_4^z = 1$, proizvoljni skalari.

Važi naredna jednačina

$$\begin{aligned} a_{v_1 \ w_1}^i | m | n - a_{v_2 \ w_2}^i | n | m &= (c_{v_1} - c_{w_2}) L_{\alpha m}^i X_{j n}^\alpha + (c_{w_1} - c_{v_2}) L_{\alpha n}^i Y_{j m}^\alpha \\ &+ (d_{v_1} - d_{w_2}) L_{j m}^\alpha Z_{\alpha n}^i + (d_{w_1} - d_{v_2}) L_{j n}^\alpha U_{\alpha m}^i \\ &+ (d_{w_1} + d_{w_2}) L_{m n}^\alpha V_{j \alpha}^i \\ &+ a_j^\alpha \{ R_{\alpha m n}^i + c_{v_1} L_{\alpha m | n}^i - c_{v_2} L_{\alpha n | m}^i \\ &\quad + p_1 L_{\alpha m}^\beta L_{\beta n}^i + p_2 L_{\alpha n}^\beta L_{\beta m}^i + p_3 L_{m n}^\beta L_{\beta \alpha}^i \} \\ &- a_\alpha^i \{ R_{j m n}^\alpha - d_{v_1} L_{j m | n}^\alpha + d_{v_2} L_{j n | m}^\alpha \\ &\quad + q_1 L_{j m}^\beta L_{\beta n}^\alpha + q_2 L_{j n}^\beta L_{\beta m}^\alpha + q_3 L_{m n}^\beta L_{\beta j}^\alpha \} \\ &+ a_\beta^\alpha \{ r_1 L_{j m}^\beta L_{\alpha n}^i + r_2 L_{j n}^\beta L_{\alpha m}^i \}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

gde je

$$p_1 = c_{v_1} c_{w_1} - c_{v_2} (c_{w_2} + d_{w_2}) - (c_{w_1} - c_{v_2}) (\rho_1^2 - \rho_2^2 + \rho_3^2 - \rho_4^2), \quad (2.25)$$

$$p_2 = c_{v_1} (c_{w_1} + d_{w_1}) - c_{v_2} c_{w_2} - (c_{v_1} - c_{w_2}) (\rho_1^1 - \rho_2^1 + \rho_3^1 - \rho_4^1), \quad (2.26)$$

$$p_3 = -c_{v_1} d_{w_1} - c_{v_2} d_{w_2} + (d_{w_1} + d_{w_2}) (\rho_1^5 - \rho_2^5 + \rho_3^5 - \rho_4^5), \quad (2.27)$$

$$q_1 = -d_{v_1} (c_{w_1} + d_{w_1}) + d_{v_2} d_{w_2} - (d_{v_1} - d_{w_2}) (\rho_1^3 - \rho_2^3 - \rho_3^3 + \rho_4^3), \quad (2.28)$$

$$q_2 = -d_{v_1} d_{w_1} + d_{v_2} (c_{w_2} + d_{w_2}) - (d_{w_1} - d_{v_2}) (\rho_1^4 - \rho_2^4 - \rho_3^4 + \rho_4^4), \quad (2.29)$$

$$q_3 = d_{v_1} d_{w_1} + d_{v_2} d_{w_2} - (d_{w_1} + d_{w_2}) (\rho_1^5 - \rho_2^5 - \rho_3^5 + \rho_4^5), \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} r_1 &= c_{w_1} d_{v_1} - c_{v_2} d_{w_2} + (c_{w_1} - c_{v_2}) (\rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2 + \rho_4^2) \\ &\quad - (d_{v_1} - d_{w_2}) (\rho_1^3 - \rho_2^3 + \rho_3^3 - \rho_4^3), \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} r_2 &= c_{v_1} d_{w_1} - c_{w_2} d_{v_2} + (c_{v_1} - c_{w_2}) (\rho_1^1 - \rho_2^1 - \rho_3^1 + \rho_4^1) \\ &\quad - (d_{w_1} - d_{v_2}) (\rho_1^4 - \rho_2^4 + \rho_3^4 - \rho_4^4). \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.1. KOMUTACIONE FORMULE PRI NESIMETRIČNOJ...

Dokaz. Važe naredne jednačine

$$\begin{aligned} L_{\alpha m}^i X_{jn}^\alpha &= L_{\alpha m}^i a_{j|n}^\alpha + (\rho_1^1 - \rho_2^1 + \rho_3^1 - \rho_4^1) L_{\beta m}^i L_{\alpha n}^\beta a_j^\alpha \\ &\quad - (\rho_1^1 - \rho_2^1 - \rho_3^1 + \rho_4^1) L_{\alpha m}^i L_{jn}^\beta a_\beta^\alpha, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} L_{\alpha n}^i Y_{jm}^\alpha &= L_{\alpha n}^i a_{j|m}^\alpha + (\rho_1^2 - \rho_2^2 + \rho_3^2 - \rho_4^2) L_{\beta n}^i L_{\alpha m}^\beta a_j^\alpha \\ &\quad - (\rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2 + \rho_4^2) L_{\alpha n}^i L_{jm}^\beta a_\beta^\alpha, \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} L_{jm}^\alpha Z_{\alpha n}^i &= L_{jm}^\alpha a_{\alpha|n}^i + (\rho_1^3 - \rho_2^3 + \rho_3^3 - \rho_4^3) L_{jm}^\beta L_{\alpha n}^\alpha a_\beta^\alpha \\ &\quad - (\rho_1^3 - \rho_2^3 - \rho_3^3 + \rho_4^3) L_{jm}^\beta L_{\beta n}^\alpha a_\alpha^i, \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} L_{jn}^\alpha U_{\alpha m}^i &= L_{jn}^\alpha a_{\alpha|m}^i + (\rho_1^4 - \rho_2^4 + \rho_3^4 - \rho_4^4) L_{jn}^\beta L_{\alpha m}^\alpha a_\beta^\alpha \\ &\quad - (\rho_1^4 - \rho_2^4 - \rho_3^4 + \rho_4^4) L_{jn}^\beta L_{\beta m}^\alpha a_\alpha^i, \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} L_{mn}^\alpha V_{j\alpha}^i &= L_{mn}^\alpha a_{j|\alpha}^i + (\rho_1^5 - \rho_2^5 + \rho_3^5 - \rho_4^5) L_{mn}^\beta L_{\alpha j}^\alpha a_\beta^\alpha \\ &\quad - (\rho_1^5 - \rho_2^5 - \rho_3^5 + \rho_4^5) L_{mn}^\beta L_{\beta j}^\alpha a_\alpha^i, \end{aligned} \quad (2.37)$$

Nakon prikazivanja geometrijskih objekata

$$\begin{aligned} (c_{v_1} - c_{v_2}) L_{\alpha m}^i a_{j|n}^\alpha, \quad (c_{w_1} - c_{v_2}) L_{\alpha n}^i a_{j|m}^\alpha, \quad (d_{v_1} - d_{w_2}) L_{jm}^\alpha a_{\alpha|n}^i, \\ (d_{w_1} - d_{v_2}) L_{jn}^\alpha a_{\alpha|m}^i, \quad (d_{w_1} + d_{w_2}) L_{mn}^\alpha a_{j|\alpha}^i, \end{aligned}$$

pomoću jednakosti (2.33–2.37) i zamene tako prikazanih objekata u jednačinu (2.11), dolazi se do zaključka da je zadovoljena jednačina (2.51). \square

Važe naredne jednakosti

$$\rho_1^z - \rho_2^z + \rho_3^z - \rho_4^z = (-1)^{1-1} \rho_1^z + (-1)^{2-1} \rho_2^z + (-1)^{3-1} \rho_3^z + \rho_4^{4-1} \rho_4^z, \quad (2.38)$$

$$\rho_1^z - \rho_2^z - \rho_3^z + \rho_4^z = (-1)^{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor} \rho_1^z + (-1)^{\lfloor \frac{2}{2} \rfloor} \rho_2^z + (-1)^{\lfloor \frac{3}{2} \rfloor} \rho_3^z + (-1)^{\lfloor \frac{4}{2} \rfloor} \rho_4^z, \quad (2.39)$$

GLAVA 2. KOVARIJANTNI IZVODI I RIČIJEVI IDENTITETI

$z = 1, \dots, 5$, ceo deo funkcija $[x]$ (funkcija koja realan broj x transformiše u ceo broj koji je manji ili jednak x).

Neka je još i $\{n_1, n_2, n_3, n_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Na osnovu Propozicije 2.2, sledi da je dovoljno razmotriti slučaj $\rho_0^z = \rho_{n_4}^z = 0$, $n_4 \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{n_1, n_2, n_3\}$.

Za cele brojeve n_1, n_2, n_3 , $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 \leq 4$, i na osnovu zapisa (2.38, 2.39) smenjenih u jednačinu (2.51), važi naredna Teorema.

Teorema 2.3 ($n_1 - n_2 - n_3$ - Druga Teorema o Ričijevim Identitetima). *Neka je*

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{jk}^i &= \rho_{n_1}^1 a_{n_1}^i |_{jk} + \rho_{n_2}^1 a_{n_2}^i |_{jk} + \rho_{n_3}^1 a_{n_3}^i |_{jk}, & \tilde{Y}_{jk}^i &= \rho_{n_1}^2 a_{n_1}^i |_{jk} + \rho_{n_2}^2 a_{n_2}^i |_{jk} + \rho_{n_3}^2 a_{n_3}^i |_{jk}, \\ \tilde{Z}_{jk}^i &= \rho_{n_1}^3 a_{n_1}^i |_{jk} + \rho_{n_2}^3 a_{n_2}^i |_{jk} + \rho_{n_3}^3 a_{n_3}^i |_{jk}, & \tilde{U}_{jk}^i &= \rho_{n_1}^4 a_{n_1}^i |_{jk} + \rho_{n_2}^4 a_{n_2}^i |_{jk} + \rho_{n_3}^4 a_{n_3}^i |_{jk}, \\ \tilde{V}_{jk}^i &= \rho_{n_1}^5 a_{n_1}^i |_{jk} + \rho_{n_2}^5 a_{n_2}^i |_{jk} + \rho_{n_3}^5 a_{n_3}^i |_{jk}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

gde je \hat{a} tenzor tipa $(1, 1)$.

Važi jednačina

$$\begin{aligned} a_{v_1}^i |_{m \ w_1} |_{n \ w_1} - a_{v_2}^i |_{n \ w_2} |_{m \ w_2} &= (c_{v_1} - c_{w_2}) L_{\alpha m}^i \tilde{X}_{jn}^\alpha + (c_{w_1} - c_{v_2}) L_{\alpha n}^i \tilde{Y}_{jm}^\alpha \\ &+ (d_{v_1} - d_{w_2}) L_{jm}^\alpha \tilde{Z}_{\alpha n}^i + (d_{w_1} - d_{v_2}) L_{jn}^\alpha \tilde{U}_{\alpha m}^i \\ &+ (d_{w_1} + d_{w_2}) L_{mn}^\alpha \tilde{V}_{j\alpha}^i \\ &+ a_j^\alpha \{ R_{\alpha mn}^i + c_{v_1} L_{\alpha m|n}^i - c_{v_2} L_{\alpha n|m}^i \\ &\quad + \tilde{p}_1 L_{\alpha m}^\beta L_{\beta n}^i + \tilde{p}_2 L_{\alpha n}^\beta L_{\beta m}^i + \tilde{p}_3 L_{mn}^\beta L_{\beta j}^i \} \\ &- a_\alpha^i \{ R_{jmn}^\alpha - d_{v_1} L_{jm|n}^\alpha + d_{v_2} L_{jn|m}^\alpha \\ &\quad + \tilde{q}_1 L_{jm}^\beta L_{\beta n}^\alpha + \tilde{q}_2 L_{jn}^\beta L_{\beta m}^\alpha + \tilde{q}_3 L_{mn}^\beta L_{\beta j}^\alpha \} \\ &+ a_\beta^\alpha \{ \tilde{r}_1 L_{jm}^\beta L_{\alpha n}^i + \tilde{r}_2 L_{jn}^\beta L_{\alpha m}^i \}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

2.1. KOMUTACIONE FORMULE PRI NESIMETRIČNOJ...

gde je

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 &= c_{v_1}c_{w_1} - c_{v_2}(c_{w_2} + d_{w_2}) \\ &\quad - (c_{w_1} - c_{v_2})((-1)^{n_1-1}\rho_{n_1}^2 + (-1)^{n_2-1}\rho_{n_2}^2 + (-1)^{n_3-1}\rho_{n_3}^2), \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_2 &= c_{v_1}(c_{w_1} + d_{w_1}) - c_{v_2}c_{w_2} \\ &\quad - (c_{v_1} - c_{w_2})((-1)^{n_1-1}\rho_{n_1}^1 + (-1)^{n_2-1}\rho_{n_2}^1 + (-1)^{n_3-1}\rho_{n_3}^1), \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_3 &= -c_{v_1}d_{w_1} - c_{v_2}d_{w_2} \\ &\quad + (d_{w_1} + d_{w_2})((-1)^{n_1-1}\rho_{n_1}^5 + (-1)^{n_2-1}\rho_{n_2}^5 + (-1)^{n_3-1}\rho_{n_3}^5), \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1 &= -d_{v_1}(c_{w_1} + d_{w_1}) + d_{v_2}d_{w_2} \\ &\quad - (d_{v_1} - d_{w_2})((-1)^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor}\rho_{n_1}^3 + (-1)^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor}\rho_{n_2}^3 + (-1)^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor}\rho_{n_3}^3), \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_2 &= -d_{v_1}d_{w_1} + d_{v_2}(c_{w_2} + d_{w_2}) \\ &\quad - (d_{w_1} - d_{v_2})((-1)^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor}\rho_{n_1}^4 + (-1)^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor}\rho_{n_2}^4 + (-1)^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor}\rho_{n_3}^4), \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_3 &= d_{v_1}d_{w_1} + d_{v_2}d_{w_2} \\ &\quad - (d_{w_1} + d_{w_2})((-1)^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor}\rho_{n_1}^5 + (-1)^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor}\rho_{n_2}^5 + (-1)^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor}\rho_{n_3}^5), \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \tilde{r}_1 &= c_{w_1}d_{v_1} - c_{v_2}d_{w_2} \\ &\quad + (c_{w_1} - c_{v_2})((-1)^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor}\rho_{n_1}^2 + (-1)^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor}\rho_{n_2}^2 + (-1)^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor}\rho_{n_3}^2) \\ &\quad - (d_{v_1} - d_{w_2})((-1)^{n_1-1}\rho_{n_1}^3 + (-1)^{n_2-1}\rho_{n_2}^3 + (-1)^{n_3-1}\rho_{n_3}^3), \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \tilde{r}_2 &= c_{v_1}d_{w_1} - c_{w_2}d_{v_2} \\ &\quad + (c_{v_1} - c_{w_2})((-1)^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor}\rho_{n_1}^1 + (-1)^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor}\rho_{n_2}^1 + (-1)^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor}\rho_{n_3}^1) \\ &\quad - (d_{w_1} - d_{v_2})((-1)^{n_1-1}\rho_{n_1}^4 + (-1)^{n_2-1}\rho_{n_2}^4 + (-1)^{n_3-1}\rho_{n_3}^4), \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\rho_{n_1}^z + \rho_{n_2}^z + \rho_{n_3}^z = 1, \quad z \in \{1, 2, 3, 4, 5\}. \quad \square$$

Na osnovu Propozicije 2.2, sledi da je dovoljno razmotriti slučaj $\rho_{n_3}^z = 0$, $\rho_{n_4}^z = 0$, $1 \leq n_3 < n_4 \leq 4$, $\{n_1, n_2\} = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{n_3, n_4\}$, $(n_1, n_2) \in \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$ kao što je to učinjeno u narednoj Teoremi.

GLAVA 2. KOVARIJANTNI IZVODI I RIČIJEVI IDENTITETI

Teorema 2.4 ($n_1 - n_2$ - Druga Teorema o Ričijevim Identitetima). *Neka je*

$$\begin{aligned}
 \tilde{X}_{jk}^i &= \rho_0^1 a_{j|k}^i + \rho_{n_1}^1 a_{j|k}^i + \rho_{n_2}^1 a_{j|k}^i, & \tilde{Y}_{jk}^i &= \rho_0^2 a_{j|k}^i + \rho_{n_1}^2 a_{j|k}^i + \rho_{n_2}^2 a_{j|k}^i, \\
 \tilde{Z}_{jk}^i &= \rho_0^3 a_{j|k}^i + \rho_{n_1}^3 a_{j|k}^i + \rho_{n_2}^3 a_{j|k}^i, & \tilde{U}_{jk}^i &= \rho_0^4 a_{j|k}^i + \rho_{n_1}^4 a_{j|k}^i + \rho_{n_2}^4 a_{j|k}^i, \\
 \tilde{V}_{jk}^i &= \rho_0^5 a_{j|k}^i + \rho_{n_1}^5 a_{j|k}^i + \rho_{n_2}^5 a_{j|k}^i,
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

gde je \hat{a} tenzor tipa $(1, 1)$.

Važi sledeća jednačina

$$\begin{aligned}
 a_{v_1 w_1}^i | m | n - a_{v_2 w_2}^i | n | m &= (c_{v_1} - c_{w_2}) L_{\alpha m}^i \tilde{X}_{jn}^\alpha + (c_{w_1} - c_{v_2}) L_{\alpha n}^i \tilde{Y}_{jm}^\alpha \\
 &+ (d_{v_1} - d_{w_2}) L_{jm}^\alpha \tilde{Z}_{\alpha n}^i + (d_{w_1} - d_{v_2}) L_{jn}^\alpha \tilde{U}_{\alpha m}^i \\
 &+ (d_{w_1} + d_{w_2}) L_{mn}^\alpha \tilde{V}_{j\alpha}^i \\
 &+ a_j^\alpha \{ R_{\alpha mn}^i + c_{v_1} L_{\alpha m|n}^i - c_{v_2} L_{\alpha n|m}^i \\
 &\quad + \tilde{p}_1 L_{\alpha m}^\beta L_{\beta n}^i + \tilde{p}_2 L_{\alpha n}^\beta L_{\beta m}^i + \tilde{p}_3 L_{mn}^\beta L_{\beta j}^i \} \\
 &- a_\alpha^i \{ R_{jmn}^\alpha - d_{v_1} L_{jm|n}^\alpha + d_{v_2} L_{jn|m}^\alpha \\
 &\quad + \tilde{q}_1 L_{jm}^\beta L_{\beta n}^\alpha + \tilde{q}_2 L_{jn}^\beta L_{\beta m}^\alpha + \tilde{q}_3 L_{mn}^\beta L_{\beta j}^\alpha \} \\
 &+ a_\beta^\alpha \{ \tilde{r}_1 L_{jm}^\beta L_{\alpha n}^i + \tilde{r}_2 L_{jn}^\beta L_{\alpha m}^i \},
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

gde je

$$\tilde{p}_1 = c_{v_1} c_{w_1} - c_{v_2} (c_{w_2} + d_{w_2}) - (c_{w_1} - c_{v_2}) ((-1)^{n_1-1} \rho_{n_1}^2 + (-1)^{n_2-1} \rho_{n_2}^2), \tag{2.52}$$

$$\tilde{p}_2 = c_{v_1} (c_{w_1} + d_{w_1}) - c_{v_2} c_{w_2} - (c_{v_1} - c_{w_2}) ((-1)^{n_1-1} \rho_{n_1}^1 + (-1)^{n_2-1} \rho_{n_2}^1), \tag{2.53}$$

$$\tilde{p}_3 = -c_{v_1} d_{w_1} - c_{v_2} d_{w_2} + (d_{w_1} + d_{w_2}) ((-1)^{n_1-1} \rho_{n_1}^5 + (-1)^{n_2-1} \rho_{n_2}^5), \tag{2.54}$$

2.1. KOMUTACIONE FORMULE PRI NESIMETRIČNOJ...

$$\tilde{q}_1 = -d_{v_1}(c_{w_1} + d_{w_1}) + d_{v_2}d_{w_2} - (d_{v_1} - d_{w_2})((-1)^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \rho_{n_1}^3 + (-1)^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \rho_{n_2}^3), \quad (2.55)$$

$$\tilde{q}_2 = -d_{v_1}d_{w_1} - d_{v_2}(c_{w_2} + d_{w_2}) - (d_{w_1} - d_{v_2})((-1)^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \rho_{n_1}^4 + (-1)^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \rho_{n_2}^4), \quad (2.56)$$

$$\tilde{q}_3 = d_{v_1}d_{w_1} + d_{v_2}d_{w_2} - (d_{w_1} + d_{w_2})((-1)^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \rho_{n_1}^5 + (-1)^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \rho_{n_2}^5), \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \tilde{r}_1 = & c_{w_1}d_{v_1} - c_{v_2}d_{w_2} + (c_{w_1} - c_{v_2})((-1)^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \rho_{n_1}^2 + (-1)^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \rho_{n_2}^2) \\ & - (d_{v_1} - d_{w_2})((-1)^{n_1-1} \rho_{n_1}^3 + (-1)^{n_2-1} \rho_{n_2}^3), \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \tilde{r}_2 = & c_{v_1}d_{w_1} - c_{w_2}d_{v_2} + (c_{v_1} - c_{w_2})((-1)^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \rho_{n_1}^1 + (-1)^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \rho_{n_2}^1) \\ & - (d_{w_1} - d_{v_2})((-1)^{n_1-1} \rho_{n_1}^4 + (-1)^{n_2-1} \rho_{n_2}^4), \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\rho_0^z + \rho_{n_1}^z + \rho_{n_2}^z = 1, \quad z \in \{1, 2, 3, 4, 5\}. \quad \square$$

Teorema 2.5 (Teorema o Komutacionim Formulama). *Petnaest od geometrijskih objekata $a_{v_1 w_1}^i | m | n - a_{v_2 w_2}^i | n | m$, $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, je linearno nezavisno.*

Dokaz. Na osnovu posledice 2.2 i jednačine (2.17) u toj Posledici, dobijaju se naredne jednačine

$$a_{v_1}^i | m = x_1 a_{v_1}^i | m + x_2 a_{v_2}^i | m + x_3 a_{v_3}^i | m, \quad (2.60)$$

$$a_{v_1 w_1}^i | m | n = y_1 a_{v_1}^i | m | n + y_2 a_{v_1}^i | m | n + y_3 a_{v_1}^i | m | n, \quad (2.61)$$

gde su $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ odgovarajući skalari.

Nakon zamene zapisa (2.60) u jednačinu (2.61), dolazi se do zaključka da je dupli kovarijantni izvod $a_{v_1 w_1}^i | m | n$ linearna kombinacija geometrijskih objekata $a_{v_1' w_1'}^i | m | n$, gde je $v_1', w_1' \in \{1, 2, 3\}$.

U 1 – 2 – 3 - Teoremi o Komutacionim Formulama [138], dokazano je da je petnaest od geometrijskih objekata $a_{v_1' w_1'}^i | m | n - a_{v_2' w_2'}^i | n | m$, gde je $v_1', v_2', w_1', w_2' \in \{1, 2, 3\}$, linearno nezavisno, čime je dokaz ove Teoreme završen. \square

2.1.4 Ričijevi Identiteti na osnovu tenzora \hat{a} tipa (p, q)

Važi jednačina

$$\begin{aligned}
 a_{j_1 \dots j_q | m | n}^{i_1 \dots i_p} &= a_{j_1 \dots j_q | m | n}^{i_1 \dots i_p} + c_v \sum_{k=1}^p L_{\alpha m}^{i_k} a_{j_1 \dots j_q | n}^{i_1 \dots i_{k-1} \alpha i_{k+1} \dots i_p} + c_w \sum_{k=1}^p L_{\alpha n}^{i_k} a_{j_1 \dots j_q | m}^{i_1 \dots i_{k-1} \alpha i_{k+1} \dots i_p} \\
 &+ d_v \sum_{l=1}^q L_{j_l m}^{\alpha} a_{j_1 \dots j_{l-1} \alpha j_{l+1} \dots j_q | n}^{i_1 \dots i_p} + d_w \sum_{l=1}^q L_{j_l n}^{\alpha} a_{j_1 \dots j_{l-1} \alpha j_{l+1} \dots j_q | m}^{i_1 \dots i_p} \\
 &+ d_w L_{m n}^{\alpha} a_{j_1 \dots j_q | \alpha}^{i_1 \dots i_p} \\
 &+ c_v c_w \left\{ \sum_{k=1}^p \sum_{\kappa=1}^{k-1} L_{\alpha m}^{i_k} L_{\beta n}^{i_{\kappa}} a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{\kappa-1} \beta i_{\kappa+1} \dots i_{k-1} \alpha i_{k+1} \dots i_p} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^p \sum_{\kappa=k+1}^p L_{\alpha m}^{i_k} L_{\beta n}^{i_{\kappa}} a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{k-1} \alpha i_{k+1} \dots i_{\kappa-1} \beta i_{\kappa+1} \dots i_p} \right\} \\
 &+ d_v d_w \left\{ \sum_{l=1}^q \sum_{\ell=1}^{l-1} L_{j_{\ell} n}^{\beta} L_{j_l m}^{\alpha} a_{j_1 \dots j_{\ell-1} \beta j_{\ell+1} \dots j_{l-1} \alpha j_{l+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{l=1}^q \sum_{\ell=l+1}^q L_{j_{\ell} n}^{\beta} L_{j_l m}^{\alpha} a_{j_1 \dots j_{l-1} \alpha j_{l+1} \dots j_{\ell-1} \beta j_{\ell+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \right\} \\
 &+ \sum_{k=1}^p a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{k-1} \alpha i_{k+1} \dots i_p} \left(c_v L_{\alpha m | n}^{i_k} + c_v c_w L_{\alpha m}^{\beta} L_{\beta n}^{i_k} \right. \\
 &\quad \left. + c_v (c_w + d_w) L_{\alpha n}^{\beta} L_{\beta m}^{i_k} - c_v d_w L_{m n}^{\beta} L_{\beta \alpha}^{i_k} \right) \\
 &- \sum_{l=1}^q a_{j_1 \dots j_{l-1} \alpha j_{l+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \left(-d_v L_{j_l m | n}^{\alpha} - d_v (c_w + d_w) L_{j_l m}^{\beta} L_{\beta n}^{\alpha} \right. \\
 &\quad \left. - d_v d_w L_{j_l n}^{\beta} L_{\beta m}^{\alpha} + d_v d_w L_{m n}^{\beta} L_{\beta j_l}^{\alpha} \right) \\
 &+ \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q a_{j_1 \dots j_{l-1} \beta j_{l+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_{k-1} \alpha i_{k+1} \dots i_p} \left(c_w d_v L_{j_l m}^{\beta} L_{\beta n}^{i_k} + c_v d_w L_{j_l n}^{\beta} L_{\alpha m}^{i_k} \right).
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Na osnovu jednačine (2.16), generalizuju se rezultati dobijeni u prethodnom poglavlju. Ti generalizovani rezultati, prikazani su u sledećoj Teoremi.

2.1. KOMUTACIONE FORMULE PRI NESIMETRIČNOJ...

Teorema 2.6 (Opšta Prva Teorema o Ričijevim Identitetima). *Familija Ričijevih Identiteta dobijenih na osnovu nesimetrične afine koneksije ∇ i tenzora \hat{a} tipa (p, q) , $p, q \in \mathbb{N}$, je*

$$\begin{aligned}
a_{j_1 \dots j_q | m | n}^{i_1 \dots i_p}_{v_1 w_1} - a_{j_1 \dots j_q | n | m}^{i_1 \dots i_p}_{v_2 w_2} &= \mathcal{S}_{j_1 \dots j_q mn}^{i_1 \dots i_p} + \mathcal{S}_{j_1 \dots j_q mn}^{i_1 \dots i_p} \\
&+ (d_{w_1} + d_{w_2}) L_{mn}^\alpha a_{j_1 \dots j_q | \alpha}^{i_1 \dots i_p} \\
&+ \sum_{k=1}^p a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{k-1} \alpha i_{k+1} \dots i_p} \mathcal{R}_{\alpha mn}^1{}^k \\
&- \sum_{l=1}^q a_{j_1 \dots j_l-1 \alpha j_{l+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \mathcal{R}_{j_l mn}^2{}^\alpha \\
&+ \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q a_{j_1 \dots j_{l-1} \beta j_{l+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_{k-1} \alpha i_{k+1} \dots i_p} \mathcal{R}_{\alpha j_l mn}^3{}^{\beta i_k},
\end{aligned} \tag{2.63}$$

gde je

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{j_1 \dots j_q mn}^{i_1 \dots i_p} &= \sum_{k=1}^p \{ (c_{v_1} - c_{w_2}) L_{\alpha m}^{i_k} a_{j_1 \dots j_q | n}^{i_1 \dots i_{k-1} \alpha i_{k+1} \dots i_p} \\
&+ (c_{w_1} - c_{v_2}) L_{\alpha n}^{i_k} a_{j_1 \dots j_q | m}^{i_1 \dots i_{k-1} \alpha i_{k+1} \dots i_p} \},
\end{aligned} \tag{2.64}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{j_1 \dots j_q mn}^{i_1 \dots i_p} &= \sum_{l=1}^q \{ (d_{v_1} - d_{w_2}) L_{j_l m}^\alpha a_{j_1 \dots j_{l-1} \alpha j_{l+1} \dots j_q | n}^{i_1 \dots i_p} \\
&+ (d_{w_1} - d_{v_2}) L_{j_l n}^\alpha a_{j_1 \dots j_{l-1} \alpha j_{l+1} \dots j_q | m}^{i_1 \dots i_p} \},
\end{aligned} \tag{2.65}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{jmn}^1 &= R_{jmn}^i + c_{v_1} L_{j m | n}^i - c_{v_2} L_{j n | m}^i + [c_{v_1} c_{w_1} - c_{v_2} (c_{w_2} + d_{w_2})] L_{j m}^\alpha L_{\alpha n}^i \\
&+ [c_{v_1} (c_{w_1} + d_{w_1}) - c_{v_2} c_{w_2}] L_{j n}^\alpha L_{\alpha m}^i - (c_{v_1} d_{w_1} + c_{v_2} d_{w_2}) L_{m n}^\alpha L_{\alpha j}^i,
\end{aligned} \tag{2.66}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{jmn}^2 &= R_{jmn}^i - d_{v_1} L_{j m | n}^i + d_{v_2} L_{j n | m}^i - [d_{v_1} (c_{w_1} + d_{w_1}) - d_{v_2} d_{w_2}] L_{j m}^\alpha L_{\alpha n}^i \\
&- [d_{v_1} d_{w_1} - d_{v_2} (c_{w_2} + d_{w_2})] L_{j n}^\alpha L_{\alpha m}^i + (d_{v_1} d_{w_1} + d_{v_2} d_{w_2}) L_{m n}^\alpha L_{\alpha j}^i,
\end{aligned} \tag{2.67}$$

GLAVA 2. KOVARIJANTNI IZVODI I RIČIJEVI IDENTITETI

$$\mathcal{R}_{sjmn}^3 = (c_{w_1} d_{v_1} - c_{v_2} d_{w_2}) L_{jm}^r L_{sn}^i + (c_{v_1} d_{w_1} - c_{w_2} d_{v_2}) L_{jn}^r L_{sm}^i, \quad (2.68)$$

$i, v_1, v_2, w_1, w_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. □

2.2 Ričijevi identiteti u operatorskom obliku

U ovom poglavlju se razmatra operatorski zapis tenzora, kovarijantnog diferenciranja i tenzorskog računa.

Diferencijalna mnogostrukost \mathcal{M} snabdevena nesimetričnom metrikom $G = G(X, Y)$, gde su X i Y tangenta vektorska polja mnogostrukosti, pri čemu je tenzor G razložen kao

$$G(X, Y) = g(X, Y) + F(X, Y), \quad (2.69)$$

gde je $g(X, Y) = g(Y, X)$ i $F(X, Y) = -F(Y, X)$ je razmatrana u [103].

Jedna afina koneksija, $\nabla_X^g Y$, dobija se na osnovu simetričnog dela $g(X, Y)$ na osnovu metričkog tenzora $G(X, Y)$ (Kožulova formula)

$$g(\nabla_X^g Y, Z) = \frac{1}{2} [Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y)]. \quad (2.70)$$

Odgovarajući tenzor krivine je

$$R^g(X, Y)Z = \nabla_X^g \nabla_Y^g Z - \nabla_Y^g \nabla_X^g Z - \nabla_{[X, Y]}^g Z. \quad (2.71)$$

Afine koneksije

$$\overset{1}{\nabla}_X Y \quad \text{and} \quad \overset{2}{\nabla}_X Y = \overset{1}{\nabla}_Y X + [X, Y], \quad (2.72)$$

razmatrane su u radu [103].

Tenzori torzije $\overset{1}{T}$ i $\overset{2}{T}$, koji će biti korišćeni u ovoj sekciji, zadati su narednom jednačinom

2.2. RIČIJEVI IDENTITETI U OPERATORSKOM OBLIKU

$${}^1T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad \text{i} \quad {}^2T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \quad (2.73)$$

Afina koneksija bez torzije je

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}(\nabla_X Y + \nabla_X Y). \quad (2.74)$$

Na osnovu jednačina (2.72, 2.74), dobija se da važi naredna jednačina

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}(\nabla_X Y + \nabla_Y X) + \frac{1}{2}[X, Y] = \frac{1}{2}(\nabla_X Y + \nabla_Y X) + \frac{1}{2}[X, Y]. \quad (2.75)$$

Zadovoljene su i naredne dve jednakosti

$$\nabla_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2}T(X, Y) \quad \text{i} \quad \nabla_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2}T(X, Y). \quad (2.76)$$

Propozicija 2.3. Dve od afinih koneksija $\nabla_X Y$, $\nabla_X Y$, $\nabla_X Y$ su linearno nezavisne. \square

Pet tenzora krivine analiziranih u [103], i još jedan - linearno nezavisan sa tih pet - zadati su sledećim jednačinama

$${}^0R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad (2.77)$$

$${}^1R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad (2.78)$$

$${}^2R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad (2.79)$$

$${}^3R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_Y X} Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z, \quad (2.80)$$

$${}^4R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_Y X} Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z, \quad (2.81)$$

$${}^5R(X, Y)Z = \frac{1}{2}(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z) - \frac{1}{2}(\nabla_{[X, Y]} Z + \nabla_{[X, Y]} Z). \quad (2.82)$$

GLAVA 2. KOVARIJANTNI IZVODI I RIČIJEVI IDENTITETI

U ovom razmatranju, posebno mesto zauzimaju semisimetrične afine koneksije. Tenzor torzije prostora $\mathbb{G}\mathbb{A}_N$ na kome je definisana semisimetrična afina koneksija je

$${}^1T(X, Y) = \pi(X)Y - \pi(Y)X. \quad (2.83)$$

2.2.1 Motivacija

Tenzori krivine prostora simetrične i nesimetrične afine koneksije razmatrali su mnogi autori. N. S. Sinjukov [110] i J. Mikeš sa svojom istraživačkom grupom [65] odredili su tenzore krivine prostora simetrične afine koneksije i Rimanovog prostora. L. P. Ajzenhart [28] je započeo istraživanje o prostorima nesimetrične afine koneksije. Ajzenhartov rad je nastavio S. M. Minčić [76, 77, 82] i mnogi drugi autori. Za razliku od S. M. Minčića, koji je dobio pseudotenzore krivine prostora nesimetrične afine koneksije, dokazano je [138] da pseudotenzori krivine nisu komponente krivine prostora snabdevenih nesimetričnom afinom koneksijom u smislu alternacije dvostrukih kovarijantnih izvoda [108].

U radu [103], tenzori krivine generalisanog Rimanovog prostora $\mathbb{G}\mathbb{R}_N$ u smislu definicije koju su zadali Ivanov i Zlatanović [39] su prikazani u funkciji tenzora krivine $R^g(X, Y)Z$ Rimanovog prostora \mathbb{R}_N u smislu Ajzenhartove definicije. Afina koneksija bez torzije $\nabla_X^g Y$ Rimanovog prostora se transformiše u afinu koneksiju bez torzije $\overset{0}{\nabla}_X Y$ pridruženog prostora $\overset{0}{\mathbb{R}}_N$ u smislu definicije koju su zadali Ivanov i Zlatanović.

Razlika $\overset{0}{\nabla}_X Y - \nabla_X^g Y = P(X, Y)$ je tenzor bez torzije tipa $(1, 2)$. Transformacija tenzora krivine $\overset{0}{R}(X, Y)Z$ na osnovu specijalnog oblika tenzora $P(X, Y)$ je razmotrena u [103].

2.2. RIČIJEVI IDENTITETI U OPERATORSKOM OBLIKU

2.2.2 Linearno nezavisni tenzori krivine

Na osnovu jednačina (2.72–2.76), dobija se

$$\begin{aligned} \overset{1}{\nabla}_X \overset{1}{\nabla}_Y Z &= \overset{0}{\nabla}_X \overset{0}{\nabla}_Y Z + \frac{1}{2}(\overset{0}{\nabla}_X \overset{1}{T})(Y, Z) \\ &\quad + \frac{1}{2}\overset{1}{T}(X, \overset{0}{\nabla}_Y Z) - \frac{1}{2}\overset{1}{T}(Y, \overset{0}{\nabla}_X Z) + \frac{1}{2}\overset{1}{T}(Z, \overset{0}{\nabla}_X Y) + \frac{1}{4}\overset{1}{T}(Y, \overset{1}{T}(X, Z)), \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} \overset{1}{\nabla}_X \overset{2}{\nabla}_Y Z &= \overset{0}{\nabla}_X \overset{0}{\nabla}_Y Z - \frac{1}{2}(\overset{0}{\nabla}_X \overset{1}{T})(Y, Z) \\ &\quad + \frac{1}{2}\overset{1}{T}(X, \overset{0}{\nabla}_Y Z) + \frac{1}{2}\overset{1}{T}(Y, \overset{0}{\nabla}_X Z) - \frac{1}{2}\overset{1}{T}(Z, \overset{0}{\nabla}_X Y) - \frac{1}{4}\overset{1}{T}(X, \overset{1}{T}(Y, Z)), \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} \overset{2}{\nabla}_X \overset{1}{\nabla}_Y Z &= \overset{0}{\nabla}_X \overset{0}{\nabla}_Y Z + \frac{1}{2}(\overset{0}{\nabla}_X \overset{1}{T})(Y, Z) \\ &\quad - \frac{1}{2}\overset{1}{T}(X, \overset{0}{\nabla}_Y Z) - \frac{1}{2}\overset{1}{T}(Y, \overset{0}{\nabla}_X Z) + \frac{1}{2}\overset{1}{T}(Z, \overset{0}{\nabla}_X Y) - \frac{1}{4}\overset{1}{T}(X, \overset{1}{T}(Y, Z)), \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} \overset{2}{\nabla}_X \overset{2}{\nabla}_Y Z &= \overset{0}{\nabla}_X \overset{0}{\nabla}_Y Z - \frac{1}{2}(\overset{0}{\nabla}_X \overset{1}{T})(Y, Z) \\ &\quad - \frac{1}{2}\overset{1}{T}(X, \overset{0}{\nabla}_Y Z) + \frac{1}{2}\overset{1}{T}(Y, \overset{0}{\nabla}_X Z) - \frac{1}{2}\overset{1}{T}(Z, \overset{0}{\nabla}_X Y) + \frac{1}{4}\overset{1}{T}(X, \overset{1}{T}(Y, Z)), \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} \overset{1}{\nabla}_{\overset{1}{\nabla}_X Y} Z &= \overset{0}{\nabla}_Z \overset{0}{\nabla}_X Y + \frac{1}{2}(\overset{0}{\nabla}_Z \overset{1}{T})(X, Y) + [\overset{1}{\nabla}_X Y, Z] \\ &\quad - \frac{1}{2}\overset{1}{T}(X, \overset{0}{\nabla}_Z Y) + \frac{1}{2}\overset{1}{T}(Y, \overset{0}{\nabla}_Z X) - \frac{1}{2}\overset{1}{T}(Z, \overset{0}{\nabla}_X Y) - \frac{1}{4}\overset{1}{T}(Z, \overset{1}{T}(X, Y)), \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\overset{2}{\nabla}_{\overset{2}{\nabla}_X Y} Z = \overset{1}{\nabla}_Z \overset{2}{\nabla}_X Y - [\overset{2}{\nabla}_X Y, Z], \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} \overset{1}{\nabla}_{\overset{2}{\nabla}_X Y} Z &= \overset{0}{\nabla}_Z \overset{0}{\nabla}_X Y - \frac{1}{2}(\overset{0}{\nabla}_Z \overset{1}{T})(X, Y) + [\overset{1}{\nabla}_Y X, Z] + [[X, Y], Z] \\ &\quad + \frac{1}{2}\overset{1}{T}(X, \overset{0}{\nabla}_Z Y) - \frac{1}{2}\overset{1}{T}(Y, \overset{0}{\nabla}_Z X) - \frac{1}{2}\overset{1}{T}(Z, \overset{0}{\nabla}_X Y) + \frac{1}{4}\overset{1}{T}(Z, \overset{1}{T}(X, Y)), \end{aligned} \quad (2.90)$$

GLAVA 2. KOVARIJANTNI IZVODI I RIČIJEVI IDENTITETI

$$\begin{aligned} \overset{2}{\nabla}_{\overset{1}{\nabla}_{XY}} Z &= \overset{0}{\nabla}_Z \overset{0}{\nabla}_X Y + \frac{1}{2} (\overset{0}{\nabla}_Z \overset{1}{T})(X, Y) + [\overset{1}{\nabla}_X Y, Z] \\ &\quad - \frac{1}{2} \overset{1}{T}(X, \overset{0}{\nabla}_Z Y) + \frac{1}{2} \overset{1}{T}(Y, \overset{0}{\nabla}_Z X) + \frac{1}{2} \overset{1}{T}(Z, \overset{0}{\nabla}_X Y) + \frac{1}{4} \overset{1}{T}(Z, \overset{1}{T}(X, Y)), \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$\overset{1}{T}(X, \overset{1}{T}(Y, Z)) = \overset{1}{\nabla}_X (\overset{1}{\nabla}_Y Z - \overset{1}{\nabla}_Z Y) - \overset{1}{\nabla}_{\overset{1}{\nabla}_Y Z} X + \overset{1}{\nabla}_{\overset{1}{\nabla}_Z Y} X, \quad (2.92)$$

$$\overset{0}{\nabla}_Z \overset{0}{\nabla}_Y X - \overset{0}{\nabla}_Z \overset{0}{\nabla}_X Y = -\overset{0}{\nabla}_Z [X, Y] = [[X, Y], Z] - \overset{0}{\nabla}_{[X, Y]} Z. \quad (2.93)$$

Važi naredna lema.

Lema 2.1. Tenzori krivine $\overset{1}{R}(X, Y)Z, \dots, \overset{5}{R}(X, Y)Z$ i tenzor krivine $\overset{0}{R}(X, Y)Z$ zadovoljavaju jednačine

$$\begin{aligned} \overset{1}{R}(X, Y)Z &= \overset{0}{R}(X, Y)Z + \frac{1}{2} (\overset{0}{\nabla}_X \overset{1}{T})(Y, Z) - \frac{1}{2} (\overset{0}{\nabla}_Y \overset{1}{T})(X, Z) \\ &\quad + \overset{1}{T}(X, \overset{0}{\nabla}_Y Z) - \overset{1}{T}(Y, \overset{0}{\nabla}_X Z) - \overset{1}{T}([X, Y], Z) \\ &\quad + \frac{1}{4} \overset{1}{T}(X, \overset{1}{T}(Y, Z)) - \frac{1}{4} \overset{1}{T}(Y, \overset{1}{T}(X, Z)) \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} \overset{2}{R}(X, Y)Z &= \overset{0}{R}(X, Y)Z - \frac{1}{2} (\overset{0}{\nabla}_X \overset{1}{T})(Y, Z) + \frac{1}{2} (\overset{0}{\nabla}_Y \overset{1}{T})(X, Z) \\ &\quad - \overset{1}{T}(X, \overset{0}{\nabla}_Y Z) + \overset{1}{T}(Y, \overset{0}{\nabla}_X Z) + \overset{1}{T}([X, Y], Z) \\ &\quad + \frac{1}{4} \overset{1}{T}(X, \overset{1}{T}(Y, Z)) - \frac{1}{4} \overset{1}{T}(Y, \overset{1}{T}(X, Z)) \end{aligned} \quad (2.95)$$

$$\begin{aligned} \overset{3}{R}(X, Y)Z &= \overset{0}{R}(X, Y)Z + \frac{1}{2} (\overset{0}{\nabla}_X \overset{1}{T})(Y, Z) + \frac{1}{2} (\overset{0}{\nabla}_Y \overset{1}{T})(X, Z) \\ &\quad - \overset{1}{T}(X, \overset{0}{\nabla}_Y Z) - \overset{1}{T}(Y, \overset{0}{\nabla}_X Z) - \overset{1}{T}([X, Y], Z) \\ &\quad - \frac{1}{4} \overset{1}{T}(X, \overset{1}{T}(Y, Z)) + \frac{1}{4} \overset{1}{T}(Y, \overset{1}{T}(X, Z)) - \frac{1}{2} \overset{1}{T}(Z, \overset{1}{T}(X, Y)), \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} \overset{4}{R}(X, Y)Z &= \overset{0}{R}(X, Y)Z + \frac{1}{2} (\overset{0}{\nabla}_X \overset{1}{T})(Y, Z) + \frac{1}{2} (\overset{0}{\nabla}_Y \overset{1}{T})(X, Z) \\ &\quad - \overset{1}{T}(X, \overset{0}{\nabla}_Y Z) - \overset{1}{T}(Y, \overset{0}{\nabla}_X Z) - \overset{1}{T}([X, Y], Z) \\ &\quad - \frac{1}{4} \overset{1}{T}(X, \overset{1}{T}(Y, Z)) + \frac{1}{4} \overset{1}{T}(Y, \overset{1}{T}(X, Z)) + \frac{1}{2} \overset{1}{T}(Z, \overset{1}{T}(X, Y)), \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$\overset{5}{R}(X, Y)Z = \overset{0}{R}(X, Y)Z + \frac{1}{4} \overset{1}{T}(X, \overset{1}{T}(Y, Z)) + \frac{1}{4} \overset{1}{T}(Y, \overset{1}{T}(X, Z)), \quad (2.98)$$

2.2. RIČIJEVI IDENTITETI U OPERATORSKOM OBLIKU

Posledica 2.3. *Ako je $R(X, Y)Z = k_0 \overset{0}{R}(X, Y)Z + k_1 \overset{1}{R}(X, Y)Z + k_2 \overset{2}{R}(X, Y)Z + k_3 \overset{3}{R}(X, Y)Z + k_4 \overset{4}{R}(X, Y)Z + k_5 \overset{5}{R}(X, Y)Z$, za $k_0, \dots, k_5 \in \mathbb{R}$, jednačine (2.94–2.98) se transformišu u*

$$\begin{aligned}
 \overset{1}{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z \\
 &+ \frac{1}{2}(1 - \tilde{k}_1)[(\overset{0}{\nabla}_X \overset{1}{T})(Y, Z) - 2\overset{1}{T}(Y, \overset{0}{\nabla}_X Z) - 2\overset{1}{T}([X, Y], Z)] \\
 &- \frac{1}{2}(1 - \tilde{k}_2)[(\overset{0}{\nabla}_Y \overset{1}{T})(X, Z) - 2\overset{1}{T}(X, \overset{0}{\nabla}_Y Z)] + \frac{1}{2}\tilde{k}_5 \overset{1}{T}(Z, \overset{1}{T}(X, Y)) \\
 &+ \frac{1}{4}(1 - \tilde{k}_3)\overset{1}{T}(X, \overset{1}{T}(Y, Z)) - \frac{1}{4}(1 - \tilde{k}_4)\overset{1}{T}(Y, \overset{1}{T}(X, Z)),
 \end{aligned} \tag{2.99}$$

$$\begin{aligned}
 \overset{2}{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z \\
 &- \frac{1}{2}(1 + \tilde{k}_1)[(\overset{0}{\nabla}_X \overset{1}{T})(Y, Z) - 2\overset{1}{T}(Y, \overset{0}{\nabla}_X Z) - 2\overset{1}{T}([X, Y], Z)] \\
 &+ \frac{1}{2}(1 + \tilde{k}_2)[(\overset{0}{\nabla}_Y \overset{1}{T})(X, Z) - 2\overset{1}{T}(X, \overset{0}{\nabla}_Y Z)] + \frac{1}{2}\tilde{k}_5 \overset{1}{T}(Z, \overset{1}{T}(X, Y)) \\
 &+ \frac{1}{4}(1 - \tilde{k}_3)\overset{1}{T}(X, \overset{1}{T}(Y, Z)) - \frac{1}{4}(1 - \tilde{k}_4)\overset{1}{T}(Y, \overset{1}{T}(X, Z)),
 \end{aligned} \tag{2.100}$$

$$\begin{aligned}
 \overset{3}{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z \\
 &+ \frac{1}{2}(1 - \tilde{k}_1)[(\overset{0}{\nabla}_X \overset{1}{T})(Y, Z) - 2\overset{1}{T}(Y, \overset{0}{\nabla}_X Z) - 2\overset{1}{T}([X, Y], Z)] \\
 &+ \frac{1}{2}(1 + \tilde{k}_2)[(\overset{0}{\nabla}_Y \overset{1}{T})(X, Z) - 2\overset{1}{T}(X, \overset{0}{\nabla}_Y Z)] \\
 &- \frac{1}{2}(1 - \tilde{k}_5)\overset{1}{T}(Z, \overset{1}{T}(X, Y)) \\
 &- \frac{1}{4}(1 + \tilde{k}_3)\overset{1}{T}(X, \overset{1}{T}(Y, Z)) + \frac{1}{4}(1 + \tilde{k}_4)\overset{1}{T}(Y, \overset{1}{T}(X, Z)),
 \end{aligned} \tag{2.101}$$

GLAVA 2. KOVARIJANTNI IZVODI I RIČIJEVI IDENTITETI

$$\begin{aligned}
{}^4\bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z \\
&+ \frac{1}{2}(1 - \tilde{k}_1)[({}^0\nabla_X T)(Y, Z) - 2T(Y, {}^0\nabla_X Z) - 2T([X, Y], Z)] \\
&+ \frac{1}{2}(1 + \tilde{k}_2)[({}^0\nabla_Y T)(X, Z) - 2T(X, {}^0\nabla_Y Z)] \\
&+ \frac{1}{2}(1 + \tilde{k}_5)T(Z, T(X, Y)) \\
&- \frac{1}{4}(1 + \tilde{k}_3)T(X, T(Y, Z)) + \frac{1}{4}(1 + \tilde{k}_4)T(Y, T(X, Z)),
\end{aligned} \tag{2.102}$$

$$\begin{aligned}
{}^5\bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z \\
&- \frac{1}{2}\tilde{k}_1[({}^0\nabla_X)(Y, Z) - 2T(Y, {}^0\nabla_X Z) - 2T([X, Y], Z)] \\
&+ \frac{1}{2}\tilde{k}_2[({}^0\nabla_Y T)(X, Z) - 2T(X, {}^0\nabla_Y Z)] + \frac{1}{2}\tilde{k}_5T(Z, T(X, Y)) \\
&+ \frac{1}{4}(1 - \tilde{k}_3)T(X, T(Y, Z)) + \frac{1}{4}(1 + \tilde{k}_4)T(Y, T(X, Z)),
\end{aligned} \tag{2.103}$$

za $\tilde{k}_1 = k_1 - k_2 + k_3 + k_4$, $\tilde{k}_2 = k_1 - k_2 - k_3 - k_4$, $\tilde{k}_3 = k_1 + k_2 - k_3 - k_4 + k_5$,
 $\tilde{k}_4 = k_1 + k_2 - k_3 - k_4 - k_5$, $\tilde{k}_5 = k_3 - k_4$.

Propozicija 2.4. *Važe naredne jednačine*

$$\begin{aligned}
({}^0\nabla_X T)(Y, Z) &= ({}^1\nabla_X T)(Y, Z) - \frac{1}{2}T(X, T(Y, Z)) \\
&+ \frac{1}{2}T(Y, T(X, Z)) - \frac{1}{2}T(Z, T(X, Y)),
\end{aligned} \tag{2.104}$$

$$\begin{aligned}
({}^0\nabla_X T)(Y, Z) &= ({}^2\nabla_X T)(Y, Z) - \frac{1}{2}T(X, T(Y, Z)) \\
&- \frac{1}{2}T(Y, T(X, Z)) + \frac{1}{2}T(Z, T(X, Y)).
\end{aligned} \tag{2.105}$$

Dokaz. Dokažimo tačnost jednačine (2.104). Važe naredne jednakosti.

$$\begin{aligned}
{}^0\nabla_X \{T(Y, Z)\} &= ({}^0\nabla_X T)(Y, Z) - T({}^0\nabla_X Y, Z) - T(Y, {}^0\nabla_X Z), \\
{}^1\nabla_X \{T(Y, Z)\} &= ({}^1\nabla_X T)(Y, Z) - T({}^1\nabla_X Y, Z) - T(Y, {}^1\nabla_X Z).
\end{aligned}$$

2.2. RIČIJEVI IDENTITETI U OPERATORSKOM OBLIKU

Na osnovu ta dva prikaza, linearnosti tenzora torzije $\overset{1}{T}(X, Y)$ i razlike $\overset{1}{\nabla}_X Y - \overset{0}{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}\overset{1}{T}(X, Y)$, kompletira se dokaz da je zadovoljena jednačina (2.104).

Na isti način, na osnovu jednakosti

$$\begin{aligned}\overset{0}{\nabla}_X \{ \overset{2}{T}(Y, Z) \} &= (\overset{0}{\nabla}_X \overset{2}{T})(Y, Z) - \overset{2}{T}(\overset{0}{\nabla}_X Y, Z) - \overset{2}{T}(Y, \overset{0}{\nabla}_X Z), \\ \overset{2}{\nabla}_X \{ \overset{2}{T}(Y, Z) \} &= (\overset{2}{\nabla}_X \overset{2}{T})(Y, Z) - \overset{2}{T}(\overset{2}{\nabla}_X Y, Z) - \overset{2}{T}(Y, \overset{2}{\nabla}_X Z), \\ \overset{2}{\nabla}_X Y &= \overset{0}{\nabla}_X Y - \frac{1}{2}\overset{1}{T}(X, Y) = \overset{0}{\nabla}_X Y + \frac{1}{2}\overset{2}{T}(X, Y),\end{aligned}$$

dokazuje se da važi jednačina (2.105). □

2.2.3 Tenzori krivine Rimanovog i prostora nesimetrične affine koneksije

Dokažimo naredna tvrđenja.

Propozicija 2.5. *Ako je $\overset{0}{\nabla}_X Y = \nabla_X^g Y + P(X, Y)$, $P(X, Y) = P(Y, X)$, naredne jednačine su zadovoljene*

$$\begin{aligned}(\overset{0}{\nabla}_X \overset{1}{T})(Y, Z) &= (\nabla_X^g \overset{1}{T})(Y, Z) + P(X, \overset{1}{T}(Y, Z)) \\ &\quad + \overset{1}{T}(Y, P(X, Z)) - \overset{1}{T}(Z, P(X, Y)),\end{aligned}\tag{2.106}$$

$$\overset{1}{T}(X, \overset{0}{\nabla}_Y Z) = \overset{1}{T}(X, \nabla_Y^g Z) + \overset{1}{T}(X, P(Y, Z)).\tag{2.107}$$

Dokaz. Jednačina (2.106) važi na osnovu jednakosti

$$\begin{aligned}\overset{0}{\nabla}_X \{ \overset{1}{T}(Y, Z) \} - \nabla_X^g \{ \overset{1}{T}(Y, Z) \} &= (\overset{0}{\nabla}_X \overset{1}{T})(Y, Z) - \overset{1}{T}(\overset{0}{\nabla}_X Y, Z) - \overset{1}{T}(Y, \overset{0}{\nabla}_X Z) \\ &\quad - (\nabla_X^g \overset{1}{T})(Y, Z) + \overset{1}{T}(\nabla_X^g Y, Z) + \overset{1}{T}(Y, \nabla_X^g Z), \\ \overset{0}{\nabla}_X Y - \nabla_X^g Y &= P(X, Y).\end{aligned}$$

Jednačina (2.107) je ekvivalentna uslovu ove propozicije. □

GLAVA 2. KOVARIJANTNI IZVODI I RIČIJEVI IDENTITETI

Teorema 2.7. Tenzori krivine $\overset{0}{R}(X, Y)Z, \dots, \overset{5}{R}(X, Y)Z$ zadati jednačinama (2.77-2.82) i tenzor krivine Rimanovog prostora $R^g(X, Y)Z$ zadat jednačinom (2.71) zadovoljavaju jednačine

$$\overset{0}{R}(X, Y)Z = R^g(X, Y)Z + \mathcal{P}(X, Y, Z), \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned} \overset{1}{R}(X, Y)Z &= R^g(X, Y)Z + \mathcal{P}(X, Y, Z) + \frac{1}{2}(\nabla_X^g \overset{1}{T})(Y, Z) - \frac{1}{2}(\nabla_Y^g \overset{1}{T})(X, Z) \\ &+ \frac{1}{2}P(X, \overset{1}{T}(Y, Z)) - \frac{1}{2}P(Y, \overset{1}{T}(X, Z)) + \overset{1}{T}(X, \nabla_Y^g Z) - \overset{1}{T}(Y, \nabla_X^g Z) \\ &+ \frac{1}{2}\overset{1}{T}(X, P(Y, Z)) - \frac{1}{2}\overset{1}{T}(Y, P(X, Z)) - \overset{1}{T}([X, Y], Z) \\ &+ \frac{1}{4}\overset{1}{T}(X, \overset{1}{T}(Y, Z)) - \frac{1}{4}\overset{1}{T}(Y, \overset{1}{T}(X, Z)), \end{aligned} \quad (2.109)$$

$$\begin{aligned} \overset{2}{R}(X, Y)Z &= R^g(X, Y)Z + \mathcal{P}(X, Y, Z) - \frac{1}{2}(\nabla_X^g \overset{1}{T})(Y, Z) + \frac{1}{2}(\nabla_Y^g \overset{1}{T})(X, Z) \\ &- \frac{1}{2}P(X, \overset{1}{T}(Y, Z)) + \frac{1}{2}P(Y, \overset{1}{T}(X, Z)) - \overset{1}{T}(X, \nabla_Y^g Z) + \overset{1}{T}(Y, \nabla_X^g Z) \\ &- \frac{1}{2}\overset{1}{T}(X, P(Y, Z)) + \frac{1}{2}\overset{1}{T}(Y, P(X, Z)) + \overset{1}{T}([X, Y], Z) \\ &+ \frac{1}{4}\overset{1}{T}(X, \overset{1}{T}(Y, Z)) - \frac{1}{4}\overset{1}{T}(Y, \overset{1}{T}(X, Z)), \end{aligned} \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned} \overset{3}{R}(X, Y)Z &= R^g(X, Y)Z + \mathcal{P}(X, Y, Z) + \frac{1}{2}(\nabla_X^g \overset{1}{T})(Y, Z) + \frac{1}{2}(\nabla_Y^g \overset{1}{T})(X, Z) \\ &- \overset{1}{T}(X, \nabla_Y^g Z) - \overset{1}{T}(Y, \nabla_X^g Z) - \overset{1}{T}([X, Y], Z) + \overset{1}{T}(P(X, Y), Z) \\ &- \frac{1}{2}\overset{1}{T}(X, P(Y, Z)) - \frac{1}{2}\overset{1}{T}(Y, P(X, Z)) + \frac{1}{2}P(X, \overset{1}{T}(Y, Z)) \\ &+ \frac{1}{2}P(Y, \overset{1}{T}(X, Z)) - \frac{1}{4}\overset{1}{T}(X, \overset{1}{T}(Y, Z)) + \frac{1}{4}\overset{1}{T}(Y, \overset{1}{T}(X, Z)) \\ &- \frac{1}{2}\overset{1}{T}(Z, \overset{1}{T}(X, Y)), \end{aligned} \quad (2.111)$$

2.2. RIČIJEVI IDENTITETI U OPERATORSKOM OBLIKU

$$\begin{aligned}
\overset{4}{R}(X, Y)Z &= R^g(X, Y)Z + \mathcal{P}(X, Y, Z) + \frac{1}{2}(\nabla_X^g \overset{1}{T})(Y, Z) + \frac{1}{2}(\nabla_Y^g \overset{1}{T})(X, Z) \\
&\quad - \overset{1}{T}(X, \nabla_Y^g Z) - \overset{1}{T}(Y, \nabla_X^g Z) - \overset{1}{T}([X, Y], Z) + \overset{1}{T}(P(X, Y), Z) \\
&\quad - \frac{1}{2}\overset{1}{T}(X, P(Y, Z)) - \frac{1}{2}\overset{1}{T}(Y, P(X, Z)) + \frac{1}{2}P(X, \overset{1}{T}(Y, Z)) \\
&\quad + \frac{1}{2}P(Y, \overset{1}{T}(X, Z)) - \frac{1}{4}\overset{1}{T}(X, \overset{1}{T}(Y, Z)) + \frac{1}{4}\overset{1}{T}(Y, \overset{1}{T}(X, Z)) \\
&\quad + \frac{1}{2}\overset{1}{T}(Z, \overset{1}{T}(X, Y)),
\end{aligned} \tag{2.112}$$

$$\overset{5}{R}(X, Y)Z = R^g(X, Y)Z + \mathcal{P}(X, Y, Z) + \frac{1}{4}\overset{1}{T}(X, \overset{1}{T}(Y, Z)) + \frac{1}{4}\overset{1}{T}(Y, \overset{1}{T}(X, Z)), \tag{2.113}$$

gde je

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(X, Y, Z) &= (\nabla_X^g P)(Y, Z) - (\nabla_Y^g P)(X, Z) + 2P(X, \nabla_Y^g Z) - 2P(Y, \nabla_X^g Z) \\
&\quad - 2P(Z, [X, Y]) + P(X, P(Y, Z)) - P(Y, P(X, Z)).
\end{aligned} \tag{2.114}$$

Dokaz. Dokazaćemo jednačine (2.108, 2.109). Ostale se dokazuju analogno.

Na osnovu jednakosti $\overset{0}{\nabla}_X Y = \nabla_X^g Y + P(X, Y)$, $P(X, Y) = P(Y, X)$, nakon jednostavnog izračunavanja, dobija se da važi

$$\begin{aligned}
\overset{0}{\nabla}_X \overset{0}{\nabla}_Y Z &= \nabla_X^g \nabla_Y^g Z + P(X, \nabla_Y^g Z) - P(Y, \nabla_X^g Z) \\
&\quad - P(Z, \nabla_X^g Y) + P(X, P(Y, Z)), \\
\overset{0}{\nabla}_{[X, Y]} Z &= \nabla_{[X, Y]}^g Z + P([X, Y], Z).
\end{aligned}$$

Na osnovu tih jednakosti i jednačina (2.71, 2.77), sledi da je

$$\begin{aligned}
\overset{0}{\nabla}_X \overset{0}{\nabla}_Y Z - \overset{0}{\nabla}_Y \overset{0}{\nabla}_X Z - \overset{0}{\nabla}_{[X, Y]} Z &= \nabla_X^g \nabla_Y^g Z - \nabla_Y^g \nabla_X^g Z \\
&\quad - \nabla_{[X, Y]}^g Z + \mathcal{P}(X, Y, Z),
\end{aligned}$$

gde je $\mathcal{P}(X, Y, Z)$ zadato jednačinom (2.114). Na taj način, dokazana je jednačina (2.108).

GLAVA 2. KOVARIJANTNI IZVODI I RIČIJEVI IDENTITETI

Nakon zamene jednakosti (2.106, 2.107, 2.108) u jednačinu (2.94), kompletira se dokaz ove teoreme. \square

2.2.3.1 Tenzori krivine i semi-simetrična koneksija

U slučaju semisimetrične affine koneksije, tenzor torzije $\overset{1}{T}(X, Y)$ zapisan je u formi (2.83). Važe naredne propozicije.

Propozicija 2.6. *U slučaju affine koneksije $\overset{0}{\nabla}$ i tenzora torzije $\overset{1}{T}(X, Y)$, prostora semisimetrične affine koneksije, zadatog jednačinom (2.83), važe naredne jednačine*

$$(\overset{0}{\nabla}_X \overset{1}{T})(Y, Z) = (\overset{0}{\nabla}_X \pi)(Y)Z - (\overset{0}{\nabla}_X \pi)(Z)Y + 2\pi(Y)\overset{0}{\nabla}_X Z - 2\pi(Z)\overset{0}{\nabla}_X Y, \quad (2.115)$$

$$P(X, \overset{1}{T}(Y, Z)) = P(X, \pi(Y))P(Z) - P(X, \pi(Y))P(Z), \quad (2.116)$$

$$\overset{1}{T}(X, P(Y, Z)) = \pi(X)P(Y, Z) - \pi(P(Y, Z))X, \quad (2.117)$$

$$\overset{1}{T}(X, \overset{0}{\nabla}_Y Z) = \pi(X)\overset{0}{\nabla}_Y Z - \pi(\overset{0}{\nabla}_Y Z)X, \quad (2.118)$$

$$\overset{1}{T}([X, Y], Z) = \pi([X, Y])Z - \pi(Z)[X, Y], \quad (2.119)$$

$$\overset{1}{T}(X, \overset{1}{T}(Y, Z)) = \pi(X)\pi(Y)Z - \pi(X)\pi(Z)Y - \pi^2(Y)\pi(Z)X + \pi^2(Z)\pi(Y)X, \quad (2.120)$$

gde je $\pi^2(X) = \pi(\pi(X))$. \square

Propozicija 2.7. *U slučaju affine koneksije ∇^g i tenzora torzije $\overset{1}{T}(X, Y)$, prostora semisimetrične affine koneksije, zadatog jednačinom (2.83), važe naredne jednačine*

$$(\overset{0}{\nabla}_X \pi)(Y) = (\nabla_X^g \pi)(Y) + \pi(P(X, Y)) - P(X, \pi(Y)), \quad (2.121)$$

$$(\nabla_X^g \overset{1}{T})(Y, Z) = (\nabla_X^g \pi)(Y)Z - (\nabla_X^g \pi)(Z)Y + 2\pi(Y)\nabla_X^g Z - 2\pi(Z)\nabla_X^g Y, \quad (2.122)$$

$$\overset{1}{T}(X, \nabla_Y^g Z) = \pi(X)\nabla_Y^g Z - \pi(\nabla_Y^g Z). \quad (2.123)$$

2.2. RIČIJEVI IDENTITETI U OPERATORSKOM OBLIKU

Nakon zamene jednakosti (2.115-2.123) u jednačine (2.94-2.98), upotpunjuje se dokaz sledeće teoreme.

Teorema 2.8. *Neka je ∇ , $\nabla_X Y = \overset{0}{\nabla}_X Y + \overset{1}{T}(X, Y)$ semisimetrična afina koneksija, gde je $\overset{1}{T}(X, Y)$ tenzor torzije tipa (1, 2), i neka je $\overset{0}{\nabla}$ afina koneksija koja odgovara simetričnom metričkom tenzoru g . Ako je $T(X, Y) = \pi(X)Y - \pi(Y)X$ tenzor torzije afine koneksije ∇ , tada su tenzori krivine $\overset{1}{R}(X, Y)Z, \dots, \overset{5}{R}(X, Y)Z$ zadati jednačinama (2.78-2.82) prikazani na sledeći način*

$$\begin{aligned} \overset{1}{R}(X, Y)Z &= \overset{0}{R}(X, Y)Z + \pi(Z)[X, Y] \\ &+ \frac{3}{2}(\pi(X)\overset{0}{\nabla}_Y Z - \pi(Y)\overset{0}{\nabla}_X Z) - \pi([X, Y])Z \\ &- \frac{3}{2}\left\{\pi(\overset{0}{\nabla}_Y Z) - \frac{1}{6}[\pi(Y)(\pi^2(Z) + \pi(Z)) - \pi^2(Y)\pi(Z)]\right\}X \\ &+ \frac{3}{2}\left\{\pi(\overset{0}{\nabla}_X Z) - \frac{1}{6}[\pi(X)(\pi^2(Z) + \pi(Z)) - \pi^2(X)\pi(Z)]\right\}Y, \end{aligned} \quad (2.124)$$

$$\begin{aligned} \overset{2}{R}(X, Y)Z &= \overset{0}{R}(X, Y)Z - \pi(Z)[X, Y] \\ &- \frac{3}{2}(\pi(X)\overset{0}{\nabla}_Y Z - \pi(Y)\overset{0}{\nabla}_X Z) + \pi([X, Y])Z \\ &+ \frac{3}{2}\left\{\pi(\overset{0}{\nabla}_Y Z) + \frac{1}{6}[\pi(Y)(\pi^2(Z) + \pi(Z)) - \pi^2(Y)\pi(Z)]\right\}X \\ &- \frac{3}{2}\left\{\pi(\overset{0}{\nabla}_X Z) + \frac{1}{6}[\pi(X)(\pi^2(Z) + \pi(Z)) - \pi^2(X)\pi(Z)]\right\}Y, \end{aligned} \quad (2.125)$$

$$\begin{aligned} \overset{3}{R}(X, Y)Z &= \overset{0}{R}(X, Y)Z - 2\pi(Z)\overset{0}{\nabla}_X Y + 2\pi(Z)[X, Y] \\ &+ \frac{1}{2}\left\{(\overset{0}{\nabla}_X \pi)(Y) + (\overset{0}{\nabla}_Y \pi)(X) - 2\pi([X, Y])\right. \\ &\quad \left. - \pi^2(X)\pi(Y) + \pi^2(Y)\pi(X)\right\}Z \end{aligned}$$

GLAVA 2. KOVARIJANTNI IZVODI I RIČIJEVI IDENTITETI

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}\{(\overset{0}{\nabla}_Y\pi)(Z) - 2\pi(\overset{0}{\nabla}_Y Z) \\
 & \quad - \frac{1}{2}[\pi(Z)(\pi^2(Y) - 3\pi(Y)) - \pi^2(Z)\pi(Y)]\}X \\
 & \hspace{15em} (2.126)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}\{(\overset{0}{\nabla}_X\pi)(Z) - 2\pi(\overset{0}{\nabla}_X Z) \\
 & \quad + \frac{1}{2}[\pi(Z)(\pi^2(X) - 3\pi(X)) - \pi^2(Z)\pi(X)]\}Y, \\
 & \overset{4}{R}(X, Y)Z = \overset{0}{R}(X, Y)Z - 2\pi(Z)\overset{0}{\nabla}_X Y + 2\pi(Z)[X, Y] \\
 & \quad + \frac{1}{2}\{(\overset{0}{\nabla}_X\pi)(Y) + (\overset{0}{\nabla}_Y\pi)(X) - 2\pi([X, Y]) \\
 & \quad \quad + \pi^2(X)\pi(Y) - \pi^2(Y)\pi(X)\}Z \\
 & -\frac{1}{2}\{(\overset{0}{\nabla}_Y\pi)(Z) - 2\pi(\overset{0}{\nabla}_Y Z) \\
 & \hspace{15em} (2.127)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \quad - \frac{1}{2}[\pi(Z)(\pi^2(Y) + \pi(Y)) - \pi^2(Z)\pi(Y)]\}X \\
 & -\frac{1}{2}\{(\overset{0}{\nabla}_X\pi)(Z) - 2\pi(\overset{0}{\nabla}_X Z) \\
 & \quad + \frac{1}{2}[\pi(Z)(\pi^2(X) + \pi(X)) - \pi^2(Z)\pi(X)]\}Y, \\
 & \overset{5}{R}(X, Y)Z = \overset{0}{R}(X, Y)Z + \frac{1}{2}\pi(X)\pi(Y)Z \\
 & \quad - \frac{1}{4}[\pi^2(Y)\pi(Z) - \pi(Y)(\pi^2(Z) + \pi(Z))]X \\
 & \quad - \frac{1}{4}[\pi^2(Y)\pi(Z) - \pi(X)(\pi^2(Z) + \pi(Z))]Y, \\
 & \hspace{15em} (2.128)
 \end{aligned}$$

za $\pi^2(X) = \pi(\pi(X))$. □

Kako je $\overset{0}{\nabla}_X Y = \nabla_X^g Y + P(X, Y)$, gde je $\mathcal{P}(X, Y)$ tenzor tipa $(1, 2)$ i kako važi jednakost $\overset{0}{R}(X, Y)Z = R^g(X, Y)Z + \mathcal{P}(X, Y, Z)$ gde je $\mathcal{P}(X, Y, Z)$ tenzor zadat jednačinom (2.114), važi naredna teorema.

Teorema 2.9. *Neka je ∇ , $\nabla_X Y = \nabla_X^g Y + P(X, Y) + \overset{1}{T}(X, Y)$ semisimetrična afina koneksija, gde je $P(X, Y)$ simetrični tenzor i $\overset{1}{T}(X, Y)$ tenzor torzije, oba tipa $(1, 2)$, i neka je ∇^g Rimanova afina koneksija koja odgovara simetričnom metričkom tenzoru g . Ako je $T(X, Y) = \pi(X)Y - \pi(Y)X$ tenzor torzije afine koneksije ∇ , tada su tenzori krivine $\overset{1}{R}(X, Y)Z, \dots, \overset{5}{R}(X, Y)Z$ zadati jednačinama*

2.2. RIČIJEVI IDENTITETI U OPERATORSKOM OBLIKU

(2.78-2.82) zapisani kao

$$\begin{aligned}
 \overset{1}{R}(X, Y)Z &= R^g(X, Y)Z + P(X, Y, Z) + \pi(Z)[X, Y] - \pi([X, Y])Z \\
 &\quad - \frac{3}{2}\{\pi(\nabla_Y^g Z) + \pi(P(Y, Z)) \\
 &\quad\quad + \frac{1}{6}[\pi^2(Y)\pi(Z) - \pi(Y)(\pi^2(Z) + \pi(Z))]\}X \\
 &\quad + \frac{3}{2}\{\pi(\nabla_X^g Z) + \pi(P(X, Z)) \\
 &\quad\quad + \frac{1}{6}[\pi^2(X)\pi(Z) - \pi(X)(\pi^2(Z) + \pi(Z))]\}Y \\
 &\quad + \frac{3}{2}[\pi(X)(\nabla_Y^g Z + P(Y, Z)) - \pi(Y)(\nabla_X^g Z + P(X, Z))],
 \end{aligned} \tag{2.129}$$

$$\begin{aligned}
 \overset{2}{R}(X, Y)Z &= R^g(X, Y)Z + \mathcal{P}(X, Y, Z) - \pi(Z)[X, Y] + \pi([X, Y])Z \\
 &\quad + \frac{3}{2}\{\pi(\nabla_Y^g Z) + \pi(P(Y, Z)) \\
 &\quad\quad - \frac{1}{6}[\pi^2(Y)\pi(Z) - \pi(Y)(\pi^2(Z) + \pi(Z))]\}X \\
 &\quad - \frac{3}{2}\{\pi(\nabla_X^g Z) + \pi(P(X, Z)) \\
 &\quad\quad - \frac{1}{6}[\pi^2(X)\pi(Z) - \pi(X)(\pi^2(Z) + \pi(Z))]\}Y \\
 &\quad - \frac{3}{2}[\pi(X)(\nabla_Y^g Z + P(Y, Z)) - \pi(Y)(\nabla_X^g Z + P(X, Z))],
 \end{aligned} \tag{2.130}$$

$$\begin{aligned}
 \overset{3}{R}(X, Y)Z &= R^g(X, Y)Z + \mathcal{P}(X, Y, Z) \\
 &\quad - 2\pi(Z)(\nabla_Y^g X + P(X, Y)) + 2\pi(Z)[X, Y] \\
 &\quad + \frac{1}{2}\{(\nabla_X^g \pi)(Y) + (\nabla_Y^g \pi)(X) - 2\pi([X, Y]) + 2\pi(P(X, Y)) \\
 &\quad\quad + P(X, \pi(Y)) + P(Y, \pi(X)) - \pi^2(X)\pi(Y) + \pi^2(Y)\pi(X)\}Z
 \end{aligned}$$

GLAVA 2. KOVARIJANTNI IZVODI I RIČIJEVI IDENTITETI

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \left\{ (\nabla_Y^g \pi)(Z) - 2\pi(\nabla_Y^g Z) - \pi(P(Y, Z)) + P(Y, \pi(X)) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} [\pi(Z)(\pi^2(Y) - 3\pi(Y)) - \pi^2(Z)\pi(Y)] \right\} X \\
 & -\frac{1}{2} \left\{ (\nabla_X^g \pi)(Z) - 2\pi(\nabla_X^g Z) - \pi(P(X, Z)) + P(X, \pi(Z)) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} [(\pi^2(X) - 3\pi(X))\pi(Z) - \pi^2(Z)\pi(X)] \right\} Y,
 \end{aligned} \tag{2.131}$$

$$\begin{aligned}
 {}^4 R(X, Y)Z &= R^g(X, Y)Z + \mathcal{P}(X, Y, Z) \\
 & - 2\pi(Z)(\nabla_Y^g X + P(X, Y)) + 2\pi(Z)[X, Y] \\
 & + \frac{1}{2} \left\{ (\nabla_X^g \pi)(Y) + (\nabla_Y^g \pi)(X) - 2\pi([X, Y]) + 2\pi(P(X, Y)) \right. \\
 & \quad \left. + P(X, \pi(Y)) + P(Y, \pi(X)) + \pi^2(X)\pi(Y) - \pi^2(Y)\pi(X) \right\} Z \\
 & - \frac{1}{2} \left\{ (\nabla_Y^g \pi)(Z) - 2\pi(\nabla_Y^g Z) - \pi(P(Y, Z)) + P(Y, \pi(X)) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} [\pi(Z)(\pi^2(Y) + \pi(Y)) - \pi^2(Z)\pi(Y)] \right\} X \\
 & - \frac{1}{2} \left\{ (\nabla_X^g \pi)(Z) - 2\pi(\nabla_X^g Z) - \pi(P(X, Z)) + P(X, \pi(Z)) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} [(\pi^2(X) + \pi(X))\pi(Z) - \pi^2(Z)\pi(X)] \right\} Y,
 \end{aligned} \tag{2.132}$$

$$\begin{aligned}
 {}^5 \hat{R}(X, Y)Z &= R^g(X, Y)Z + \mathcal{P}(X, Y, Z) + \frac{1}{2}\pi(X)\pi(Y)Z \\
 & - \frac{1}{4} \left\{ \pi^2(Y)\pi(Z) - \pi(Y)(\pi^2(Z) + \pi(Z)) \right\} X \\
 & - \frac{1}{4} \left\{ \pi^2(X)\pi(Z) - \pi(X)(\pi^2(Z) + \pi(Z)) \right\} Y,
 \end{aligned} \tag{2.133}$$

gde je $\pi^2(X) = \pi(\pi(X))$ i tenzor $\mathcal{P}(X, Y, Z)$ zadat jednačinom (2.114). \square

2.2.3.2 Još jedan prikaz linearno nezavisnih tenzora krivine

Neka je $Tr\{X \rightarrow \pi(X)\} = \pi$. Kako je $Tr\{U \rightarrow [U, X]\} = Tr\{U \rightarrow [X, U]\} = 0$, i $\overset{0}{\nabla}_X Y - \overset{0}{\nabla}_Y X = [X, Y]$, važiće jednakosti $Tr\{U \rightarrow \overset{0}{\nabla}_U X\} = Tr\{U \rightarrow \overset{0}{\nabla}_X U\} = \overset{0}{\nabla} X$.

2.2. RIČIJEVI IDENTITETI U OPERATORSKOM OBLIKU

Dokažimo naredne teoreme.

Teorema 2.10. *Neka je $\nabla, \nabla_X Y = \overset{0}{\nabla}_X Y + \overset{1}{T}(X, Y)$ semisimetrična afina koneksija, gde je tenzor torzije $\overset{1}{T}(X, Y)$ tipa (1, 2), i neka je $\overset{0}{\nabla}$ afina koneksija koja odgovara simetričnom metričkom tenzoru g . Ako je $T(X, Y) = \pi(X)Y - \pi(Y)X$ tenzor torzije afine koneksije ∇ , tada se tenzori krivine $\overset{1}{R}(X, Y)Z, \dots, \overset{5}{R}(X, Y)Z$ zadati jednačinama (2.78-2.82) predstavljaju kao*

$$\begin{aligned}
 & \overset{1}{R}(X, Y)Z - \frac{1}{N-1}(\overset{1}{Ric}(Y, Z)X - \overset{1}{Ric}(X, Z)Y) \\
 &= \overset{0}{R}(X, Y)Z - \frac{1}{N-1}(\overset{0}{Ric}(Y, Z)X - \overset{0}{Ric}(X, Z)Y) \\
 &+ \pi(Z)[X, Y] - \pi([X, Y])Z + \frac{3}{2}(\pi(X)\overset{0}{\nabla}_Y Z - \pi(Y)\overset{0}{\nabla}_X Z) \\
 &- \frac{3}{2(N-1)}\left((\pi\overset{0}{\nabla}_Y Z - \pi(Y)\overset{0}{\nabla}Z)X - (\pi\overset{0}{\nabla}_X Z - \pi(X)\overset{0}{\nabla}Z)Y\right),
 \end{aligned} \tag{2.134}$$

$$\begin{aligned}
 & \overset{2}{R}(X, Y)Z - \frac{1}{N-1}(\overset{2}{Ric}(Y, Z)X - \overset{2}{Ric}(X, Z)Y) \\
 &= \overset{0}{R}(X, Y)Z - \frac{1}{N-1}(\overset{0}{Ric}(Y, Z)X - \overset{0}{Ric}(X, Z)Y) \\
 &- \pi(Z)[X, Y] + \pi([X, Y])Z - \frac{3}{2}(\pi(X)\overset{0}{\nabla}_Y Z - \pi(Y)\overset{0}{\nabla}_X Z) \\
 &+ \frac{3}{2(N-1)}\left((\pi\overset{0}{\nabla}_Y Z - \pi(Y)\overset{0}{\nabla}Z)X - (\pi\overset{0}{\nabla}_X Z - \pi(X)\overset{0}{\nabla}Z)Y\right),
 \end{aligned} \tag{2.135}$$

$$\begin{aligned}
 & \overset{3}{R}(X, Y)Z + \frac{1}{N^2-1}(\overset{3}{R}(Y, Z) - (N-1)\overset{3}{Ric}(Y, Z))X \\
 &+ \frac{1}{N^2-1}(\overset{3}{R}(X, Z) - (N-1)\overset{3}{Ric}(X, Z))Y \\
 &= \overset{0}{R}(X, Y)Z + \frac{1}{N^2-1}(\overset{0}{R}(Y, Z) - (N-1)\overset{0}{Ric}(Y, Z))X \\
 &+ \frac{1}{N^2-1}(\overset{0}{R}(X, Z) - (N-1)\overset{0}{Ric}(X, Z))Y - 2\pi(Z)\overset{0}{\nabla}_X Y \\
 &+ 2\pi(Z)[X, Y] + \frac{1}{N+1}\left(2\pi\overset{0}{\nabla}_Y X - \frac{3N-1}{N}\pi(\overset{0}{\nabla}_X Y)\right)Z
 \end{aligned}$$

GLAVA 2. KOVARIJANTNI IZVODI I RIČIJEVI IDENTITETI

$$\begin{aligned}
 & -\frac{N-2}{2(N-1)}(\pi^2(X)\pi(Y) - \pi^2(Y)\pi(X))Z \\
 & -\frac{1}{2}\{\overset{3}{\alpha}(Y, Z) - 2\pi(\overset{0}{\nabla}_Y Z) \\
 & \quad - \frac{1}{2}[\pi(Z)(\pi^2(Y) - 3\pi(Y)) - \pi^2(Z)\pi(Y)]\}X \tag{2.136}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}\{\overset{3}{\alpha}(X, Z) - 2\pi(\overset{0}{\nabla}_X Z) \\
 & \quad + \frac{1}{2}[\pi(Z)(\pi^2(X) - 3\pi(X)) - \pi^2(Z)\pi(X)]\}Y, \\
 & \overset{4}{R}(X, Y)Z + \frac{1}{N^2-1}(\overset{4}{R}(Y, Z) - (N-1)\overset{4}{Ric}(Y, Z))X \\
 & \quad + \frac{1}{N^2-1}(\overset{4}{R}(X, Z) - (N-1)\overset{4}{Ric}(X, Z))Y \\
 & = \overset{0}{R}(X, Y)Z + \frac{1}{N^2-1}(\overset{0}{R}(Y, Z) - (N-1)\overset{0}{Ric}(Y, Z))X \\
 & \quad + \frac{1}{N^2-1}(\overset{0}{R}(X, Z) - (N-1)\overset{0}{Ric}(X, Z))Y - 2\pi(Z)\overset{0}{\nabla}_X Y \\
 & \quad + 2\pi(Z)[X, Y] + \frac{1}{N+1}\left(2\pi\overset{0}{\nabla}_Y X - \frac{3N-1}{N}\pi(\overset{0}{\nabla}_X Y)\right)Z \\
 & \quad - \frac{N-2}{2(N-1)}(\pi^2(X)\pi(Y) - \pi^2(Y)\pi(X))Z \\
 & -\frac{1}{2}\{\overset{4}{\alpha}(Y, Z) - 2\pi(\overset{0}{\nabla}_Y Z) \\
 & \quad - \frac{3}{2}[\pi(Z)(\pi^2(Y) - \frac{7}{3}\pi(Y)) - \pi^2(Z)\pi(Y)]\}X \\
 & -\frac{1}{2}\{\overset{4}{\alpha}(X, Z) - 2\pi(\overset{0}{\nabla}_X Z) \\
 & \quad + \frac{3}{2}[\pi(Z)(\pi^2(X) - \frac{7}{3}\pi(X)) - \pi^2(Z)\pi(X)]\}Y, \tag{2.137}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \overset{5}{R}(X, Y)Z - \frac{1}{N+1}(\overset{5}{Ric}(Y, Z)X + \overset{5}{Ric}(X, Z)Y) \\
 & = \overset{0}{R}(X, Y)Z - \frac{1}{N+1}(\overset{0}{Ric}(Y, Z)X + \overset{0}{Ric}(X, Z)Y) \tag{2.138} \\
 & - \frac{1}{2(N+1)}\pi(Z)(\pi(Y)X + \pi(X)Y),
 \end{aligned}$$

2.2. RIČIJEVI IDENTITETI U OPERATORSKOM OBLIKU

gde je

$$\begin{aligned} \overset{3}{\alpha}(X, Y) &= \frac{2}{N^2 - 1} \left(2\pi \overset{0}{\nabla}_Y X + (N + 1)\pi([X, Y]) \right) \\ &\quad - \frac{2}{N + 1} \left(2\pi(Y) \overset{0}{\nabla} X - \pi[X, Y] + 3(N - 1)\pi(X)\pi(Y) \right) \\ &\quad + \frac{N^2 + 1}{N^2 - 1} \left(\pi^2(X)\pi(Y) - \pi^2(Y)\pi(X) \right), \end{aligned} \quad (2.139)$$

$$\begin{aligned} \overset{4}{\alpha}(X, Y) &= \overset{3}{\alpha}(X, Y) + \frac{2}{N^2 - 1} \left((N - 1)^2 \pi(X)\pi(Y) \right. \\ &\quad \left. - (2N - 1)(\pi^2(X)\pi(Y) - \pi^2(Y)\pi(X)) \right). \end{aligned} \quad (2.140)$$

Dokaz. Nakon kontrahovanja jednačine (2.124) po X , dobija se

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{6} \left[\pi(Y)(\pi^2(Z) + \pi(Z)) - \pi^2(Y)\pi(Z) \right] \\ &= -\frac{2}{3(N - 1)} \left(\overset{1}{Ric}(Y, Z) - \overset{0}{Ric}(Y, Z) \right) \\ &\quad + \frac{1}{N - 1} \left(\pi \overset{0}{\nabla}_Y Z - \pi(Y) \overset{0}{\nabla} Z \right) - \pi(\overset{0}{\nabla}_Y Z). \end{aligned} \quad (2.141)$$

Nakon zamene prikaza (2.141) u jednačinu (2.124) dobija se da važi jednačina (2.134).

Jednačine (2.135, 2.138), dobijaju se na isti način.

Nakon kontrahovanja jednačine (2.126) po X i Z , sledi da je

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{N}{2} (\overset{0}{\nabla}_X \pi)(Y) + \frac{1}{2} (\overset{0}{\nabla}_Y \pi)(X) &= \overset{3}{Ric}(X, Y) - \overset{0}{Ric}(X, Y) + 2\pi(Y) \overset{0}{\nabla} X \\ &\quad + \pi(\overset{0}{\nabla}_X Y) - \frac{3(N - 1)}{2} \pi(X)\pi(Y) - \pi[X, Y] \\ &\quad + \frac{N}{2} (\pi^2(X)\pi(Y) - \pi^2(Y)\pi(X)), \\ \frac{N - 1}{2} (\overset{0}{\nabla}_X \pi)(Y) + \frac{N - 1}{2} (\overset{0}{\nabla}_Y \pi)(X) &= \overset{3}{R}(X, Y) - \overset{0}{R}(X, Y) + 2\pi \overset{0}{\nabla}_Y X \\ &\quad - 2\pi(\overset{0}{\nabla}_X Y) + (N + 1)\pi([X, Y]) \\ &\quad + \frac{N + 1}{2} (\pi^2(X)\pi(Y) - \pi^2(Y)\pi(X)). \end{aligned} \right. \quad (2.142)$$

GLAVA 2. KOVARIJANTNI IZVODI I RIČIJEVI IDENTITETI

Rešenja sistema (2.142) po $(\overset{0}{\nabla}_X \pi)(Y)$ i $(\overset{0}{\nabla}_Y \pi)(X)$ su

$$\begin{aligned} (\overset{0}{\nabla}_X \pi)(Y) &= \overset{3}{\alpha}(X, Y) + \frac{2}{N^2 - 1} (\overset{3}{R}(X, Y) - (N - 1)\overset{3}{Ric}(X, Y)) \\ &\quad - \frac{2}{N^2 - 1} (\overset{0}{R}(X, Y) - (N - 1)\overset{0}{Ric}(X, Y)), \\ (\overset{0}{\nabla}_Y \pi)(X) &= \overset{3}{\beta}(X, Y) + \frac{2N}{N^2 - 1} \overset{3}{R}(X, Y) + \frac{2}{N + 1} \overset{3}{Ric}(X, Y) \\ &\quad - \frac{2N}{N^2 - 1} \overset{0}{R}(X, Y) + \frac{2}{N + 1} \overset{0}{Ric}(X, Y), \end{aligned} \quad (2.143)$$

gde je

$$\begin{aligned} \overset{3}{\beta}(X, Y) &= \frac{4N}{N^2 - 1} \pi \overset{0}{\nabla}_Y X - \frac{2(3N - 1)}{N^2 - 1} \pi (\overset{0}{\nabla}_X Y) + \frac{2N}{N - 1} \pi([X, Y]) \\ &\quad + \frac{2}{N + 1} (2\pi(Y) \overset{0}{\nabla} X - \pi[X, Y]) + \frac{3(N - 1)}{N + 1} \pi(X) \pi(Y) \\ &\quad + \frac{2N}{N^2 - 1} (\pi^2(X) \pi(Y) - \pi^2(Y) \pi(X)). \end{aligned}$$

Nakon uvođenja rešenja (2.143) u jednačinu (2.126), potvrđuje se tačnost jednačine (2.136).

Da se dokaže jednačina (2.137), potrebno je razmotriti razlike

$$\begin{aligned} \overset{4}{R}(X, Y)Z - \overset{3}{R}(X, Y)Z &= \overset{1}{T}(Z, \overset{1}{T}(X, Y)) \\ &= \pi(X) \pi(Z) Y - \pi(Y) \pi(Z) X - \pi^2(X) \pi(Y) Z + \pi^2(Y) \pi(X) Z, \end{aligned} \quad (2.144)$$

$$\overset{4}{R}(X, Y) - \overset{3}{R}(X, Y) = -N(\pi^2(X) \pi(Y) - \pi^2(Y) \pi(X)), \quad (2.145)$$

$$\overset{4}{Ric}(X, Y) - \overset{3}{Ric}(X, Y) = -(N - 1)\pi(X) \pi(Y) + \pi^2(X) \pi(Y) - \pi^2(Y) \pi(X). \quad (2.146)$$

Nakon uvođenja jednačina (2.144, 2.145, 2.146) u (2.136), sledi tačnost jednačine (2.137). \square

Teorema 2.11. *Neka je ∇ , $\nabla_X Y = \nabla_X^g Y + P(X, Y) + \overset{1}{T}(X, Y)$ semisimetrična afina koneksija, gde je $\overset{1}{T}(X, Y)$ tenzor torzije tipa (1, 2), i neka je ∇^g afina konek-*

2.2. RIČIJEVI IDENTITETI U OPERATORSKOM OBLIKU

sija koja odgovara metričkom tenzoru g . Ako je $T(X, Y) = \pi(X)Y - \pi(Y)X$ tenzor torzije afine koneksije ∇ , tada se tenzori krivine $\overset{1}{R}(X, Y)Z, \dots, \overset{5}{R}(X, Y)Z$ zadati jednačinama (2.78-2.82) zapisuju u oblicima

$$\begin{aligned}
\overset{1}{R}(X, Y)Z &- \frac{1}{N-1}(\overset{1}{Ric}(Y, Z)X - \overset{1}{Ric}(X, Z)Y) \\
&= R^g(X, Y)Z - \frac{1}{N-1}(Ric^g(Y, Z)X - Ric^g(X, Z)Y) \\
&+ \frac{3}{2}(\pi(X)\nabla_Y^g Z - \pi(Y)\nabla_X^g Z) \\
&- \frac{3}{2(N-1)}\left((\pi\nabla_Y^g Z - \pi(Y)\nabla^g Z)X - (\pi\nabla_X^g Z - \pi(X)\nabla^g Z)Y\right) \\
&+ \mathcal{P}(X, Y, Z) + \pi(Z)[X, Y] - \pi([X, Y])Z \\
&+ \frac{3}{2}(\pi(X)P(Y, Z) - \pi(Y)P(X, Z)) \\
&- \frac{1}{N-1}(\mathcal{P}(Y, Z)X - \mathcal{P}(X, Z)Y) \\
&- \frac{3}{2(N-1)}(\pi P(Y, Z) - \pi(Y)P(Z))X \\
&+ \frac{3}{2(N-1)}(\pi P(X, Z) - \pi(X)P(Z))Y,
\end{aligned} \tag{2.147}$$

$$\begin{aligned}
\overset{2}{R}(X, Y)Z &- \frac{1}{N-1}(\overset{2}{Ric}(Y, Z)X - \overset{2}{Ric}(X, Z)Y) \\
&= R^g(X, Y)Z - \frac{1}{N-1}(Ric^g(Y, Z)X - Ric^g(X, Z)Y) \\
&- \frac{3}{2}(\pi(X)\nabla_Y^g Z - \pi(Y)\nabla_X^g Z) \\
&+ \frac{3}{2(N-1)}\left((\pi\nabla_Y^g Z - \pi(Y)\nabla^g Z)X - (\pi\nabla_X^g Z - \pi(X)\nabla^g Z)Y\right) \\
&+ \mathcal{P}(X, Y, Z) - \pi(Z)[X, Y] + \pi([X, Y])Z
\end{aligned}$$

GLAVA 2. KOVARIJANTNI IZVODI I RIČIJEVI IDENTITETI

$$\begin{aligned}
 & -\frac{3}{2}(\pi(X)P(Y, Z) - \pi(Y)P(X, Z)) \\
 & -\frac{1}{N-1}(\mathcal{P}(Y, Z)X - \mathcal{P}(X, Z)Y) \\
 & +\frac{3}{2(N-1)}(\pi P(Y, Z) - \pi(Y)P(Z))X \\
 & -\frac{3}{2(N-1)}(\pi P(X, Z) - \pi(X)P(Z))Y \},
 \end{aligned} \tag{2.148}$$

$$\begin{aligned}
 & \overset{3}{R}(X, Y)Z + \frac{1}{N^2-1}(\overset{3}{R}(Y, Z) - (N-1)\overset{3}{Ric}(Y, Z))X \\
 & + \frac{1}{N^2-1}(\overset{3}{R}(X, Z) - (N-1)\overset{3}{Ric}(X, Z))Y \\
 & = R^g(X, Y)Z + \frac{1}{N^2-1}(R^g(Y, Z) - (N-1)Ric^g(Y, Z))X \\
 & + \frac{1}{N^2-1}(R^g(X, Z) - (N-1)Ric^g(X, Z))Y - 2\pi(Z)\nabla_X^g Y \\
 & + \frac{1}{N+1}\left(2\pi\nabla_Y^g X - \frac{3N-1}{N}\pi(\nabla_X^g Y)\right)Z \\
 & + \mathcal{P}(X, Y, Z) + 2\pi(Z)([X, Y] - P(X, Y)) \\
 & + \pi(P(Y, Z))X + \pi(P(X, Z))Y \\
 & - \frac{3N-1}{N(N+1)}\pi(P(X, Y))Z + \frac{2}{N+1}\pi P(X, Y)Z \\
 & + \frac{1}{N^2-1}\left\{(\mathcal{Q}(Y, Z) - (N-1)\mathcal{P}(Y, Z))X \right. \\
 & \quad \left. + (\mathcal{Q}(Y, Z) - (N-1)\mathcal{P}(Y, Z))Y \right\} \\
 & - \frac{N-2}{2(N-1)}(\pi^2(X)\pi(Y) - \pi^2(Y)\pi(X))Z \\
 & - \frac{1}{2}\left\{\overset{3}{\alpha}^g(Y, Z) - 2\pi(\nabla_Y^g Z) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2}[\pi(Z)(\pi^2(Y) - 3\pi(Y)) - \pi^2(Z)\pi(Y)]\right\}X \\
 & - \frac{1}{2}\left\{\overset{3}{\alpha}^g(X, Z) - 2\pi(\nabla_X^g Z) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2}[\pi(Z)(\pi^2(X) - 3\pi(X)) - \pi^2(Z)\pi(X)]\right\}Y,
 \end{aligned} \tag{2.149}$$

2.2. RIČIJEVI IDENTITETI U OPERATORSKOM OBLIKU

$$\begin{aligned}
& \overset{4}{R}(X, Y)Z + \frac{1}{N^2 - 1} (\overset{4}{R}(Y, Z) - (N - 1)\overset{4}{Ric}(Y, Z))X \\
& + \frac{1}{N^2 - 1} (\overset{4}{R}(X, Z) - (N - 1)\overset{4}{Ric}(X, Z))Y \\
& = R^g(X, Y)Z + \frac{1}{N^2 - 1} (R^g(Y, Z) - (N - 1)Ric^g(Y, Z))X \\
& + \frac{1}{N^2 - 1} (R^g(X, Z) - (N - 1)Ric^g(X, Z))Y - 2\pi(Z)\nabla_X^g Y \\
& + \frac{1}{N + 1} \left(2\pi\nabla_Y^g X - \frac{3N - 1}{N}\pi(\nabla_X^g Y) \right) Z \\
& + \mathcal{P}(X, Y, Z) + 2\pi(Z)([X, Y] - P(X, Y)) \\
& + \pi(P(Y, Z))X + \pi(P(X, Z))Y \\
& - \frac{3N - 1}{N(N + 1)}\pi(P(X, Y))Z + \frac{2}{N + 1}\pi P(X, Y)Z \\
& + \frac{1}{N^2 - 1} (\mathcal{Q}(Y, Z) - (N - 1)\mathcal{P}(Y, Z))X \\
& + \frac{1}{N^2 - 1} (\mathcal{Q}(Y, Z) - (N - 1)\mathcal{P}(Y, Z))Y \\
& - \frac{N - 2}{2(N - 1)} (\pi^2(X)\pi(Y) - \pi^2(Y)\pi(X))Z \\
& - \frac{1}{2} \{ \overset{4}{\alpha}^g(Y, Z) - 2\pi(\nabla_Y^g Z) \\
& \quad - \frac{3}{2} [\pi(Z)(\pi^2(Y) - \frac{7}{3}\pi(Y)) - \pi^2(Z)\pi(Y)] \} X \\
& - \frac{1}{2} \{ \overset{4}{\alpha}^g(X, Z) - 2\pi(\nabla_X^g Z) \\
& \quad + \frac{3}{2} [\pi(Z)(\pi^2(X) - \frac{7}{3}\pi(X)) - \pi^2(Z)\pi(X)] \} Y,
\end{aligned} \tag{2.150}$$

$$\begin{aligned}
& \overset{5}{R}(X, Y)Z - \frac{1}{N + 1} (\overset{5}{Ric}(Y, Z)X + \overset{5}{Ric}(X, Z)Y) \\
& = R^g(X, Y)Z - \frac{1}{N + 1} (Ric^g(Y, Z)X + Ric^g(X, Z)Y) \\
& + \mathcal{P}(X, Y, Z) - \frac{1}{N + 1} (\mathcal{P}(Y, Z)X + \mathcal{P}(X, Z)Y) \\
& - \frac{1}{2(N + 1)}\pi(Z)(\pi(Y)X + \pi(X)Y),
\end{aligned} \tag{2.151}$$

gde je

GLAVA 2. KOVARIJANTNI IZVODI I RIČIJEVI IDENTITETI

$$P(X, Y) = P(Y, X), P(X) = \text{Tr}\{U \rightarrow P(U, X)\}, \quad (2.152)$$

$$\mathcal{P}(X, Y) = \text{Tr}\{U \rightarrow \mathcal{P}(U, X, Y)\}, \mathcal{Q}(X, Y) = \text{Tr}\{U \rightarrow \mathcal{P}(X, Y, U)\}, \quad (2.153)$$

$$\begin{aligned} \overset{3}{\alpha}{}^g(X, Y) &= \frac{2}{N^2 - 1} \left(2\pi \nabla_Y^g X + 2\pi P(X, Y) + (N + 1)\pi([X, Y]) \right) \\ &\quad - \frac{2}{N + 1} \left(2\pi(Y) \nabla^g X + 2\pi(Y)P(X) - \pi[X, Y] + 3(N - 1)\pi(X)\pi(Y) \right) \\ &\quad + \frac{N^2 + 1}{N^2 - 1} \left(\pi^2(X)\pi(Y) - \pi^2(Y)\pi(X) \right), \end{aligned} \quad (2.154)$$

$$\begin{aligned} \overset{4}{\alpha}{}^g(X, Y) &= \overset{3}{\alpha}{}^g(X, Y) \\ &\quad + \frac{2}{N^2 - 1} \left((N - 1)^2 \pi(X)\pi(Y) - (2N - 1) \left(\pi^2(X)\pi(Y) - \pi(Y)\pi(X) \right) \right). \end{aligned} \quad (2.155)$$

Dokaz. Ova teorema je direktna posledica prethodne teoreme, u slučaju kada je $\overset{0}{R}(X, Y)Z = R^g(X, Y)Z + \mathcal{P}(X, Y)Z$. □

GLAVA 3

INVARIJANTE

3.1 Invarijante geometrijskih preslikavanja

U ovom delu disertacije, biće razmotren opšti oblik invarijanti preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije. Specijalan slučaj tog razmatranja biće invarijante preslikavanja prostora simetrične afine koneksije. Kao metodološka osnova, korišće se rezultati prikazani u [142].

3.1.1 Osnovne invarijante preslikavanja

Na početku treba odrediti invarijante preslikavanja $f : \mathbb{G}\mathbb{A}_N \rightarrow \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ koje koeficijente afine koneksije L_{jk}^i pridruženog prostora \mathbb{A}_N transformiše u koeficijente afine koneksije \overline{L}_{jk}^i pridruženog prostora $\overline{\mathbb{A}}_N$ po zakonu

$$\overline{L}_{jk}^i = L_{jk}^i + \overline{\omega}_{jk}^i - \omega_{jk}^i, \quad (3.1)$$

gde su ω_{jk}^i i $\overline{\omega}_{jk}^i$ geometrijski objekti tipa (1, 2) simetrični po indeksima j i k .

Pridružene invarijante Tomasovog i Vejlovog tipa preslikavanja f su [142]

$$\widetilde{\mathcal{T}}_{jk}^i = L_{jk}^i - \omega_{jk}^i, \quad (3.2)$$

$$\widetilde{\mathcal{W}}_{jmn}^i = R_{jmn}^i - \omega_{jm|n}^i + \omega_{jn|m}^i + \omega_{jm}^\alpha \omega_{\alpha n}^i - \omega_{jn}^\alpha \omega_{\alpha m}^i. \quad (3.3)$$

Biće ispitano koliko pridruženih invarijanti Tomasovog i Vejlovog tipa (invarijante oblika (3.2, 3.3)) preslikavanja f postoji. Kao posledica tog istraživanja, biće određene invarijante preslikavanja prostora simetrične affine koneksije

Štaviše, korišćenjem jednakosti $\bar{L}_{jk}^i - L_{jk}^i = \bar{\omega}_{jk}^i - \omega_{jk}^i$ i $\bar{L}_{jk}^i - L_{jk}^i = \bar{\tau}_{jk}^i - \tau_{jk}^i$, gde su $\tau_{jk}^i, \bar{\tau}_{jk}^i, \tau_{jk}^i = -\tau_{kj}^i, \bar{\tau}_{jk}^i = -\bar{\tau}_{kj}^i$ odgovarajući geometrijski objekti, dobiće se invarijante preslikavanja f na osnovu zakona transformacije $L_{jk}^i \xrightarrow{f} \bar{L}_{jk}^i, L_{jm|n}^i \xrightarrow{f} \bar{L}_{jm|n}^i$, i $L_{jm}^\alpha L_{\alpha n}^i \xrightarrow{f} \bar{L}_{jm}^\alpha \bar{L}_{\alpha n}^i$. Na osnovu tih invarijanti, biće generalisane invarijante Vejlovog tipa preslikavanja f .

Biće razmotreno preslikavanje $f : \mathbb{G}\mathbb{A}_N \rightarrow \mathbb{G}\bar{\mathbb{A}}_N$ čiji je tenzor deformacije

$$P_{jk}^i = \psi_j \delta_k^i + \psi_k \delta_j^i + \bar{d}_{jk}^i - d_{jk}^i + \Psi_j \delta_k^i - \Psi_k \delta_j^i + \bar{D}_{jk}^i - D_{jk}^i, \quad (3.4)$$

gde su ψ_j i Ψ_j 1-forme i $d_{jk}^i, \bar{d}_{jk}^i, D_{jk}^i, \bar{D}_{jk}^i$ tenzori tipa (1, 2) takvi da je $d_{jk}^i = d_{kj}^i, \bar{d}_{jk}^i = \bar{d}_{kj}^i, D_{jk}^i = -D_{kj}^i, \bar{D}_{jk}^i = -\bar{D}_{kj}^i$.

3.1.2 Pridružene invarijante

Najpre treba dokazati da važi naredna lema.

Lema 3.1. *Neka je geometrijski objekat*

$$W_{jmn}^{(1).i} = R_{jmn}^i + Z_{jmn}^i + \frac{1}{N+1} \delta_j^i R_{[mn]} + \delta_j^i X_{[mn]} + \delta_{[m}^i Y_{j]n}, \quad (3.5)$$

invarijanta preslikavanja $f : \mathbb{G}\mathbb{A}_N \rightarrow \mathbb{G}\bar{\mathbb{A}}_N$. Tada su geometrijski objekti

$$\widetilde{W}_{jmn}^{(1).i} = R_{jmn}^i + Z_{jmn}^i + \frac{1}{N} \delta_j^i (R_{[mn]} - Y_{[mn]} - Z_{\alpha mn}^\alpha) + \delta_{[m}^i Y_{j]n}, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\widetilde{W}}_{jmn}^{(1).i} &= R_{jmn}^i + Z_{jmn}^i + \frac{1}{N+1} \delta_j^i R_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1} \delta_{[m}^i R_{j]n} + \frac{1}{N^2-1} \delta_{[m}^i R_{n]j} \\ &+ \delta_j^i X_{[mn]} - \frac{1}{N-1} \delta_m^i (X_{[jn]} - Z_{j\alpha}^\alpha) + \frac{1}{N-1} \delta_n^i (X_{[jm]} - Z_{jm}^\alpha), \end{aligned} \quad (3.7)$$

invarijante preslikavanja f .

3.1. INVARIJANTE GEOMETRIJSKIH PRESLIKAVANJA

Neka je geometrijski objekat

$$W_{jmn}^{(2).i} = R_{jmn}^i + Z_{jmn}^i + \frac{1}{N+1} \delta_j^i R_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1} \delta_{[m}^i R_{jn]} + \frac{1}{N^2-1} \delta_{[m}^i R_{n]j} + \delta_j^i X_{[mn]} + \delta_{[m}^i Y_{jn]} \quad (3.8)$$

invarijanta preslikavanja $f : \mathbb{G}\mathbb{A}_N \rightarrow \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$. Tada su geometrijski objekti

$$\widetilde{W}_{jmn}^{(2).i} = R_{jmn}^i + Z_{jmn}^i + \frac{1}{N+1} \delta_j^i R_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1} \delta_{[m}^i R_{jn]} + \frac{1}{N^2-1} \delta_{[m}^i R_{n]j} - \frac{1}{N} \delta_j^i (Y_{[mn]} + Z_{\alpha mn}^\alpha) + \delta_{[m}^i Y_{jn]}, \quad (3.9)$$

$$\widetilde{\widetilde{W}}_{jmn}^{(2).i} = R_{jmn}^i + Z_{jmn}^i + \frac{1}{N+1} \delta_j^i R_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1} \delta_{[m}^i R_{jn]} + \frac{1}{N^2-1} \delta_{[m}^i R_{n]j} + \delta_j^i X_{[mn]} - \frac{1}{N-1} \delta_m^i (X_{[jn]} - Z_{jn\alpha}^\alpha) + \frac{1}{N-1} \delta_n^i (X_{[jm]} - Z_{jm\alpha}^\alpha), \quad (3.10)$$

invarijante preslikavanja f .

Dokaz. Važi jednakost $0 = \overline{W}_{jmn}^{(1).i} - W_{jmn}^{(1).i}$, tj.

$$0 = \overline{R}_{jmn}^i - R_{jmn}^i + \frac{1}{N+1} \delta_j^i (\overline{R}_{[mn]} - R_{[mn]}) + \delta_j^i (\overline{X}_{[mn]} - X_{[mn]}) + \delta_m^i (\overline{Y}_{jn} - Y_{jn}) - \delta_n^i (\overline{Y}_{jm} - Y_{jm}) + \overline{Z}_{jmn}^i - Z_{jmn}^i, \quad (3.11)$$

gde su $\overline{R}_{jmn}^i, \overline{R}_{ij}, \overline{X}_{ij}, \overline{Z}_{ij}, \overline{Z}_{jmn}^i$ slike geometrijskih objekata $R_{jmn}^i, R_{ij}, X_{ij}, Y_{ij}, Z_{jmn}^i$ pod dejstvom preslikavanja f .

Nakon kontrahovanja jednačine (3.11) po i i j , kao i po i i n , dobija se da je

$$\begin{aligned} \bar{X}_{[ij]} - X_{[ij]} &= \frac{1}{N(N+1)} (\bar{R}_{[ij]} - R_{[ij]}) \\ &\quad - \frac{1}{N} (\bar{Y}_{[mn]} - Y_{[mn]}) - \frac{1}{N} (\bar{Z}_{\alpha mn}^{\alpha} - Z_{\alpha mn}^{\alpha}), \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{ij} - Y_{ij} &= \frac{N}{N^2-1} (\bar{R}_{ij} - R_{ij}) + \frac{1}{N^2-1} (\bar{R}_{ji} - R_{ji}) \\ &\quad - \frac{1}{N-1} (\bar{X}_{[ij]} - X_{[ij]}) + \frac{1}{N-1} (\bar{Z}_{ij\alpha}^{\alpha} - Z_{ij\alpha}^{\alpha}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Nakon zamene rezultata (3.12, 3.13) u (3.11), dobija se da važe jednakosti

$$\widetilde{\bar{W}}_{jmn}^{(1).i} = \widetilde{W}_{jmn}^{(1).i} \quad \text{i} \quad \widetilde{\bar{W}}_{jmn}^{(1).i} = \widetilde{W}_{jmn}^{(1).i},$$

gde su $\widetilde{\bar{W}}_{jmn}^{(1).i}$ i $\widetilde{W}_{jmn}^{(1).i}$ geometrijski objekti zadati jednačinama (3.6, 3.7).

U slučaju Vejlvog projektivnog tenzora W_{jmn}^i , važi sledeća jednačina

$$W_{\alpha ij}^{\alpha} = W_{ij\alpha}^{\alpha} = 0. \quad (3.14)$$

Invarijantu $W_{jmn}^{(2).i}$ preslikavanja f je moguće zapisati u obliku

$$W_{jmn}^{(2).i} = W_{jmn}^i + \delta_j^i X_{[mn]} + \delta_{[m}^i Y_{j]n} + Z_{jmn}^i, \quad (3.15)$$

gde je W_{jmn}^i Vejlov projektivni tenzor.

Nakon kontrahovanja jednakosti $0 = \bar{W}_{jmn}^{(2).i} - W_{jmn}^{(2).i}$ po i i j , kao i po i i n , a na osnovu jednačine (3.14), sledi da je

$$\bar{X}_{[ij]} - X_{[ij]} = -\frac{1}{N} (\bar{Y}_{[ij]} + \bar{Z}_{\alpha ij}^{\alpha}) + \frac{1}{N} (Y_{[ij]} + Z_{\alpha ij}^{\alpha}), \quad (3.16)$$

$$\bar{Y}_{ij} - Y_{ij} = -\frac{1}{N-1} (\bar{X}_{[ij]} - \bar{Z}_{ij\alpha}^{\alpha}) + \frac{1}{N-1} (X_{[ij]} - Z_{ij\alpha}^{\alpha}). \quad (3.17)$$

Nakon zamene rezultata (3.16, 3.17) u jednakost $\bar{W}_{jmn}^{(2).i} - W_{jmn}^{(2).i} = 0$, dobija se da važe jednakosti

$$\widetilde{\bar{W}}_{jmn}^{(2).i} = \widetilde{W}_{jmn}^{(2).i} \quad \text{i} \quad \widetilde{\bar{W}}_{jmn}^{(2).i} = \widetilde{W}_{jmn}^{(2).i},$$

3.1. INVARIJANTE GEOMETRIJSKIH PRESLIKAVANJA

čime je dokaz ove leme završen. \square

Geometrijski objekti $\widetilde{W}_{jmn}^{(1).i}$ i $\widetilde{W}_{jmn}^{(1).i}$ su prva i druga pridružena izvedena invarijanta preslikavanja f na osnovu invarijante $W_{jmn}^{(1).i}$. Geometrijski objekti $\widetilde{W}_{jmn}^{(2).i}$ i $\widetilde{W}_{jmn}^{(2).i}$ su prva i druga pridružena izvedena invarijanta preslikavanja f na osnovu invarijante $W_{jmn}^{(2).i}$.

Primedba 3.1. Na osnovu jednačina (3.16, 3.17), zaključuje se da su geometrijski objekti

$$\tilde{\Delta}_{ij}^{(1)} = X_{[ij]} + \frac{1}{N} (Y_{[ij]} + Z_{\alpha ij}^\alpha), \quad \tilde{\Delta}_{ij}^{(2)} = Y_{ij} + \frac{1}{N-1} (X_{[ij]} - Z_{ij\alpha}^\alpha), \quad (3.18)$$

invarijante preslikavanja $f : \mathbb{G}\mathbb{A}_N \rightarrow \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$.

Nakon simetrizacije jednačine (3.4) po j i k , zaključuje se da važi jednačina

$$\overline{L}_{jk}^i = L_{jk}^i + \psi_k \delta_j^i + \psi_k \delta_j^i + \overline{d}_{jk}^i - d_{jk}^i. \quad (3.19)$$

Nakon kontrahovanja te jednačine po i i k , dobija se da je

$$\psi_j = \frac{1}{N+1} (\overline{L}_{j\alpha}^\alpha - \overline{d}_{j\alpha}^\alpha) - \frac{1}{N+1} (L_{j\alpha}^\alpha - d_{j\alpha}^\alpha). \quad (3.20)$$

Zamenom jednakosti (3.20) u jednačinu (3.19), dobija se da je

$$\begin{aligned} \overline{L}_{jk}^i &= L_{jk}^i + \frac{1}{N+1} \delta_j^i (\overline{L}_{k\alpha}^\alpha - \overline{d}_{k\alpha}^\alpha) + \frac{1}{N+1} \delta_j^i (\overline{L}_{k\alpha}^\alpha - \overline{d}_{k\alpha}^\alpha) + \overline{d}_{jk}^i \\ &\quad - \frac{1}{N+1} \delta_j^i (L_{k\alpha}^\alpha - d_{k\alpha}^\alpha) - \frac{1}{N+1} \delta_k^i (L_{j\alpha}^\alpha - d_{j\alpha}^\alpha) - d_{jk}^i. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Poređenjem jednačina (3.1) i (3.21), dolazi se do zaključka da je

$$\omega_{jk}^i = \frac{1}{N+1} \delta_k^i (L_{j\alpha}^\alpha - d_{j\alpha}^\alpha) + \frac{1}{N+1} \delta_j^i (L_{k\alpha}^\alpha - d_{k\alpha}^\alpha) + d_{jk}^i. \quad (3.22)$$

Na osnovu jednačina (3.2, 3.3, 3.22), sledi da su osnovne pridružene invarijante Tomasovog i Vejlovog tipa preslikavanja f

$$\tilde{\mathcal{T}}_{jk}^i = L_{jk}^i - \frac{1}{N+1} \delta_k^i (L_{j\alpha}^\alpha - d_{j\alpha}^\alpha) - \frac{1}{N+1} \delta_j^i (L_{k\alpha}^\alpha - d_{k\alpha}^\alpha) - d_{jk}^i, \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{W}}_{jmn}^i &= R_{jmn}^i + \frac{1}{N+1} \delta_j^i (R_{[mn]} \\ &\quad + d_{[m\alpha|n]}^\alpha) - d_{jm|n}^i + d_{jn|m}^i + d_{jm}^\alpha d_{\alpha n}^i - d_{jn}^\alpha d_{\alpha m}^i \\ &\quad - \frac{1}{N+1} \delta_m^i (L_{j\alpha|n}^\alpha - d_{j\alpha|n}^\alpha + (L_{\alpha\beta}^\beta - d_{\alpha\beta}^\beta) d_{jn}^\alpha) \\ &\quad + \frac{1}{N+1} \delta_n^i (L_{j\alpha|m}^\alpha - d_{j\alpha|m}^\alpha + (L_{\alpha\beta}^\beta - d_{\alpha\beta}^\beta) d_{jm}^\alpha) \\ &\quad - \frac{1}{(N+1)^2} (L_{j\alpha}^\alpha - d_{j\alpha}^\alpha) (\delta_m^i (L_{n\beta}^\beta - d_{n\beta}^\beta) - \delta_n^i (L_{m\beta}^\beta - d_{m\beta}^\beta)). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Osnovna invarijanta $\widetilde{\mathcal{W}}_{jmn}^i$ je oblika

$$\widetilde{\mathcal{W}}_{jmn}^i = R_{jmn}^i + \frac{1}{N+1} \delta_j^i R_{[mn]} + \delta_j^i X_{[mn]} + \delta_m^i Y_{jn} - \delta_n^i Y_{jm} + Z_{jmn}^i, \quad (3.25)$$

gde je

$$X_{ij} = d_{i\alpha|j}^\alpha, \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} Y_{ij} &= -\frac{1}{N+1} (L_{i\alpha|j}^\alpha - d_{i\alpha|j}^\alpha + d_{ij}^\alpha (L_{\alpha\beta}^\beta - d_{\alpha\beta}^\beta)) \\ &\quad - \frac{1}{(N+1)^2} (L_{i\alpha}^\alpha - d_{i\alpha}^\alpha) (L_{j\beta}^\beta - d_{j\beta}^\beta), \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$Z_{jmn}^i = -d_{jm|n}^i + d_{jn|m}^i + d_{jm}^\alpha d_{\alpha n}^i - d_{jn}^\alpha d_{\alpha m}^i. \quad (3.28)$$

Oblik ove invarijante se poklapa sa oblikom invarijante $W_{jmn}^{(1).i}$ zadate jednačinom (3.5). Na osnovu jednačina (3.27, 3.28) i jednakosti $L_{i\alpha|j}^\alpha - L_{j\alpha|i}^\alpha = -R_{[ij]}$, sledi da je

$$Y_{[mn]} = \frac{1}{N+1} (R_{[mn]} + d_{[m\alpha|n]}^\alpha) \quad \text{i} \quad Z_{\alpha mn}^\alpha = -d_{\alpha m|n}^\alpha + d_{\alpha n|m}^\alpha. \quad (3.29)$$

Prva i druga izvedena invarijanta, dobijena na osnovu osnovne invarijante

3.1. INVARIJANTE GEOMETRIJSKIH PRESLIKAVANJA

$\widetilde{W}_{jmn}^i \equiv W_{jmn}^{(1).i}$, su

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{jmn}^{(1).i} &= R_{jmn}^i - d_{j[m|n]}^i + d_{j[m}^\alpha d_{\alpha n]}^i + \frac{1}{N+1} \delta_j^i (R_{[mn]} + d_{[m\alpha|n]}^\alpha) \\ &\quad - \frac{1}{N+1} (\delta_{[m}^i L_{j\alpha|n]}^\alpha - \delta_{[m}^i d_{j\alpha|n]}^\alpha + \delta_{[m}^i d_{jn]}^\alpha (L_{\alpha\beta}^\beta - d_{\alpha\beta}^\beta)) \\ &\quad - \frac{1}{(N+1)^2} (L_{j\alpha}^\alpha - d_{j\alpha}^\alpha) (\delta_{[m}^i L_{n]\beta}^\beta - \delta_{[m}^i d_{n]\beta}^\beta), \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\widetilde{W}}_{jmn}^{(1).i} &= R_{jmn}^i + \frac{1}{N+1} \delta_j^i (R_{[mn]} + d_{[m\alpha|n]}^\alpha) + \frac{N}{N^2-1} \delta_{[m}^i R_{jn]} + \frac{1}{N^2-1} \delta_{[m}^i R_{n]j} \\ &\quad - d_{jm|n}^i + d_{jn|m}^i + d_{jm}^\alpha d_{\alpha n}^i - d_{jn}^\alpha d_{\alpha m}^i + \delta_{[m}^i d_{jn]|\alpha}^\alpha - \delta_{[m}^i d_{jn]}^\alpha d_{\alpha\beta}^\beta + \delta_{[m}^i d_{j\beta}^\alpha d_{n]\alpha}^\beta \\ &\quad - \frac{N^2}{N^2-1} \delta_{[m}^i d_{j\alpha|n]}^\alpha + \frac{1}{N^2-1} \delta_{[m}^i d_{n]\alpha|j}^\alpha. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Važi naredna teorema.

Teorema 3.1. *Neka je $f : \mathbb{G}\mathbb{A}_N \rightarrow \overline{\mathbb{G}\mathbb{A}_N}$ preslikavanje koje transformiše simetrične delove L_{jk}^i koeficijenata afine koneksije prostora $\mathbb{G}\mathbb{A}_N$ po zakonu (3.1). Geometrijski objekti $\widetilde{W}_{jmn}^{(1).i}$ i $\widetilde{\widetilde{W}}_{jmn}^{(2).i}$ su pridružene izvedene invarijante Vejlovog tipa preslikavanja f . \square*

Nakon kontrahovanja jednačine

$$P_{\underset{\vee}{j}k}^i = \delta_j^i (\bar{t}_k - t_k) - \delta_k^i (\bar{t}_j - t_j) + \bar{D}_{jk}^i - D_{jk}^i \quad (3.32)$$

po i i k , dobija se da je

$$\bar{t}_j - t_j = -\frac{1}{N-1} (\bar{L}_{j\alpha}^\alpha - \bar{D}_{j\alpha}^\alpha) + \frac{1}{N-1} (L_{j\alpha}^\alpha - D_{j\alpha}^\alpha). \quad (3.33)$$

Nakon zamene prikaza (3.33) u jednačinu (3.32), dobija se

$$\tau_{jk}^i = D_{jk}^i - \frac{1}{N-1} \left[(L_{k\alpha}^\alpha - D_{k\alpha}^\alpha) \delta_j^i - (L_{j\alpha}^\alpha - D_{j\alpha}^\alpha) \delta_k^i \right]. \quad (3.34)$$

Odatle sledi da je osnovna antisimetrična invarijanta Tomasovog tipa preslika-

vanja f

$$\hat{\mathcal{T}}_{jk}^i = \bar{L}_{jk}^i - D_{jk}^i + \frac{1}{N-1} \left[(L_{k\alpha}^\alpha - D_{k\alpha}^\alpha) \delta_j^i - (L_{j\alpha}^\alpha - D_{j\alpha}^\alpha) \delta_k^i \right]. \quad (3.35)$$

Zarad dobijanja antisimetričnih invarijanti Vejllovog tipa preslikavanja f Vejllovog tipa, biće korišćene invarijante dobijene na osnovu razlika $0 = \hat{\mathcal{T}}_{jm}^\alpha \hat{\mathcal{T}}_{\alpha n}^i - \hat{\mathcal{T}}_{jm}^\alpha \hat{\mathcal{T}}_{\alpha n}^i$ i $0 = \hat{\mathcal{T}}_{jm|n}^i - \hat{\mathcal{T}}_{jm|n}^i$. Prva od tih invarijanti je

$$\zeta_{jmn}^i = \hat{\mathcal{T}}_{jm}^\alpha \hat{\mathcal{T}}_{\alpha n}^i = L_{jm}^\alpha L_{\alpha n}^i + \hat{\theta}_{jmn}^i, \quad (3.36)$$

gde je

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{jmn}^i &= -L_{jm}^\alpha D_{\alpha n}^i + \frac{1}{N-1} \left[L_{jm}^i (L_{n\beta}^\beta - D_{n\beta}^\beta) - L_{jm}^\alpha (L_{\alpha\beta}^\beta - D_{\alpha\beta}^\beta) \delta_n^i \right] \\ &\quad - L_{\alpha n}^i D_{jm}^\alpha + D_{jm}^\alpha D_{\alpha n}^i - \frac{1}{N-1} \left[D_{jm}^i (L_{n\alpha}^\alpha - D_{n\alpha}^\alpha) - D_{jm}^\alpha (L_{\alpha\beta}^\beta - D_{\alpha\beta}^\beta) \delta_n^i \right] \\ &\quad + \frac{1}{(N-1)^2} \left[(L_{m\alpha}^\alpha - D_{m\alpha}^\alpha) (L_{n\beta}^\beta - D_{n\beta}^\beta) \delta_j^i - (L_{m\alpha}^\alpha - D_{m\alpha}^\alpha) (L_{j\beta}^\beta - D_{j\beta}^\beta) \delta_n^i \right. \\ &\quad \left. - (L_{j\alpha}^\alpha - D_{j\alpha}^\alpha) (L_{n\beta}^\beta - D_{n\beta}^\beta) \delta_m^i - (L_{j\alpha}^\alpha - D_{j\alpha}^\alpha) (L_{m\beta}^\beta - D_{m\beta}^\beta) \delta_n^i \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

Važe jednakosti

$$\bar{L}_{jm|n}^i - L_{jm|n}^i = -\tilde{\Theta}_{(p).jmn}^i + \tilde{\Theta}_{(p).jmn}^i, \quad (3.38)$$

tj.

$$\eta_{(p).jmn}^i = \bar{\eta}_{(p).jmn}^i,$$

za $p = 1, \dots, 8$,

$$\eta_{(p).jmn}^i = L_{jm|n}^i + \tilde{\Theta}_{(p).jmn}^i, \quad (3.39)$$

gde je

3.1. INVARIJANTE GEOMETRIJSKIH PRESLIKAVANJA

$$\tilde{\Theta}_{(1).jmn}^i = -\tau_{jm|n}^i - L_{\underline{\alpha n}}^i(L_{\underline{jm}}^\alpha - \tau_{jm}^\alpha) + L_{\underline{jn}}^\alpha(L_{\underline{\alpha m}}^i - \tau_{\alpha m}^i) + L_{\underline{mn}}^\alpha(L_{\underline{j\alpha}}^i - \tau_{j\alpha}^i), \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_{(2).jmn}^i &= -\tau_{jm|n}^i - L_{\underline{\alpha n}}^i(L_{\underline{jm}}^\alpha - \mathcal{T}_{jm}^\alpha) + L_{\underline{jn}}^\alpha(L_{\underline{\alpha m}}^i - \tau_{\alpha m}^i) + d_{mn}^\alpha(L_{\underline{j\alpha}}^i - \tau_{j\alpha}^i) \\ &\quad + \frac{1}{N+1}(L_{\underline{m\alpha}}^\alpha - d_{m\alpha}^\alpha)(L_{\underline{jn}}^i - \mathcal{T}_{jn}^i) + \frac{1}{N+1}(L_{\underline{n\alpha}}^\alpha - d_{n\alpha}^\alpha)(L_{\underline{jm}}^i - \tau_{jm}^i), \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_{(3).jmn}^i &= -\tau_{jm|n}^i - L_{\underline{\alpha n}}^i(L_{\underline{jm}}^\alpha - \mathcal{T}_{jm}^\alpha) + L_{\underline{mn}}^\alpha(L_{\underline{j\alpha}}^i - \tau_{j\alpha}^i) + d_{jn}^\alpha(L_{\underline{\alpha m}}^i - \tau_{\alpha m}^i) \\ &\quad + \frac{1}{N+1}(L_{\underline{j\alpha}}^\alpha - d_{j\alpha}^\alpha)(L_{\underline{nm}}^i - \tau_{nm}^i) + \frac{1}{N+1}(L_{\underline{n\alpha}}^\alpha - d_{n\alpha}^\alpha)(L_{\underline{jm}}^i - \tau_{jm}^i), \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_{(4).jmn}^i &= -\tau_{jm|n}^i - L_{\underline{\alpha n}}^i(L_{\underline{jm}}^\alpha - \mathcal{T}_{jm}^\alpha) + d_{jn}^\alpha(L_{\underline{\alpha m}}^i - \tau_{\alpha m}^i) + d_{mn}^\alpha(L_{\underline{j\alpha}}^i - \tau_{j\alpha}^i) \\ &\quad + \frac{1}{N+1}(L_{\underline{j\alpha}}^\alpha - d_{j\alpha}^\alpha)(L_{\underline{nm}}^i - \tau_{nm}^i) + \frac{1}{N+1}(L_{\underline{m\alpha}}^\alpha - d_{m\alpha}^\alpha)(L_{\underline{jn}}^i - \tau_{jn}^i) \\ &\quad + \frac{2}{N+1}(L_{\underline{n\alpha}}^\alpha - d_{n\alpha}^\alpha)(L_{\underline{jm}}^i - \tau_{jm}^i), \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_{(5).jmn}^i &= -\tau_{jm|n}^i + L_{\underline{jn}}^\alpha(L_{\underline{\alpha m}}^i - \mathcal{T}_{\alpha m}^i) + L_{\underline{mn}}^\alpha(L_{\underline{j\alpha}}^i - \tau_{j\alpha}^i) - d_{\alpha n}^i(L_{\underline{jm}}^\alpha - \tau_{jm}^\alpha) \\ &\quad - \frac{1}{N+1}\delta_n^i(L_{\underline{\alpha\beta}}^\beta - d_{\alpha\beta}^\beta)(L_{\underline{jm}}^\alpha - \mathcal{T}_{jm}^\alpha) - \frac{1}{N+1}(L_{\underline{n\alpha}}^\alpha - d_{n\alpha}^\alpha)(L_{\underline{jm}}^i - \tau_{jm}^i), \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_{(6).jmn}^i &= -\tau_{jm|n}^i + L_{\underline{jn}}^\alpha(L_{\underline{\alpha m}}^i - \mathcal{T}_{\alpha m}^i) + d_{mn}^\alpha(L_{\underline{j\alpha}}^i - \tau_{j\alpha}^i) - d_{\alpha n}^i(L_{\underline{jm}}^\alpha - \tau_{jm}^\alpha) \\ &\quad + \frac{1}{N+1}(L_{\underline{m\alpha}}^\alpha - d_{m\alpha}^\alpha)(L_{\underline{jn}}^i - \mathcal{T}_{jn}^i) - \frac{1}{N+1}\delta_n^i(L_{\underline{\alpha\beta}}^\beta - d_{\alpha\beta}^\beta)(L_{\underline{jm}}^\alpha - \tau_{jm}^\alpha), \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_{(7).jmn}^i &= -\tau_{jm|n}^i + L_{\underline{mn}}^\alpha(L_{\underline{j\alpha}}^i - \mathcal{T}_{j\alpha}^i) + d_{jn}^\alpha(L_{\underline{\alpha m}}^i - \tau_{\alpha m}^i) - d_{\alpha n}^i(L_{\underline{jm}}^\alpha - \tau_{jm}^\alpha) \\ &\quad + \frac{1}{N+1}(L_{\underline{j\alpha}}^\alpha - d_{j\alpha}^\alpha)(L_{\underline{nm}}^i - \mathcal{T}_{nm}^i) - \frac{1}{N+1}\delta_n^i(L_{\underline{\alpha\beta}}^\beta - d_{\alpha\beta}^\beta)(L_{\underline{jm}}^\alpha - \tau_{jm}^\alpha), \end{aligned} \quad (3.46)$$

GLAVA 3. INVARIJANTE

$$\begin{aligned}
\tilde{\Theta}_{(8).jmn}^i &= -\tau_{jm|n}^i + d_{jn}^\alpha (L_{\alpha m}^i - \tau_{\alpha m}^i) + d_{mn}^\alpha (L_{j\alpha}^i - \tau_{j\alpha}^i) - d_{\alpha n}^i (L_{jm}^\alpha - \tau_{jm}^\alpha) \\
&+ \frac{1}{N+1} (L_{j\alpha}^\alpha - d_{j\alpha}^\alpha) (L_{nm}^i - \tau_{nm}^i) + \frac{1}{N+1} (L_{m\alpha}^\alpha - d_{m\alpha}^\alpha) (L_{jn}^i - \tau_{jn}^i) \\
&+ \frac{1}{N+1} (L_{n\beta}^\beta - d_{n\beta}^\beta) (L_{jm}^i - \tau_{jm}^i) - \frac{1}{N+1} \delta_n^i (L_{\alpha\beta}^\beta - d_{\alpha\beta}^\beta) (L_{jm}^\alpha - \tau_{jm}^\alpha),
\end{aligned} \tag{3.47}$$

i odgovarajuće $\tilde{\Theta}_{(p).jmn}^i$ i τ_{jk}^i zadati jednačinom (3.34).

Ako je \mathcal{W}_{jmn}^i pridružena invarijanta Vejlovog tipa preslikavanja $f : \mathbb{G}\mathbb{A}_N \rightarrow \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$, tada važi jednakost

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{jmn}^i + u\eta_{(p^1).jmn}^i + u'\eta_{(p^2).jnm}^i + v\zeta_{jmn}^i + v'\zeta_{jnm}^i + w\zeta_{mnj}^i \\
= \overline{\mathcal{W}}_{jmn}^i + u\overline{\eta}_{(p^1).jmn}^i + u'\overline{\eta}_{(p^2).jnm}^i + v\overline{\zeta}_{jmn}^i + v'\overline{\zeta}_{jnm}^i + w\overline{\zeta}_{mnj}^i
\end{aligned}$$

Na osnovu te jednakosti sledi da je

$$W_{(p^1).(p^2).jmn}^i = \overline{W}_{(p^1).(p^2).jmn}^i,$$

gde je

$$\begin{aligned}
W_{(p^1).(p^2).jmn}^i &= \mathcal{W}_{jmn}^i + u(L_{jm|n}^i + \tilde{\Theta}_{(p^1).jmn}^i) + u'(L_{jn|m}^i + \tilde{\Theta}_{(p^2).jnm}^i) \\
&+ v(L_{jm}^\alpha L_{\alpha n}^i + \hat{\theta}_{jmn}^i) + v'(L_{jn}^\alpha L_{\alpha m}^i + \hat{\theta}_{jnm}^i) + w(L_{mn}^\alpha L_{\alpha j}^i + \hat{\theta}_{mnj}^i).
\end{aligned} \tag{3.48}$$

U slučaju da je $\mathcal{W}_{jmn}^i = R_{jmn}^i + c\delta_j^i R_{[mn]} + \nu_{jmn}^i$, gde je c realna konstanta, i ν_{jmn}^i geometrijski objekat tipa (1, 3), invarijanta $W_{(p^1).(p^2).jmn}^i$ se transformiše u

$$\begin{aligned}
W_{(p^1).(p^2).jmn}^i &= K_{jmn}^i + c\delta_j^i (K_{[mn]} - 2uL_{m|n}^\alpha - u'L_{[m\alpha|n]}^\alpha - 2vL_{mn}^\alpha L_{\alpha\beta}^\beta) \\
&+ \nu_{jmn}^i + u\tilde{\Theta}_{(p^1).jmn}^i + u'\tilde{\Theta}_{(p^2).jnm}^i + v\hat{\theta}_{jmn}^i + v'\hat{\theta}_{jnm}^i + w\hat{\theta}_{mnj}^i.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Invarijante $W_{(p^1).(p^2).jmn}^i$ zadate jednačinom (3.48), ili ekvivalentno jednačinom (3.49), su izvedene invarijante preslikavanja f .

3.2. SKORO GEODEZIJSKA PRESLIKAVANJA TREĆEG TIPA

Važi naredna teorema.

Teorema 3.2. *Neka je $f : \mathbb{G}\mathbb{A}_N \rightarrow \overline{\mathbb{G}\mathbb{A}_N}$ preslikavanje prostora nesimetrične afine koneksije $\mathbb{G}\mathbb{A}_N$. Familija geometrijskih objekata $W_{(p^1).(p^2).jmn}^i$ zadata jednačinama (3.48, 3.49) jeste familija izvedenih invarijanti Vejlvog tipa preslikavanja f . \square*

Posledica 3.1. *Ako je $f : \mathbb{G}\mathbb{A}_N \rightarrow \overline{\mathbb{G}\mathbb{A}_N}$ ekvitorziona preslikavanje prostora $\mathbb{G}\mathbb{A}_N$, familija invarijanti $W_{(p^1).(p^2).jmn}^i$ preslikavanja f zadata jednačinom (3.48) se redukuje na*

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{(p^1).(p^2).jmn}^i &= \mathcal{W}_{jmn}^i + u(L_{\underline{\alpha n}}^i L_{j\check{m}}^\alpha - L_{j\check{n}}^\alpha L_{\alpha\check{m}}^i - L_{\underline{mn}}^\alpha L_{j\check{\alpha}}^i + \widetilde{\Theta}_{(p^1).jmn}^i) \\ &+ u'(L_{\underline{\alpha m}}^i L_{j\check{n}}^\alpha - L_{j\check{m}}^\alpha L_{\alpha\check{n}}^i - L_{\underline{mn}}^\alpha L_{j\check{\alpha}}^i + \widetilde{\Theta}_{(p^2).jnm}^i), \end{aligned} \quad (3.50)$$

odnosno ekvivalentno, na

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{(p^1).(p^2).jmn}^i &= K_{jmn}^i + c\delta_j^i(K_{[mn]} - 2uL_{\check{m}n|\alpha}^\alpha - u'L_{[m\check{\alpha}|n]}^\alpha - 2vL_{\check{m}n}^\alpha L_{\alpha\check{\beta}}^\beta) \\ &+ \nu_{jmn}^i + u\widetilde{\Theta}_{(p^1).jmn}^i + u'\widetilde{\Theta}_{(p^2).jnm}^i, \end{aligned} \quad (3.51)$$

gde su $\mathcal{W}_{jmn}^i = R_{jmn}^i + cR_{[mn]} + \nu_{jmn}^i$ i $\widetilde{\Theta}_{(p).jmn}^i$ dobijeni na osnovu jednačina (3.40–3.47) u slučaju $\tau_{jk}^i = 0$, pri čemu su u, u', v, v', w odgovarajući koeficijenti. \square

Primer 3.1. *Na osnovu jednačine (2) u radu [7]*

$$\overline{L}_{jk}^i = L_{jk}^i + \psi_j \delta_k^i + \psi_k \delta_j^i + F_j^i \sigma_k + F_k^i \sigma_j, \quad (3.52)$$

za F -planarno preslikavanje $f : \mathbb{A}_N \rightarrow \overline{\mathbb{A}_N}$, dobijaju se odgovarajuće invarijante tog preslikavanja na osnovu jednačine (3.2).

3.2 Skoro geodezijska preslikavanja trećeg tipa

Mnogi autori se bave dobijanjem invarijanti preslikavanja među prostorima simetrične i nesimetrične afine koneksije. Neki od njih su J. Mikeš sa svojom

istraživačkom grupom [6, 8, 9, 65, 114] N. S. Sinjukov [110], M. S. Stanković [100, 124, 127, 140], M. Lj. Zlatanović [151, 152], M. Z. Petrović [98, 100] i mnogi drugi.

3.2.1 Geodezijske i skoro geodezijske linije i skoro geodezijska preslikavanja

Kriva $\ell = \ell(t)$ u pridruženom prostoru \mathbb{A}_N čiji tangentni vektor $\lambda = \frac{d\ell}{dt}$ sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina [65, 110]

$$\frac{d\lambda^i}{dt} + L_{\alpha\beta}^i \lambda^\alpha \lambda^\beta = \zeta \lambda^i, \quad (3.53)$$

gde je ζ skalar, naziva se geodezijska linija prostora \mathbb{A}_N .

Definicija 3.1. [8, 9, 65, 110, 114] Kriva $\tilde{\ell} = \tilde{\ell}(t)$ u pridruženom prostoru $\overline{\mathbb{A}}_N$ čiji tangentni vektor $\tilde{\lambda} = \frac{d\tilde{\ell}}{dt}$ zadovoljava sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina

$$\tilde{\lambda}_2^i = \bar{a}(t)\tilde{\lambda}^i + \bar{b}(t)\tilde{\lambda}_1^i, \quad \tilde{\lambda}_1^i = \tilde{\lambda}_{\parallel\alpha}^i \tilde{\lambda}^\alpha, \quad \tilde{\lambda}_2^i = \tilde{\lambda}_{(1)\parallel\alpha}^i \tilde{\lambda}^\alpha, \quad (3.54)$$

gde su $\bar{a}(t)$, $\bar{b}(t)$ skalarne funkcije i kovarijantni izvod generisan afinom koneksijom prostora $\overline{\mathbb{A}}_N$ označen sa \parallel , naziva se skoro geodezijska linija prostora $\overline{\mathbb{A}}_N$.

Preslikavanje $f : \mathbb{A}_N \rightarrow \overline{\mathbb{A}}_N$ je skoro geodezijsko preslikavanje ukoliko svaku geodezijsku liniju prostora \mathbb{A}_N transformiše u skoro geodezijsku liniju prostora $\overline{\mathbb{A}}_N$ (vidi [8, 9, 65, 110, 114]).

Sinjukov je dokazao [110] da postoje tri tipa skoro geodezijskih preslikavanja prostora \mathbb{A}_N . Ti tipovi, prvi, drugi i treći, su označeni sa π_1 , π_2 , π_3 .

Dokazano je [110] da je inverzno preslikavanje skoro geodezijskog preslikavanja $f : \mathbb{A}_N \rightarrow \overline{\mathbb{A}}_N$ tipa π_3 takođe skoro geodezijsko preslikavanje tipa π_3 . Za skoro geodezijska preslikavanja trećeg tipa čija su inverzna preslikavanja skoro geodezijska preslikavanja trećeg tipa, kaže se da zadovoljavaju osobinu reciprociteta (vidi [110], str. 191).

M. S. Stanković [124–126] je uopštio Sinjukovljev koncept skoro geodezijskih preslikavanja. Kriva $\tilde{\ell} = \tilde{\ell}(t)$ čiji je tangentni vektor $\tilde{\lambda} = \frac{d\tilde{\ell}}{dt}$ rešenje sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina [98, 100, 124–127, 140]

3.2. SKORO GEODEZIJSKA PRESLIKAVANJA TREĆEG TIPA

$$\tilde{\lambda}_{k(2)}^i = \bar{a}_k(t)\tilde{\lambda}^i + \bar{b}_k(t)\tilde{\lambda}_{k(1)}^i, \quad \tilde{\lambda}_{k(1)}^i = \tilde{\lambda}_{k\|\alpha}^i\tilde{\lambda}^\alpha, \quad \tilde{\lambda}_{k(2)}^i = \tilde{\lambda}_{k(1)\|\alpha}^i\tilde{\lambda}^\alpha, \quad (3.55)$$

$k \in \{1, 2\}$, naziva se *skoro geodezijska linija* k -te vrste prostora $\mathbb{G}\bar{\mathbb{A}}_N$.

Preslikavanje $f : \mathbb{G}\mathbb{A}_N \rightarrow \mathbb{G}\bar{\mathbb{A}}_N$ koje svaku geodezijsku liniju prostora $\mathbb{G}\mathbb{A}_N$ transformiše u skoro geodezijsku liniju k -te vrste, $k = 1, 2$, prostora $\mathbb{G}\bar{\mathbb{A}}_N$ naziva se skoro geodezijsko preslikavanje k -te vrste prostora $\mathbb{G}\mathbb{A}_N$.

Preslikavanje $f : \mathbb{G}\mathbb{A}_N \rightarrow \mathbb{G}\bar{\mathbb{A}}_N$ je ekvitorziona [85] ukoliko su anti-simetrični delovi L_{jk}^i i \bar{L}_{jk}^i koeficijenta affine koneksije L_{jk}^i i $\bar{L}_{jk}^i \stackrel{f}{\leftarrow} L_{jk}^i$ prostora $\mathbb{G}\mathbb{A}_N$ i $\mathbb{G}\bar{\mathbb{A}}_N$ jednaki. U nastavku istraživanja, fokus će biti na ekvitorzionim skoro geodezijskim preslikavanjima tipa π_3 prve vrste.

Motivisan Sinjukovljevim radom [110], M. S. Stanković [124–126] je odredio dva tipa skoro geodezijskih linija. Svaki od tri tipa skoro geodezijskih preslikavanja da se podeliti na dve vrste. Te vrste skoro geodezijskih preslikavanja su π_r , $r = 1, 2, 3$.

Skoro geodezijsko preslikavanje vrste π_3 , $k = 1, 2$, ima osobinu reciprociteta ako je njegovo inverzno preslikavanje skoro geodezijsko preslikavanje iste vrste i istog tipa. Za razliku od skoro geodezijskih preslikavanja prostora simetrične affine koneksije, skoro geodezijska preslikavanja trećeg tipa prostora $\mathbb{G}\mathbb{A}_N$ nemaju osobinu reciprociteta u opštem slučaju.

Cilj je odrediti invarijante skoro geodezijskih preslikavanja trećeg tipa prostora $\mathbb{G}\mathbb{A}_N$ koja imaju ili nemaju osobinu reciprociteta.

3.2.2 Dve vrste invarijanti preslikavanja

Invarijante preslikavanja prostora simetrične i nesimetrične affine koneksije su takvi geometrijski objekti čije se vrednosti i oblici ne menjaju pod dejstvom preslikavanja. Ukoliko skoro geodezijska preslikavanja $f : \mathbb{G}\mathbb{A}_N \rightarrow \mathbb{G}\bar{\mathbb{A}}_N$ ili $f : \mathbb{A}_N \rightarrow \bar{\mathbb{A}}_N$ nemaju osobinu reciprociteta, invarijante tih preslikavanja (geometrijski objekti čije se vrednosti i oblici očuvavaju) je nemoguće odrediti. Iz tog razloga, da bismo dobili invarijante skoro geodezijskih preslikavanja na osnovu odgovarajućeg zakona transformacije tenzora krivine, neophodno je pretpostaviti

da posmatrana preslikavanja imaju osobinu reciprociteta.

U fizici postoje dve vrste invarijantnosti (preuzeto iz knjige Đ. Mušicki, B. Milić, *Matematičke osnove teorijske fizike* [90], str. 103):

- *Invarijanta* preslikavanja f je objekat čija se vrednost ne menja, ali čiji oblik se menja pod dejstvom tog preslikavanja.
- *Totalna invarijanta* preslikavanja f je objekat čiji se vrednost i oblik ne menjaju pod dejstvom tog preslikavanja.

Invarijante geometrijskih preslikavanja koje su dobijene do danas su analogne totalnim invarijantama u fizici. Da bismo oslabili uslov invarijantnosti u diferencijalnoj geometriji, potrebno je da uvedemo narednu definiciju.

Definicija 3.2. Neka je $f : \mathbb{G}\mathbb{A}_N \rightarrow \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ preslikavanje i neka je $U_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ geometrijski objekat tipa (p, q) .

- Ukoliko preslikavanje f očuvava vrednost geometrijskog objekta $U_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ ali menja njegov oblik transformišući ga u $\overline{V}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$, tada je invarijantnost geometrijskog objekta $U_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ pod dejstvom preslikavanja f vrednosna.
- Ukoliko preslikavanje f očuvava i vrednost i oblik geometrijskog objekta $U_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$, tada je invarijantnost geometrijskog objekta $U_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ pod dejstvom preslikavanja f totalna.

Primer 3.2. Invarijanta geodezijskog preslikavanja $f : \mathbb{A}_N \rightarrow \overline{\mathbb{A}}_N$ je Vejlov projekivni tenzor

$$W_{jmn}^i = R_{jmn}^i + \frac{1}{N+1} \delta_j^i R_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1} \delta_{[m}^i R_{jn]} + \frac{1}{N^2-1} \delta_{[m}^i R_{n]j}, \quad (3.56)$$

gde je $R_{[mn]} = R_{mn} - R_{nm}$, $\delta_{[m}^i R_{jn]} = \delta_m^i R_{jn} - \delta_n^i R_{jm}$, $\delta_{[m}^i R_{n]j} = \delta_m^i R_{nj} - \delta_n^i R_{mj}$.

Geodezijsko preslikavanje f transformiše Vejlov projekivni tenzor W_{jmn}^i u

$$\overline{W}_{jmn}^i = \overline{R}_{jmn}^i + \frac{1}{N+1} \delta_j^i \overline{R}_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1} \delta_{[m}^i \overline{R}_{jn]} + \frac{1}{N^2-1} \delta_{[m}^i \overline{R}_{n]j}. \quad (3.57)$$

3.2. SKORO GEODEZIJSKA PRESLIKAVANJA TREĆEG TIPA

Važi jednakost $W_{jmn}^i = \overline{W}_{jmn}^i$ i oblici tenzora W_{jmn}^i i \overline{W}_{jmn}^i ostaju očuvani pod dejstvom geodezijskog preslikavanja f . Iz tog razloga, invarijantnost geometrijskog objekta W_{jmn}^i preslikavanja f je totalna.

Ako je $R_{ij} \neq R_{ji}$ i $\overline{R}_{ij} \equiv \overline{R}_{ji}$, kao što je to bilo slučaj u [151], oblik invarijante W_{jmn}^i ostaje nepromenjen ali se invarijanta \overline{W}_{jmn}^i transformiše u

$$\overline{\overline{W}}_{jmn}^i = \overline{R}_{jmn}^i + \frac{1}{N-1} (\delta_m^i R_{jn} - \delta_n^i R_{jm}). \quad (3.58)$$

Jednakost $W_{jmn}^i = \overline{\overline{W}}_{jmn}^i$ važi (vrednosti koje dobijaju geometrijski objekti W_{jmn}^i i $\overline{\overline{W}}_{jmn}^i$ su jednake) ali njihovi oblici se razlikuju. Zbog toga, invarijantnost geometrijskog objekta W_{jmn}^i je vrednosna.

Invarijante skoro geodezijskih preslikavanja trećeg tipa su objekti izučavanja i za kojima se traga u nastavku.

3.2.3 Prethodni rezultati

Zakoni transformacije koeficijenata afine koneksije pod dejstvima skoro geodezijskih preslikavanja trećeg tipa prostora simetrične i nesimetrične afine koneksije su

$$\overline{L}_{jk}^i = L_{jk}^i + \psi_j \delta_k^i + \psi_k \delta_j^i + \sigma_{jk} \varphi^i, \quad (3.59)$$

$$\overline{L}_{jk}^i = L_{jk}^i + \psi_j \delta_k^i + \psi_k \delta_j^i + \sigma_{jk} \varphi^i + \xi_{jk}^i,$$

gde je ψ_i 1-forma, φ^i kovarijantni vektor i tenzori σ_{jk} i ξ_{jk}^i tipa $(0, 2)$ i $(1, 2)$ simetrični i antisimetrični po kovarijantnim indeksima j i k , redom.

Da bi uopštio Vejlov projektivni tenzor kao invarijantu skoro geodezijskog preslikavanja trećeg tipa prostora \mathbb{A}_N , N. S. Sinjukov je u razmatranje uveo ([110], str. 193) geometrijski objekat q_i za koji važi jednakost $q_\alpha \varphi^\alpha = e$, $e = \pm 1$. Nakon neophodnog računanja, Sinjukov je uopštio Tomasov projektivni parametar i Vejlov projektivni tenzor kao invarijante skoro geodezijskog preslikavanja f .

M. S. Stanković [124] je nastavio Sinjukovljeva istraživanja o invarijantama skoro geodezijskih preslikavanja trećeg tipa. Motivisan rezultatima predstav-

jenim u [124], N. O. Vesić, Lj. S. Velimirović i M. S. Stanković [140] su dobili familiju invarijanti ekvitorzionih skoro geodezijskih preslikavanja trećeg tipa prostora nesimetrične affine koneksije. Taj rezultat će biti generalizovan u nastavku.

Istorijski, najpre je N. S. Sinyukov [110] generalizovao Vejlov projektivni tenzor pronalazeći analognu invarijantu skoro geodezijskog preslikavanja prostora \mathbb{A}_N . Nakon toga, M. S. Stanković [124] je uopštio Sinjukovljeve rezultate dobijanjem generalizacije Vejlovog projektivnog tenzora kao invarijante skoro geodezijskog preslikavanja trećeg tipa prostora nesimetrične affine koneksije na osnovu odgovarajuće transformacije tenzora krivine pridruženog prostora. N. O. Vesić, Lj. S. Velimirović, M. S. Stanković [140] su dobili familiju invarijanti ekvitorzionih skoro geodezijskih preslikavanja trećeg tipa prostora nesimetrične affine koneksije, što je dalja generalizacija Vejlovog projektivnog tenzora.

U radu [142], dobijene su dve invarijante preslikavanja prostora simetrične affine koneksije koje su analogne Vejlovom projektivnom tenzoru po uzroku svog postojanja. Te invarijante su nazvane *invarijante Vejlovog tipa*. To je glavna motivacija da se pokuša da se dobiju dve invarijante skoro geodezijskih preslikavanja trećeg tipa prostora nesimetrične affine koneksije.

U radu [142], određene su opšte invarijante preslikavanja $f : \mathbb{G}\mathbb{A}_N \rightarrow \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$. Ukoliko je tenzor deformacije $P_{jk}^i = \overline{L}_{jk}^i - L_{jk}^i$ preslikavanja f

$$P_{jk}^i = \overline{L}_{jk}^i - L_{jk}^i = \overline{\omega}_{jk}^i - \omega_{jk}^i + \overline{\tau}_{jk}^i - \tau_{jk}^i, \quad (3.60)$$

gde je $\omega_{jk}^i = \omega_{kj}^i$, $\overline{\omega}_{jk}^i = \overline{\omega}_{kj}^i$, $\tau_{jk}^i = -\tau_{kj}^i$, $\overline{\tau}_{jk}^i = -\overline{\tau}_{kj}^i$, osnovne pridružene invarijante Tomasovog i Vejlovog tipa preslikavanja f su

$$\tilde{\mathcal{T}}_{jk}^i = L_{jk}^i - \omega_{jk}^i, \quad (3.61)$$

$$\widetilde{\mathcal{W}}_{jmn}^i = R_{jmn}^i - \omega_{jm|n}^i + \omega_{jn|m}^i + \omega_{jm}^\alpha \omega_{\alpha n}^i - \omega_{jn}^\alpha \omega_{\alpha m}^i. \quad (3.62)$$

Primedba 3.2. Geometrijski objekat ω_{jk}^i zavisi od preslikavanja f . Ukoliko je preslikavanje $f : \mathbb{G}\mathbb{A}_N \rightarrow \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ geodezijsko, taj objekat je $\omega_{jk}^i = L_{j\alpha}^\alpha \delta_k^i + L_{k\alpha}^\alpha \delta_j^i$. Ukoliko je preslikavanje $f : \mathbb{G}\mathbb{A}_N \rightarrow \mathbb{G}\mathbb{A}_N$ skoro geodezijsko preslikavanje trećeg tipa, objekat ω_{jk}^i će imati drugi oblik što će biti prikazano u nastavku.

3.2. SKORO GEODEZIJSKA PRESLIKAVANJA TREĆEG TIPA

Da bismo uprostiti zapise, uvedimo sledeći geometrijski objekat [142]

$$L_{\underline{jm}|n}^i = L_{\underline{jm},n}^i + L_{\underline{\alpha n}}^i L_{\underline{jm}}^\alpha - L_{\underline{jn}}^\alpha L_{\underline{\alpha m}}^i - L_{\underline{mn}}^\alpha L_{\underline{j\alpha}}^i. \quad (3.63)$$

Ako je

$$\omega_{jk}^i = \delta_k^i \rho_j + \delta_j^i \rho_k + \sigma_{jk}^i, \quad (3.64)$$

gde je $\sigma_{jk}^i = \sigma_{kj}^i$, invarijante preslikavanja f , date jednačinama (3.61, 3.62), se transformišu u

$$\widetilde{T}_{jk}^i = L_{\underline{jk}}^i - \sigma_{jk}^i - \frac{1}{N+1} \left((L_{\underline{j\alpha}}^\alpha - \sigma_{j\alpha}^\alpha) \delta_k^i + (L_{\underline{k\alpha}}^\alpha - \sigma_{k\alpha}^\alpha) \delta_j^i \right), \quad (3.65)$$

$$\widetilde{W}_{jmn}^i = R_{jmn}^i - \delta_{[m}^i \rho_{j|n]} - \delta_j^i \rho_{[m|n]} - \sigma_{j[m|n]}^i - \delta_{[m}^i \rho_j \rho_n] + \delta_{[m}^i \rho_\alpha \sigma_{jn]}^\alpha + \sigma_{j[m}^i \sigma_{\alpha n]}^\alpha, \quad (3.66)$$

Izvedena invarijanta Vejlvog tipa preslikavanja f je [142]

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{jmn}^i &= R_{jmn}^i + \frac{1}{N+1} \delta_j^i (R_{[mn]} + \sigma_{\alpha[m|n]}^\alpha) + \frac{N}{N^2-1} \delta_{[m}^i R_{j]n]} + \frac{1}{N^2-1} \delta_{[m}^i R_{n]j]} \\ &\quad - \sigma_{jm|n}^i + \sigma_{jn|m}^i + \sigma_{jm}^\alpha \sigma_{\alpha n}^i - \sigma_{jn}^\alpha \sigma_{\alpha m}^i \\ &\quad - \frac{1}{N^2-1} \delta_m^i \left(\sigma_{\alpha[j|n]}^\alpha + (N+1) (\sigma_{jn|\alpha}^\alpha - \sigma_{j\alpha|n}^\alpha - \sigma_{jn}^\alpha \sigma_{\alpha\beta}^\beta + \sigma_{j\beta}^\alpha \sigma_{n\alpha}^\beta) \right) \\ &\quad + \frac{1}{N^2-1} \delta_n^i \left(\sigma_{\alpha[j|m]}^\alpha + (N+1) (\sigma_{jm|\alpha}^\alpha - \sigma_{j\alpha|m}^\alpha - \sigma_{jm}^\alpha \sigma_{\alpha\beta}^\beta + \sigma_{j\beta}^\alpha \sigma_{m\alpha}^\beta) \right). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Osnovna invarijanta ekvitorzionog preslikavanja $f : \mathbb{GA}_N \rightarrow \overline{\mathbb{GA}}_N$ dobijena na osnovu transformacije antisimetričnog dela $L_{\underline{jk}}^i$ koeficijenta affine koneksije $L_{\underline{jk}}^i$ je

$$\widehat{\mathcal{T}}_{jk}^i = L_{\underline{jk}}^i. \quad (3.68)$$

Neka je $\omega_{(1).jk}^i = L_{\underline{jk}}^i$, $\bar{\omega}_{(1).jk}^i = \bar{L}_{\underline{jk}}^i$, $\omega_{(2).jk}^i = \omega_{jk}^i$, $\bar{\omega}_{(2).jk}^i = \bar{\omega}_{jk}^i$. Na osnovu jednakosti $\widehat{\mathcal{T}}_{jm|n}^i - \widehat{\mathcal{T}}_{j|n}^i = P_{\underline{\alpha n}}^i \widehat{\mathcal{T}}_{jm}^\alpha - P_{\underline{jn}}^\alpha \widehat{\mathcal{T}}_{\alpha n}^i - P_{\underline{mn}}^\alpha \widehat{\mathcal{T}}_{j\alpha}^i$, $P_{\underline{jk}}^i = \bar{\omega}_{(1).jk}^i - \omega_{(1).jk}^i$, $P_{\underline{jk}}^i = \bar{\omega}_{(2).jk}^i - \omega_{(2).jk}^i$, dobija se [142]

$$\bar{\theta}_{(p).jmn}^i = \theta_{(p).jmn}^i,$$

gde je $p = (p_1, p_2, p_3)$, $p_1, p_2, p_3 \in \{1, 2\}$, i

$$\theta_{(p).jmn}^i = L_{jm|n}^i - \tau_{jm|n}^i - \omega_{(p_1).\alpha n}^i \hat{T}_{jm}^\alpha + \omega_{(p_2).jn}^\alpha \hat{T}_{\alpha m}^i + \omega_{(p_3).mn}^\alpha \hat{T}_{j\alpha}^i. \quad (3.69)$$

Familija invarijanti ekvitorzionog preslikavanja f dobijena na osnovu transformacije familije K_{jmn}^i o tenzora krivine prostora $\mathbb{G}\mathbb{A}_N$ je [142]

$$W_{(p^1).(p^2).jmn}^i = \widetilde{W}_{jmn}^i + u\theta_{(p^1).jmn}^i + u'\theta_{(p^2).jmn}^i, \quad (3.70)$$

gde je $p^1 = (p_1^1, p_2^1, p_3^1)$, $p^2 = (p_1^2, p_2^2, p_3^2)$, $p_j^i \in \{1, 2\}$ i odgovarajuće invarijante $\theta_{(p^1).jmn}^i$, $\theta_{(p^2).jmn}^i$, date jednačinom (3.69).

3.2.4 Invarijante ekvitorzionih skoro geodezijskih preslikavanja

Neka je $f : \mathbb{G}\mathbb{A}_N \rightarrow \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ ekvitorziona skoro geodezijsko preslikavanje trećeg tipa prve vrste. Osnovne jednačine tog preslikavanja su [124]

$$\begin{cases} \bar{L}_{jk}^i = L_{jk}^i + \psi_j \delta_k^i + \psi_k \delta_j^i + 2\sigma_{jk} \varphi^i, \\ \varphi_{1j}^i = \nu_j \varphi^i + \mu \delta_j^i. \end{cases} \quad (3.71)$$

Zapišimo prvu od prethodnih osnovnih jednačina kao

$$\bar{L}_{jk}^i = L_{jk}^i + \psi_j \delta_k^i + \psi_k \delta_j^i + D_{jk}^i, \quad (3.72)$$

gde je D_{jk}^i tenzor tipa (1, 2) čije su komponente $D_{jk}^i = D_{kj}^i = 2\sigma_{jk} \varphi^i$.

U slučaju inverznog preslikavanja $f^{-1} : \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N \rightarrow \mathbb{G}\mathbb{A}_N$, tenzor \bar{D}_{jk}^i , $\bar{D}_{jk}^i = \bar{D}_{kj}^i$, $\bar{D}_{jk}^i = -D_{jk}^i$, postoji, tako da je

$$L_{jk}^i = \bar{L}_{jk}^i - \psi_j \delta_k^i - \psi_k \delta_j^i - D_{jk}^i = \bar{L}_{jk}^i - \psi_j \delta_k^i - \psi_k \delta_j^i + \bar{D}_{jk}^i. \quad (3.73)$$

3.2. SKORO GEODEZIJSKA PRESLIKAVANJA TREĆEG TIPA

Zbog toga, jednačina (3.72) se transformiše u

$$\bar{L}_{jk}^i = L_{jk}^i + \psi_j \delta_k^i + \psi_k \delta_j^i - \frac{1}{2}(\bar{D}_{jk}^i - D_{jk}^i). \quad (3.74)$$

Kontrakcijom prethodne jednakosti po i i k , dobijamo

$$\psi_j = \frac{1}{N+1}(\bar{L}_{j\alpha}^\alpha + \frac{1}{2}\bar{D}_{j\alpha}^\alpha) - \frac{1}{N+1}(L_{j\alpha}^\alpha + \frac{1}{2}D_{j\alpha}^\alpha). \quad (3.75)$$

Nakon zamene prikaza (3.75) u jednačinu (3.74) i zbog $D_{jk}^i = 2\sigma_{jk}\varphi^i$, sledi da je

$$\omega_{jk}^i = \frac{1}{N+1}\delta_k^i(L_{j\alpha}^\alpha + \sigma_{j\alpha}\varphi^\alpha) + \frac{1}{N+1}\delta_j^i(L_{k\alpha}^\alpha + \sigma_{k\alpha}\varphi^\alpha) - \sigma_{jk}\varphi^i. \quad (3.76)$$

Druga od osnovnih jednačina (3.71) je ekvivalentna jednačini

$$\varphi_{|j}^i = -L_{\alpha j}^i \varphi^\alpha + \nu_{j1} \varphi^i + \mu \delta_j^i. \quad (3.77)$$

Nakon upoređivanja jednakosti (3.64) i (3.77), dolazimo do zaključka da je

$$\rho_j = \frac{1}{N+1}(L_{j\alpha}^\alpha + \sigma_{j\alpha}\varphi^\alpha) \quad \text{i} \quad \sigma_{jk}^i = -\sigma_{jk}\varphi^i. \quad (3.78)$$

Zbog toga, dobijaju se sledeće jednakosti

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sigma_{jm|n}^i = (\sigma_{jm}\varphi^i)_{|n} = \sigma_{jm|n}\varphi^i - \sigma_{jm}L_{\alpha n}^i \varphi^\alpha + \sigma_{jm}\nu_{n1}\varphi^i + \sigma_{jm}\mu\delta_n^i, \\ -\sigma_{ij|\alpha}^\alpha = (\sigma_{ij}\varphi^\alpha)_{|\alpha} = \sigma_{ij|\alpha}\varphi^\alpha - \sigma_{ij}L_{\alpha\beta}^\beta \varphi^\alpha + \sigma_{ij}\nu_{\alpha 1}\varphi^\alpha + N\mu\sigma_{ij}, \\ -\sigma_{\alpha i|j}^\alpha = (\sigma_{\alpha i}\varphi^\alpha)_{|j} = (\sigma_{i\alpha}\varphi^\alpha)_{|j} = \sigma_{\alpha i|j}\varphi^\alpha - \sigma_{\beta i}L_{\alpha j}^\beta \varphi^\alpha + \sigma_{\alpha i}\nu_{j1}\varphi^\alpha + \mu\sigma_{ij}. \end{array} \right. \quad (3.79)$$

Nakon uvođenja rezultata (3.76, 3.78, 3.79) u jednačine (3.65, 3.67, 3.70), dobijamo

$$\tilde{T}_{jk}^i = L_{jk}^i - \frac{1}{N+1}\delta_k^i(L_{j\alpha}^\alpha + \sigma_{j\alpha}\varphi^\alpha) - \frac{1}{N+1}\delta_j^i(L_{k\alpha}^\alpha + \sigma_{k\alpha}\varphi^\alpha) + \sigma_{jk}\varphi^i, \quad (3.80)$$

GLAVA 3. INVARIJANTE

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}_1^i{}_{jmn} &= R_{jmn}^i + \frac{1}{N+1} \delta_j^i \left(R_{[mn]} - (\sigma_{[m\alpha|n]} - \sigma_{[m\beta} L_{\alpha n]}^\beta + \sigma_{[m\alpha} \nu_{1n]}) \varphi^\alpha \right) \\
&+ \sigma_{j[m|n]} \varphi^i + \sigma_{j[m} \sigma_{\alpha n]} \varphi^\alpha \varphi^i - \sigma_{j[m} L_{\alpha n]}^i \varphi^\alpha + \sigma_{j[m} \nu_{1n]} \varphi^i - \delta_{[m}^i \mu \sigma_{j n]} \\
&- \frac{1}{N+1} \left(\delta_{[m}^i L_{j\alpha|n]}^\alpha + (\delta_{[m}^i \sigma_{j\alpha|n]} - \delta_{[m}^i \sigma_{j\beta} L_{\alpha n]}^\beta + \delta_{[m}^i \sigma_{j\alpha} \nu_{1n]}) \varphi^\alpha + \delta_{[m}^i \mu \sigma_{j n]} \right) \\
&+ \frac{1}{N+1} \delta_{[m}^i \sigma_{j n]} (L_{\alpha\beta}^\beta + \sigma_{\alpha\beta} \varphi^\beta) \varphi^\alpha \\
&- \frac{1}{(N+1)^2} (L_{j\alpha}^\alpha + \sigma_{j\alpha} \varphi^\alpha) (\delta_{[m}^i L_{n]\beta}^\beta + \delta_{[m}^i \sigma_{n]\beta} \varphi^\beta),
\end{aligned} \tag{3.81}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}_1^i{}_{jmn} &= R_{jmn}^i + \frac{1}{N+1} \delta_j^i R_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1} \delta_{[m}^i R_{j n]} + \frac{1}{N^2-1} \delta_{[m}^i R_{n] j} \\
&+ \sigma_{j[m|n]} \varphi^i - \sigma_{j[m} L_{\alpha n]}^i \varphi^\alpha + \sigma_{j[m} \nu_{1n]} \varphi^i + \sigma_{j[m} \sigma_{\alpha n]} \varphi^\alpha \varphi^i \\
&- \frac{1}{N+1} \delta_j^i (\sigma_{\alpha[m|n]} - \sigma_{\beta[m} L_{\alpha n]}^\beta + \sigma_{\alpha[m} \nu_{1n]}) \varphi^\alpha \\
&+ \frac{1}{N-1} (\delta_{[m}^i \sigma_{j n]|\alpha} - \delta_{[m}^i \sigma_{j n]} L_{\alpha\beta}^\beta + \delta_{[m}^i \sigma_{j n]} \nu_{1\alpha}) \varphi^\alpha \\
&+ \frac{1}{N-1} (\delta_{[m}^i \sigma_{j n]} \sigma_{\alpha\beta} - \delta_{[m}^i \sigma_{j\alpha} \sigma_{n]\beta}) \varphi^\alpha \varphi^\beta \\
&- \frac{N}{N^2-1} (\delta_{[m}^i \sigma_{\alpha j|n]} - \delta_{[m}^i \sigma_{\beta j} L_{\alpha n]}^\beta + \delta_{[m}^i \sigma_{\alpha j} \nu_{1n]}) \varphi^\alpha \\
&- \frac{1}{N^2-1} (\delta_{[m}^i \sigma_{\alpha n]|\beta} - \delta_{[m}^i \sigma_{\beta n]} L_{\alpha j}^\beta + \delta_{[m}^i \sigma_{\alpha n]} \nu_{1j}) \varphi^\alpha.
\end{aligned} \tag{3.82}$$

Prikažimo invarijantu $\widetilde{W}_1^i{}_{jmn}$ u obliku

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}_1^i{}_{jmn} &= R_{jmn}^i + \frac{1}{N+1} \delta_j^i R_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1} \delta_{[m}^i R_{j n]} + \frac{1}{N^2-1} \delta_{[m}^i R_{n] j} \\
&+ \delta_j^i X_{[mn]} + \delta_{[m}^i Y_{1j n]} + Z_{1jmn}^i,
\end{aligned} \tag{3.83}$$

gde se koriste sledeći tenzori

3.2. SKORO GEODEZIJSKA PRESLIKAVANJA TREĆEG TIPA

$$X_1^{ij} = -\frac{1}{N+1}(\sigma_{\alpha i|j} - \sigma_{\beta i}L_{\alpha j}^{\beta} + \sigma_{\alpha i}\nu_j) \varphi^{\alpha}, \quad (3.84)$$

$$Y_1^{ij} = \frac{1}{N-1}(\sigma_{ij|\alpha} - \sigma_{ij}L_{\alpha\beta}^{\beta} + \sigma_{ij}\nu_{\alpha}) \varphi^{\alpha} \\ + \frac{1}{N-1}(\sigma_{ij}\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{i\alpha}\sigma_{j\beta}) \varphi^{\alpha}\varphi^{\beta} \\ - \frac{N}{N^2-1}(\sigma_{\alpha i|j} - \sigma_{\beta i}L_{\alpha j}^{\beta} + \sigma_{\alpha i}\nu_j) \varphi^{\alpha} \\ - \frac{1}{N^2-1}(\sigma_{\alpha j|i} - \sigma_{\beta j}L_{\alpha i}^{\beta} + \sigma_{\alpha j}\nu_i) \varphi^{\alpha}, \quad (3.85)$$

$$Z_1^i{}_{jmn} = \sigma_{j[m|n]}\varphi^i - \sigma_{j[m}L_{\alpha n]}^i\varphi^{\alpha} + \sigma_{j[m}\nu_n]\varphi^i + \sigma_{j[m}\sigma_{\alpha n]}\varphi^{\alpha}\varphi^i. \quad (3.86)$$

Nakon kontrakcije jednakosti $0 = \widetilde{W}_1^i{}_{jmn} - \widetilde{W}_1^i{}_{jmn}$ po i i j , dobija se

$$\overline{X}_1^{[mn]} - X_1^{[mn]} = -\frac{1}{N}(\overline{Y}_1^{[mn]} + \overline{Z}_1^{\alpha mn}) + \frac{1}{N}(Y_1^{[mn]} + Z_1^{\alpha mn}), \quad (3.87)$$

gde je

$$Y_1^{[ij]} = -\frac{1}{N+1}(\sigma_{\alpha[i|j]} - \sigma_{\beta[i}L_{\alpha j]}^{\beta} + \sigma_{\alpha[i}\nu_j]) \varphi^{\alpha}. \quad (3.88)$$

Nakon uvođenja zapisa (3.85, 3.86, 3.87, 3.88) u

$$0 = \widetilde{W}_1^i{}_{jmn} - \widetilde{W}_1^i{}_{jmn} \\ = \overline{R}_{jmn}^i - R_{jmn}^i + \frac{1}{N+1}\delta_j^i(\overline{R}_{[mn]} - R_{[mn]}) \\ + \frac{N}{N^2-1}(\delta_{[m}^i\overline{R}_{j]n} - \delta_{[m}^iR_{j]n}) + \frac{1}{N^2-1}(\delta_{[m}^i\overline{R}_{n]j} - \delta_{[m}^iR_{n]j}) \\ + \delta_j^i(\overline{X}_1^{[mn]} - X_1^{[mn]}) + (\delta_{[m}^i\overline{Y}_1^{j]n} - \delta_{[m}^iY_1^{j]n}) + \overline{Z}_1^i{}_{jmn} - Z_1^i{}_{jmn}, \quad (3.89)$$

dobijamo da važi jednakost $\widetilde{\widetilde{W}}_1^i{}_{jmn} = \widetilde{W}_1^i{}_{jmn}$, gde je

$$\begin{aligned}
 \widetilde{\widetilde{W}}_1^i{}_{jmn} &= R_{jmn}^i + \frac{1}{N+1} \delta_j^i R_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1} \delta_{[m}^i R_{j]n} + \frac{1}{N^2-1} \delta_{[m}^i R_{n]j} \\
 &+ \sigma_{j[m|n]} \varphi^i - \sigma_{j[m} L_{\alpha n]}^i \varphi^\alpha + \sigma_{j[m} \nu_{1n]} \varphi^i + \sigma_{j[m} \sigma_{\alpha n]} \varphi^\alpha \varphi^i \\
 &- \frac{N}{N+1} \delta_j^i (\sigma_{\alpha[m|n]} - \sigma_{\beta[m} L_{\alpha n]}^\beta + \sigma_{\alpha[m} \nu_{1n]}) \varphi^\alpha \\
 &+ \frac{1}{N-1} (\delta_{[m}^i \sigma_{j]n|\alpha} - \delta_{[m}^i \sigma_{j]n} L_{\alpha\beta}^\beta + \delta_{[m}^i \sigma_{j]n} \nu_{1\alpha}) \varphi^\alpha \\
 &+ \frac{1}{N-1} (\delta_{[m}^i \sigma_{j]n} \sigma_{\alpha\beta} - \delta_{[m}^i \sigma_{j\alpha} \sigma_{n]\beta}) \varphi^\alpha \varphi^\beta \\
 &- \frac{N}{N^2-1} (\delta_{[m}^i \sigma_{\alpha j|n]} - \delta_{[m}^i \sigma_{\beta j} L_{\alpha n]}^\beta + \delta_{[m}^i \nu_{1n]}) \varphi^\alpha \\
 &- \frac{1}{N^2-1} (\delta_{[m}^i \sigma_{\alpha n]|j} - \delta_{[m}^i \sigma_{\beta n]} L_{\alpha j}^\beta + \delta_{[m}^i \sigma_{\alpha n]} \nu_{1j}) \varphi^\alpha.
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

Na osnovu invarijanti $\widetilde{\widetilde{W}}_1^i{}_{jmn}$ i $\widetilde{W}_1^i{}_{jmn}$, zaključujemo da je geometrijski objekat $(\sigma_{\alpha[i|j]} - \sigma_{\beta[i} L_{\alpha j]}^\beta + \sigma_{\alpha[i} \nu_{1j]}) \varphi^\alpha$ invarijanta preslikavanja f . Iz tog razloga, invarijanta $\widetilde{\widetilde{W}}_1^i{}_{jmn}$ data jednačinom (3.82) se redukuje na

$$\begin{aligned}
 \widetilde{W}_1^i{}_{jmn} &= R_{jmn}^i + \frac{1}{N+1} \delta_j^i R_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1} \delta_{[m}^i R_{j]n} + \frac{1}{N^2-1} \delta_{[m}^i R_{n]j} \\
 &+ \sigma_{j[m|n]} \varphi^i - \sigma_{j[m} L_{\alpha n]}^i \varphi^\alpha + \sigma_{j[m} \nu_{1n]} \varphi^i + \sigma_{j[m} \sigma_{\alpha n]} \varphi^\alpha \varphi^i \\
 &+ \frac{1}{N-1} (\delta_{[m}^i \sigma_{j]n|\alpha} - \delta_{[m}^i \sigma_{j]n} L_{\alpha\beta}^\beta + \delta_{[m}^i \sigma_{j]n} \nu_{1\alpha}) \varphi^\alpha \\
 &+ \frac{1}{N-1} (\delta_{[m}^i \sigma_{j]n} \sigma_{\alpha\beta} - \delta_{[m}^i \sigma_{j\alpha} \sigma_{n]\beta}) \varphi^\alpha \varphi^\beta \\
 &- \frac{N}{N^2-1} (\delta_{[m}^i \sigma_{\alpha j|n]} - \delta_{[m}^i \sigma_{\beta j} L_{\alpha n]}^\beta + \delta_{[m}^i \nu_{1n]}) \varphi^\alpha \\
 &- \frac{1}{N^2-1} (\delta_{[m}^i \sigma_{\alpha n]|j} - \delta_{[m}^i \sigma_{\beta n]} L_{\alpha j}^\beta + \delta_{[m}^i \sigma_{\alpha n]} \nu_{1j}) \varphi^\alpha.
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

Nakon kontrakcije jednakosti $0 = \widetilde{\widetilde{W}}_1^i{}_{jmn} - \widetilde{W}_1^i{}_{jmn}$ (ekvivalentne jednačini (3.89))

3.2. SKORO GEODEZIJSKA PRESLIKAVANJA TREĆEG TIPA

po i i n i antisimetrizacije kontrahovane jednačine po j i m , dobija se

$$\bar{X}_1^{[jm]} - X_1^{[jm]} = -\frac{N-1}{2}(\bar{Y}_1^{[jm]} - Y_1^{[jm]}) + \frac{1}{2}(\bar{Z}_1^{\alpha[jm]} - Z_1^{\alpha[jm]}). \quad (3.92)$$

Nakon uvođenja zapisa (3.92) u jednačinu (3.89), dobija se $\widetilde{\widetilde{W}}_1^i{}_{jmn} = \widetilde{\widetilde{W}}_1^i{}_{jmn}$, gde je

$$\begin{aligned} \widetilde{\widetilde{W}}_1^i{}_{jmn} &= R_{jmn}^i + \frac{1}{N+1}\delta_j^i R_{[mn]} + \frac{N}{N^2-1}\delta_{[m}^i R_{j]n} + \frac{1}{N^2-1}\delta_{[m}^i R_{n]j} \\ &+ \sigma_{j[m|n]}\varphi^i - \sigma_{j[m}L_{\alpha n]}^i\varphi^\alpha + \sigma_{j[m}\nu_{1n]}\varphi^i + \sigma_{j[m}\sigma_{\alpha n]}\varphi^\alpha\varphi^i \\ &+ \frac{N-1}{2(N+1)}\delta_j^i(\sigma_{\alpha[m|n]} - \sigma_{\beta[m}L_{\alpha n]}^\beta + \sigma_{\alpha[m}\nu_{1n]})\varphi^\alpha \\ &- \frac{1}{2}\delta_j^i(\sigma_{[m\alpha|n]} - \sigma_{[m\beta}L_{\alpha n]}^\beta + \sigma_{[m\alpha}\nu_{1n]})\varphi^\alpha \\ &+ \frac{1}{N-1}(\delta_{[m}\sigma_{j]n}\varphi^\alpha - \delta_{[m}\sigma_{j]n}L_{\alpha\beta}^\beta + \delta_{[m}\sigma_{j]n}\nu_{1\alpha})\varphi^\alpha \\ &+ \frac{1}{N-1}(\delta_{[m}\sigma_{j]n}\sigma_{\alpha\beta} - \delta_{[m}\sigma_{j\alpha}\sigma_{n]\beta})\varphi^\alpha\varphi^\beta \\ &- \frac{N}{N^2-1}(\delta_{[m}\sigma_{\alpha j|n]} - \delta_{[m}\sigma_{\beta j}L_{\alpha n]}^\beta + \delta_{[m}\sigma_{\alpha j}\nu_{1n]})\varphi^\alpha \\ &- \frac{1}{N^2-1}(\delta_{[m}\sigma_{\alpha n]|j]} - \delta_{[m}\sigma_{\beta n]}L_{\alpha j}^\beta + \delta_{[m}\sigma_{\alpha n]}\nu_{1j})\varphi^\alpha. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Nakon upoređivanja invarijanti $\widetilde{\widetilde{W}}_1^i{}_{jmn}$ i $\widetilde{W}_1^i{}_{jmn}$ preslikavanja f , zaključujemo da se invarijanta $\widetilde{\widetilde{W}}_1^i{}_{jmn}$ data jednačinom (3.93) redukuje na invarijantu $\widetilde{W}_1^i{}_{jmn}$ datu jednačinom (3.91).

Na osnovu transformacije familije (1.68) tenzora krivine prostora $\mathbb{G}\mathbb{A}_N$ pod dejstvom preslikavanja f se dobija:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1^{i0.(p^1).(p^2).jmn} &= \widetilde{W}_1^i{}_{jmn} + uL_{j\check{m}|n}^i + u'L_{j\check{n}|m}^i \\ &- u(\omega_{(p_1^1).\alpha n}^i L_{j\check{m}}^\alpha - \omega_{(p_2^1).jn}^\alpha L_{\alpha\check{m}}^i - \omega_{(p_3^1).mn}^\alpha L_{j\check{\alpha}}^i) \\ &- u'(\omega_{(p_1^2).\alpha m}^i L_{j\check{n}}^\alpha - \omega_{(p_2^2).jm}^\alpha L_{\alpha\check{n}}^i - \omega_{(p_3^2).mn}^\alpha L_{j\check{\alpha}}^i), \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned}
 W_1^{i,0.(p^1).(p^2).jmn} &= \widetilde{W}_1^i{}_{jmn} + uL_{j\check{m}|n}^i + u'L_{j\check{n}|m}^i \\
 &\quad - u(\omega_{(p^1).\alpha n}^i L_{j\check{m}}^\alpha - \omega_{(p^2).jn}^\alpha L_{\alpha\check{m}}^i - \omega_{(p^3).mn}^\alpha L_{j\check{\alpha}}^i) \\
 &\quad - u'(\omega_{(p^1).\alpha m}^i L_{j\check{n}}^\alpha - \omega_{(p^2).jm}^\alpha L_{\alpha\check{n}}^i - \omega_{(p^3).mn}^\alpha L_{j\check{\alpha}}^i),
 \end{aligned} \tag{3.95}$$

gde je $p_1^1, \dots, p_3^2 \in \{1, 2\}$, $\omega_{(1).jk}^i = L_{j\check{k}}^i$ i $\omega_{(2).jk}^i = \omega_{jk}^i$, za geometrijski objekat ω_{jk}^i dat jednačinom (3.76).

Važi naredna teorema.

Teorema 3.3. *Neka je $f : \mathbb{G}\mathbb{A}_N \rightarrow \mathbb{G}\overline{\mathbb{A}}_N$ ekvitorziona skoro geodezijsko preslikavanje tipa π_3 .*

Geometrijski objekat \widetilde{T}_{jk}^i , zadat jednačinom (3.80), je osnovna invarijanta Tomasovog tipa preslikavanja f . Invarijantnost tog geometrijskog objekta je totalna.

Geometrijski objekat \widetilde{W}_{jmn}^i zadat jednačinom (3.81) je osnovna pridružena invarijanta Vejlovog tipa preslikavanja f . Invarijantnost tog geometrijskog objekta je vrednosna. Invarijantnost geometrijskog objekta \widetilde{W}_{jmn}^i je totalna ako i samo ako preslikavanje f ima osobinu reciprociteta.

Geometrijski objekat \widetilde{W}_{jmn}^i zadat jednačinom (3.91) je pridružena izvedena invarijanta Vejlovog tipa preslikavanja f . Invarijantnost tog geometrijskog objekta je vrednosna. Invarijantnost geometrijskog objekta \widetilde{W}_{jmn}^i je totalna ako i samo ako preslikavanje f ima osobinu reciprociteta.

Geometrijski objekti $\mathcal{W}_1^i{}_{jmn}$, $W_1^i{}_{jmn}$, zadati jednačinama (3.94, 3.95), su invarijante Vejlovog tipa ekvitorzionog skoro geodezijskog preslikavanja f . Invarijantnosti tih geometrijskih objekata su vrednosne. Te invarijantnosti su totalne ako i samo ako preslikavanje f ima osobinu reciprociteta. \square

3.3 Invarijante preslikavanja u operatorskom obliku

Tenzor krivine Rimanovog prostora \mathbb{R}_N^0 u smislu definicije predstavljene u radu (Ivanov, Zlatanović, [39]) je

$${}^0R(X, Y), Z = {}^0\nabla_X {}^0\nabla_Y Z - {}^0\nabla_Y {}^0\nabla_X Z - {}^0\nabla_{[X, Y]} Z, \tag{3.96}$$

3.3. INVARIJANTE PRESLIKAVANJA U OPERATORSKOM OBLIKU

gde je $\overset{0}{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}(\nabla_X Y + \nabla_Y X)$.

Primedba 3.3. Tenzor krivine (3.96) koincidira sa tenzorom krivine prostora simetrične afine koneksije \mathbb{A}_N u Ajzenhartovom smislu. Razlika je u tome što metrički tenzor nije definisan u prostoru \mathbb{A}_N . Rezultati koji će biti dobijeni u ovoj sekciji daju se primeniti u istraživanjima o Rimanovim prostorima i prostorima simetrične afine koneksije u Ajzenhartovom smislu.

Tenzor krivine Rimanovog prostora \mathbb{R}_N u Ajzenhartovom smislu je

$$R^g(X, Y)Z = \nabla_X^g \nabla_Y^g Z - \nabla_Y^g \nabla_X^g Z - \nabla_{[X, Y]}^g Z. \quad (3.97)$$

3.3.1 Invarijante preslikavanja

Neka je $f : \overset{0}{\mathbb{R}}_N \rightarrow \overset{0}{\mathbb{R}}_N$ preslikavanje među Rimanovim prostorima u smislu definicije Ivanova i Zlatanović. Zakon transformacije afine koneksije $\overset{0}{\nabla}_X Y$ u $\overset{0}{\bar{\nabla}}_X Y$ je

$$\overset{0}{\bar{\nabla}}_X Y = \overset{0}{\nabla}_X Y + \bar{\omega}(X, Y) - \omega(X, Y), \quad (3.98)$$

gde su $\bar{\omega}(X, Y)$ i $\omega(X, Y)$ tenzori za koje važe jednakosti $\bar{\omega}(X, Y) = \bar{\omega}(Y, X)$ i $\omega(X, Y) = \omega(Y, X)$.

Na osnovu jednačine (3.98), dobija se da važi

$$\overset{0}{\bar{\mathcal{T}}}(X, Y) = \overset{0}{\mathcal{T}}(X, Y),$$

gde je

$$\overset{0}{\mathcal{T}}(X, Y) = \overset{0}{\nabla}_X Y - \omega(X, Y), \quad (3.99)$$

i odgovarajuće $\overset{0}{\bar{\mathcal{T}}}(X, Y)$.

Važi naredna lema.

Lema 3.2. Geometrijski objekat $\overset{0}{\mathcal{T}}(X, Y)$ zadat jednačinom (3.99) je osnovna pridružena invarijanta Tomasovog tipa preslikavanja $f : \overset{0}{\mathbb{R}}_N \rightarrow \overset{0}{\mathbb{R}}_N$. \square

Važe naredne jednakosti.

$$\begin{aligned}
 \overset{0}{\mathcal{T}}(X, \overset{0}{\mathcal{T}}(Y, Z)) &= \overset{0}{\mathcal{T}}(X, \overset{0}{\nabla}_Y Z - \omega(Y, Z)) \\
 &= \overset{0}{\nabla}_X \{ \overset{0}{\nabla}_Y Z - \omega(Y, Z) \} - \omega(X, \overset{0}{\nabla}_Y Z - \omega(Y, Z)) \\
 &= \overset{0}{\nabla}_X \overset{0}{\nabla}_Y Z - \omega(X, \overset{0}{\nabla}_Y Z) + \omega(X, \omega(Y, Z)) - (\overset{0}{\nabla}_X \omega)(Y, Z) \\
 &\quad + \omega(\overset{0}{\nabla}_X Y, Z) + \omega(Y, \overset{0}{\nabla}_X Z).
 \end{aligned}$$

Odatle sledi da su sledeće jednačine zadovoljene.

$$\begin{aligned}
 \overset{0}{\mathcal{T}}(X, \overset{0}{\mathcal{T}}(Y, Z)) &= \overset{0}{\nabla}_X \overset{0}{\nabla}_Y Z - \omega(X, \overset{0}{\nabla}_Y Z) + \omega(X, \omega(Y, Z)) \\
 &\quad - (\overset{0}{\nabla}_X \omega)(Y, Z) + \omega(Y, \overset{0}{\nabla}_X Z) + \omega(Z, \overset{0}{\nabla}_X Y),
 \end{aligned} \tag{3.100}$$

$$\begin{aligned}
 \overset{0}{\mathcal{T}}(Y, \overset{0}{\mathcal{T}}(X, Z)) &= \overset{0}{\nabla}_Y \overset{0}{\nabla}_X Z - \omega(Y, \overset{0}{\nabla}_X Z) + \omega(Y, \omega(X, Z)) \\
 &\quad - (\overset{0}{\nabla}_Y \omega)(X, Z) + \omega(X, \overset{0}{\nabla}_Y Z) + \omega(Z, \overset{0}{\nabla}_Y X),
 \end{aligned} \tag{3.101}$$

$$\overset{0}{\mathcal{T}}([X, Y], Z) = \overset{0}{\nabla}_{[X, Y]} Z - \omega([X, Y], Z). \tag{3.102}$$

Na osnovu jednakosti

$$\begin{aligned}
 \overset{0}{\mathcal{T}}(X, \overset{0}{\mathcal{T}}(Y, Z)) - \overset{0}{\mathcal{T}}(Y, \overset{0}{\mathcal{T}}(X, Z)) - \overset{0}{\mathcal{T}}([X, Y], Z) \\
 = \overset{0}{\mathcal{T}}(X, \overset{0}{\mathcal{T}}(Y, Z)) - \overset{0}{\mathcal{T}}(Y, \overset{0}{\mathcal{T}}(X, Z)) - \overset{0}{\mathcal{T}}([X, Y], Z),
 \end{aligned}$$

dobija se da važi

$$\overset{0}{\mathcal{W}}(X, Y, Z) = \overset{0}{\mathcal{W}}(X, Y, Z),$$

gde je

$$\begin{aligned}
 \overset{0}{\mathcal{W}}(X, Y, Z) &= \overset{0}{R}(X, Y)Z + 2\omega(Y, \overset{0}{\nabla}_X Z) + 2\omega([X, Y], Z) \\
 &\quad + \omega(X, \omega(Y, Z)) - \omega(Y, \omega(X, Z)) \\
 &\quad - (\overset{0}{\nabla}_X \omega)(Y, Z) + (\overset{0}{\nabla}_Y \omega)(X, Z).
 \end{aligned} \tag{3.103}$$

3.3. INVARIJANTE PRESLIKAVANJA U OPERATORSKOM OBLIKU

Na taj način, dokazana je sledeća lema.

Lema 3.3. Geometrijski objekat $\overset{0}{\mathcal{W}}(X, Y, Z)$ zadat jednačinom (3.103) je osnovna pridružena invarijanta Vejlvog tipa preslikavanja $f : \overset{0}{\mathbb{R}}_N \rightarrow \overset{0}{\mathbb{R}}_N$. \square

3.3.2 Invarijante preslikavanja prostora u Ajzenhartovom smislu

Ukoliko važi jednačina

$$\overset{0}{\nabla}_X Y - \nabla_X^g Y = \mathcal{P}(X, Y), \quad (3.104)$$

gde je \mathcal{P} tenzor tipa $(1, 2)$, osnovna pridružena invarijanta $\overset{0}{\mathcal{T}}$ se transformiše u

$$\overset{0}{\mathcal{T}}(X, Y) = \nabla_X^g Y + \mathcal{P}(X, Y) - \omega(X, Y). \quad (3.105)$$

Štaviše, važe naredne jednakosti

$$\begin{aligned} \overset{0}{R}(X, Y)Z &= \overset{0}{\nabla}_X \overset{0}{\nabla}_Y Z - \overset{0}{\nabla}_Y \overset{0}{\nabla}_X Z - \overset{0}{\nabla}_{[X, Y]} Z \\ &= \nabla_X^g \nabla_Y^g Z + \nabla_X^g \{ \mathcal{P}(Y, Z) \} + \mathcal{P}(X, \nabla_Y^g Z) + \mathcal{P}(X, \mathcal{P}(Y, Z)) \\ &\quad - \nabla_Y^g \nabla_X^g Z - \nabla_Y^g \{ \mathcal{P}(X, Z) \} - \mathcal{P}(Y, \nabla_X^g Z) - \mathcal{P}(Y, \nabla_X^g Z) \\ &\quad + \mathcal{P}(X, \mathcal{P}(Y, Z)) - \mathcal{P}(Y, \mathcal{P}(X, Z)) - \mathcal{P}([X, Y], Z). \end{aligned}$$

Na osnovu tih jednakosti, dobija se da važi jednačina

$$\begin{aligned} \overset{0}{R}(X, Y)Z &= R^g(X, Y)Z + (\nabla_X^g \mathcal{P})(Y, Z) - (\nabla_Y^g \mathcal{P})(X, Z) \\ &\quad - 2\mathcal{P}([X, Y], Z) + 2\mathcal{P}(X, \nabla_Y^g Z) - 2\mathcal{P}(Y, \nabla_X^g Z) \\ &\quad + \mathcal{P}(X, \mathcal{P}(Y, Z)) - \mathcal{P}(Y, \mathcal{P}(X, Z)). \end{aligned} \quad (3.106)$$

Zadovoljena je i naredna jednakost

$$\begin{aligned}
 \overset{0}{\nabla}_X \{\omega(Y, Z)\} &= \nabla_X^g \{\omega(Y, Z)\} + \mathcal{P}(X, \omega(Y, Z)) \\
 &= (\overset{0}{\nabla}_X \omega)(Y, Z) - \omega(\nabla_X^g Y, Z) - \omega(\mathcal{P}(X, Y), Z) \\
 &\quad - \omega(Y, \nabla_X^g Z) - \omega(Y, \mathcal{P}(X, Z)) \\
 &= (\nabla_X^g \omega)(Y, Z) - \omega(\nabla_X^g Y, Z) - \omega(Y, \nabla_X^g Z) + \mathcal{P}(X, \omega(Y, Z)).
 \end{aligned}$$

Odatle sledi da važi naredna jednačina.

$$\begin{aligned}
 (\overset{0}{\nabla}_X \omega)(Y, Z) &= (\nabla_X^g \omega)(Y, Z) + \omega(Y, \mathcal{P}(X, Z)) \\
 &\quad + \omega(Z, \mathcal{P}(X, Y)) + \mathcal{P}(X, \omega(Y, Z)).
 \end{aligned} \tag{3.107}$$

Nakon zamene jednačina (3.106, 3.107) u jednačinu (3.103), invarijanta $\overset{0}{\mathcal{W}}(X, Y, Z)$ se transformiše u

$$\begin{aligned}
 \overset{0}{\mathcal{W}}(X, Y, Z) &= R^g(X, Y)Z + (\nabla_X^g \mathcal{P})(Y, Z) - (\nabla_Y^g \mathcal{P})(X, Z) \\
 &\quad - 2\mathcal{P}([X, Y], Z) + 2\mathcal{P}(X, \nabla_Y^g Z) - 2\mathcal{P}(Y, \nabla_X^g Z) \\
 &\quad + \mathcal{P}(X, \mathcal{P}(Y, Z)) - \mathcal{P}(Y, \mathcal{P}(X, Z)) + 2\omega(Y, \nabla_X^g Z) \\
 &\quad + 2\omega(Y, \mathcal{P}(X, Z)) + 2\omega([X, Y], Z) + \omega(X, \omega(Y, Z)) \\
 &\quad - \omega(Y, \omega(X, Z)) - (\nabla_X^g \omega)(Y, Z) + (\nabla_Y^g \omega)(X, Z).
 \end{aligned} \tag{3.108}$$

3.3.3 Invarijante preslikavanja Rimanovih prostora u Ajzenhartovom smislu

Neka je tenzor deformacije preslikavanja $f : \mathbb{R}_N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_N$ među Rimanovim prostorima u Ajzenhartovom smislu

$$\mathcal{P}^g(X, Y) = \overline{\nabla}_X^g Y^g - \nabla_X^g Y = \psi(X)Y + \psi(Y)X + \mathcal{F}(X, Y). \tag{3.109}$$

U ovoj jednačini, ψ je 1-forma, dok je \mathcal{F} tenzor tipa (1, 2).

Neka je $\overline{\mathcal{F}}(X, Y)$ tenzor suprotnog znaka u odnosu na tenzor $\mathcal{F}(X, Y)$,

3.3. INVARIJANTE PRESLIKAVANJA U OPERATORSKOM OBLIKU

$\overline{\mathcal{F}}(X, Y) = -\mathcal{F}(X, Y)$, jednačina (3.109) se transformiše u

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^g(X, Y) &= \overline{\nabla}_X^g Y - \nabla_X^g Y \\ &= \psi(X)Y + \psi(Y)X + \frac{1}{2}\mathcal{F}(X, Y) - \frac{1}{2}\overline{\mathcal{F}}(X, Y). \end{aligned} \quad (3.110)$$

Nakon kontrahovanja jednačine (3.110) po Y , dobija se da važi jednačina

$$\psi(X) = \frac{1}{N+1}(\overline{\nabla}^g X + \frac{1}{2}\overline{\mathcal{F}}(X)) - \frac{1}{N+1}(\nabla^g X + \frac{1}{2}\mathcal{F}(X)), \quad (3.111)$$

za $\nabla^g X = Tr\{U \rightarrow \nabla_X^g U\}$ i $\mathcal{F}(X) = Tr\{U \rightarrow \mathcal{F}(X, U)\}$ i odgovarajuće $\overline{\nabla}^g X$ i $\overline{\mathcal{F}}(X)$.

Odatle sledi da se jednačina (3.109) transformiše u

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^g(X, Y) &= \frac{1}{N+1}[(\overline{\nabla}_X^g + \frac{1}{2}\overline{\mathcal{F}}(X))Y + (\overline{\nabla}_Y^g + \frac{1}{2}\overline{\mathcal{F}}(Y))X] - \frac{1}{2}\overline{\mathcal{F}}(X, Y) \\ &\quad - \frac{1}{N+1}[(\nabla_X^g + \frac{1}{2}\mathcal{F}(X))Y + (\nabla_Y^g + \frac{1}{2}\mathcal{F}(Y))X] + \frac{1}{2}\mathcal{F}(X, Y). \end{aligned} \quad (3.112)$$

Odatle sledi da važi jednakost

$$\overline{\mathcal{T}}^g(X, Y) = \mathcal{T}^g(X, Y),$$

gde je

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^g(X, Y) &= \nabla_X^g Y + \frac{1}{2}\mathcal{F}(X, Y) \\ &\quad - \frac{1}{N+1}[(\nabla^g X + \frac{1}{2}\mathcal{F}(X))Y + (\nabla^g Y + \frac{1}{2}\mathcal{F}(Y))X], \end{aligned} \quad (3.113)$$

i odgovarajuće $\overline{\mathcal{T}}^g(X, Y)$.

Važi sledeća lema.

Lema 3.4. *Neka je $f : \mathbb{R}_N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_N$ preslikavanje Rimanovog prostora \mathbb{R}_N u Ajzenhartovom smislu određeno tenzorom deformacije $\mathcal{P}^g(X, Y)$ zadatim jednačinom (3.110). Geometrijski objekat $\mathcal{T}^g(X, Y)$ zadat jednačinom (3.113) je osnovna pridružena invarijanta Tomasovog tipa preslikavanja f .*

Ako je

$$\mathcal{F}(X, Y) = \sigma(X)F(Y) + \sigma(Y)F(X) + \varphi\rho(X, Y), \quad (3.114)$$

gde je φ vektor, σ 1-forma, F afinor i ρ simetričan kovarijantni tenzor tipa $(0, 2)$,
onda se invarijanta $\mathcal{T}^g(X, Y)$ transformiše u

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^g(X, Y) &= \nabla_X^g Y + \frac{1}{2}[\sigma(X)F(Y) + \sigma(Y)F(X) + \varphi\rho(X, Y)] \\ &\quad - \frac{1}{N+1}[\nabla^g X + \frac{1}{2}(\sigma(X)F + F(\sigma(X)) + \rho(X, \varphi))]Y \\ &\quad - \frac{1}{N+1}[\nabla^g Y + \frac{1}{2}(\sigma(Y)F + F(\sigma(Y)) + \rho(Y, \varphi))]X, \end{aligned} \quad (3.115)$$

gde je $F = \text{Tr}\{U \rightarrow F(U)\}$. □

Ako je

$$\mathcal{Q}(X, Y) = \frac{1}{N+1}[(\nabla^g X + \frac{1}{2}\mathcal{F}(X))Y + (\nabla^g Y + \frac{1}{2}\mathcal{F}(Y))X] - \frac{1}{2}\mathcal{F}(X, Y), \quad (3.116)$$

onda se invarijanta $\mathcal{T}^g(X, Y)$ transformiše u

$$\mathcal{T}^g(X, Y) = \nabla_X^g Y - \mathcal{Q}(X, Y). \quad (3.117)$$

Važe naredne jednakosti

$$\mathcal{Q}(X, Y) - \mathcal{Q}(Y, X) = 0, \quad (3.118)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^g(X, \mathcal{T}^g(Y, Z)) &= \nabla_X^g \nabla_Y^g Z - \mathcal{Q}(X, \nabla_Y^g Z) + \mathcal{Q}(X, \mathcal{Q}(Y, Z)) \\ &\quad - (\nabla_X^g \mathcal{Q})(Y, Z) + \mathcal{Q}(Y, \nabla_X^g Z) + \mathcal{Q}(Z, \nabla_X^g Y), \end{aligned} \quad (3.119)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^g(Y, \mathcal{T}^g(X, Z)) &= \nabla_Y^g \nabla_X^g Z - \mathcal{Q}(Y, \nabla_X^g Z) + \mathcal{Q}(Y, \mathcal{Q}(X, Z)) \\ &\quad - (\nabla_Y^g \mathcal{Q})(X, Z) + \mathcal{Q}(X, \nabla_Y^g Z) + \mathcal{Q}(Z, \nabla_Y^g X), \end{aligned} \quad (3.120)$$

$$\mathcal{T}^g([X, Y], Z) = \nabla_{[X, Y]}^g Z - \mathcal{Q}([X, Y], Z). \quad (3.121)$$

Na osnovu linearne kombinacije jednačina (3.119)-(3.120)-(3.121), sledi da je

$$\overline{\mathcal{W}}^g(X, Y, Z) = \mathcal{W}^g(X, Y, Z),$$

3.3. INVARIJANTE PRESLIKAVANJA U OPERATORSKOM OBLIKU

gde je

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^g(X, Y, Z) = & R^g(X, Y)Z - (\nabla_X^g \mathcal{Q})(Y, Z) + (\nabla_Y^g \mathcal{Q})(X, Z) \\ & - 2\mathcal{Q}(X, \nabla_Y^g Z) + 2\mathcal{Q}(Y, \nabla_X^g Z) \\ & + \mathcal{Q}(X, \mathcal{Q}(Y, Z)) - \mathcal{Q}(Y, \mathcal{Q}(X, Z)) + 2\mathcal{Q}([X, Y], Z). \end{aligned} \quad (3.122)$$

Važi naredna lema.

Lema 3.5. *Geometrijski objekti $\mathcal{T}^g(X, Y)$ i $\mathcal{W}^g(X, Y, Z)$ zadati jednačinama (3.115, 3.122), osnovne su invarijante Tomasovog i Vejlovog tipa preslikavanja $f : \mathbb{R}_N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_N$ među Rimanovim prostorima \mathbb{R}_N i $\overline{\mathbb{R}}_N$ u Ajzenhartovom smislu.* \square

3.3.4 Invarijante preslikavanja među Rimanovim prostorima u različitom smislu

Razmotrimo preslikavanje $f : \mathbb{R}_N \rightarrow \overset{0}{\mathbb{R}}_N$ među Rimanovim prostorima \mathbb{R}_N u Ajzenhartovom smislu i $\overset{0}{\mathbb{R}}_N$ u smislu definicije Ivanova, Zlatanovića.

Tensor deformacije tog preslikavanja je

$$\overset{0}{P}(X, Y) = \overset{0}{\nabla}_X Y - \nabla_X^g Y = \Psi(X)Y + \Psi(Y)X + \mathcal{F}(X, Y), \quad (3.123)$$

pri čemu je \mathcal{F} tenzor tipa (1, 2).

Da bismo primenili prethodne rezultate, potrebno je definisati tenzore $\overset{0}{\mathcal{F}}(X, Y) = \mathcal{F}(X, Y)$ i $\mathcal{F}^g(X, Y) = -\mathcal{F}(X, Y)$. Na osnovu tih tenzora, jednačina (3.123) se transformiše u

$$\begin{aligned} \overset{0}{P}(X, Y) = & \overset{0}{\nabla}_X Y - \nabla_X^g Y \\ = & \Psi(X)Y + \Psi(Y)X + \frac{1}{2}\overset{0}{\mathcal{F}}(X, Y) - \frac{1}{2}\mathcal{F}^g(X, Y). \end{aligned} \quad (3.124)$$

Nakon što kontrahujemo jednačinu (3.124), dobijamo da je

$$\Psi(X) = \frac{1}{N+1}(\overset{0}{\nabla} X - \frac{1}{2}\overset{0}{\mathcal{F}}(X)) - \frac{1}{N+1}(\nabla^g X - \frac{1}{2}\mathcal{F}^g(X)).$$

Odatle sledi da se jednačina (3.124) transformiše u

$$\begin{aligned} \overset{0}{\nabla}_X Y - \nabla_X^g Y &= \frac{1}{N+1} [\overset{0}{Q}(X)Y + \overset{0}{Q}(Y)X] + \frac{1}{2} \overset{0}{\mathcal{F}}(X, Y) \\ &\quad - \frac{1}{N+1} [Q^g(X)Y + Q^g(Y)X] - \frac{1}{2} \mathcal{F}^g(X, Y), \end{aligned} \quad (3.125)$$

gde je

$$\overset{0}{Q}(X) = \overset{0}{\nabla} X - \frac{1}{2} \overset{0}{\mathcal{F}}(X) \quad \text{i} \quad Q^g(X) = \nabla^g X - \frac{1}{2} \mathcal{F}^g(X). \quad (3.126)$$

Analogno prethodnom, važe naredne jednakosti

$$\overset{0}{\mathcal{T}}(X, Y) = \mathcal{T}^g(X, Y) \quad \text{i} \quad \overset{0}{\mathcal{W}}(X, Y, Z) = \mathcal{W}^g(X, Y, Z),$$

gde je

$$\overset{0}{\mathcal{T}}(X, Y) = \overset{0}{\nabla}_X Y - \frac{1}{N+1} [\overset{0}{Q}(X)Y + \overset{0}{Q}(Y)X] - \frac{1}{2} \overset{0}{\mathcal{F}}(X, Y), \quad (3.127)$$

$$\mathcal{T}^g(X, Y) = \nabla_X^g Y - \frac{1}{N+1} [Q^g(X)Y + Q^g(Y)X] - \frac{1}{2} \mathcal{F}^g(X, Y) \quad (3.128)$$

Kako je

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^g(X, \mathcal{T}^g(Y, Z)) &= \nabla_X^g \nabla_Y^g Z - \frac{1}{N+1} [Q^g(X) \nabla_Y^g Z + Q^g(\nabla_Y^g Z) X] \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathcal{F}^g(X, \nabla_Y^g Z) \\ &\quad - \frac{1}{N+1} \left((\nabla_X^g Q^g)(Y) - Q^g(\nabla_X^g Y) \right. \\ &\quad \quad \left. - \frac{1}{N+1} [Q^g(X) Q^g(Y) + Q^g(Q^g(Y)) X] \right. \\ &\quad \quad \left. - \frac{1}{2} \mathcal{F}^g(X, Q^g(Y)) \right) Z \\ &\quad - \frac{1}{N+1} \left((\nabla_X^g Q^g)(Z) - Q^g(\nabla_X^g Z) - \frac{1}{N+1} [Q^g(X) Q^g(Z) \right. \\ &\quad \quad \left. + Q^g(Q^g(Z)) X] \right. \\ &\quad \quad \left. - \frac{1}{2} \mathcal{F}^g(X, Q^g(Z)) \right) Y \\ &\quad - \frac{1}{2} \left((\nabla_X^g \mathcal{F})(Y, Z) - \mathcal{F}^g(\nabla_X^g Y, Z) - \mathcal{F}^g(Y, \nabla_X^g Z) \right. \\ &\quad \quad \left. - \frac{1}{N+1} [Q^g(X) \mathcal{F}^g(Y, Z) + Q^g(\mathcal{F}^g(Y, Z)) X] - \frac{1}{2} \mathcal{F}^g(X, \mathcal{F}^g(Y, Z)) \right), \end{aligned}$$

3.3. INVARIJANTE PRESLIKAVANJA U OPERATORSKOM OBLIKU

i odgovarajuće $\overset{0}{\mathcal{T}}(X, \overset{0}{\mathcal{T}}(Y, Z)$, sledi da je

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}^g(X, Y, Z) = & R^g(X, Y)Z + \frac{1}{N+1}\mathcal{A}(Y, Z)X - \frac{1}{N+1}\mathcal{A}(X, Z)Y \\
& - \frac{1}{N+1}[\mathcal{A}(X, Y) - \mathcal{A}(Y, X) - \frac{1}{2}Q^g(\mathcal{F}^g(X, Y)) \\
& \quad - \frac{1}{2}Q^g(\mathcal{F}^g(Y, X)) - Q^g([X, Y])]Z \\
& - \frac{1}{2}(\nabla_X^g \mathcal{F})(Y, Z) + \frac{1}{2}(\nabla_Y^g \mathcal{F})(X, Z) \\
& + \frac{1}{4}\mathcal{F}^g(X, \mathcal{F}^g(Y, Z)) - \frac{1}{4}\mathcal{F}^g(Y, \mathcal{F}^g(X, Z)) \\
& - \mathcal{F}^g(X, \nabla_Y^g Z) + \mathcal{F}^g(Y, \nabla_X^g Z) \\
& - \frac{1}{N+1}[Q^g(X)\nabla_Y^g Z - Q^g(Y)\nabla_X^g Z - Q^g(Z)[X, Y]] \\
& + \frac{1}{2(N+1)}[Q^g(X)\mathcal{F}^g(Y, Z) - Q^g(Y)\mathcal{F}^g(X, Z)],
\end{aligned} \tag{3.129}$$

odgovarajuće $\overset{0}{\mathcal{W}}(X, Y, Z)$ i geometrijski objekat

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^g(X, Y) = & (\nabla_X^g Q^g)(Y) - \frac{1}{2}\mathcal{F}^g(X, Q^g(Y)) + \frac{1}{2}Q^g(\mathcal{F}^g(X, Y)) \\
& - \frac{1}{N+1}[Q^g(X)Q^g(Y) - Q^g(Q^g(Y))X].
\end{aligned} \tag{3.130}$$

Time je dokazano da važi naredna lema

Lema 3.6. *Neka je $\nabla_X^g Y \rightarrow \overset{0}{\nabla}_X Y = \nabla_X^g Y + \mathcal{P}(X, Y)$, gde je $\mathcal{P}(X, Y)$ tenzor jednak desnoj strani jednačine (3.123). Geometrijski objekat $\mathcal{W}^g(X, Y, Z)$ zadat jednačinom (3.129) i odgovarajući objekat $\overset{0}{\mathcal{W}}(X, Y, Z)$ su osnovne pridružene invarijante Vejlvog tipa posmatranog preslikavanja. \square*

Važi jednakost $\overset{0}{\mathcal{W}}(X, Y, Z) - \mathcal{W}^g(X, Y, Z)$, tj.

$$\begin{aligned}
0 = & \overset{0}{R}(X, Y)Z - R^g(X, Y)Z + \psi(Y, Z)X - \psi(X, Z)Y \\
& - [\psi(X, Y) - \psi(Y, X)]Z + [\overset{0}{\mathcal{V}}(X, Y) - \mathcal{V}^g(X, Y)]Z \\
& + \overset{0}{\mathcal{U}}(X, Y, Z) - \mathcal{U}^g(X, Y, Z),
\end{aligned} \tag{3.131}$$

gde je $(N + 1)\psi(X, Y) = \overset{0}{\mathcal{A}}(X, Y) - \mathcal{A}^g(X, Y)$.

Nakon kontrahovanja jednačine (3.131) po X pa po Z , sledi da važi

$$S^* : \begin{cases} 0 = \overset{0}{Ric}(X, Y) - Ric^g(X, Y) + N\psi(X, Y) - \psi(Y, X) \\ \quad + \overset{0}{\mathcal{V}}(Y, X) - \mathcal{V}^g(Y, X) + \overset{0}{\mathcal{U}}(\cdot, X, Y) - \mathcal{U}^g(\cdot, X, Y) \\ 0 = \overset{0'}{R}(X, Y) - R^g(X, Y) + (N + 1)\psi(Y, X) - (N + 1)\psi(X, Y) \\ \quad + N \cdot [\overset{0}{\mathcal{V}}(X, Y) - \mathcal{V}^g(X, Y)] + \overset{0}{\mathcal{U}}(X, Y, \cdot) - \mathcal{U}^g(X, Y, \cdot), \end{cases} \quad (3.132)$$

gde je korišćeno $\overset{0}{\mathcal{U}}(\cdot, X, Y) = Tr\{Z \rightarrow \overset{0}{\mathcal{U}}(Z, X, Y)\}$, $\mathcal{U}^g(\cdot, X, Y) = Tr\{Z \rightarrow \mathcal{U}^g(Z, X, Y)\}$, $\overset{0}{\mathcal{U}}(X, Y, \cdot) = Tr\{Z \rightarrow \overset{0}{\mathcal{U}}(X, Y, Z)\}$, $\mathcal{U}^g(X, Y, \cdot) = Tr\{Z \rightarrow \mathcal{U}^g(X, Y, Z)\}$.

Rešenja sistema S^* po $\psi(X, Y)$ i $\psi(Y, X)$ su

$$\begin{cases} \psi(X, Y) = \frac{1}{N-1} [Ric^g(X, Y) - \overset{0}{Ric}(X, Y)] \\ \quad + \frac{1}{N^2-1} [R^g(X, Y) - \overset{0'}{R}(X, Y)] \\ \quad + \mu^g(X, Y) - \overset{0}{\mu}(X, Y), \\ \psi(Y, X) = -\frac{1}{N-1} [Ric^g(X, Y) - \overset{0}{Ric}(X, Y)] \\ \quad + \frac{N}{N^2-1} [\overset{0'}{R}(X, Y) - R^g(X, Y)] \\ \quad + \nu^g(X, Y) - \overset{0}{\nu}(X, Y), \end{cases} \quad (3.133)$$

gde je korišćeno $R^g = Tr\{Z \rightarrow R^g(X, Y)Z\}$, $\overset{0'}{R}(X, Y) = Tr\{Z \rightarrow \overset{0'}{R}(X, Y)Z\}$, kao i

$$\begin{aligned} \mu^g(X, Y) &= \frac{1}{N^2-1} [\mathcal{U}^g(X, Y, \cdot) + N\mathcal{V}^g(X, Y)] \\ &\quad + \frac{1}{N-1} [\mathcal{U}^g(\cdot, X, Y) + \mathcal{V}^g(Y, X)], \end{aligned} \quad (3.134)$$

$$\begin{aligned} \overset{0}{\mu}(X, Y) &= \frac{1}{N^2-1} [\overset{0}{\mathcal{U}}(X, Y, \cdot) + N\overset{0}{\mathcal{V}}(X, Y)] \\ &\quad + \frac{1}{N-1} [\overset{0}{\mathcal{U}}(\cdot, X, Y) + \overset{0}{\mathcal{V}}(Y, X)], \end{aligned} \quad (3.135)$$

3.3. INVARIJANTE PRESLIKAVANJA U OPERATORSKOM OBLIKU

$$\begin{aligned} \nu^g(X, Y) &= \frac{N}{N^2 - 1} [\mathcal{U}^g(X, Y, \cdot) + N^2 \mathcal{V}^g(X, Y)] \\ &\quad + \frac{1}{N - 1} [\mathcal{U}^g(\cdot, X, Y) + \mathcal{V}^g(Y, X)], \end{aligned} \quad (3.136)$$

$$\begin{aligned} \overset{0}{\nu}(X, Y) &= \frac{N}{N^2 - 1} [\overset{0}{\mathcal{U}}(X, Y, \cdot) + N \overset{0}{\mathcal{V}}(X, Y)] \\ &\quad + \frac{1}{N - 1} [\overset{0}{\mathcal{U}}(\cdot, X, Y) + \overset{0}{\mathcal{V}}(Y, X)]. \end{aligned} \quad (3.137)$$

Nakon zamene rešenja $\psi(X, Y)$ i $\psi(Y, X)$ zadatih jednačinom (3.133) u jednačinu (3.131), dobijamo da je

$$\begin{aligned} 0 &= \overset{0}{R}(X, Y)Z - R^g(X, Y)Z + \overset{0}{\mathcal{U}}(X, Y, Z) - \mathcal{U}^g(X, Y, Z) \\ &\quad + \frac{1}{N^2 - 1} [(N + 1)Ric^g(Y, Z) + R^{g'}(Y, Z) + (N^2 - 1)\mu^g(Y, Z)]X \\ &\quad - \frac{1}{N^2 - 1} [(N + 1)Ric^g(X, Z) + R^{g'}(X, Z) + (N^2 - 1)\mu^g(X, Z)]Y \\ &\quad + \frac{1}{N - 1} [R^{g'}(X, Y) + 2Ric^g(X, Y) \\ &\quad\quad + (N - 1)(\mu^g(X, Y) + \nu^g(X, Y) + \mathcal{V}^g(X, Y))]Z \\ &\quad - \frac{1}{N^2 - 1} [(N + 1)\overset{0}{R}ic(Y, Z) + \overset{0'}{R}(Y, Z) + (N^2 - 1)\overset{0}{\mu}(Y, Z)]X \\ &\quad + \frac{1}{N^2 - 1} [(N + 1)\overset{0}{R}ic(X, Z) + \overset{0'}{R}(X, Z) + (N^2 - 1)\overset{0}{\mu}(X, Z)]Y \\ &\quad - \frac{1}{N - 1} [\overset{0'}{R}(X, Y) + 2\overset{0}{R}ic(X, Y) \\ &\quad\quad + (N - 1)(\overset{0}{\mu}(X, Y) + \nu^g(X, Y) + \overset{0}{\mathcal{V}}(X, Y))]Z, \end{aligned}$$

što znači da važi jednakost

$$\overset{0}{W}(X, Y, Z) = W^g(X, Y, Z),$$

gde je

$$\begin{aligned}
 W^g(X, Y, Z) &= R^g(X, Y, Z) + \mathcal{U}^g(X, Y, Z) \\
 &\quad - \frac{1}{N^2 - 1} [(N + 1)Ric^g(Y, Z) + R^{g'}(Y, Z) \\
 &\quad \quad + (N^2 - 1)\mu^g(Y, Z)]X \\
 &\quad + \frac{1}{N^2 - 1} [(N + 1)Ric^g(X, Z) + R^{g'}(X, Z) \\
 &\quad \quad + (N^2 - 1)\mu^g(X, Z)]Y \\
 &\quad - \frac{1}{N - 1} [R^{g'}(X, Y) + 2Ric^g(X, Y) \\
 &\quad \quad + (N - 1)(\mu^g(X, Y) + \nu^g(X, Y) \\
 &\quad \quad + \mathcal{V}^g(X, Y))]Z,
 \end{aligned} \tag{3.138}$$

i

$$\begin{aligned}
 \overset{0}{W}(X, Y, Z) &= \overset{0}{R}(X, Y, Z) + \overset{0}{\mathcal{U}}(X, Y, Z) \\
 &\quad - \frac{1}{N^2 - 1} [(N + 1)\overset{0}{Ric}(Y, Z) + \overset{0'}{R}(Y, Z) \\
 &\quad \quad + (N^2 - 1)\overset{0}{\mu}(Y, Z)]X \\
 &\quad + \frac{1}{N^2 - 1} [(N + 1)\overset{0}{Ric}(X, Z) + \overset{0'}{R}(X, Z) \\
 &\quad \quad + (N^2 - 1)\overset{0}{\mu}(X, Z)]Y \\
 &\quad - \frac{1}{N - 1} [\overset{0'}{R}(X, Y) + 2\overset{0}{Ric}(X, Y) \\
 &\quad \quad + (N - 1)(\overset{0}{\mu}(X, Y) + \nu^g(X, Y) \\
 &\quad \quad + \overset{0}{\mathcal{V}}(X, Y))]Z
 \end{aligned} \tag{3.139}$$

Teorema 3.4. *Neka je $\nabla_X^g Y \rightarrow \overset{0}{\nabla}_X Y = \nabla_X^g Y + \mathcal{P}(X, Y)$, gde je $\mathcal{P}(X, Y)$ tenzor jednak desnoj strani jednačine (3.123). Geometrijski objekat $W^g(X, Y, Z)$ zadat jednačinom (3.138) i odgovarajući geometrijski objekat $\overset{0}{W}(X, Y, Z)$ zadat jednačinom (3.139) pridružene su izvedene invarijante Vejlovog tipa posmatrane transformacije. \square*

3.3. INVARIJANTE PRESLIKAVANJA U OPERATORSKOM OBLIKU

Neka je $f : \mathbb{R}_N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_N$ geodezijsko preslikavanje. Osnovna jednačina tog preslikavanja je

$$\mathcal{P}^g(X, Y) = \overline{\nabla}_X^g Y - \nabla_X^g Y = \psi(X)Y + \psi(Y)X. \quad (3.140)$$

Nakon upoređivanja jednačina (3.140) i (3.109), dolazi se do zaključka da je $\mathcal{F}(X, Y) = 0$. Zamenom te jednakosti u (3.113), dobijamo osnovnu pridruženu invarijantu Tomasovog tipa geodezijskog preslikavanja f

$$\mathcal{T}^g(X, Y) = \nabla_X^g Y - \frac{1}{N+1}(\nabla^g XY + \nabla^g YX), \quad (3.141)$$

što je identično Tomasovom projektivnom parametru prostora \mathbb{R}_N . Na osnovu jednačine (3.116), dolazi se do zaključka da je

$$\mathcal{Q}(X, Y) = \frac{1}{N+1}[\nabla^g XY + \nabla^g YX]. \quad (3.142)$$

Iz tog razloga, važi sledeća jednačina

$$\begin{aligned} \nabla_X^g \{ \mathcal{Q}(Y, Z) \} &= \frac{1}{N+1} \nabla_X^g \{ \nabla^g YZ + \nabla^g ZY \} \\ &= \frac{1}{N+1} [\nabla_X^g \{ \nabla^g Y \} Z + \nabla^g Y \nabla_X^g Z + \nabla_X^g \{ \nabla^g Z \} Y + \nabla^g Z \nabla_X^g Y] \\ &= \frac{1}{N+1} [\nabla_X^g \nabla^g YZ + \nabla_X^g \nabla^g ZY + \nabla^g Y \nabla_X^g Z + \nabla^g Z \nabla_X^g Y] \\ &= (\nabla_X^g \mathcal{Q})(Y, Z) - \mathcal{Q}(\nabla_X^g Y, Z) - \mathcal{Q}(Y, \nabla_X^g Z) \\ &= (\nabla_X^g \mathcal{Q})(Y, Z) - \frac{1}{N+1} [\nabla^g \nabla_X^g YZ + \nabla^g Z \nabla_X^g Y \\ &\quad + \nabla^g Y \nabla_X^g Z + \nabla^g \nabla_X^g ZY] \end{aligned}$$

Odatle sledi da je

$$\begin{aligned}
 (\nabla_X^g \mathcal{Q})(Y, Z) &= \frac{1}{N+1} (\nabla_X^g \nabla^g Z + \nabla^g \nabla_X^g Z) Y \\
 &\quad + \frac{1}{N+1} (\nabla_X^g \nabla^g Y + \nabla^g \nabla_X^g Y) Z \\
 &\quad + \frac{2}{N+1} (\nabla^g Y \nabla_X^g Z + \nabla^g Z \nabla_X^g Y),
 \end{aligned} \tag{3.143}$$

$$\mathcal{Q}(X, \nabla_Y^g Z) = \frac{1}{N+1} [\nabla^g X \nabla_Y^g Z + \nabla^g \nabla_Y^g Z X], \tag{3.144}$$

$$\mathcal{Q}(X, \mathcal{Q}(Y, Z)) = \frac{1}{(N+1)^2} [\nabla^g X \nabla_Y^g Z + \nabla^g \nabla_Y^g Z X]. \tag{3.145}$$

Stoga, osnovna pridružena invarijanta Vejlvog tipa preslikavanja f je

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}^g(X, Y, Z) &= R^g(X, Y)Z - \frac{1}{N+1} (\nabla_X^g \nabla^g Z + \nabla^g \nabla_X^g Z) Y \\
 &\quad - \frac{1}{N+1} (\nabla_X^g \nabla^g Y + \nabla^g \nabla_X^g Y) Z \\
 &\quad - \frac{2}{N+1} (\nabla^g Y \nabla_X^g Z + \nabla^g Z \nabla_X^g Y) \\
 &\quad + \frac{1}{N+1} (\nabla_Y^g \nabla^g Z + \nabla^g \nabla_Y^g Z) X \\
 &\quad + \frac{1}{N+1} (\nabla_Y^g \nabla^g X + \nabla^g \nabla_Y^g X) Z \\
 &\quad + \frac{2}{N+1} (\nabla^g X \nabla_Y^g Z + \nabla^g Z \nabla_Y^g X) \\
 &\quad + \frac{1}{(N+1)^2} [\nabla^g X \nabla_Y^g Z + \nabla^g \nabla_Y^g Z X] \\
 &\quad - \frac{1}{(N+1)^2} [\nabla^g Y \nabla_X^g Z + \nabla^g \nabla_X^g Z Y] \\
 &\quad - \frac{2}{N+1} (\nabla^g [X, Y] Z + \nabla^g Z [X, Y]).
 \end{aligned} \tag{3.146}$$

GLAVA 4

TENZORSKI RAČUN I LINEARNO PROGRAMIRANJE

4.1 Osnovne osobine linearnog programiranja

Jedan od najčešćih problema sa kojima se menadžeri preduzeća često susreću je optimizacija: minimizacija troškova, maksimizacija produktivnosti, optimizacija raspodele resursa itd. Generalno, to je problem određivanja, pod određenim uslovima ili ograničenjima, maksimalne ili minimalne vrednosti funkcije više promenljivih-ciljne funkcije. Kada su nam poznate ciljna funkcija i funkcije koje određuju ograničenja, proces određivanja optimalnog rešenja se naziva linearno programiranje (LP). Opšti pristup formulisanju LP problema uključuje sledeće standardne korake: razumevanje problema, identifikaciju promenljivih, određivanje ciljne funkcije kao linearne kombinacije promenljivih, formulisanje ciljne funkcije i svih ograničenja kao linearne kombinacije promenljivih i određivanje globalnih gornjih i donjih granica promenljivih.

Jedan od prvih problema koji se može smatrati *optimizacionim* javio se u staroj Grčkoj, *određivanje najkraćeg rastojanja između dve tačke*. I princeza Dido, osnivač Kartagine, opevana u Vergilijevom epu *Eneida*, takođe se susrela sa problemom optimizacije kada su joj, nakon proterivanja, rekli da može da dobije parče zemlje koja može da stane pod jednu volovsku kožu. Poznata kao mudar i preduzimljiv vođa, sledeći pravila linearnog programiranja (poštovanje graničnih

GLAVA 4. TENZORSKI RAČUN I LINEARNO PROGRAMIRANJE

uslova i maksimizacija ciljne funkcije), naredila je da se koža iseče na vrlo tanke trake i da se od njih napravi uže kojim je sasvim neočekivano ogradila značajan deo zemlje. Dakle, da bi maksimizirala svoj dobitak, princeza se suočila sa sledećim problemom: Od užeta fiksne dužine napraviti konturu kojom se može ograditi najveća površina zemlje. U suštini, ovaj bi se problem mogao matematički formulisati na sledeći način: *Koja kriva, od svih zatvorenih kontura u ravni, ograničava oblast najveće površine?* Klasičan dokaz ovog problema predstavljen je krajem XIX veka. [92]. Još jedan interesantan primer optimizacije je rešenje *brahistohronog problema* univerzitetskog profesora Johana Bernulija. Formulacija problema je sledeća: *U vertikalnoj ravni date su dve tačke A i B. Traži se trajektorija (putanja) AMB materijalne tačke M duž koje ova, pod uticajem samo zemljine teže, za najkraće vreme prelazi put od A do B.* Rešenje da se duž AB, mada je to najkraći put između A i B, ne prelazi pod datim uslovima za najkraće vreme zaintrigiralo je mnogo značajne umove tog vremena: Njutna, Lajbnica, Lopitala i Jakoba Bernulija, koji su ubrzo ponudili svoja viđenja problema [92, 131].

Linearno programiranje se, kao matematička tehnika, koristi za određivanje optimalnih ishoda u matematičkom modeliranju sa linearnim uslovima. Primenjuje se direktno u projektovanju sistema upravljanja i ima važnu ulogu u optimizaciji različitih aspekata sistema omogućavajući inženjerima da pronađu optimalna rešenja za neke segmente upravljanja. Neke od čestih primena LP predstavljene su u nastavku.

1. *Projektovanje sistema upravljanja:* Linearno programiranje se može koristiti da optimizuje parametre sistema upravljanja radi ostvarivanja nekih specifičnih ciljeva. U procesu proizvodnje mogu se optimizovati upravljački parametri kako bi se smanjila potrošnja energije uz očuvanje kvaliteta proizvoda. U sistemima pametnih zgrada, industriji ili vozilima, LP se može primeniti za optimizaciju potrošnje energije regulacionih sistema, čime se doprinosi energetske efikasnosti. Kod raspodele signala, u sistemima komunikacije i bežičnih mreža, LP se može koristiti za optimizaciju raspodele signala kako bi se postigao određeni kapacitet ili minimalizovala interferencija, dok se kod računarskih mreža, LP koristi za optimizaciju resursa kao što su propusnost i latencija, radi obezbeđivanja efikasne

4.1. OSNOVNE OSOBINE LINEARNOG PROGRAMIRANJA

komunikacije. U svim ovim situacijama LP pomaže u određivanju optimalnih vrednosti parametara predstavljajući problem kao optimizacioni problem sa linearnim ograničenjima.

2. *Alokacija resursa*: Primena LP u alokaciji resursa igra ključnu ulogu u različitim oblastima, uključujući ekonomiju, inženjering, logistiku i upravljanje projektima. U industriji se linearno programiranje koristi za optimalno raspoređivanje resursa kao što su radna snaga, mašine i materijali kako bi se postigla maksimalna proizvodnja ili minimizovali troškovi proizvodnje, što se može sprovesti raspoređivanjem radnika na smene, planiranjem proizvodnje i optimizacijom proizvodnih kapaciteta. U upravljanju projektima, kako bi se ispoštovali zadati vremenski okvir i predviđeni budžet, primena LP se sastoji u optimalnom raspoređivanju resursa kao što su radnici, oprema i budžet, dok se kod raspodele budžeta i postizanja definisanih ciljeva LP koristi za raspoređivanje sredstava na različite projekte, programe ili sektore. Upravljanje zalihama kako bi se minimizirali troškovi držanja zaliha i istovremeno obezbedile dovoljne količine proizvoda za isporuku, kao i raspoređivanje medicinskih resursa, postelja, osoblja i medicinske opreme radi efikasnijeg odgovora na potrebe pacijenata glavni su zadatak LP u optimizaciji zaliha, odnosno raspodeli medicinskih resursa. U oblasti obrazovanja, LP se može koristiti za raspoređivanje nastavnika, učionica i budžeta, kako bi se obezbedilo efikasno obrazovanje.

3. *Projektovanje regulatora*: Primena LP u projektovanju i podešavanju regulatora omogućava inženjerima da pronađu optimalne parametre regulacije kako bi se postigli željeni performansi ciljevi, uzimajući u obzir specifične zahteve sistema i ograničenja. Ovo je posebno korisno u industriji, procesnoj automatizaciji i drugim oblastima gde se regulatori koriste za upravljanje složenim sistemima. Kod identifikacije optimalnih PID parametara, LP se koristi za postizanje željenog odziva sistema: minimizacije vremena regulacije, smanjenja prekoračenja, ili optimizacije nekog drugog performansnog kriterijuma. Postizanje maksimalne stabilnosti sistema uz ispunjavanje određenih performansnih kriterijuma, što je od posebne važnosti u kritičnim primenama, kao što su stabilnost aviona ili procesa kontrole nuklearnog reaktora, osnovni je zadatak LP u procesu maksimizacije stabilnosti, dok se kod robustnog podešavanja regulatora njegov zadatak sastoji u projektovanju regulatora koji su robustni na promene parametara sistema ili pore-

GLAVA 4. TENZORSKI RAČUN I LINEARNO PROGRAMIRANJE

mećaje, smanjujući osetljivost regulatora na nesavršenosti u modeliranju sistema. Optimalno podešavanje regulatora u prisustvu ograničenja, recimo ograničenja na upravljačke signale, brzinu promene signala ili nivo upravljanja i optimalna kontrola regulatora na svakom vremenskom koraku u cilju određivanja optimalnih upravljačkih zakona za svaki korak važni su zadaci LP u optimalnom upravljanju sa ograničenjima i optimizaciji MIMO sistema.

4. *Optimizacija puta(nje)*: Linearno programiranje se može primeniti u optimizaciji putanja u različitim kontekstima, gde je cilj pronaći optimalnu putanju između tačaka ili lokacija uzimajući u obzir različite kriterijume ili ograničenja. Kao deo navigacije u autonomnim vozilima, dronovima i drugim mobilnim robotima, LP se može koristiti za planiranje optimalnih putanja od tačke A do tačke B, uzimajući u obzir faktore kao što su vreme putovanja, potrošnja goriva, i bezbednost putovanja. Kako bi se postiglo najbolje funkcionisanje vazdušnog saobraćaja, uz minimalne zastoje i smanjenje potrošnje goriva, LP se koristi za optimizaciju putanja aviona i raspored letova, a slična ideja se koristi i u optimizaciji putanja vozila za dostavu kako bi se minimizirali troškovi isporuke i optimizovalo vreme dostave. Za efikasno automatizovano rukovanje i manipulaciju objektima, izbegavanje prepreka i smanjenje troškova kretanja, LP se koristi u robotici, dok je njegova primena u logistici i transportu prvenstveno u optimizaciji transportnih ruta, vodeći računa o minimizaciji ukupnih troškova transporta, maksimizaciji kapaciteta i optimizaciji raspodele tereta. Za optimizaciju putanja u skladištima, efikasno raspoređivanje proizvoda i smanjenje potreba za dugačkim putevima za skladištenje i izdavanje robe, kao i optimizaciju putanja poljoprivrednih mašina za postizanje maksimalne efikasnosti pri obradi polja ili berbi takođe se koriste osnove linearnog programiranja.

5. *Regulacija elektroenergetskog sistema*: Primena linearnog programiranja u regulaciji energetske sistema omogućava efikasno upravljanje resursima, optimizaciju proizvodnje i distribucije energije i smanjenje troškova, uzimajući u obzir promenljive faktore kao što su zahtevi za energijom i promenljivi izvori energije, što je ključno za održivu i efikasnu upotrebu energije u modernom društvu. U elektroenergetskim sistemima, primena LP se sastoji u optimizaciji proizvodnje električne energije, uzimajući u obzir različite izvore energije, kapacitete elektrana i zahteve za električnom energijom. Cilj je minimizacija troškova proizvod-

4.1. OSNOVNE OSOBINE LINEARNOG PROGRAMIRANJA

nje uz održavanje stabilnog snabdevanja. Takođe, optimizacija distribucije električne energije, uz planiranje ruta, kontrolu napona i upravljanje tokovima energije kako bi se maksimizovala efikasnost distribucije i smanjila potrošnja energije, kao i optimizacija prenosa električne energije u mrežama visokog napona i rešavanje problema raspodele opterećenja na mreži važne su primene LP. I kod obnovljivih izvora energije, solarnih panela i vetrogeneratora, LP može biti od koristi u optimizaciji proizvodnje u zavisnosti od vremenskih uslova i zahteva potrošača, kao i u skladištenju energije čija proizvodnja tokom dana često nije uravnotežena.

Narednim primerom biće prikazana osnovna ideja linearnog programiranja.

Primer 4.1. [92, 136] Neka su S_1 i S_2 stovarišta neke robe, a P_1 , P_2 i P_3 potrošači. Količina robe u stovarištu S_i je jednaka a_i , ($i = 1, 2$), a potrošač P_j ima potrebu za količinom b_j ($j = 1, 2, 3$), ove robe, pri čemu je $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + b_3$. Cena prevoza jedinice količine ove robe iz stovarišta S_i do potrošača P_j jednaka je c_{ij} ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3$). Neka je x_{ij} količina robe koja se preveze iz stovarišta S_i do potrošača P_j ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3$). Tada je ukupna cena C prevoza robe

$$C = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23}.$$

Cilj je odrediti minimalne troškove prevoza, odnosno minimum funkcije C uz poštovanje uslova $x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1$, $x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2$, $x_{11} + x_{21} = b_1$, $x_{12} + x_{22} = b_2$, $x_{13} + x_{23} = b_3$, $x_{ij} \geq 0$ ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3$).

Opšti zadatak linearnog programiranja formuliše se na sledeći način:

Odrediti ekstremnu vrednost (maksimum ili minimum) linearne funkcije

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \tag{4.1}$$

GLAVA 4. TENZORSKI RAČUN I LINEARNO PROGRAMIRANJE

uz uslove

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\
 &\vdots \\
 a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &\leq b_k \\
 a_{(k+1)1}x_1 + a_{(k+1)2}x_2 + \dots + a_{(k+1)n}x_n &\geq b_{k+1} \\
 &\vdots \\
 a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \dots + a_{ln}x_n &\geq b_l \\
 a_{(l+1)1}x_1 + a_{(l+1)2}x_2 + \dots + a_{(l+1)n}x_n &= b_{l+1} \\
 &\vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \\
 x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

gde važi da je $m-l < n$, jer bi u suprotnom vrednosti x_i bile jedinstveno određene ili preodređene. Budući da je ciljna funkcija koja se minimizira data sa (4.3) linearna, kao i ograničenja (4.4) koja su data u vidu linearnih jednačina ili nejednačina, ovaj metod optimizacije poznat je kao *linearno programiranje*.

U nastavku će biti navedena još jedna formulacija LP.

Ograničenja sačinjena od $m-l$ jednačina sa $m-l$ nepoznatih izražena su preko $n+l-m$ promenljivih, odakle se, zamenom u ciljnu funkciju, dobija problem LP manje dimenzije od originalnog problema, čije je rešavanje, osim kada je veliki broj ograničenja, mnogo jednostavnije.

Bez gubljenja opštosti, možemo pretpostaviti da su vrednosti $b_j, j = 1, 2, \dots, m$, nenegativne. Uvođenjem novih, takozvanih izravnavajućih promenljivih $x_i \geq 0, i = n+1, n+2, \dots, n+l$, nejednakosti se transformišu u jednakosti, pa se problem linearnog programiranja može iskazati na način:

Odrediti ekstremnu vrednost linearne funkcije

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + c_{n+1}x_{n+1} + \dots + c_{n+l}x_{n+l} \tag{4.3}$$

4.1. OSNOVNE OSOBINE LINEARNOG PROGRAMIRANJA

uz uslove

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &= b_1 \\
 &\vdots \\
 a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n + x_{n+k} &= b_k \\
 a_{(k+1)1}x_1 + a_{(k+1)2}x_2 + \dots + a_{(k+1)n}x_n - x_{n+k+1} &= b_{k+1} \\
 &\vdots \\
 a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \dots + a_{ln}x_n - x_{n+l} &= b_l \\
 a_{(l+1)1}x_1 + a_{(l+1)2}x_2 + \dots + a_{(l+1)n}x_n &= b_{l+1} \\
 &\vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \\
 x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n + l,
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

pri čemu je $c_i = 0, i = n + 1, n + 2, \dots, n + l$.

Uvođenjem pomoćnih izravnavajućih promenljivih ne menja se ciljna funkcija. Svakako, broj jednačina ograničenja (m) uvek je manji od broja nezavisnih promenljivih ($n + l$).

Često je, u sistemima automatskog upravljanja, značajno problem linearnog programiranja predstaviti u matričnom obliku:

Odrediti ekstremne vrednosti funkcije

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \tag{4.5}$$

$$\text{uz uslove} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{B} \quad \mathbf{x} \geq 0, \tag{4.6}$$

gde su

GLAVA 4. TENZORSKI RAČUN I LINEARNO PROGRAMIRANJE

$$\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \ \dots \ x_{n+l}], \quad \mathbf{c}^T = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n \ \dots \ c_{n+l}],$$

$$\mathbf{B}^T = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m],$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & \dots & a_{(k+1)n} & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_{(l+1)1} & a_{(l+1)2} & \dots & a_{(l+1)n} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Vektori \mathbf{x} , koji zadovoljavaju sve uslove (4.6), nazivaju se *dopustivi* vektori za zadati problem linearnog programiranja. Dopustiva rešenja, koja minimiziraju (maksimiziraju) funkciju cilja (4.5), su minimalna ili maksimalna dopustiva rešenja. Dakle, u postupku primene tehnike linearnog programiranja treba odrediti maksimalno ili minimalno dopustivo rešenje zadanog problema.

Ukoliko matricu \mathbf{A} , dimenzije $m \times (n + l)$, razložimo (dekomponujemo) na sledeći način

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \quad \mathbf{P}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \quad \mathbf{P}_{n+2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \quad \mathbf{P}_{n+l} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

uz oznaku $\mathbf{P}_0 = \mathbf{B}$, dobijamo formulaciju problema linearnog programiranja u

4.2. TRANSPORTNI PROBLEM I OSOBINE

vektorskoj formi:

$$\begin{array}{ll} \text{Naći ekstremum funkcije} & y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{uz uslove} & x_1 \mathbf{P}_1 + x_2 \mathbf{P}_2 + \dots + x_N \mathbf{P}_N = \mathbf{P}_0 \quad N = n + l \\ \text{i} & \mathbf{x} \geq 0, \end{array}$$

što može znatno olakšati primenu LP u automatskim sistemima, ubrzati proces i pojednostaviti izračunavanja.

Linearno programiranje ima višestruku primenu u problemu transporta, uključujući optimalno upravljanje transportnim resursima i efikasno i ekonomično planiranje rute za prevoz robe ili ljudi. Optimizacija raspodele tereta između različitih izvora i odredišta uz minimiziranje ukupnih troškovi transporta, što može obuhvatiti transport robe iz skladišta do prodavnica ili distribuciju energenata i resursa između različitih lokacija, kao i planiranje optimalnih ruta vozila za javni prevoz putnika, samo su neke od primena LP. I adekvatno upravljanje zalihama, odabir ruta za transport i raspoređivanje resursa u cilju smanjenja zaliha i troškova prevoza primena su LP u optimizaciji lanca snabdevanja. U projektovanju mreže saobraćaja linearno programiranje pomaže u postavljanju trasa za javni prevoz, semafora i parkinga, dok kod optimizacije železničkog i vazdušnog saobraćaja ima značajnu ulogu u rasporedu letova i reda vožnje vozova, kao i korišćenja kapaciteta.

4.2 Transportni problem i osobine

Transportni problem (TP), jedan od osnovnih problema protoka transporta, je posebna vrsta LP problema koji se koristi za smanjenje troškova transporta distribucije jedne robe iz više izvora snabdevanja na brojne destinacije potražnje koje poštuju ograničenje ponude i zahtev potražnje. Logistika i upravljanje lancem snabdevanja za smanjenje troškova u velikoj meri zavise od transportnih modela koji, u slučaju kada su koeficijenti troškova i količine potražnje poznati, mogu dovesti do efikasnih algoritama. Jedan od pionira TP (kao deo problema preto-

GLAVA 4. TENZORSKI RAČUN I LINEARNO PROGRAMIRANJE

vara) je A. N. Tolstoí [106, 137] koji je napisao rad o pronalaženju minimalne ukupne kilometraže u prevozu tereta u svemiru objavljenoj u knjizi o planiranju transporta koju je izdao Nacionalni komesarijat za transport Sovjetskog Saveza. On je predstavio i objasnio nekoliko pristupa za transport tereta duž pruge u Sovjetskom Savezu. Prva matematička formulacija TP u sadašnjoj formi, kao i odgovarajuće metode, potiču od F. L. Hitchcock i [34], T. C. Koopmansa [51], a u obliku simpleks metode, od G. B. Dantziga [23]. Kasnije su usledili mnogi naučni radovi sa primenama u industriji i biznisu. Iako je TP prilično star, još uvek ima dovoljno naučnih radova i diskusija koji se bave specifičnim pitanjima praktične primene analitičkih metoda za njegovo rešavanje [29, 43]. Štaviše, osim originalnog zadatka, zadaci iz oblasti proizvodnje, usluga, menadžmenta, marketinga, optimalnog upravljanja (optimalan plasman mašina, pomoćnih usluga, magacina, izbor lokacije usluga ili energetskih objekata, protok i skladištenje podataka, izbor radnika, smanjenje potrošnje energije, raspodela signala, distribucija medicinskih sredstava, projektovanje regulatora za održavanje stabilnosti aviona ili procesa kontrole nuklearnog reaktora, smanjenja ukupnih troškova transporta) sve više se formulišu i rešavaju u obliku TP.

Definišimo transportni problem (TP).

Neka je dato m proizvodnih centara nekog proizvoda, S_1, S_2, \dots, S_m , i n destinacija potraživanja, D_1, D_2, \dots, D_n . Neka su sa a_i predstavljeni kapaciteti proizvodnih centara i , a sa b_j potraživanja destinacija j , gde je sa c_{ij} označena cena transporta jedinice proizvoda od centra S_i do destinacije D_j .

Prethodne uslove možemo tabelarno predstaviti u obliku

		D_1		D_2		...		D_j		...		D_n	
S_1		c_{11}		c_{12}		...		c_{1j}		...		c_{1n}	
S_2		c_{21}		c_{22}		...		c_{2j}		...		c_{2n}	
\vdots		\vdots		\vdots		...		\vdots		...		\vdots	
S_i		c_{i1}		c_{i2}		...		c_{ij}		...		c_{in}	
\vdots		\vdots		\vdots		...		\vdots		...		\vdots	
S_m		c_{m1}		c_{m2}		...		c_{mj}		...		c_{mn}	
		b_1		b_2		...		b_j		...		b_n	

4.3. OSNOVNO DOPUSTIVO (IZVODLJIVO) REŠENJE TRANSPORTNOG PROBLEMA

Cilj je odrediti optimalnu količinu proizvoda x_{ij} koja se transportuje od S_i do D_j tako da cena transporta bude najmanja.

Matematički model TP je definisan na sledeći način [3, 132, 144]

$$\begin{aligned} \text{Minimizirati } Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Poznato je da vektori i matrice, osnovni pojmovi TP mogu da se posmatraju kao specijalni slučajevi tenzora (tenzora prvog i drugog tipa), pa se samim tim može razmatrati i primena tenzora u TP.

Rimanov prostor i metrički tenzor su proučavani teorijski [65] i primenjeni u različitim oblastima [139, 141]. U nastavku ćemo opisati još jednu primenu simetričnog metričkog tenzora.

4.3 Osnovno dopustivo (izvodljivo) rešenje Transportnog problema

Podsetimo se nekih pojmova i činjenica u vezi sa TP (4.9) [104, 106].

- Matrica $X = [x_{ij}]_{m \times n}$ nenegativnih pojedinačnih alokacija ($x_{ij} \geq 0$) koja ispunjava uslove vrsta i kolona naziva se *dopustivo rešenje*.
- Dopustivo rešenje koje ne sadrži više od $m + n - 1$ nenegativnih alokacija naziva se *osnovno dopustivo rešenje*.
- Osnovno dopustivo rešenje koje minimizira ukupnu cenu transporta naziva se *optimalno rešenje*.

Poznato je da TP ima optimalno rešenje ako i samo ako je balansiran (uravnotežen),

GLAVA 4. TENZORSKI RAČUN I LINEARNO PROGRAMIRANJE

odnosno ako važi da je $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$. Nebalansiran TP se može balansirati dodavanjem pomoćnih (dopunskih, lažnih) izvora ako je ponuda manja od potražnje, ili pomoćnih destinacija, u suprotnom, čija bi cena bila nula.

Proces rešavanja transportnog problema se obično odvija u dve etape: nalaženje početnog osnovnog rešenja i provera njegove optimalnosti uz poboljšanja dok se ne dođe do optimalnog rešenja. Postoji nekoliko različitih metoda za svaku etapu. Sa namerom predstavljanja novog pristupa TP zasnovanog na tenzorskom računu, biće navedena dva osnovna metoda za određivanje početnog osnovnog rešenja, Metod severozapadnog ugla i Metod najmanje cene (najmanjih troškova).

Razni istraživači su se bavili određivanjem rešenja transportnog problema. Neki od njih su G. Appa [3], J. R. Meyer, J. F. Kain, M. Wohl [63], W. L. Winston [145] i mnogi drugi. U knjizi [49] su opisani različiti metodi rešavanja transportnog problema.

G. Appa [3] je ustanovio da je, kod razmatranih problema linearnog programiranja, moguće: (i) ciljna funkcija je neograničena, (ii) problem je nerešiv, (iii) problem se može rešiti određivanjem rešenja odgovarajućeg transportnog problema.

U nastavku će biti objašnjene ove metode i dat primer njihovog funkcionisanja.

[3, 49, 63, 145] **Algoritam 1: Metod severozapadnog ugla (NWC Metod)**

Korak 1: Ako transportni problem nije balansiran, balansirati ga dodavanjem pomoćnih izvora ili destinacija tako da važi $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, sa troškovima transporta jednakim nuli u dodatim ćelijama.

Početi sa severozapadnim (gornjim levim) uglom (1, 1), odnosno uzeti vrednost $i = j = 1$.

Korak 2: Dodeliti vrednost $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$ i u skladu sa tim smanjiti ponudu a_i ili potražnju b_j .

Korak 3: Ako je vrednost a_i iscrpljena, ići jednu ćeliju vertikalno naniže, odnosno uzeti da je $i := i + 1$. Ako je vrednost b_j iscrpljena, ići jednu ćeliju horizontalno desno, odnosno uzeti da je $j := j + 1$.

Korak 4: Ponoviti korake 2 i 3 dok se raspoloživa količina ne iscpi.

4.3. OSNOVNO DOPUSTIVO (IZVODLJIVO) REŠENJE TRANSPORTNOG PROBLEMA

[3, 49, 63, 145] **Algoritam 2: Metod najmanje cene (MC Metod)**

Korak 1: Odrediti ćeliju (i, j) sa najmanjom cenom c_{ij} i locirati $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$.

Korak 2: Ako važi da je $\min\{a_i, b_j\} = a_i$, precrtati i -ti red i smanjiti b_{jj} za vrednost a_i . Ako važi da je $\min\{a_i, b_j\} = b_j$, precrtati j -tu kolonu i smanjiti a_{ij} za vrednost b_j . Ako važi da je $\min\{a_i, b_j\} = a_i = b_j$, precrtati ili i -ti red ili j -tu kolonu.

Korak 3: Ponoviti korake 1 i 2 sa neprecrtanim ćelijama dok se raspoloživa količina ne iscrpi.

Mogućnost implementacije prethodna dva algoritma biće prikazana u narednom primeru.

Primer 4.2. *Neka su date tri rute za transfer podataka A, B, i C i tri pomoćna skladišta P, Q, i R u kojima se podaci čuvaju pre slanja u glavno skladište na kraju dana. Kapacitet prenosa podataka po rutama A, B, i C redom iznosi 80, 70, i 60 hiljada terabajta (TB), a dnevni kapaciteti skladišta su redom 50, 110, i 50 hiljada TB. Cena prenosa jednog TB podataka razlikuje se od svake rute do skladišta, zavisi od rastojanja, i može se prikazati na sledeći način: ruta A: 16, 18 i 21; ruta B: 17, 19, i 14; ruta C: 32, 11, i 15 sve redom ka skladištima P, Q, i R. Pitanje je koliko hiljada TB treba poslati sa svake rute da bi se dobilo osnovno izvodljivo rešenje ukupne cene transfera.*

Predstavljajući ograničenja u Tabeli i primenom Algoritma 4.3 dobijamo

$$\begin{aligned}x_{11} &= \min\{80, 50\} = 50; & x_{12} &= \min\{80 - 50, 110\} = 30; \\x_{22} &= \min\{70, 110 - 30\} = 70; & x_{32} &= \min\{60, 110 - 30 - 70\} = 10; \\x_{33} &= 50,\end{aligned}$$

GLAVA 4. TENZORSKI RAČUN I LINEARNO PROGRAMIRANJE

	P	Q	R	
A	50	30		80
	16	18	21	
B		70		70
	17	19	14	
C		10	50	60
	32	11	15	
	50	110	50	210

Dobijeno osnovno izvodljivo rešenje i odgovarajuća cena koštanja su

$$X = \begin{bmatrix} 50 & 30 & 0 \\ 0 & 70 & 0 \\ 0 & 10 & 50 \end{bmatrix}, \quad Z = 16 \cdot 50 + 18 \cdot 30 + 19 \cdot 70 + 11 \cdot 10 + 15 \cdot 50 = 3530.$$

Primenom metoda najmanje cene dobija se bolje početno rešenje stavljanjem akcenta na najjeftiniju rutu. Rešenje je prikazano u obliku

$$\begin{aligned} \min\{c_{ij}, i, j = 1, 2, 3\} &= 11 = c_{32}, & x_{32} &= \min\{60, 110\} = 60; \\ \min\{c_{ij}, i = 1, 2, j = 1, 2, 3\} &= 14 = c_{23}, & x_{23} &= \min\{50, 70\} = 50; \\ \min\{c_{ij}, i, j = 1, 2\} &= 16 = c_{11}, & x_{11} &= \min\{50, 80\} = 50; \\ \min\{c_{i2}, i = 1, 2\} &= 18 = c_{12}, & x_{12} &= \min\{110 - 60, 80 - 50\} = 30; \\ x_{22} &= 20. \end{aligned}$$

	P	Q	R	
A	50	30		80
	16	18	21	
B		20	50	70
	17	19	14	
C		60		60
	32	11	15	
	50	110	50	210

$$X = \begin{bmatrix} 50 & 30 & 0 \\ 0 & 20 & 50 \\ 0 & 60 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z = 16 \cdot 50 + 18 \cdot 30 + 19 \cdot 20 + 14 \cdot 50 + 11 \cdot 60 = 3080.$$

(4.10)

4.4. TRANSPORTNI PROBLEM I METRIČKI TENZOR

4.4 Transportni problem i metrički tenzor

Predstavimo TP (4.9) u tenzorskoj notaciji. Pretpostavimo da je $m = n = N$. Ako ovaj uslov nije ispunjen, dodaćemo pomoćne vrednosti izvora ili destinacija sa komponentama jednakim nuli.

Vektori ponude i potražnje su tenzori prvog reda u Euklidskom prostoru \mathbb{E}_N :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_N \end{bmatrix}^T = [a_i]^T, \quad \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_N \end{bmatrix} = [b_j], \quad i, j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Matrica cena je tenzor drugog reda

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2N} \\ & \cdots & & \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix} = [c_{ij}].$$

Promenljive proizvoda su

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2N} \\ & \cdots & & \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{NN} \end{bmatrix} = [x_{ij}].$$

Na ovaj način se TP (4.9), poštujući Ajnštajnovu konvenciju o sabiranju, ekvivalentno može zapisati u obliku

$$\begin{aligned} \text{Minimizirati } Z &= \delta^{\alpha\gamma} \delta^{\beta\delta} c_{\alpha\beta} x_{\gamma\delta}, \\ \delta^{\alpha\beta} e_\alpha x_{i\beta} &= a_i, \\ \delta^{\alpha\beta} e_\alpha x_{\beta j} &= b_j, \\ x_{ij} &\geq 0, \\ i, j &= 1, \dots, N, \end{aligned} \tag{4.11}$$

gde je δ^{ij} Kronekerova delta sa gornjim indeksima i $e_i = 1$.

Kao što smo već rekli, δ_{ij} su komponente metričkog tenzora Euklidskog prostora \mathbb{E}_N . Iz tog razloga, tenzorski oblik ciljne funkcije Z dat u (4.11) može se

GLAVA 4. TENZORSKI RAČUN I LINEARNO PROGRAMIRANJE

ekvivalentno izraziti u obliku

$$Z = c_{\alpha\beta}x^{\alpha\beta} \quad \text{ili} \quad Z = c^{\alpha\beta}x_{\alpha\beta}. \quad (4.12)$$

Ako je x^{ij} rešenje transportnog problema (4.12), odgovarajuće rešenje sa donjim indeksima x_{ij} dobija se na sledeći način

$$x_{ij} = \delta_{i\alpha}\delta_{j\beta}x^{\alpha\beta}. \quad (4.13)$$

U nastavku će, uz poštovanje uslova $m = n = N$, biti generalizovan transportni problem (4.11). Umesto simbola Kronekerove delte sa gornjim indeksima koristićemo simetrični metrički tenzor sa gornjim indeksima. Na taj način ciljna funkcija postaje opštija i dozvoljava uticaj nekih novih parametara.

U generalizovanom transportnom problemu sa simetričnim metričkim tenzorom \hat{g} , ciljna funkcija Z je izražena u obliku

$$Z = g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}c_{\alpha\beta}x_{\gamma\delta}.$$

Komponente odgovarajuće matrice cena su

$$C^{ij} = g^{i\gamma}g^{j\delta}c_{\gamma\delta}. \quad (4.14)$$

Rešenje ovoga problema predstavljeno je u narednoj teoremi.

Teorema 4.1. *Neka je $[c_{ij}]$ konstantna matrica i neka je $[C^{ij}]$, za $C^{ij} = g^{i\alpha}g^{j\beta}c_{\alpha\beta}$ matrica cena. Osnovno izvodljivo rešenje transportnog problema*

$$\begin{aligned} \text{Minimizirati } Z &= g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}c_{\alpha\beta}x_{\gamma\delta} \\ \delta^{\alpha\beta}e_{\alpha}x_{i\beta} &= a_i \\ \delta^{\alpha\beta}e_{\alpha}x_{\beta j} &= b_j \\ x_{ij} &\geq 0 \\ i, j &= 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.15)$$

je

$$x_{ij} = g_{\alpha i}g_{\beta j}x^{\alpha\beta}, \quad (4.16)$$

4.4. TRANSPORTNI PROBLEM I METRIČKI TENZOR

gde je $x^{\alpha\beta}$ osnovno izvodljivo rešenje transportnog problema

$$\begin{aligned} \text{Minimizirati } Z &= \delta^{\alpha\gamma} \delta^{\beta\delta} c_{\alpha\beta} x_{\gamma\delta}, \\ \delta^{\alpha\beta} e_{\alpha} x_{i\beta} &= a_i, \\ \delta^{\alpha\beta} e_{\alpha} x_{\beta j} &= b_j, \\ x_{ij} &\geq 0, \\ i, j &= 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Ako je $\mathcal{G} = [g_{ij}]$ matrica sačinjena od komponenata metričkog tenzora i ako je $\mathcal{X} = [x^{ij}]$ matrica sačinjena od rešenja $x^{ij} = \delta^{i\alpha} \delta^{j\beta} x_{\alpha\beta}$ problema (4.17), matrica rešenja problema (4.15) je

$$[x_{ij}] = \mathcal{G}\mathcal{X}\mathcal{G}. \tag{4.18}$$

Dokaz. Transportni problem (4.15) je ekvivalentan problemu

$$\mathcal{Z} = c_{\alpha\beta} x^{\alpha\beta},$$

gde su indeksi u $x^{\alpha\beta}$ podignuti u skladu sa nekonstantnim metričkim tenzorom \hat{g} .

Primenom nekog od metoda za rešavanje TP, dobijamo odgovarajuće komponente $x^{\alpha\beta}$. Rešenje problema (4.15) se dobija nakon snižavanja indeksa iz $x^{\alpha\beta}$.

Kako levi indeksi u elementima matrice m_{ij} označavaju red, a desni kolonu gde je element smešten, jednačina (4.18) važi direktno iz tenzorskog zapisa ovog rešenja. \square

Primer 4.3. Razmotrimo problem predstavljen u Primeru 1 sa dodatnim informacijama o pouzdanosti prenosa podataka.

Neka g_{ij} označava specijane pogodnosti ako skladišta P, Q, R koriste redom rute A, B, C .

Ako važi da je $g^{ij} = \delta^{ij}$, važi naredna jednakost

$$Z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_{ij}.$$

Znajući da je \hat{g} simetrični metrički tenzor čije su komponente g_{ij} , dobija se sledeća

GLAVA 4. TENZORSKI RAČUN I LINEARNO PROGRAMIRANJE

jednačina

$$\mathcal{Z} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 d_{ij} x_{ij}$$

za

$$\begin{aligned}
 d_{11} &= c_{11}(g_{11})^2 + c_{12}g_{11}g_{12} + c_{21}g_{11}g_{12} + c_{22}(g_{12})^2 \\
 &\quad + c_{13}g_{11}g_{13} + c_{31}g_{11}g_{13} + c_{23}g_{12}g_{13} + c_{32}g_{12}g_{13} + c_{33}(g_{13})^2, \\
 d_{12} &= c_{11}g_{11}g_{12} + c_{21}(g_{12})^2 + c_{31}g_{12}g_{13} + c_{12}g_{11}g_{22} \\
 &\quad + c_{22}g_{12}g_{22} + c_{32}g_{13}g_{22} + c_{13}g_{11}g_{23} + c_{23}g_{12}g_{23} + c_{33}g_{13}g_{23}, \\
 d_{13} &= c_{11}g_{11}g_{13} + c_{21}g_{12}g_{13} + c_{31}(g_{13})^2 + c_{12}g_{11}g_{23} \\
 &\quad + c_{22}g_{12}g_{23} + c_{32}g_{13}g_{23} + c_{13}g_{11}g_{33} + c_{23}g_{12}g_{33} + c_{33}g_{13}g_{33}, \\
 d_{21} &= c_{11}g_{11}g_{12} + c_{12}(g_{12})^2 + c_{13}g_{12}g_{13} + c_{21}g_{11}g_{22} \\
 &\quad + c_{22}g_{12}g_{22} + c_{23}g_{13}g_{22} + c_{31}g_{11}g_{23} + c_{32}g_{12}g_{23} + c_{33}g_{13}g_{23}, \\
 d_{22} &= c_{11}(g_{12})^2 + c_{12}g_{12}g_{22} + c_{21}g_{12}g_{22} + c_{22}(g_{22})^2 \\
 &\quad + c_{13}g_{12}g_{23} + c_{31}g_{12}g_{23} + c_{23}g_{22}g_{23} + c_{32}g_{22}g_{23} + c_{33}(g_{23})^2, \\
 d_{23} &= c_{11}g_{12}g_{13} + c_{21}g_{13}g_{22} + c_{12}g_{12}g_{23} + c_{31}g_{13}g_{23} \\
 &\quad + c_{22}g_{22}g_{23} + c_{32}(g_{23})^2 + c_{13}g_{12}g_{33} + c_{23}g_{22}g_{33} + c_{33}g_{23}g_{33}, \\
 d_{31} &= c_{11}g_{11}g_{13} + c_{12}g_{12}g_{13} + c_{13}(g_{13})^2 + c_{21}g_{11}g_{23} \\
 &\quad + c_{22}g_{12}g_{23} + c_{23}g_{13}g_{23} + c_{31}g_{11}g_{33} + c_{32}g_{12}g_{33} + c_{33}g_{13}g_{33}, \\
 d_{32} &= c_{11}g_{12}g_{13} + c_{12}g_{13}g_{22} + c_{21}g_{12}g_{23} + c_{13}g_{13}g_{23} \\
 &\quad + c_{22}g_{22}g_{23} + c_{23}(g_{23})^2 + c_{31}g_{12}g_{33} + c_{32}g_{22}g_{33} + c_{33}g_{23}g_{33}, \\
 d_{33} &= c_{11}(g_{13})^2 + c_{12}g_{13}g_{23} + c_{22}(g_{23})^2 \\
 &\quad + c_{13}g_{13}g_{33} + c_{31}g_{13}g_{33} + c_{23}g_{23}g_{33} + c_{32}g_{23}g_{33} + c_{33}(g_{33})^2.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Pretpostavimo da metrički tenzor \hat{g} odgovara matrici $[g_{ij}] = \text{diag}\{K, L, M\}$ i važi da je $[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1} = \text{diag}\{K^{-1}, L^{-1}, M^{-1}\}$. Transformisana matrica cena

4.5. GENERALIZOVANO DOPUSTIVO REŠENJE TRANSPORTNOG PROBLEMA

je

$$C = C^{ij} = g^{i\alpha} g^{j\beta} c_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 16K^{-2} & 18(KL)^{-1} & 21(KM)^{-1} \\ 17(KL)^{-1} & 19L^{-2} & 14(LM)^{-1} \\ 32(KM)^{-1} & 11(LM)^{-1} & 15M^{-2} \end{bmatrix}.$$

Rešavanjem transformisanog problema dobijamo rešenje koje uključuje dodatne parametre. Na primer, za $K = 2, L = 10, M = 5$, imamo da je

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 0.9 & 2.1 \\ 0.85 & 0.19 & 0.28 \\ 3.2 & 0.22 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Primenom MC metoda objašnjenim u Algoritmu 4.3 dobijamo osnovno izvodljivo rešenje i odgovarajuću ukupnu cenu

$$X = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 30 \\ 0 & 70 & 0 \\ 0 & 40 & 20 \end{bmatrix}, \quad Z = 16 \cdot 50 + 21 \cdot 30 + 19 \cdot 70 + 11 \cdot 40 + 15 \cdot 20 = 3500.$$

Primetimo da je ukupna cena veća nego cena dobijena primenom MC metoda primenjenog na netransformisani problem (4.10), ali ovde izbor rešenja uključuje i ponuđene pogodnosti.

4.5 Generalizovano dopustivo rešenje Transportnog problema

Neka su date tri rute za transfer podataka A , B , i C i tri pomoćna skladišta P , Q , i R u kojima se podaci čuvaju pre slanja u glavno skladište na kraju dana. Kapacitet prenosa podataka po rutama A , B , i C redom iznosi 80, 70, i 60 hiljada terabajta (TB), a dnevni kapaciteti skladišta su redom 50, 90, i 70 hiljada TB. Cena prenosa jednog TB podataka sa svake rute razlikuje se od svake rute do skladišta, zavisi od rastojanja, i može se prikazati na sledeći način: ruta A : $A_1(t)$, $A_2(t)$ i $A_3(t)$; ruta B : $B_1(t)$, $B_2(t)$, i $B_3(t)$; ruta C : $C_1(t)$, $C_2(t)$, i $C_3(t)$ sve redom ka

GLAVA 4. TENZORSKI RAČUN I LINEARNO PROGRAMIRANJE

skladištima P , Q , and R . Pitanje je koliko hiljada TB treba poslati u intervalu od sat vremena ($0 \leq t \leq 60$) sa svake rute kako bi se minimizirala ukupna cena transfera.

Funkcije koštanja i uslovi su predstavljeni u sledećoj Tabeli

	P	Q	R	
A	$x_{11}(t)$	$x_{12}(t)$	$x_{13}(t)$	$a_1(t)$
	$A_1(t)$	$A_2(t)$	$A_3(t)$	
B	$x_{21}(t)$	$x_{22}(t)$	$x_{23}(t)$	$a_2(t)$
	$B_1(t)$	$B_2(t)$	$B_3(t)$	
C	$x_{31}(t)$	$x_{32}(t)$	$x_{33}(t)$	$a_3(t)$
	$C_1(t)$	$C_2(t)$	$C_3(t)$	
	$b_1(t)$	$b_2(t)$	$b_3(t)$	

(4.20)

za $b_3(t) = a_1(t) + a_2(t) + a_3(t) - b_1(t) - b_2(t)$.

Primenom Metoda severozapadnog ugla dobijamo vrednosti osnovnog izvodljivog rešenja $[x_{ij}]$.

Poštujuci zadate uslove $a_1(t) = 80$, $a_2(t) = 70$, $a_3(t) = 60$, $b_1(t) = 50$, $b_2(t) = 90$, $b_3(t) = 70$, i funkcije $A_i = A_i(t)$, $B_i = B_i(t)$, $C_i = C_i(t)$, $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{cases} -\frac{2}{3}t + 50, & t \in [0, 45) \\ 20, & t \in [45, 55) \\ 6t - 310, & t \in [55, 60] \end{cases} &
 A_2 &= \begin{cases} -\frac{7}{45}t + 70, & t \in [0, 45), \\ \frac{4}{3}t - 50, & t \in [45, 60] \end{cases} &
 A_3 &= -\frac{1}{6}t + 60, \quad t \in [0, 60], \\
 B_1 &= \begin{cases} -\frac{4}{5}t + 80, & t \in [0, 50) \\ t - 10, & t \in [50, 60] \end{cases} &
 B_2 &= \begin{cases} -\frac{8}{9}t + 60, & t \in [0, 45) \\ t - 25, & t \in [45, 55) \\ 4t - 190, & t \in [55, 60] \end{cases} &
 B_3 &= -\frac{3}{4}t + 50, \quad t \in [0, 60] \\
 C_1 &= -t + 80, \quad t \in [0, 60], &
 C_2 &= \begin{cases} -\frac{6}{5}t + 70, & t \in [0, 50), \\ 3t - 140, & t \in [50, 60], \end{cases} &
 C_3 &= \begin{cases} -\frac{4}{9}t + 60, & t \in [0, 45) \\ -2t + 130, & t \in [45, 55) \\ -2t + 140, & t \in [55, 60]. \end{cases}
 \end{aligned}$$

dobijamo naredno osnovno izvodljivo rešenje

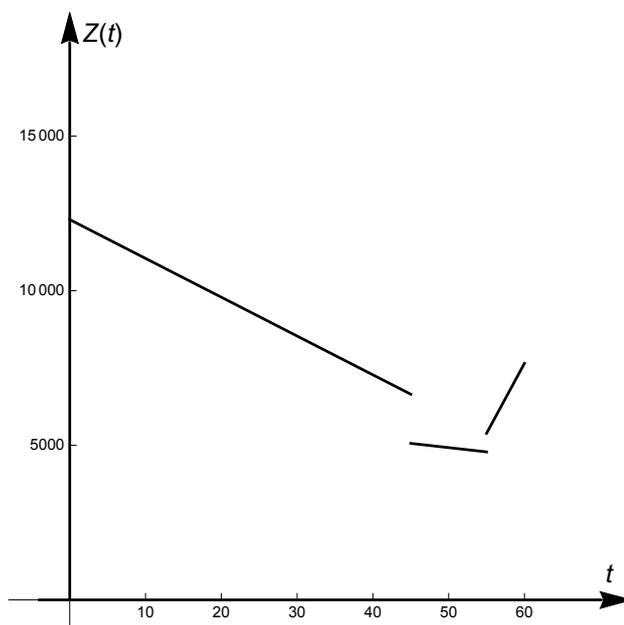
$$X = \begin{bmatrix} 50 & 30 & 0 \\ 0 & 60 & 10 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix}, \quad Z(t) = 50 \cdot A_1(t) + 30 \cdot A_2(t) + 60 \cdot B_2(t) + 10 \cdot B_3(t) + 60 \cdot C_3(t).$$

4.5. GENERALIZOVANO DOPUSTIVO REŠENJE TRANSPORTNOG PROBLEMA

Ukupna funkcija troškova je

$$Z(t) = \begin{cases} -\frac{251}{2}t + 12300, & t \in [0, 45) \\ -\frac{55}{2}t + 6300, & t \in [45, 55) \\ \frac{905}{2}t - 19500, & t \in [55, 60]. \end{cases} \quad (4.21)$$

Grafički prikaz funkcije predstavljen je na narednoj Slici 4.1



Slika 4.1: Grafički prikaz funkcije $Z(t)$

Sa Slike 4.1 se može zaključiti da je funkcija $Z(t)$ koja predstavlja protok informacija opadajuća na intervalu $t \in [0, 45]$, takođe opadajuća na intervalu $t \in [45, 55]$, i u poslednjem delu, gde $t \in [55, 60]$ funkcija $Z(t)$ raste.

S obzirom na metrički tenzor \hat{g} , čije su komponente izražene u sledećoj matrici

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} f(t) & 0 & 0 \\ 0 & f^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & f^3(t) \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

GLAVA 4. TENZORSKI RAČUN I LINEARNO PROGRAMIRANJE

za funkciju f , $f^k(t) = \underbrace{f(t) \cdot \dots \cdot f(t)}_{k \text{ puta}}$, dobijamo transformisanu funkciju troškova

$$\mathcal{Z}(t) = \begin{cases} \mathcal{Z}_1(t), & 0 \leq x < 45 \\ \mathcal{Z}_2(t), & 45 \leq x < 50 \\ \mathcal{Z}_3(t), & 50 \leq x < 55 \\ \mathcal{Z}_4(t), & 55 \leq x \leq 60, \end{cases} \quad (4.23)$$

gde je

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1(t) = & 50 \cdot \left(-\frac{2}{3}t + 50\right) \cdot f^2(t) + 30 \cdot \left(-\frac{7}{45}t + 70\right) \cdot f^3(t) + 60 \cdot \left(-\frac{4}{5}t + 80\right) \cdot f^3(t) \\ & + 10 \cdot \left(-\frac{8}{9}t + 60\right) \cdot f^4(t) + 60 \cdot \left(-\frac{4}{9}t + 60\right) \cdot f^6(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_2(t) = & 50 \cdot 20 \cdot f^2(t) + 30 \cdot \left(\frac{4}{3}t - 50\right) \cdot f^3(t) + 60 \cdot \left(-\frac{4}{5}t + 80\right) \cdot f^3(t) \\ & + 10 \cdot (t - 25) \cdot f^4(t) + 60 \cdot (-2t + 130) \cdot f^6(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_3(t) = & 50 \cdot 20 \cdot f^2(t) + 30 \cdot \left(\frac{4}{3}t - 50\right) \cdot f^3(t) + 60 \cdot (t - 10) \cdot f^3(t) \\ & + 10 \cdot (t - 25) \cdot f^4(t) + 60 \cdot (-2t + 130) \cdot f^6(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_4(t) = & 50 \cdot (6t - 310) \cdot f^2(t) + 30 \cdot \left(\frac{4}{3}t - 50\right) \cdot f^3(t) + 60 \cdot (t - 10) \cdot f^3(t) \\ & + 10 \cdot (4t - 190) \cdot f^4(t) + 60 \cdot (-2t + 140) \cdot f^6(t). \end{aligned}$$

S obzirom na metrički tenzor \hat{g} zadat jednačinom (4.22), dobija se

$$\mathcal{G}^{-1} = [g^{ij}] : \quad g^{11} = \frac{1}{f(t)}, \quad g^{22} = \frac{1}{f^2(t)}, \quad g^{33} = \frac{1}{f^3(t)}, \quad g^{ij} = 0, \quad i \neq j,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} c_{\alpha\beta} x_{\gamma\delta} \\ &= g^{11} g^{11} c_{11} x_{11} + g^{11} g^{22} c_{12} x_{12} + g^{11} g^{33} c_{13} x_{13} + g^{22} g^{11} c_{21} x_{21} + g^{22} g^{22} c_{22} x_{22} \\ &+ g^{22} g^{33} c_{23} x_{23} + g^{33} g^{11} c_{31} x_{31} + g^{33} g^{22} c_{32} x_{32} + g^{33} g^{33} c_{33} x_{33} \\ &= \frac{50A_1(t)}{f^2(t)} + \frac{30A_2(t)}{f^3(t)} + \frac{60B_2(t)}{f^4(t)} + \frac{10C_2(t)}{f^5(t)} + \frac{60C_3(t)}{f^6(t)}, \end{aligned}$$

4.5. GENERALIZOVANO DOPUSTIVO REŠENJE TRANSPORTNOG PROBLEMA

pa je

$$X = [x_{ij}] = \begin{bmatrix} 50 & 30 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 10 & 60 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{X} = [x^{ij}] = \mathcal{G}^{-1} \mathcal{X} \mathcal{G}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{50}{f^2(t)} & \frac{30}{f^3(t)} & 0 \\ 0 & \frac{60}{f^4(t)} & 0 \\ 0 & \frac{10}{f^5(t)} & \frac{60}{f^6(t)} \end{bmatrix}.$$

Matrica troškova transportnog problema (4.11) je konstantna. Generalizovali smo ovaj pristup definisanjem matrice troškova \mathcal{C} sa (4.14). Matrica \mathcal{C} je matrično vrednosna funkcija. Zbog toga, ona generalizuje početni pristup (4.9) uzimajući u obzir različite promenljive. Takođe, predstavljeno je dopustivo rešenje problema transporta zasnovano na tenzorskom računu. Standardni transportni problem (4.9) zasnovan je na skalarnom proizvodu sa jediničnom matricom (Euklidov prostor). Koristeći simetričnu matricu (metrički tenzor u Rimanovom prostoru) umesto jedinične matrice uopštili smo pristup rešavanja TP. Ova generalizacija omogućava razmatranje TP sa dodatnim faktorima koji utiču na ciljnu funkciju.

GLAVA 5

PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA

5.1 Fazi logika

Glavna tema ovog poglavlja biće fazi skupovi i fazi logika, razlozi za njeno nastajanje i osnovni pojmovi koji se u njoj javljaju. Nakon toga, definisaće se fazi brojevi i trougaoni fazi brojeva, biće opisane njihove osobine i navedena neka uopštenja.

5.1.1 Istorija fazi skupova i fazi logike

Jedna od mnogih paradigmatiskih promena u nauci dvadesetog veka svakako je razumevanje i prihvatanje pojma neizvesnosti. Ova se promena u nauci desila tako što se sa tradicionalnog stava po kome nauku treba da krasi preciznost, oštrina i doslednost, a neizvesnost je nepoželjna i treba je izbegavati po svaku cenu, postepeno prešlo na blaži, alternativni stav, kojim ne samo što nespecificnost, nejasnost, nedoslednost i neizvesnost nisu nenaučni, već mogu biti od velike koristi za nauku, čak i suštinski [48]. Prekretnicu u ovom naučnom zaokretu predstavlja rad Lotfija A. Zadeha [149] koji je prvi uveo fazi skupove, skupove sa *nepreciznim* granicama kod kojih funkcija pripadnosti skupu nije stvar potvrdnog ili

5.1. FAZI LOGIKA

odričnog odgovora, već stvar stepena. Za dati fazi skup A i element x sintagma x pripada skupu A nije uvek, kao u dvovrednosnoj logici, tačna ili netačna, već može biti tačna samo do određenog stepena, onog stepena dok x zaista pripada skupu A . Uobičajeno je da se stepen članstva/pripadnosti fazi skupu izražava brojem iz zatvorenog intervala $[0, 1]$, gde krajnje vrednosti 0 i 1 predstavljaju redom nepripadanje i pripadanje elementa fazi skupu. Osobina fazi skupova kojom se objašnjava lagan prelaz sa pripadnosti elementa skupu ka nepripadnosti daje nam snažno oruđe kojim se može opisati i meriti neizvesnost i prirodnim jezikom smisleno predstaviti nejasni koncepti. *Crisp* skup je definisan tako da sve elemente univerzalnog skupa deli u dve grupe: članove, oni koji sigurno pripadaju nekom skupu i nečlanove, one koji sigurno ne pripadaju skupu. U realnom svetu se mnoge klasifikacije ne primenjuju na ovako strog način, već se uz neprecizne granice lako prelazi iz članstva u nečlanstvo. Neki od primera kojima se ovo pokazuje su *skupi automobili*, *visoko zarazne bolesti* ili *visoki ljudi*. Fazi skupovi se matematički mogu definisati tako što se svakom elementu univerzalnog skupa dodeli vrednost kojom se opisuje stepen pripadnosti tog elementa fazi skupu, što u stvari predstavlja sličnost elementa sa predstavljanim fazi skupom. To znači da element može u većoj ili manjoj meri pripadati fazi skupu, što je naznačeno funkcijom pripadnosti, odnosno $0 \leq \mu(x) \leq 1$. Kako se vrednostima 0 i 1 opisuje nepripadanje i pripadanje elementa fazi skupu, klasičan (običan, *crisp*) skup se može smatrati restrikovanim slučajem opšteg fazi skupa sa samo dve moguće vrednosti funkcije pripadnosti.

Definicija 5.1. *Neka je X univerzalni skup i $x \in X$. Fazi skup A se na skupu X definiše kao skup uređenih parova*

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X, \mu_A(x) \in [0, 1]\}, \quad (5.1)$$

gde je $\mu_A(x)$ funkcija pripadnosti kojom je određen stepen kojim neki element $x \in X$ pripada skupu A . Uobičajeno je da se fazi skup označava velikim slovima, a kako bi se oznaka razlikovala od klasičnog skupa, fazi skupove ćemo označavati znakom tilda iznad slova, odnosno \tilde{A} .

Moguće je fazi skup poistovetiti sa svojom funkcijom pripadnosti, pa se često

GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA

fazi skup može definisati kao funkcija koja elemente skupa X preslikava u interval $[0, 1]$, odnosno

$$\mu_A(x) : X \rightarrow [0, 1]. \quad (5.2)$$

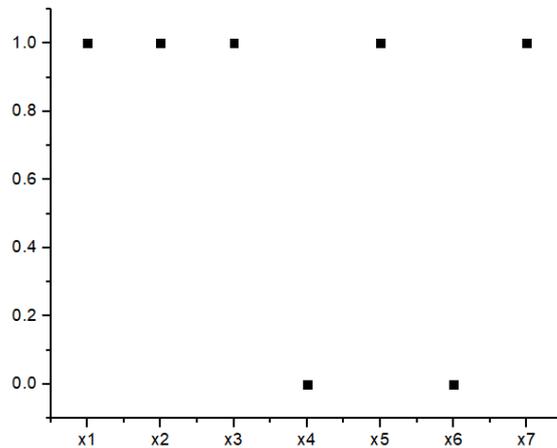
Ukoliko fazi skup ima konačan broj elemenata, mogu se navesti elementi sa odgovarajućim vrednostima funkcije pripadnosti, uz često izostavljanje elemenata čija je vrednost funkcije pripadnosti jednaka nuli.

Primer 5.1. [15] *Neka je dat skup $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ i njegov podskup $A = \{x_1, x_3, x_5, x_6, x_7\}$.*

Ukoliko govorimo o crisp skupovima, podskup A se može predstaviti korišćenjem funkcije pripadnosti sa vrednostima 0 i 1: $\mu_A(x_1) = 1, \mu_A(x_2) = 1, \mu_A(x_3) = 1, \mu_A(x_4) = 0, \mu_A(x_5) = 1, \mu_A(x_6) = 0, \mu_A(x_7) = 1$, na osnovu čega skup A zapisujemo u obliku

$$A = \{(x_1, 1), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 0), (x_5, 1), (x_6, 0), (x_7, 1)\}.$$

Grafički prikaz skupa A se može videti na Slici 5.1.



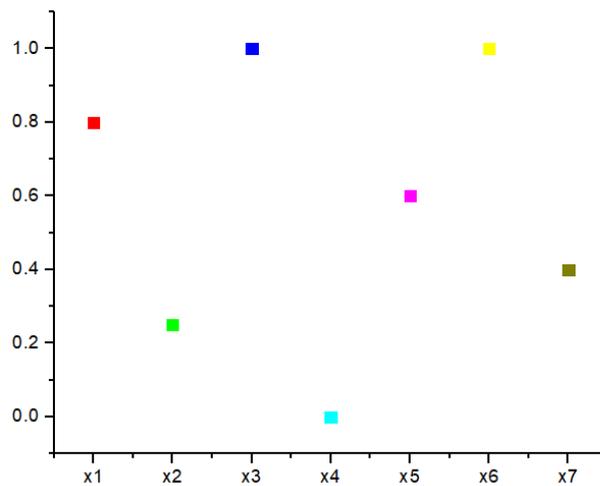
Slika 5.1: Grafički prikaz klasičnog skupa A

Ako izostavimo elemente čija je funkcija pripadnosti jednaka nuli, skup A ima oblik

$$A = \{(x_1, 1), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_5, 1), (x_7, 1)\}.$$

5.1. FAZI LOGIKA

Ukoliko govorimo o fazi skupovima, za svaki element skupa funkcija pripadnosti će imati neku vrednost iz intervala $[0, 1]$ u zavisnosti od stepena pripadnosti elementa skupu, odnosno od toga da li element pripada skupu delimično ili potpuno. Tada bi funkcije pripadnosti imale, recimo, sledeće vrednosti: $\mu_A(x_1) = 0.8$, $\mu_A(x_2) = 0.25$, $\mu_A(x_3) = 1$, $\mu_A(x_4) = 0$, $\mu_A(x_5) = 0.6$, $\mu_A(x_6) = 1$, $\mu_A(x_7) = 0.4$. Skup \tilde{A} je grafički moguće predstaviti kao na Slici 5.2.



Slika 5.2: Grafički prikaz fazi skupa \tilde{A}

U narednim definicijama [10, 11, 14, 32, 95, 149] biće navedeno nekoliko osnovnih osobina fazi skupova i operacija nad fazi skupovima objašnjenih korišćenjem njihovih funkcija pripadnosti.

Neka je X univerzalni skup i \tilde{A} i \tilde{B} fazi skupovi definisani na sledeći način:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) \in [0, 1]\},$$

$$\tilde{B} = \{(x, \mu_{\tilde{B}}(x)) \mid x \in X, \mu_{\tilde{B}}(x) \in [0, 1]\}.$$

Definicija 5.2. Dva fazi skupa \tilde{A} i \tilde{B} su jednaka, što označavamo sa $\tilde{A} = \tilde{B}$, ako i samo ako važi da je

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x), \forall x \in X. \quad (5.3)$$

GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA

Dakle, ako je za neko $x \in X$ $\mu_{\tilde{A}}(x) \neq \mu_{\tilde{B}}(x)$, onda je $\tilde{A} \neq \tilde{B}$, pa kako bismo odredili stepen jednakosti dva skupa koristimo meru jednakosti

$$E(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{|\tilde{A} \cap \tilde{B}|}{|\tilde{A} \cup \tilde{B}|}. \quad (5.4)$$

Definicija 5.3. Fazi skup \tilde{A} je podskup fazi skupa \tilde{B} što označavamo sa $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ ako i samo ako važi

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x), \forall x \in X. \quad (5.5)$$

Fazi skup \tilde{A} je pravi podskup fazi skupa \tilde{B} što označavamo sa $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ ako i samo ako važi $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ i $\tilde{A} \neq \tilde{B}$, odnosno

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \text{ i } \mu_{\tilde{A}}(x) < \mu_{\tilde{B}}(x), \forall x \in X. \quad (5.6)$$

Definicija 5.4. Fazi skup \tilde{A}^c je komplement fazi skupa \tilde{A} ako i samo ako važi

$$\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1. \quad (5.7)$$

Funkcije $\mu_{\tilde{A}}(x)$ i $\mu_{\tilde{A}^c}(x)$ su simetrične u odnosu na pravu $\mu = 0.5$.

Trougaone norme i konorme, prvenstveno uvedene u teoriju verovatnosnih metričkih prostora, generalizuju veze između fazi skupova.

Definicija 5.5. Neka su preslikavanja $T, S : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$. Posmatrajmo naredne osobine:

- *Identitet*

$$T1 : T(x, 1) = x$$

$$S1 : S(x, 0) = x,$$

- *Komutativnost*

$$T2 : T(x, y) = T(y, x)$$

$$S2 : S(x, y) = S(y, x),$$

- *Asocijativnost*

$$T3 : T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$$

$$S3 : S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z),$$

5.1. FAZI LOGIKA

- *Monotonost*

T4: Ako je $x \leq u$ i $y \leq v$, onda je $T(x, y) \leq T(u, v)$

S4: Ako je $x \leq u$ i $y \leq v$, onda je $S(x, y) \leq S(u, v)$.

Trougaona norma (T-norma) je preslikavanje $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ koje zadovoljava osobine T1-T4.

Trougaona konorma (T-konorma ili S-norma) je preslikavanje $S : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ koje zadovoljava osobine S1-S4.

Definicija 5.6. *Za T-normu i S-normu, $T, S : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ i proizvoljne fazi skupove $\tilde{A}, \tilde{B} \in X$ definišemo operacije u tački na sledeći način:*

$$ATB(x) = A(x)TB(x),$$

$$ASB(x) = A(x)SB(x),$$

za svaki $x \in X$

Posledica 5.1. *Za svaku T-normu i svaku S-normu važi da je $T(x, 0) = 0$ i $S(x, 1) = 1$, za svaki $x \in [0, 1]$.*

Posledica 5.2. *Za svaku T-normu i svaku S-normu važi da je $T(x, y) \leq x \wedge y$ i $S(x, y) \geq x \vee y$, za svaki $x, y \in [0, 1]$, gde simboli \wedge i \vee označavaju redom infimum (presek) i supremum (uniju).*

Naredne dve definicije unije i preseka dva fazi skupa zasnovane su na Zadehovo originalnoj definiciji.

Definicija 5.7. *Unija fazi skupova \tilde{A} i \tilde{B} , što označavamo sa $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ definisana je na sledeći način:*

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, \forall x \in X. \quad (5.8)$$

Definicija 5.8. *Presek fazi skupova \tilde{A} i \tilde{B} , što označavamo sa $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ definisan je na sledeći način:*

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, \forall x \in X. \quad (5.9)$$

GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA

Primer 5.2. [44] *Neka su dati fazi skupovi*

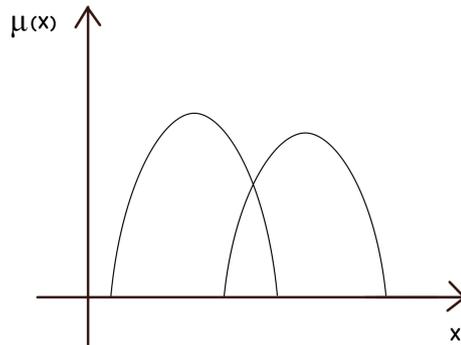
$$\tilde{A} = \begin{cases} 1, & 40 \leq x < 50, \\ 1 - \frac{x-50}{10}, & 50 \leq x < 60, \\ 0, & 60 \leq x \leq 100, \end{cases} \quad \text{i } \tilde{B} = \begin{cases} 1, & 40 \leq x < 50, \\ \frac{x-50}{10}, & 50 \leq x < 60, \\ 1 - \frac{x-60}{10}, & 60 \leq x < 70, \\ 0, & 70 \leq x \leq 100. \end{cases}$$

Unija i presek fazi skupova \tilde{A} i \tilde{B} jednaki su

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \begin{cases} 1, & 40 \leq x < 50 \\ 1 - \frac{x-50}{10}, & 50 \leq x < 55 \\ \frac{x-50}{10}, & 55 \leq x \leq 60 \\ 1 - \frac{x-60}{10}, & 60 \leq x \leq 70 \\ 0, & 70 < x \leq 100. \end{cases} \quad \text{i } \tilde{A} \cap \tilde{B} = \begin{cases} 0, & 40 \leq x < 50 \\ \frac{x-50}{10}, & 50 \leq x < 55 \\ 1 - \frac{x-50}{10}, & 55 \leq x \leq 60 \\ 0, & 60 < x \leq 100. \end{cases}$$

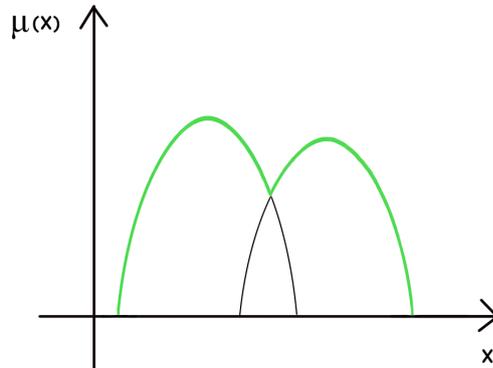
$$\text{Komplement skupa } \tilde{A} \text{ jednak je } \tilde{A}^c = \begin{cases} 0, & 40 \leq x < 50 \\ \frac{x-50}{10}, & 50 \leq x < 60 \\ 1, & 60 \leq x \leq 100. \end{cases}$$

Za date fazi skupove \tilde{A} i \tilde{B} predstavljene na Slici 5.3 funkcije pripadnosti unije i preseka biće prikazane na Slikama 5.4 i 5.5.

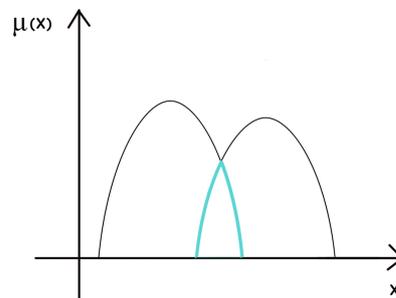


Slika 5.3: Grafički prikaz dva fazi skupa

5.1. FAZI LOGIKA



Slika 5.4: Funkcija pripadnosti unije fazi skupova \tilde{A} i \tilde{B}



Slika 5.5: Funkcija pripadnosti preseka fazi skupova \tilde{A} i \tilde{B}

Definicija 5.9. *Nosač (engl. support) fazi skupa \tilde{A} je skup koji se sastoji od onih elemenata čija je vrednost funkcije pripadnosti veća od nule, odnosno,*

$$\text{supp}(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}. \quad (5.10)$$

GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA

Fazi skup \tilde{A} se, korišćenjem svog nosača, može prikazati u obliku

$$\tilde{A} = \frac{\mu_1}{x_1} + \dots + \frac{\mu_n}{x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{x_i}, \quad (5.11)$$

gde je znakom $+$ označena unija elemenata, a i predstavlja stepen pripadnosti elementa x_i skupu \tilde{A} .

Definicija 5.10. Jezgro (engl. core) fazi skupa \tilde{A} je skup koji se sastoji od onih elemenata čija je vrednost funkcije pripadnosti jednaka 1, odnosno,

$$\text{core}(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}. \quad (5.12)$$

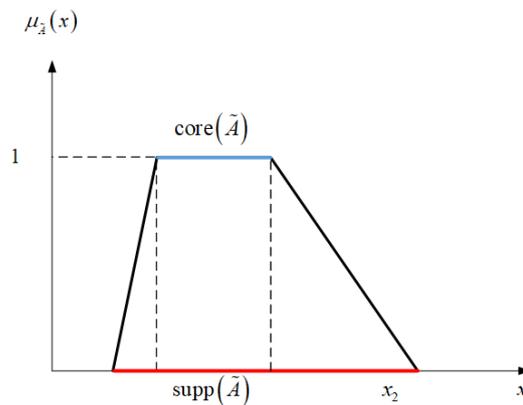
Definicija 5.11. Visina (engl. height) fazi skupa \tilde{A} predstavlja supremum funkcije pripadanja, odnosno

$$\text{hgt}(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x). \quad (5.13)$$

Kada je skup \tilde{A} konačan, onda se visina fazi skupa određuje po formuli

$$\text{hgt}(\tilde{A}) = \max_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x). \quad (5.14)$$

Na Slici 5.6 možemo videti grafički prikaz nosača i jezgra fazi skupa \tilde{A} .



Slika 5.6: Nosač i jezgro fazi skupa \tilde{A}

5.1. FAZI LOGIKA

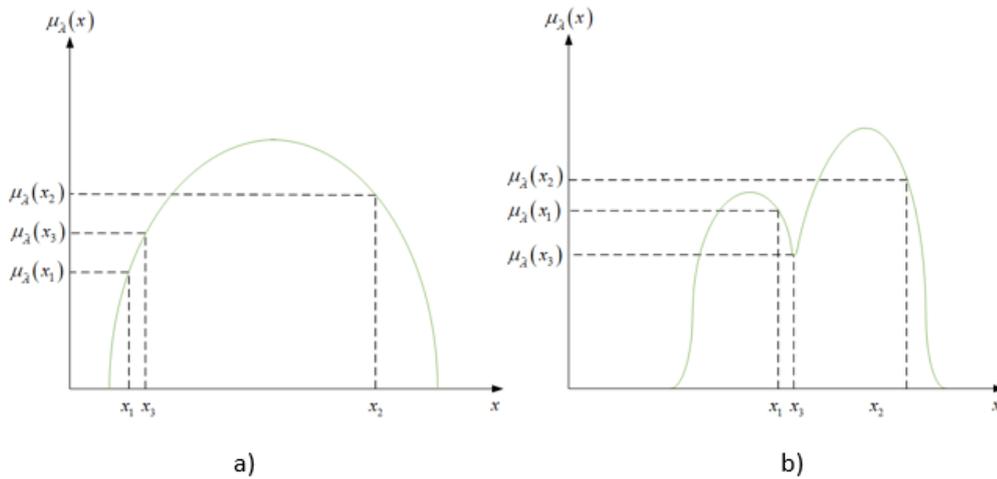
Definicija 5.12. Fazi skup \tilde{A} je normalizovan ako je, za neko $x \in X$, ispunjen uslov

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \text{hgt}(\tilde{A}) = 1. \quad (5.15)$$

Definicija 5.13. Fazi skup \tilde{A} je konveksan ako i samo ako je za $x_1, x_2 \in \tilde{A}$, $\lambda \in [0, 1]$ ispunjen uslov

$$\mu_{\tilde{A}}[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}. \quad (5.16)$$

Neka je, za određenu vrednost $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 = x_3$. Kao što se može videti sa Slike 5.7 uslov $\mu_{\tilde{A}}(x_3) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$ važi za sve konveksne fazi skupove, dok za nekonveksne fazi skupove ovaj uslov nije ispunjen.



Slika 5.7: Konveksan i nekonveksan fazi skup

Definicija 5.14. Za dati fazi skup \tilde{A} njegov α – presek, u oznaci \tilde{A}_α , se definiše kao skup svih elemenata x koji fazi skupu \tilde{A} pripadaju bar sa stepenom α , odnosno

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (5.17)$$

Takođe, definiše se i strogi α – presek

$$A_{\alpha+} = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}, \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (5.18)$$

GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA

Primer 5.3. Neka je dat fazi skup $\tilde{A} = \{(1, 0.5), (2, 0.9), (3, 0.7), (4, 1.0), (5, 0.2), (6, 0.8), (7, 0.7), (8, 0.6), (9, 0.4), (10, 0.5)\}$.

Skupovi $A_{0.6}$ i $A_{0.6+}$ su redom jednaki

$$A_{0.6} = \{(2, 0.9), (3, 0.7), (4, 1.0), (6, 0.8), (7, 0.7), (8, 0.6)\},$$

odnosno

$$A_{0.6+} = \{(2, 0.9), (3, 0.7), (4, 1.0), (6, 0.8), (7, 0.7)\}.$$

Totalno uređenje vrednosti $\alpha \in [0, 1]$ kod α -preseka i strogo α -preseka je (obrnuto) očuvano relacijom \subseteq . Naime, za svaki fazi skup \tilde{A} i vrednosti $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ za koje važi $\alpha_1 < \alpha_2$ imamo da je

$$\tilde{A}_{\alpha_2} \subseteq \tilde{A}_{\alpha_1} \text{ i } \tilde{A}_{\alpha_2^+} \subseteq \tilde{A}_{\alpha_1^+}. \quad (5.19)$$

Ovo se svojstvo može izraziti i jednačinama

$$\tilde{A}_{\alpha_1} \cup \tilde{A}_{\alpha_2} = \tilde{A}_{\alpha_1}, \quad \tilde{A}_{\alpha_1} \cap \tilde{A}_{\alpha_2} = \tilde{A}_{\alpha_2} \quad (5.20)$$

i

$$\tilde{A}_{\alpha_1^+} \cup \tilde{A}_{\alpha_2^+} = \tilde{A}_{\alpha_1^+}, \quad \tilde{A}_{\alpha_1^+} \cap \tilde{A}_{\alpha_2^+} = \tilde{A}_{\alpha_2^+}. \quad (5.21)$$

Teorema 5.1. [48] Svaki fazi skup se može razložiti pomoću familije α -preseka, odnosno

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \tilde{A}_\alpha, \quad (5.22)$$

ili ekvivalentno, korišćenjem funkcije pripadnosti,

$$\tilde{A}(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \tilde{A}_\alpha(x). \quad (5.23)$$

5.1.2 Funkcije pripadnosti, fazi brojevi i njihove osobine

U ovom poglavlju biće navedeni najčešći tipovi funkcije pripadnosti (članstva). Uopšteno govoreći, svaka funkcija

$$\mu : X \rightarrow [0, 1] \quad (5.24)$$

5.1. FAZI LOGIKA

može biti funkcija pripadnosti koja opisuje odgovarajući fazi skup. Oblik funkcije μ treba da bude takav da opisuje uslove na osnovu kojih definišemo fazi skup, kontekst u kome će biti korišćen, njegov dizajn i eventualnu primenu [17, 30].

- *Trougaona funkcija pripadnosti (Λ funkcija):*

Ovo je najjednostavnija moguća funkcija μ određena sa tri parametra a, m i b . Njihovo značenje je jednostavno: m predstavlja modalnu (očekivanu) vrednost dok su a i b redom donja i gornja granica. Najčešći oblik ove funkcije je

$$\mu(x, a, m, b) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a}, & a \leq x < m \\ \frac{m-x}{b-m}, & m \leq x < b \\ 0, & x \geq b. \end{cases} \quad (5.25)$$

Još jedan, kraći oblik ove funkcije pripadnosti je

$$\mu(x, a, m, b) = \max\{\min[(x-a)/(m-a), (b-x)/(b-m)], 0\}. \quad (5.26)$$

- *Trapezoidna funkcija pripadnosti (Π funkcija):*

Ovo je funkcija određena sa četiri parametra a, m, n i b koji određuju četiri linearna dela. Parametri a i b su temena/granice donje, duže osnovice, dok parametri m i n predstavljaju temena gornje, kraće osnovice. Ako je $m = n$, trapez postaje trougao. Njen oblik je:

$$\mu(x, a, m, n, b) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a}, & a \leq x \leq m \\ 1, & m \leq x \leq n \\ \frac{b-x}{b-n}, & n \leq x \leq b \\ 0, & x \geq b. \end{cases} \quad (5.27)$$

Kraći oblik ove funkcije je

$$\mu(x, a, m, n, b) = \max\{\min[(x-a)/(m-a), 1, (b-x)/(b-n)], 0\}. \quad (5.28)$$

GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA

- Γ -funkcija pripadnosti: Ova funkcija se javlja u dva oblika

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ 1 - e^{-k(x-a)^2}, & x > a \end{cases} \quad (5.29)$$

ili

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{k(x-a)^2}{1 + k(x-a)^2}, & x > a. \end{cases} \quad (5.30)$$

- L -funkcija pripadnosti

$$\mu(x, a, b) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ \frac{b-x}{b-a}, & a < x \leq b \\ 0, & x > b. \end{cases} \quad (5.31)$$

- S -funkcija pripadnosti: Ova funkcija ima oblik

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ 2 \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^2, & a \leq x \leq m \\ 1 - 2 \left(\frac{x-b}{b-a} \right)^2, & m \leq x \leq b \\ 1, & x > b. \end{cases} \quad (5.32)$$

U većini slučajeva se uzima da je $a = x_{min}$, $b = x_{max}$, i $m = \frac{a+b}{2}$, gde su $a = x_{min}$ i $b = x_{max}$ minimalna i maksimalna vrednost svih elemenata skupa.

- G ausova funkcija pripadnosti: Ova funkcija ima oblik

$$\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (5.33)$$

gde μ predstavlja aritmetičku sredinu, a σ standardnu devijaciju.

Fazi skupovi definisani na skupu realnih brojeva \mathbb{R} su, zbog česte primene u

5.1. FAZI LOGIKA

raznim oblastima, od posebnog značaja za nauku. Oni se, ukoliko zadovoljavaju neke uslove mogu posmatrati kao fazi brojevi.

Definicija 5.15. [70] Označimo sve fazi skupove definisane na skupu realnih brojeva \mathbb{R} sa $F(\mathbb{R})$. Broj $A \in F(\mathbb{R})$ je fazi broj ako postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ tako da važi $\mu_A(x_0) = 1$, i skup $A_\alpha = [x, \mu_{A_\alpha}(x) \geq \alpha]$ je zatvoreni interval za sve $\alpha \in [0, 1]$.

Funkcija pripadnosti, komponenta trougaonog fazi broja (TFB) \tilde{A} , je funkcija $\mu_{\tilde{A}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, definisana sa

$$\mu_F(x) = \begin{cases} \frac{x-l}{m-l}, & l \leq x \leq m, \\ \frac{u-x}{u-m}, & m \leq x \leq u, \\ 0, & \text{inače,} \end{cases} \quad (5.34)$$

gde važi nejednakost $l \leq m \leq u$. Promenljive l , m , i u predstavljaju redom levu (donju, najmanju), modalnu (srednju, najperspektivniju), i desnu (gornju, najveću) vrednost, a za $l = m = u$, TFB postaje *crisp* broj. U nastavku će se trougaoni fazi brojevi označavati sa $\tilde{A} = (l, m, u)$.

Slede neke algebarske osobine trougaonih fazi brojeva.

Definicija 5.16. [16, 130, 143] Neka su data dva trougaona fazi broja, $\tilde{A}_1 = (l_1, m_1, u_1)$ i $\tilde{A}_2 = (l_2, m_2, u_2)$, i skalar $k > 0$, $k \in \mathbb{R}$. Osnovne aritmetičke operacije (unarne i binarne) definisane su na sledeći način:

Sabiranje:

$$\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2 = (l_1, m_1, u_1) \oplus (l_2, m_2, u_2) = (l_1 + l_2, m_1 + m_2, u_1 + u_2), \quad (5.35)$$

Oduzimanje:

$$\tilde{A}_1 \ominus \tilde{A}_2 = (l_1, m_1, u_1) \ominus (l_2, m_2, u_2) = (l_1 - u_2, m_1 - m_2, u_1 - l_2), \quad (5.36)$$

Množenje:

$$\tilde{A}_1 \otimes \tilde{A}_2 = (l_1, m_1, u_1) \otimes (l_2, m_2, u_2) = (l_1 \cdot l_2, m_1 \cdot m_2, u_1 \cdot u_2), \quad (5.37)$$

Množenje skalarom:

$$k \cdot \tilde{A}_1 = k \cdot (l_1, m_1, u_1) = (k \cdot l_1, k \cdot m_1, k \cdot u_1). \quad (5.38)$$

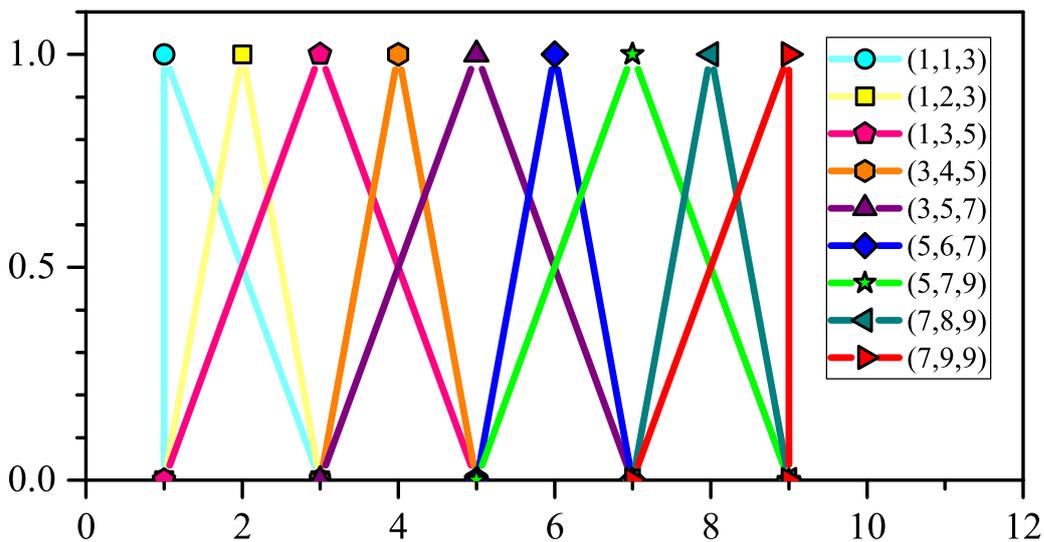
GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA

Recipročna vrednost:

$$\tilde{A}_1^{-1} = (l_1, m_1, u_1)^{-1} = \left(\frac{1}{u_1}, \frac{1}{m_1}, \frac{1}{l_1} \right). \quad (5.39)$$

Za odabir trougaonih fazi brojeva primenjuje se Satijeva skala po koji se važnost jednog kriterijuma u odnosu na drugi oslikava sledećim pravilima: Jednaka važnost = $(1, 1, 1 + \delta)$, Umerena važnost = $(3 - \delta, 3, 3 + \delta)$, Jaka važnost = $(5 - \delta, 5, 5 + \delta)$, Veoma jaka važnost = $(7 - \delta, 7, 7 + \delta)$ i Ekstremna važnost = $(9 - \delta, 9, 9)$. Kako bi se dobili što konzistentniji rezultati poređenja kriterijuma [115], za neparne fazi brojeve ćemo koristiti vrednost $\delta = 2$, a za parne fazi brojeve rastojanje $\delta = 1$, odakle dobijamo sledeće trougaone fazi brojeve [70, 71]: $\tilde{1} = (1, 1, 3)$ = jednaka važnost: oba kriterijuma su podjednako važna, $\tilde{3} = (1, 3, 5)$ = umerena važnost: jedan kriterijum je nešto važniji od drugog, $\tilde{5} = (3, 5, 7)$ = jaka važnost: jedan kriterijum je dosta važniji od drugog, $\tilde{7} = (5, 7, 9)$ = veoma jaka važnost: jedan kriterijum je mnogo važniji od drugog, $\tilde{9} = (7, 9, 9)$ = ekstremna važnost: jedan kriterijum je ekstremno važniji od drugog; međuvrednosti koje se koriste kada je potreban dogovor ili kompromis donosioca odluka su $\tilde{2} = (1, 2, 3)$, $\tilde{4} = (3, 4, 5)$, $\tilde{6} = (5, 6, 7)$ i $\tilde{8} = (7, 8, 9)$.

Prethodni trougaoni fazi brojevi predstavljeni su na Slici 5.8.

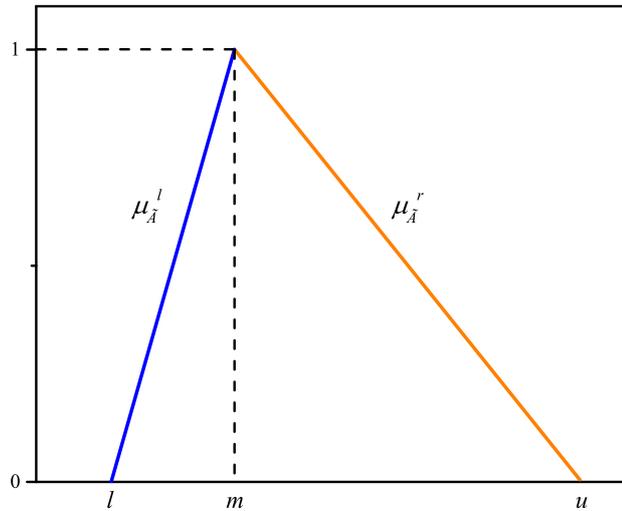


Slika 5.8: Trougaoni fazi brojevi

5.1. FAZI LOGIKA

Funkcija pripadnosti trougaonog fazi broja se može posmatrati iz dva dela, levo i desno od modalne vrednosti m , kao što se može videti na Slici 5.9 čime se dobijaju dve funkcije,

$$\mu_{\tilde{A}}^l = \frac{x-l}{m-l} \text{ i } \mu_{\tilde{A}}^r = \frac{u-x}{u-m}. \quad (5.40)$$



Slika 5.9: Predstavljanje delova trougaone funkcije pripadnosti

Inverzne funkcije funkcija $\mu_{\tilde{A}}^l$ i $\mu_{\tilde{A}}^r$ definisane su na sledeći način:

$$(\mu_{\tilde{A}}^l)^{-1} = l + (m-l)y, \quad (\mu_{\tilde{A}}^r)^{-1} = u + (m-u)y, \quad y \in [0, 1]. \quad (5.41)$$

Leva i desna integralna vrednost trougaonog fazi broja \tilde{A} , prema [53], definisane su na sledeći način:

$$I_L(\tilde{A}) = \int_0^1 (\mu_{\tilde{A}}^l)^{-1} dy = \int_0^1 (l + (m-l)y) dy = \frac{1}{2}(m+l), \quad (5.42)$$

i

$$I_R(\tilde{A}) = \int_0^1 (\mu_{\tilde{A}}^r)^{-1} dy = \int_0^1 (u + (m-u)y) dy = \frac{1}{2}(m+u). \quad (5.43)$$

Ukupna (totalna) integralna vrednost [53], kao kombinacija leve i desne inte-

GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA

gralne vrednosti, izračunava se na sledeći način:

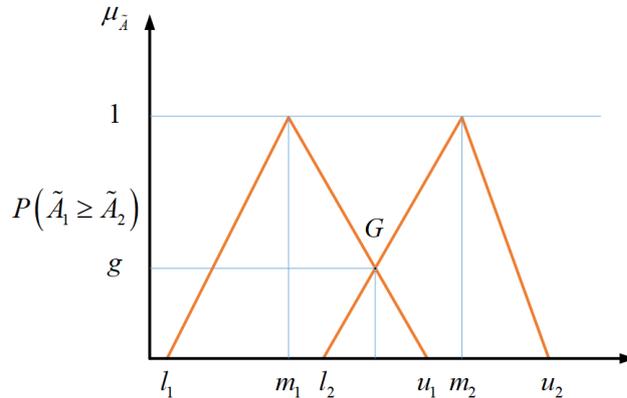
$$\begin{aligned} I_U^\lambda(\tilde{A}) &= \lambda I_R(\tilde{A}) + (1 - \lambda)I_L(\tilde{A}) = \frac{1}{2}\lambda(m + u) + \frac{1}{2}(1 - \lambda)(m + l) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda u + m + (1 - \lambda)l), \lambda \in [0, 1], \end{aligned} \quad (5.44)$$

gde λ predstavlja indeks optimizma, odnosno stav preuzimanja rizika donosioca odluke. Pesimističan stav se karakteriše uzimanjem vrednosti $\lambda = 0$, odakle se dobija da je $I_U^0(\tilde{A}) = I_L(\tilde{A})$, dok se uzimanjem vrednosti $\lambda = 1$ oslikava optimističan stav donosioca odluke i tada je $I_U^1(\tilde{A}) = I_R(\tilde{A})$. Za $\lambda = 0.5$ imamo da je $I_U^{0.5}(\tilde{A}) = \frac{1}{2}(I_L(\tilde{A}) + I_R(\tilde{A}))$, što predstavlja umeren indeks optimizma. Ukupna integralna vrednost može poslužiti i za upoređivanje trougaonih fazi brojeva. Naime, ako je $I_U^\lambda(\tilde{A}_1) < I_U^\lambda(\tilde{A}_2)$, onda je $\tilde{A}_1 \prec \tilde{A}_2$, dok za $I_U^\lambda(\tilde{A}_1) = I_U^\lambda(\tilde{A}_2)$ i $I_U^\lambda(\tilde{A}_1) > I_U^\lambda(\tilde{A}_2)$ imamo da je $\tilde{A}_1 \approx \tilde{A}_2$, odnosno $\tilde{A}_1 \succ \tilde{A}_2$.

Koristeći formulu

$$P(\tilde{A}_1 \geq \tilde{A}_2) = \sup_{x \geq y} [\min(\mu_{\tilde{A}_1}(x), \mu_{\tilde{A}_2}(y))] \quad (5.45)$$

može se izračunati stepen verovatnoće da je $\tilde{A}_1 = (l_1, m_1, u_1) \geq \tilde{A}_2 = (l_2, m_2, u_2)$. Tražena verovatnoća, kao što se može videti na Slici 5.10 određena je drugom koordinatom g presečne tačke G dveju datih funkcija pripadnosti.



Slika 5.10: Presek funkcija pripadnosti $\mu_{\tilde{A}_1}$ i $\mu_{\tilde{A}_2}$ trougaonih fazi brojeva \tilde{A}_1 i \tilde{A}_2

5.1. FAZI LOGIKA

Računanjem vrednosti g dobijamo

$$P(\tilde{A}_1 \geq \tilde{A}_2) = hgt(\tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2) = \begin{cases} 1, & m_1 \geq m_2 \\ 0, & l_2 \geq u_1, \\ \frac{l_2 - u_1}{(m_1 - u_1) - (m_2 - l_2)}, & \text{inače.} \end{cases} \quad (5.46)$$

Stepen verovatnoće da je konveksan fazi broj \tilde{A} veći od k konveksnih fazi brojeva $\tilde{A}_i, i \in \{1, 2, \dots, k\}$ određujemo po formuli

$$P(\tilde{A} \geq \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_k) = \min P(\tilde{A} \geq \tilde{A}_i), i \in \{1, 2, \dots, k\}. \quad (5.47)$$

Ukoliko uvedemo oznaku $w_i = P(\tilde{A}_i \geq \tilde{A}_k), k \in \{1, 2, \dots, n\}, k \neq i$, onda je težinski faktor w jednak

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T. \quad (5.48)$$

5.1.3 Neka uopštenja fazi skupova

Pri donošenju odluka, kako na ličnom tako i na profesionalnom nivou, ljudi nisu u mogućnosti da odaberu najbolju od mogućih opcija zbog nesigurnosti ili netačnih informacija. Takođe, zbog nepotpunih podataka o posmatranoj pojavi, često je nemoguće pravilno odrediti značaj jednog elementa u odnosu na drugi. Zadeh je [148], zasnivanjem teorije fazi skupova (fazi skupovi tipa 1), definisao koristan alat za reprezentaciju nesigurnih i nepreciznih informacija primenom matematičkog alata. Na osnovu funkcije pripadnosti, koja transformiše opšti skup u segment $[0, 1]$, $\mu : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, element opšteg skupa pripada određenom skupu uz izvesnu verovatnoću. Fazi skupovi tipa 2 [150] su uvedeni da olakšaju određivanje funkcije pripadnosti jer je stepen njihove funkcije pripadnosti fazi skup tipa 1. Kombinacijom funkcija pripadanja i nepripadanja (μ i ν), Atanasov [5] je uveo Intuitionističke fazi Skupove (IFS) i Intuitionističke Fazi Skupove drugog tipa [4]. Da bi proširio domen odlučivanja, Jager [146] je koristio dodatni uslov $\mu^2 + \nu^2 \in$

[0, 1]. Pitagorejski brojevi su definisani na taj način. Uvođenjem Neutrosofičnih fazi skupova, Smarandahee [111–113] je smanjio nivo neodlučnosti/kolebljivosti kod nekonzistentnih informacija. Detaljniji opis generalizacije Intuicionističkih fazi Skupova zasnovanih na Bulovoj algebri i MARCOS tehnici mogu se pro-naći u [25, 72]. Neke od najnovijih generalizacija, poređenja različitih pristupa rangiranju i primenama Neutrosophičkih fazi Skupova u unapređenju e-biznisa su proučavani u [45, 129]. Skore primene teorije fazi skupova u mašinskom učenju u vezi sa procenom rizika sistema za iskopavanje uz primenu Pitagorejskog i sferičnog fazi TOPSIS-a i veštačke inteligencije, kao i operacijama na interpolacionim Bulovim algebrama sa očuvanjem ideje o intuicionizmu i unapredjivanjem Ajnštajnovih operatora agregacije prikazani su u radovima [58, 73, 105] kao i u mnogim drugim istraživanjima.

Još od definisanja u radovima Mahmuda i saradnika [60] kao i Gündogdu i Kahramana [55], kao spoj Neutrosophičkih i Pitagorejskih fazi skupova, Sferični fazi skupovi, koji su deo Sferičnog AHP, VIKOR, TOPSIS, MULTIMOORA ili WASPAS metoda, koriste se u mnogim oblastima. Neke od tih oblasti su izbor lokacije skladišta [54], primena obnovljivih izvora energije [56], izbor proizvodnih sistema [61], procena lanca snabdevanja i izbor dobavljača [135], izbor lokacije distributivnog centra [47], medicinska dijagnostika [60], vladine strategije protiv pandemije Sars-Cov 2 [93], i mnoge druge.

5.1.4 Definicija i osnovne osobine sferičnih fazi skupova

Gong i saradnici [56] su izmerili dužine lukova na sferi, ne koristeći rastojanje u Euklidovom smislu. U [55], Gündogdu i Kahraman su se bavili čvrstom sfernom zapreminom, ne samom sferom, i zaključili da za svake dve tačke na sferi postoji sfera kojoj one pripadaju. U tom slučaju, korišćenjem velikog kruga sfere, Euklidsku distancu je moguće poistovetiti sa rastojanjem među sferičnim fazi skupovima.

Sferični fazi skup \tilde{S} nepraznog univerzalnog skupa \mathcal{X} se definiše na sledeći način:

$$\tilde{S} = \{(\mu_{\tilde{S}}(x), \nu_{\tilde{S}}(x), \pi_{\tilde{S}}(x)) | x \in \mathcal{X}\}, \quad (5.49)$$

5.1. FAZI LOGIKA

gde su $\mu_{\tilde{S}}(x) : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$, $\nu_{\tilde{S}}(x) : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$ i $\pi_{\tilde{S}}(x) : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$ funkcije pripadanja, nepripadanja i neodlučnosti, pri čemu je zadovoljen uslov

$$0 \leq \mu_{\tilde{S}}^2 + \nu_{\tilde{S}}^2 + \pi_{\tilde{S}}^2 \leq 1. \quad (5.50)$$

Za dva sferična fazi skupa $\tilde{S}_1 = (\mu_{\tilde{S}_1}, \nu_{\tilde{S}_1}, \pi_{\tilde{S}_1})$ i $\tilde{S}_2 = (\mu_{\tilde{S}_2}, \nu_{\tilde{S}_2}, \pi_{\tilde{S}_2})$ definisana na nepraznom univerzalnom skupu \mathcal{X} , osnovne operacije (presek, unija, sabiranje, množenje, množenje skalarom k , stepenovanje) se definišu sledećim jednačinama:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 \cap \tilde{S}_2 = & \left\{ \min \{ \mu_{\tilde{S}_1}, \mu_{\tilde{S}_2} \}, \max \{ \nu_{\tilde{S}_1}, \nu_{\tilde{S}_2} \}, \right. \\ & \left. \max \left\{ \sqrt{1 - (\min \{ \mu_{\tilde{S}_1}, \mu_{\tilde{S}_2} \})^2 - (\max \{ \nu_{\tilde{S}_1}, \nu_{\tilde{S}_2} \})^2}, \min \{ \pi_{\tilde{S}_1}, \pi_{\tilde{S}_2} \} \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2 = & \left\{ \max \{ \mu_{\tilde{S}_1}, \mu_{\tilde{S}_2} \}, \min \{ \nu_{\tilde{S}_1}, \nu_{\tilde{S}_2} \}, \right. \\ & \left. \min \left\{ \sqrt{1 - (\max \{ \mu_{\tilde{S}_1}, \mu_{\tilde{S}_2} \})^2 - (\min \{ \nu_{\tilde{S}_1}, \nu_{\tilde{S}_2} \})^2}, \max \{ \pi_{\tilde{S}_1}, \pi_{\tilde{S}_2} \} \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 \oplus \tilde{S}_2 = & \left\{ \sqrt{\mu_{\tilde{S}_1}^2 + \mu_{\tilde{S}_2}^2 - \mu_{\tilde{S}_1}^2 \mu_{\tilde{S}_2}^2}, \nu_{\tilde{S}_1} \nu_{\tilde{S}_2}, \right. \\ & \left. \sqrt{\pi_{\tilde{S}_1}^2 (1 - \mu_{\tilde{S}_2}^2) + \pi_{\tilde{S}_2}^2 (1 - \mu_{\tilde{S}_1}^2) - \pi_{\tilde{S}_1}^2 \pi_{\tilde{S}_2}^2} \right\}, \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 \odot \tilde{S}_2 = & \left\{ \mu_{\tilde{S}_1} \mu_{\tilde{S}_2}, \sqrt{\nu_{\tilde{S}_1}^2 + \nu_{\tilde{S}_2}^2 - \nu_{\tilde{S}_1}^2 \nu_{\tilde{S}_2}^2}, \right. \\ & \left. \sqrt{\pi_{\tilde{S}_1}^2 (1 - \nu_{\tilde{S}_2}^2) + \pi_{\tilde{S}_2}^2 (1 - \nu_{\tilde{S}_1}^2) - \pi_{\tilde{S}_1}^2 \pi_{\tilde{S}_2}^2} \right\}, \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$k \times \tilde{S} = \left\{ \sqrt{1 - (1 - \mu_{\tilde{S}}^2)^k}, \nu_{\tilde{S}}^k, \sqrt{(1 - \mu_{\tilde{S}}^2)^k - (1 - \mu_{\tilde{S}}^2 - \pi_{\tilde{S}}^2)^k} \right\}, \quad (5.55)$$

$$\tilde{S}^k = \left\{ \mu_{\tilde{S}}^k, \sqrt{1 - (1 - \nu_{\tilde{S}}^2)^k}, \sqrt{(1 - \nu_{\tilde{S}}^2)^k - (1 - \nu_{\tilde{S}}^2 - \pi_{\tilde{S}}^2)^k} \right\}. \quad (5.56)$$

Navedimo još neke osobine sferičnih fazi skupova.

Za sferične fazi skupove $\tilde{S}_1 = (\mu_{\tilde{S}_1}, \nu_{\tilde{S}_1}, \pi_{\tilde{S}_1})$ i $\tilde{S}_2 = (\mu_{\tilde{S}_2}, \nu_{\tilde{S}_2}, \pi_{\tilde{S}_2})$, i skalare k , k_1 i $k_2 \geq 0$, komutativnost, distributivnost i zakoni stepenovanja operacija \oplus , \otimes su dokazani u [55].

Neka su \tilde{S}_1 i \tilde{S}_2 sferični fazi skupovi. Zarad poređenja tih skupova, funkcija

GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA

ocenjivanja i funkcija tačnosti su definisane na sledeći način:

$$s(\tilde{S}_1) = \frac{\mu_{\tilde{S}_1} + 2(1 - \nu_{\tilde{S}_1}) - \pi_{\tilde{S}_1}}{3}, \quad (5.57)$$

$$a(\tilde{S}_1) = \mu_{\tilde{S}_1}^2 + \nu_{\tilde{S}_1}^2 + \pi_{\tilde{S}_1}^2. \quad (5.58)$$

Indeksi Rezultata (SI) sferičnih fazi skupova $\tilde{S} = (\mu_{\tilde{S}}, \nu_{\tilde{S}}, \pi_{\tilde{S}})$ su

$$SI = \begin{cases} 10\sqrt{|\mu_{\tilde{S}}^2 - 2\pi_{\tilde{S}}(\mu_{\tilde{S}} - \nu_{\tilde{S}}) - \nu_{\tilde{S}}^2|}, & \text{za E, AS, ES, VS, FS,} \\ 1, & \text{za AW, EW, VW, FW,} \\ 10\sqrt{|\mu_{\tilde{S}}^2 - 2\pi_{\tilde{S}}(\mu_{\tilde{S}} - \nu_{\tilde{S}}) - \nu_{\tilde{S}}^2|}, & \end{cases} \quad (5.59)$$

gde su vrednosti E, AS, ES, VS, FS, AW, EW, VW, FW, objašnjene u Tabeli 5.1 [40, 56, 93].

Tabela 5.1: Vrednosni indeksi, lingvističke mere kriterijuma i TFB

SI	LM	Značenje LM	SFNs
9	AS	Apsolutno jaka važnost	(0.9, 0.1, 0.0)
7	ES	Ekstremno jaka važnost	(0.8, 0.2, 0.1)
5	VS	Veoma jaka važnost	(0.7, 0.3, 0.2)
3	FS	Umereno jaka važnost	(0.6, 0.4, 0.3)
1	E	Jednaka važnost	(0.5, 0.4, 0.4)
1/3	FW	Umereno slaba važnost	(0.4, 0.6, 0.3)
1/5	VW	Veoma slaba važnost	(0.3, 0.7, 0.2)
1/7	EW	Ekstremno slaba važnost	(0.2, 0.8, 0.1)
1/9	AW	Apsolutno slaba važnost	(0.1, 0.9, 0.0)

Sferična fazi ponderisana aritmetička sredina (*SFWAM*) na osnovu $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$; $k_i \in [0, 1]$; $\sum_{i=1}^n k_i = 1$, vrednost *SFWAM* je

$$\begin{aligned} SFWAM_w(\tilde{A}_{S1}, \tilde{A}_{S2}, \dots, \tilde{A}_{Sn}) &= k_1\tilde{A}_{S1} + k_2\tilde{A}_{S2} + \dots + k_n\tilde{A}_{Sn} \\ &= \left\{ \sqrt{1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mu_{\tilde{A}_S}^2)^{k_i}}, \prod_{i=1}^n \nu_{\tilde{A}_S}^{k_i}, \sqrt{\prod_{i=1}^n (1 - \mu_{\tilde{A}_S}^2)^{k_i} - \prod_{i=1}^n (1 - \mu_{\tilde{A}_S}^2 - \pi_{\tilde{A}_S}^2)^{k_i}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Sferična fazi ponderisana geometrijska sredina (*SFWGM*) na osnovu $k =$

5.2. POVRŠINSKI FAZI SKUPOVI

$(k_1, k_2, \dots, k_n); k_i \in [0, 1]; \sum_{i=1}^n k_i = 1$, vrednost *SFWGM* je

$$\begin{aligned} SFWGM_w(\tilde{A}_{S1}, \tilde{A}_{S2}, \dots, \tilde{A}_{Sn}) &= \tilde{A}_{S1}^{k_1} + \tilde{A}_{S2}^{k_2} + \dots + \tilde{A}_{Sn}^{k_n} \\ &= \left\{ \prod_{i=1}^n \mu_{A_s}^{k_i}, \sqrt{1 - \prod_{i=1}^n (1 - \nu_{\tilde{A}_S}^2)^{k_i}}, \sqrt{\prod_{i=1}^n (1 - \nu_{\tilde{A}_S}^2)^{k_i} - \prod_{i=1}^n (1 - \nu_{\tilde{A}_S}^2 - \pi_{\tilde{A}_S}^2)^{k_i}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

5.2 Površinski fazi skupovi

Rotiranjem krive $\ell : x = \varphi(u) > 0, y = 0, z = \psi(u)$ oko *Oz*-ose, jednačina rezultujuće površi je [87]

$$r = r(u, v) = (\varphi(u) \cos v, \varphi(u) \sin v, \psi(u)), \quad (5.62)$$

$u \in [a, b], v \in [0, 2\pi)$.

Zapremina te površi je

$$V = \pi \int_{u_1}^{u_2} \varphi^2(u) \frac{\psi(u)}{du} du. \quad (5.63)$$

Parcijalni izvodi površi r po u i v su $r_u = \partial r / \partial u$ i $r_v = \partial r / \partial v$. Koeficijenti prve kvadratne forme površi r su

$$g_{11} = E = r_u \cdot r_u, \quad g_{12} = g_{21} = F = r_u \cdot r_v, \quad g_{22} = G = r_v \cdot r_v. \quad (5.64)$$

Ukoliko su $A = r(u_1, v_1)$ i $B = r(u_2, v_2)$ dve različite tačke na površi r , najkraća kriva na površi r koja povezuje te dve tačke je geodezijska linija odgovarajućeg Euklidskog prostora [65]. Sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina koji određuje geodezijsku liniju $\gamma = \gamma(t) = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ na površi r je [65]

$$\frac{d^2 \gamma^i}{dt^2} + \frac{1}{2} g^{ip} (g_{jp,k} - g_{jk,p} + g_{pk,j}) \frac{d\gamma^j}{dt} \frac{d\gamma^k}{dt} = \rho \gamma^i, \quad (5.65)$$

pri čemu je $x = x^1, y = x^2, z = x^3$, dok je parcijalni izvod $\partial g_{ij} / \partial x^k$ označen sa $g_{ij,k}$, $i, j, k = 1, 2, 3$. U prethodnoj jednačini, koristili smo Ajnštajnovu Konvenciju o Sabiranju, $g^{ip} g_{jk,p} = \sum_{a=1}^3 g^{ia} g_{jk,a}$, i analogno za $g^{ip} g_{jp,k}$ i $g^{ip} g_{pk,j}$. U tom

GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA

zakonu, korišćena je struktura g^{ij} određena jednakošću $[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1}$.

Geodezijske linije sfere su veliki krugovi sfere. To je glavna motivacija za sledeća razmatranja.

5.2.1 Uvodna razmatranja

Razmotrimo ravnu krivu $\ell = \ell(u)$ i površ

$$r = r(u, v) = (\ell(u) \cos v, \ell(u) \sin v, h(v)), \quad (5.66)$$

gde je $\ell : \mathcal{U} \rightarrow [0, 1]$, $h : \mathcal{V} \rightarrow [0, 1]$, $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}$.

Parcijalni izvodi površi r , $r_u = \partial r / \partial u$ i $r_v = \partial r / \partial v$, su

$$\begin{cases} r_u = (\ell_u(u) \cos v, \ell_u(u) \sin v, 0), \\ r_v = (-\ell(u) \sin v, \ell(u) \cos v, h_v(v)), \end{cases} \quad (5.67)$$

gde je $h_v(v) = d\{h(v)\}/dv$.

Vektor glavne normale N površi r je

$$N = r_u \times r_v = (\ell_u(u)h_v(v) \sin v, -\ell_u(u)h_v(v) \cos v, \ell(u)\ell_u(u)). \quad (5.68)$$

Vektor glavne normale N u tački $A = r(u_0, v_0)$ je

$$N_0 = (\ell_u(u_0)h_v(v_0) \sin v_0, -\ell_u(u_0)h_v(v_0) \cos v_0, \ell(u_0)\ell_u(u_0)). \quad (5.69)$$

Glavna normala površi r u tački $r(u_0, v_0)$ je

$$(n) : \frac{x - \ell(u_0) \cos v_0}{\ell_u(u_0)h_v(v_0) \sin v_0} = \frac{y - \ell(u_0) \sin v_0}{-\ell_u(u_0)h_v(v_0) \cos v_0} = \frac{z - h(v_0)}{\ell(u_0)\ell_u(u_0)} = t. \quad (5.70)$$

Parametarski, normala (n) je izražena na sledeći način

$$(n) : \begin{cases} x = t\ell_u(u_0)h_v(v_0) \sin v_0 + \ell(u_0) \cos v_0 \\ y = -t\ell_u(u_0)h_v(v_0) \cos v_0 + \ell(u_0) \sin v_0 \\ z = t\ell(u_0)\ell_u(u_0) + h(v_0). \end{cases} \quad (5.71)$$

5.2. POVRŠINSKI FAZI SKUPOVI

Razmotrimo i tačku $B = r(u_1, v_1)$. Jednačina ravni koja sadrži normalu n i tačku B je određena vektorom normale te ravni, $d = (d_1, d_2, d_3) = N_0 \times \vec{AB}$, gde je

$$d_1 = \ell(u_0) \left[(h(v_0) - h(v_1)) h_v(v_0) \cos v_0 + \ell(u_0) (\ell(u_1) \sin v_1 - \ell(u_0) \sin v_0) \right], \quad (5.72)$$

$$d_2 = \ell_u(u_0) \left[\ell^2(u_0) \cos v_0 - \ell(u_0) \ell(u_1) \cos v_1 + (h(v_1) - h(v_0)) h_v(v_0) \sin v_0 \right], \quad (5.73)$$

$$d_3 = \ell_u(u_0) h_v(v_0) \left[\ell(u_1) \cos(v_0 + v_1) - \ell(u_0) \cos 2v_0 \right]. \quad (5.74)$$

Stoga, jednačina ravni (α) koja sadrži pravu određenu vektorom n i tačku B je

$$(\alpha) : d_1 \cdot (x - \ell(u_0) \cos v_0) + d_2 \cdot (y - \ell(u_0) \sin v_0) + d_3 \cdot (z - h(v_0)) = 0. \quad (5.75)$$

Nakon upoređivanja jednačina (5.75) i (5.66), dolazimo do zaključka da je jednačina preseka površi r i ravni α kriva $\gamma = \gamma(v)$ zadata jednačinom

$$(\gamma) : (\nu(v) \cos v, \nu(v) \sin v, h(v)), \quad (5.76)$$

gde je

$$\nu(v) = \frac{\ell(u_0) (d_1 \cos v_0 + d_2 \sin v_0) - d_3 (h(v) - h(v_0))}{d_1 \cos v + d_2 \sin v}. \quad (5.77)$$

Rastojanje između tačaka $\tilde{A} = \gamma(v_1)$ i $\tilde{B} = \gamma(v_2)$ je

$$dis(\tilde{A}, \tilde{B}) = \int_{v_1}^{v_2} \sqrt{1 + \nu^2(v) + \nu_v^2(v) + h_v^2(v)} dv. \quad (5.78)$$

5.2.2 Definicija i osobine površinskih fazi skupova

Jedinična sfera je površ sa najvećim mogućim brojem simetrija. Zbog toga, ograničenje sferom daje najveći broj mogućnosti zadavanja treće koordinate sferičnog skupa. Da bi se dodatno ograničile mogućnosti zadavanja vrednosti treće koordinate pod dodatnim uslovima, neophodno je koristiti površi koje se nalaze unutar sfere. Takvim izborom, moguće je zadržati prve dve koordinate sferičnih

GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA

fazi brojeva i dodatno ograničiti vrednosti treće koordinate. Na taj način, funkciju neodlučnosti je moguće odabrati na najpodesniji način koji najbolje opisuje analiziranu situaciju.

Donošenje odluka je složen zadatak koji uključuje mnogo podataka, često tačnih (objektivnih) i nesigurnih (subjektivnih), što zahteva od donosioca odluke da svoje razmatranje zasnjuje na nepreciznim, delimično poznatim, i nesigurnim informacijama. Pri upoređivanju kriterijuma, podkriterijuma, ili alternativa, donosioci odluka zasnivaju svoje stavove na brojnim primenama fazi brojeva i njihovih proširenja da bi opisali uticaj jednog kriterijuma nad drugim na precizan način.

U nastavku, biće prikazana proširena tabela nivoa važnosti lingvističkih termina. Nakon toga, generalisaćemo koncept Sferičnih Fazi Skupova [47,55,56,60]

Tabela 5.2: Indeks rezultata, lingvističke mere kriterijuma, i površinski fazi skupovi

Nivoi važnosti lingvističkih termina	(μ, ν, π)	SI
Nivo 1	$(\mu_1, \nu_1, \pi_1(t))$	$2k + 1$
\vdots	\vdots	\vdots
Nivo k	$(\mu_k, \nu_k, \pi_k(t))$	3
Nivo $k + 1$	$(0.5, 0.4, 0.4)$	1
Nivo $k + 2$	$(\nu_k, \mu_k, \pi_k(t))$	3^{-1}
\vdots	\vdots	\vdots
Nivo $2k + 1$	$(\nu_1, \mu_1, \pi_1(t))$	$(2k + 1)^{-1}$

Veličine π_S , $S = 1, \dots, k + 1$ su funkcije $\pi_S : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ čije su vrednosti treće koordinate tačaka $(\mu_S, \nu_S, \pi_S(t))$ unutar rotacione površi takve da su $(\mu_S, \nu_S, \pi_S(0))$, $(\mu_S, \nu_S, \pi_S(1))$ tačke na površi.

Uređene trojke $(\mu, \nu, \pi(t))$ su *Površinski Fazi Skupovi*.

Osnovne operacije definisane na Površinskim Fazi Skupovima $\tilde{A}_S = (\mu_{\tilde{A}_S}, \nu_{\tilde{A}_S}, \pi_{\tilde{A}_S}^*(t))$ i $\tilde{B}_S = (\mu_{\tilde{B}_S}, \nu_{\tilde{B}_S}, \pi_{\tilde{B}_S}^*(t))$ na nivou S , $S = 1, \dots, 2k + 1$, gde je $(k + 1 + r)^* = r$ i $(k + 1 - r)^* = k + 1 - r$, $r = 1, \dots, k$, definišu se na sledeći način:

5.2. POVRŠINSKI FAZI SKUPOVI

- Unija

$$\begin{aligned} \tilde{A}_S \cup \tilde{B}_S = & \left\{ \max \{ \mu_{\tilde{A}_S}, \mu_{\tilde{B}_S} \}, \min \{ \nu_{\tilde{A}_S}, \nu_{\tilde{B}_S} \} \right. \\ & \left. \min \left\{ \left(1 - \sqrt{\min^2 \{ \mu_{\tilde{A}_S}, \mu_{\tilde{B}_S} \} + \max^2 \{ \nu_{\tilde{A}_S}, \nu_{\tilde{B}_S} \}} \right), \max \{ \pi_{\tilde{A}_S}^*(t), \pi_{\tilde{B}_S}^*(t) \} \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

- Presek

$$\begin{aligned} \tilde{A}_S \cap \tilde{B}_S = & \left\{ \min \{ \mu_{\tilde{A}_S}, \mu_{\tilde{B}_S} \}, \max \{ \nu_{\tilde{A}_S}, \nu_{\tilde{B}_S} \} \right. \\ & \left. \min \left\{ \left(1 - \sqrt{\max^2 \{ \mu_{\tilde{A}_S}, \mu_{\tilde{B}_S} \} + \min^2 \{ \nu_{\tilde{A}_S}, \nu_{\tilde{B}_S} \}} \right), \min \{ \pi_{\tilde{A}_S}^*(t), \pi_{\tilde{B}_S}^*(t) \} \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (5.80)$$

- Sumiranje

$$\begin{aligned} \tilde{A}_S \oplus \tilde{B}_S = & \left\{ \sqrt{\mu_{\tilde{A}_S}^2 + \mu_{\tilde{B}_S}^2 - \mu_{\tilde{A}_S}^2 \mu_{\tilde{B}_S}^2}, \nu_{\tilde{A}_S} \nu_{\tilde{B}_S}, \right. \\ & \left. \sqrt{(1 - \mu_{\tilde{B}_S}^2) \pi_{\tilde{A}_S}^2(t) + (1 - \mu_{\tilde{A}_S}^2) \pi_{\tilde{B}_S}^2(t) - \pi_{\tilde{A}_S}^2(t) \pi_{\tilde{B}_S}^2(t)} \right\}. \end{aligned} \quad (5.81)$$

- Množenje

$$\begin{aligned} \tilde{A}_S \otimes \tilde{B}_S = & \left\{ \mu_{\tilde{A}_S} \mu_{\tilde{B}_S}, \sqrt{\nu_{\tilde{A}_S}^2 + \nu_{\tilde{B}_S}^2 - \nu_{\tilde{A}_S}^2 \nu_{\tilde{B}_S}^2}, \right. \\ & \left. \sqrt{(1 - \nu_{\tilde{B}_S}^2) \pi_{\tilde{A}_S}^2(t) + (1 - \nu_{\tilde{A}_S}^2) \pi_{\tilde{B}_S}^2(t) - \pi_{\tilde{A}_S}^2(t) \pi_{\tilde{B}_S}^2(t)} \right\}. \end{aligned} \quad (5.82)$$

- Množenje skalarom $\lambda > 0$:

$$\lambda \cdot A_S = \left\{ \sqrt{1 - (1 - \mu_{\tilde{A}_S}^2)^\lambda}, \nu_{\tilde{A}_S}^\lambda, \sqrt{(1 - \mu_{\tilde{A}_S}^2)^\lambda - (1 - \mu_{\tilde{A}_S}^2 - \pi_{\tilde{A}_S}^2(t))^\lambda} \right\}. \quad (5.83)$$

GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA

- **Stepenovanje na $\lambda > 0$:**

$$A_S^\lambda = \left\{ \mu_{\tilde{A}_S}^\lambda, \sqrt{1 - (1 - \nu_{\tilde{A}_S}^2)^\lambda}, \sqrt{(1 - \nu_{\tilde{A}_S}^2)^\lambda - (1 - \nu_{\tilde{A}_S}^2 - \pi_{\tilde{A}_S}^2(t))^\lambda} \right\}. \quad (5.84)$$

Kao u [55], važe naredne jednačine

$$\tilde{A}_S \oplus \tilde{B}_S = \tilde{B}_S \oplus \tilde{A}_S, \quad (5.85)$$

$$\tilde{A}_S \otimes \tilde{B}_S = \tilde{B}_S \otimes \tilde{A}_S, \quad (5.86)$$

$$\lambda(\tilde{A}_S \oplus \tilde{B}_S) = \lambda\tilde{A}_S \oplus \lambda\tilde{B}_S, \quad (5.87)$$

$$\lambda_1\tilde{A}_S \oplus \lambda_2\tilde{A}_S = (\lambda_1 + \lambda_2)\tilde{A}_S, \quad (5.88)$$

$$(\tilde{A}_S \otimes \tilde{B}_S)^\lambda = \tilde{A}_S^\lambda \otimes \tilde{B}_S^\lambda, \quad (5.89)$$

$$\tilde{A}_S^{\lambda_1} \otimes \tilde{A}_S^{\lambda_2} = \tilde{A}_S^{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad (5.90)$$

za $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Teorema 5.2. Za Površinske Fazi Skupove $A_1 = (\mu_1, \nu_1, \pi_1(t))$, $A_2 = (\mu_2, \nu_2, \pi_2(t))$, $A_3 = (\mu_3, \nu_3, \pi_3(t))$, operacije \oplus i \otimes su asocijativne.

Za Površinske Fazi Skupove $(\mu, \nu, \pi(t))$, važe naredne jednačine

$$(\mu, \nu, \pi(t)) \oplus (0, 1, 0) = (0, 1, 0) \oplus (\mu, \nu, \pi(t)) = (\mu, \nu, \pi(t)), \quad (5.91)$$

$$(\mu, \nu, \pi(t)) \otimes (1, 0, 0) = (1, 0, 0) \otimes (\mu, \nu, \pi(t)) = (\mu, \nu, \pi(t)), \quad (5.92)$$

tj. Površinski Fazi Skupovi $e_0 = (0, 1, 0)$ i $e_1 = (1, 0, 0)$ su neutrali operacija \oplus i \otimes , redom.

Naredne jednakosti su zadovoljene

$$e_0 \oplus e_0 = e_0 \quad i \quad e_1 \otimes e_1 = e_1. \quad (5.93)$$

Za Površinske Fazi Skupove $(\mu, \nu, \pi(t)) \notin \{e_0, e_1\}$ ne postoji Površinski Fazi Skup s_f takav da je $(\mu, \nu, \pi(t)) \oplus s_f = e_0$ ili $(\mu, \nu, \pi(t)) \otimes s_f = e_1$.

Za proizvoljne Površinske Fazi Skupove A_1 i A_2 , jedini Površinski Fazi Skupovi

5.2. POVRŠINSKI FAZI SKUPOVI

A_3 za koje je zadovoljen identitet $(A_1 \oplus A_2) \otimes A_3 = (A_1 \otimes A_3) \oplus (A_2 \otimes A_3)$ su $A_{3_1} = (1, 0, 0)$ i $A_{3_2} = (0, 1, 0)$.

Dokaz. Na osnovu definicije operacije \oplus date jednačinom (5.81), sledi da važi

$$\begin{aligned} & (\mu_1, \nu_1, \pi_1(t)) \oplus (\mu_2, \nu_2, \pi_2(t)) \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_1^2 \mu_2^2}, \\ \nu_1 \nu_2, \\ \sqrt{(1 - \mu_2^2) \pi_1^2(t) + (1 - \mu_1^2) \pi_2^2(t) - \pi_1^2(t) \pi_2^2(t)} \end{array} \right\}^T. \end{aligned} \quad (5.94)$$

Druge koordinate Površinskih Fazi Skupova $A_l = (A_1 \oplus A_2) \oplus A_3$ i $A_r = A_1 \oplus (A_2 \oplus A_3)$ su trivijalno jednake. Prva koordinata Površinskog Fazi Broja A_l je $\sqrt{\left(\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_1^2 \mu_2^2}\right)^2 + \mu_3^2 - \left(\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_1^2 \mu_2^2}\right)^2 \mu_3^2}$, tj.

$$A_{l_1} = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_1^2 \mu_2^2 + \mu_3^2 - \mu_1^2 \mu_3^2 - \mu_2^2 \mu_3^2 + \mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2}.$$

Nakon smene μ_2^2 u jednačini (5.94) sa $\mu_2^2 + \mu_3^2 - \mu_2^2 \mu_3^2$, dobijamo da je prva koordinata Površinskog fazi broja $A_1 \oplus (A_2 \oplus A_3)$ jednaka

$$\sqrt{\mu_1^2 + \left(\sqrt{\mu_2^2 + \mu_3^2 - \mu_2^2 \mu_3^2}\right)^2 - \mu_1^2 \left(\sqrt{\mu_2^2 + \mu_3^2 - \mu_2^2 \mu_3^2}\right)^2},$$

odnosno

$$A_{r_1} = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 - \mu_2^2 \mu_3^2 - \mu_1^2 \mu_2^2 - \mu_1^2 \mu_3^2 + \mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2} = A_{l_1}.$$

Na osnovu jednačine (5.94), kvadrati trećih koordinata fazi skupova A_l i A_r su

$$\begin{aligned} A_{l_3}^2 &= \pi_1^2(t) - \mu_2^2 \pi_1^2(t) - \mu_3^2 \pi_1^2(t) + \mu_2^2 \mu_3^2 \pi_1^2(t) + \pi_2^2(t) - \mu_1^2 \pi_2^2(t) - \mu_3^2 \pi_2^2(t) \\ &+ \mu_1^2 \mu_3^2 \pi_2^2(t) - \pi_1^2(t) \pi_2^2(t) + \pi_3^2(t) + \mu_3^2 \pi_1^2(t) \pi_2^2(t) - \mu_1^2 \pi_3^2(t) - \mu_2^2 \pi_3^2(t) \\ &+ \mu_1^2 \mu_2^2 \pi_3^2(t) - \pi_1^2(t) \pi_3^2(t) + \mu_2^2 \pi_1^2(t) \pi_3^2(t) - \pi_2^2(t) \pi_3^2(t) \\ &+ \mu_1^2 \pi_2^2(t) \pi_3^2(t) + \pi_1^2(t) \pi_2^2(t) \pi_3^2(t) = A_{r_3}, \end{aligned}$$

čime je dokazana asocijativnost operacije \oplus .

GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA

Nakon zamene $\mu_k \leftrightarrow \nu_k$, $k = 1, 2, 3$, u dokazu asocijativnosti operacije \oplus , zaključujemo da je i operacija \otimes asocijativna.

Naredne jednakosti važe,

$$\begin{aligned}
 (\mu, \nu, \pi(t)) \oplus (0, 1, 0) &= (\mu, \nu, \pi(t)) \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{\mu^2 + 0^2 - \mu^2 \cdot 0}, \\ \nu \cdot 1, \\ \sqrt{(1 - 0^2)\pi^2(t) + (1 - \mu^2) \cdot 0 - \pi^2(t) \cdot 0} \end{array} \right\}^T, \\
 (\mu, \nu, \pi(t)) \otimes (1, 0, 0) &= (\mu, \nu, \pi(t)) \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} \mu \cdot 1, \\ \sqrt{\nu^2 + 0^2 - \nu^2 \cdot 0^2}, \\ \sqrt{(1 - 0^2)\pi^2 + (1 - \nu^2) \cdot 0^2 - \pi^2 \cdot 0^2} \end{array} \right\}^T,
 \end{aligned} \tag{5.95}$$

čime je potvrđena tačnost jednačina (5.91, 5.92).

Kako je rešenje jednačine $x^2 + y^2 - x^2 \cdot y^2 = 0$ po x zadato jednakošću $x = x \cdot (-1 + x^2)^{-1/2}$, što je kompleksan broj za $x \in (0, 1)$, inverzni površinski fazi skupovi za $(\mu, \nu, \pi(t)) \notin \{e_0, e_1\}$, na osnovu operacija \oplus, \otimes ne postoje.

Za Površinske Fazi Skupove $A_{S_1} = (\mu_1, \nu_1, \pi_1(t))$, $A_{S_2} = (\mu_2, \nu_2, \pi_2(t))$, $A_{S_3} = (\mu_3, \nu_3, \pi_3(t))$, prve dve komponente rezultata operacija $(A_{S_1} \oplus A_{S_2}) \otimes A_{S_3}$ i $(A_{S_1} \otimes A_{S_3}) \oplus (A_{S_2} \otimes A_{S_3})$ su

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{prva komponenta} & \\ (A_{S_1} \oplus A_{S_2}) \otimes A_{S_3} : & \mu_3 \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_1^2 \mu_2^2} \\ (A_{S_1} \otimes A_{S_3}) \oplus (A_{S_2} \otimes A_{S_3}) : & \mu_3 \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2} \end{array} \right. \tag{5.96}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{druga komponenta} & \\ (A_{S_1} \oplus A_{S_2}) \otimes A_{S_3} : & \sqrt{\nu_1^2 \nu_2^2 + \nu_3^2 - \nu_1^2 \nu_2^2 \nu_3^2} \\ (A_{S_1} \otimes A_{S_3}) \oplus (A_{S_2} \otimes A_{S_3}) : & \sqrt{\nu_1^2 + \nu_3^2 - \nu_1^2 \nu_3^2} \cdot \sqrt{\nu_2^2 + \nu_3^2 - \nu_2^2 \nu_3^2} \end{array} \right. \tag{5.97}$$

Za proizvoljne μ_1, μ_2 , prethodne prve komponente su jednake ako i samo ako je $\mu_3 = 0$ ili $\mu_3 = 1$.

Nakon kvadriranja i izjednačavanja drugih komponenti u jednačinama (5.96,

5.2. POVRŠINSKI FAZI SKUPOVI

5.97), dobijamo da važi jednakost

$$\nu_3^2(1 - \nu_3^2)(1 - \nu_1^2 - \nu_2^2 + \nu_1^2\nu_2^2) = 0. \quad (5.98)$$

Za proizvoljne ν_1, ν_2 , jednakost (5.98) važi ako i samo ako je $\nu_3 = 0$ ili $\nu_3 = 1$.

Zbog $\mu_3^2 + \nu_3^2 + (\pi_3(t))^2 \leq 1$, jedini Površinski Fazi Skupovi kod kojih su obe komponente prikazane jednačinama (5.96, 5.97) jednake su $(1, 0, 0)$ i $(0, 1, 0)$.

Za $(\mu_3, \nu_3, \pi_3(t)) = (1, 0, 0)$ ili $(\mu_3, \nu_3, \pi_3(t)) = (0, 1, 0)$, nakon izvesnog izračunavanja, dobija se da su treće koordinate rezultata operacija $(A_{S_1} \oplus A_{S_2}) \otimes A_{S_3}$ i $(A_{S_1} \otimes A_{S_3}) \oplus (A_{S_2} \otimes A_{S_3})$ jednake. \square

Na osnovu $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $\omega_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$, Površinska fazi ponderisana geometrijska sredina (S_fWGM) je

$$\begin{aligned} S_fWGM_\omega(A_{S_1}, \dots, A_{S_n}) &= A_{S_1}^{\omega_1} + \dots + A_{S_n}^{\omega_n} \\ &= \left\{ \prod_{i=1}^n \mu_{A_{S_i}}^{\omega_i}, \sqrt{1 - \prod_{i=1}^n (1 - \nu_{A_{S_i}}^2)^{\omega_i}}, \right. \\ &\quad \left. \sqrt{\prod_{i=1}^n (1 - \nu_{A_{S_i}}^2)^{\omega_i} - \prod_{i=1}^n (1 - \nu_{A_{S_i}}^2 - \pi_{A_{S_i}}^2(t))^{\omega_i}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Odgovarajuće funkcije bodovanja i tačnosti su

$$Ss(\tilde{A}_S) = (\mu_{\tilde{A}_S} - \pi_{\tilde{A}_S}(t))^2 - (\nu_{\tilde{A}_S} - \pi_{\tilde{A}_S}(t)), \quad (5.100)$$

$$Sa(\tilde{A}_S) = \mu_{\tilde{A}_S}^2 + \nu_{\tilde{A}_S}^2 + \pi_{\tilde{A}_S}^2(t). \quad (5.101)$$

Kao u [55], naredne relacije su ekvivalentne

$$\tilde{A}_S < \tilde{B}_S, \quad (5.102)$$

$$Ss(\tilde{A}_S) < Ss(\tilde{B}_S), \quad (5.103)$$

$$Ss(\tilde{A}_S) = Ss(\tilde{B}_S) \wedge Sa(\tilde{A}_S) < Sa(\tilde{B}_S). \quad (5.104)$$

5.2.3 Primena površinskih fazi skupova

Donosioci odluke, n njih, daju svoja mišljenja o m kriterijuma. Ti rezultati su prikazani kao matrice M_1, \dots, M_n , tipa $m \times m$.

Odgovarajuća *crisp* matrica je

$$M_c = [M_{ij}], \quad (5.105)$$

za $i, j = 1, \dots, m$.

Normalizovana *crisp* matrica je

$$\overline{M}_c = [\overline{M}_{ij}], \quad (5.106)$$

pri čemu je

$$\overline{M}_{ij} = \left(\sum_{k=1}^m M_{ik} \right)^{-1} M_{ij}. \quad (5.107)$$

Ako su $f_{ij}^1 = (\mu_{ij}^1, \nu_{ij}^1, \pi_{ij}^1(t)), \dots, f_{ij}^n = (\mu_{ij}^n, \nu_{ij}^n, \pi_{ij}^n(t))$ fazi brojevi koji odgovaraju mišljenjima donosilaca odluka o korelaciji i -tog i j -tog kriterijuma, odgovarajuća Integrirana površinska fazi matrica poređenja je

$$F = [F_{ij}], \quad (5.108)$$

gde je

$$F_{ij} = \frac{1}{n} (f_{ij}^1 + \dots + f_{ij}^n). \quad (5.109)$$

Težina r -tog kriterijuma, $r = 1, \dots, m$, je $w_r = (\mu_r, \nu_r, \pi_r(t))$, gde je

$$\mu_r = \left[1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mu_i^2)^{\omega_i} \right]^{0.5}, \quad (5.110)$$

$$\nu_r = \prod_{i=1}^n \nu_i^{\omega_i}, \quad (5.111)$$

$$\pi_r(t) = \left[\prod_{i=1}^n (1 - \mu_i^2)^{\omega_i} - \prod_{i=1}^n (1 - \mu_i - \pi_r^2(t))^{\omega_i} \right]^{0.5} \quad (5.112)$$

5.2. POVRŠINSKI FAZI SKUPOVI

za $\omega_1, \dots, \omega_n > 0, \omega_1 + \dots + \omega_n = 1$.

Funkcija ocene/bodovanja je

$$S_{S_k}(t) = \sqrt{\left| 100 \cdot \left[\left(3\mu_k - \frac{\pi_k(t)}{2} \right)^2 - \left(\frac{\nu_k}{2} - \pi_k(t) \right)^2 \right] \right|}. \quad (5.113)$$

Normalizovana težina kriterijuma je

$$\bar{S}_{S_k}(t) = \frac{S_{S_k}(t)}{\sum_{p=1}^m S_{S_p}(t)}. \quad (5.114)$$

5.2.3.1 Primer

U [109], autori su se bavili definisanjem i rangiranjem kriterijumima koji utiču na B2C veb sajtove. Od pet grupa kriterijuma i devetnaest podkriterijuma, izaberimo grupu koja se tiče Sigurnosti, privatnosti i autorizacije podataka. Podkriterijumi te grupe su A1: Bezbedno plaćanje, A2: Sigurnost naloga, A3: Bezbedno deljenje podataka. Primenićemo Površinske fazi skupove u sistem donošenja odluka, određivanja težina podkriterijuma i zaključivanja o njihovoj važnosti za ceo sistem.

Površ koju ćemo koristiti je elipsoid

$$(e) : \begin{cases} x = 0.9 \cos \phi \cos \psi \\ y = 0.9 \cos \phi \sin \psi \\ z = 0.7 \sin \phi, \end{cases} \quad (5.115)$$

$\phi \in [0, 2\pi), \psi \in [0, \pi)$.

U tački $(x_0, y_0) = (0.9 \cos \phi_0 \cos \psi_0, 0.9 \cos \phi_0 \sin \psi_0, 0.7 \sin \phi_0)$, π -funkcije za svakog donosioca odluke su jednake

$$\pi_{ij}^k(t) = \pi_{ij}(t) = 0.7 \sin \left(\arctan \frac{y_0}{x_0} \right) \cos \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}t \right). \quad (5.116)$$

Imaćemo kriterijume i pet donosilaca odluke.

Mišljenja donosilaca odluke izražena su u obliku matrica

GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3^{-1} & 1 & 3 \\ 5^{-1} & 3^{-1} & 1 \end{bmatrix}, & M_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5^{-1} & 1 & 5 \\ 3^{-1} & 5^{-1} & 1 \end{bmatrix}, & M_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3^{-1} & 1 & 5 \\ 5^{-1} & 5^{-1} & 1 \end{bmatrix}, \\
 M_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3^{-1} & 1 & 3 \\ 5^{-1} & 3^{-1} & 1 \end{bmatrix}, & M_5 &= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5^{-1} & 1 & 3 \\ 3^{-1} & 3^{-1} & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{5.117}$$

Odgovarajuća *crisp* matrica je

$$M_c = \begin{bmatrix} 1 & 3.8 & 4.2 \\ 0.26 & 1 & 3.8 \\ 0.24 & 0.26 & 1 \end{bmatrix}.
 \tag{5.118}$$

Normalizovana *crisp* matrica je

$$\bar{M}_c = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.75 & 0.47 \\ 0.17 & 0.20 & 0.42 \\ 0.16 & 0.51 & 0.11 \end{bmatrix}.
 \tag{5.119}$$

Integrisana površinska fazi matrica poređenja je

$$M_F = \begin{bmatrix} (0.5, 0.4, 0.4), (0.64, 0.36, \pi(t)), (0.66, 0.34, \pi(t)) \\ (0.36, 0.64, \pi(t)), (0.5, 0.4, 0.4), (0.64, 0.36, \pi(t)) \\ (0.34, 0.66, \pi(t)), (0.36, 0.64, \pi(t)), (0.5, 0.4, 0.4) \end{bmatrix}.
 \tag{5.120}$$

Težine podkriterijuma koje odgovaraju površinskim fazi skupovima jednake su

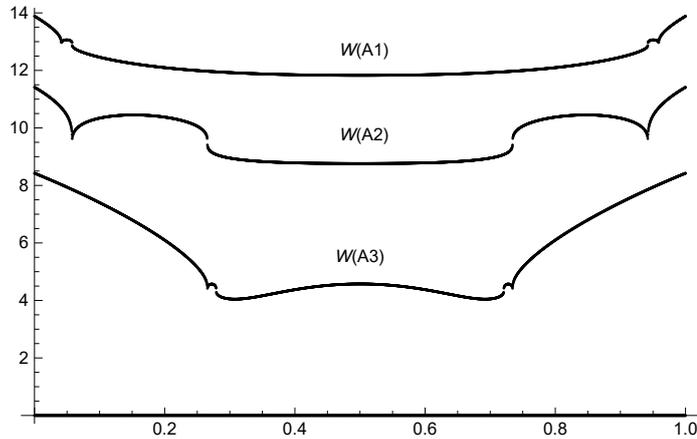
$$PW_{AHP} = \begin{bmatrix} A_1 : \left(0.61, 0.37, \sqrt{0.63 - 0.84 \cdot (0.56 - \pi^2(t))^{1/3} \cdot (0.59 - \pi^2(t))^{1/3}} \right) \\ A_2 : \left(0.52, 0.45, \sqrt{0.73 - 0.84 \cdot (0.59 - \pi^2(t))^{1/3} \cdot (0.87 - \pi^2(t))^{1/3}} \right) \\ A_3 : \left(0.41, 0.55, \sqrt{0.83 - 0.84 \cdot (0.87 - \pi^2(t))^{1/3} \cdot (0.88 - \pi^2(t))^{1/3}} \right) \end{bmatrix}.
 \tag{5.121}$$

5.2. POVRŠINSKI FAZI SKUPOVI

U slučaju da je $M_F = \begin{bmatrix} A_1 : (a_1, b_1, c_1) \\ A_2 : (a_2, b_2, c_2) \\ A_3 : (a_3, b_3, c_3) \end{bmatrix}$, odgovarajući *crisp* brojevi su

$$S(\tilde{w}) = \begin{bmatrix} \sqrt{\left| 100 \left(\left(3a_1 - \frac{c_1}{2} \right)^2 - \left(\frac{b_1}{2} - c_1 \right)^2 \right) \right|} \\ \sqrt{\left| 100 \left(\left(3a_2 - \frac{c_2}{2} \right)^2 - \left(\frac{b_2}{2} - c_2 \right)^2 \right) \right|} \\ \sqrt{\left| 100 \left(\left(3a_3 - \frac{c_3}{2} \right)^2 - \left(\frac{b_3}{2} - c_3 \right)^2 \right) \right|} \end{bmatrix}. \quad (5.122)$$

Grafici *crisp* težina tri posmatrana podkriterijuma i njihov odnos prikazani su na Slikama 5.11 i 5.12.



Slika 5.11: *Crisp* vrednosti posmatranih podkriterijuma

Crisp težina koja odgovara prvom kriterijumu opada od $t = 0$ do $t = 0.5$. Za $t > 0.5$, *crisp* težina raste. Dobijeni minimum je 11.8282.

Crisp težina koja odgovara drugom kriterijumu dostiže minimum za $t = 0.5$ koji je jednak 8.76022.

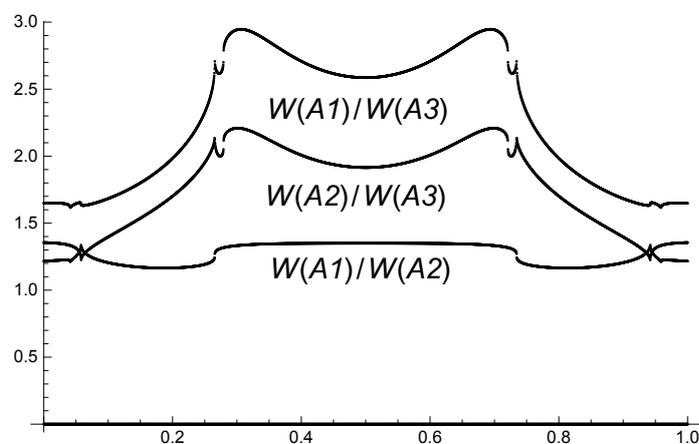
Crisp težina koja odgovara trećem kriterijumu dostiže minimum za $t = 0.692172$ i taj minimum je jednak 4.04456.

Crisp vrednosti koje odgovaraju kriterijuma A_1, A_2, A_3 , za različite vrednosti $t \in [0, 1]$, predstavljene su u Tabeli 5.3.

Sa Slike 5.12 vidimo da odnosi kriterijuma $A_i, i = 1, 2, 3$, određuju vrednosti parametra t za koje proporcije dostižu svoje ekstremne vrednosti.

Maksimum količnika A_1/A_2 iz Tabele 5.3 je 1.35021 i dostiže se za $t = 0.5$.

GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA



Slika 5.12: Odnos *crisp* vrednosti posmatranih podkriterijuma

Maksimum količnika A_1/A_3 iz Tabele 5.3 je 2.94275 i dostiže se za $t = 0.3$ i $t = 0.7$.

Maksimum količnika A_2/A_3 iz Tabele 5.3 je 2.20869 i dostiže se za $t = 0.3$ i $t = 0.7$.

Tabela 5.3: *Crisp* vrednosti podkriterijuma i njihov odnos

$t \setminus A1$	<i>Crisp</i> vrednosti			Odnos <i>crisp</i> vrednosti		
	$A1$	$A2$	$A3$	$A1/A2$	$A1/A3$	$A2/A3$
0.0	13.8863	11.4153	8.42506	1.21646	1.64822	1.35493
0.1	12.4598	10.3395	7.40156	1.20507	1.6834	1.39693
0.2	12.0964	10.3755	6.09738	1.16586	1.98386	1.70163
0.3	11.9253	8.95058	4.05244	1.33235	2.94275	2.20869
0.4	11.8493	8.78391	4.37498	1.34898	2.70843	2.00776
0.5	11.8282	8.76022	4.57419	1.35021	2.58585	1.91514
0.6	11.8493	8.78391	4.37498	1.34898	2.70843	2.00776
0.7	11.9253	8.95058	4.05244	1.33235	2.94275	2.20869
0.8	12.0964	10.3755	6.09738	1.16585	1.98386	1.70163
0.9	12.4598	10.3395	7.40156	1.20507	1.6834	1.39693
1.0	13.8864	11.4153	8.41406	1.21646	1.64822	1.35493

Fazi logika i njena primena u oblasti automata nad poluprstanima i drugim algebarskim strukturama iscrpna je oblast kojom se bavi tim istraživača sa Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu predvođen profesorima Miroslavom Ćirićem i Jelenom Ignjatović. Oni se bave proučavanjem teorije kvantitativnih

5.2. POVRŠINSKI FAZI SKUPOVI

automata, posebno fazi i težinskih automata nad poluprstenima, dajući, na taj način, doprinos reviziji važne oblasti teorijskog računarstva u kojoj se klasične Bulove metode za modelovanje i analizu hardverskih i softverskih sistema sve više zamenjuju kvantitativnim metodama. Tokom istraživanja prvenstveno se razmatra nekoliko izuzetno važnih problema teorije automata: poređenje ponašanja automata, pronalaženje simulacija i bisimulacija, redukcija i minimizacija stanja, determinacija, rekonstrukcija automata iz njegovog ponašanja i izdvajanje automata iz modela crne kutije. Trenutno se ovi problemi vezuju za opšti kontekst težinskih konačnih automata nad poluprstenima, ali još intenzivnije za tri posebno važna tipa težinskih automata – težinski konačni automati nad poljem realnih brojeva, max-plus automati i konačni fazi automati. Metodologija kojom se rešavaju pomenuti problemi zasnovana je na linearnom predstavljanju težinskih automata nad poluprstenima, a takvo predstavljanje dozvoljava primenu metoda i ideja linearne algebre i teorije matrica. Konkretno, problemi pronalaženja simulacija i bisimulacija, kao i problem smanjenja broja stanja, svode se na problem rešavanja specijalnih sistema matričnih nejednačina i jednačina, dok se problemi rekonstrukcije i minimizacije zasnivaju na matričnim faktorizacijama i generalizovanim inverzima matrica. Jasno je da je istraživanje zasnovano na matematičkim problemima rešavanja matričnih sistema nejednačina i jednačina, matrične faktorizacije i izračunavanje generalizovanih inverza. Noviji rezultati koji se tiču težinskih automata zadiru i u oblast mašinskog učenja.

Pored opštih konačnih težinskih automata (Weighted finite automata- WFA) sa težinama u proizvoljnim poluprstenima, istraživanje se fokusira na tri značajna, specijalna modela WFA nad poluprstenima:

- WFA nad poljem realnih brojeva, koji kao svoje posebne slučajeve uključuju stohastičke i probabilističke automate,
- WFA nad max-plus poluprstenima i ovi automati se nazivaju max-plus automati,
- WFA nad poluprstenom redukata kompletnih reziduiranih mreža, koji se nazivaju konačni fazi automati.

Težinski automati sa realnim težinama imaju brojne praktične primene u for-

GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA

malnoj specifikaciji i verifikaciji sistema, kao i u oblasti mašinskog učenja, gde se ovi automati uspešno koriste kao alternativa rekurentnim neuronskim mrežama.

Max-plus automati su nastali kao sredstvo za predstavljanje ponašanja diskretnih event sistema događaja za sinhronizaciju zadataka i raspodele resursa, kao što su, na primer, proizvodni sistemi, železničke mreže, mreže gradskog saobraćaja, sistemi čekanja, nizovi procesora, itd. Motivacija za korišćenje max-plus poluprstena, kao strukture istinitosnih vrednosti, proizilazi iz činjenice da mnoge pojave, poput sinhronizacije, koje su nelinearne u klasičnoj teoriji sistema, postaju linearne prelaskom iz polja realnih brojeva na max-plus poluprsten.

Fazi automati formiraju poseban model težinskih konačnih automata nad poluprstenovima, ali su definisani i proučavani odvojeno, uglavnom inspirisano teorijom fazi logike. Kod originalnih modela fazi automata, istinitosne vrednosti koje se dodeljuju prelazima uzimaju se iz realnog jediničnog intervala $[0,1]$ sa uobičajenim operacijama maksimuma i minimuma. Kasnije su fazi automati takođe istraživani nad opštijim strukturama, kao što su rešetke, reziduirane mreže, kvantali, mrežno-uređeni monoidi i drugi. Značaj fazi automata leži u tome što su u stanju da se nose sa neizvesnošću i nepreciznošću, koji su vrlo često prisutni u radu sa složenim sistemima.

Jedan od najznačajnijih opštih problema u teorijskoj informatici je problem ekvivalencije – pitanje utvrđivanja da li dva modela apstraktnih mašina rade isti posao ili ne. Primenjeno na WFA, ovo je pitanje da li dva WFA imaju isto ponašanje (izračunavaju istu funkciju jezika). Srodni problem je problem poređenja ili problem inkluzije. Za dva konačna težinska automata nad uređenim poluprstenom, ovo je pitanje utvrđivanja da li je funkcija izračunata od strane jednog WFA manja ili jednaka funkciji koju je izračunao drugi automat. Složenost i mogućnost odlučivanja ovih problema odlučivanja zavise od vrste automata koji se razmatraju. U slučajevima kada je problem inkluzije i ekvivalencije neodlučiv ili računski težak, prirodno se postavlja pitanje da li je moguće efikasno odrediti *nešto* što implicira inkluziju ili ekvivalentnost. To *nešto* su za klasične tranzicione sisteme i nedeterminističke automate obezbedili Milner i Park u ranim 1980-im, uvođenjem odnosa simulacije i bisimulacije, koji su se pokazali kao veoma moćan alat koji se koriste u mnogim oblastima informatike za usklađivanje i upoređivanje ponašanja različitih sistema, kao i za smanjenje broja stanja ovih sistema. Upotreba

5.2. POVRŠINSKI FAZI SKUPOVI

simulacija i bisimulacija stekla je dugu i bogatu istoriju i njihovi različiti oblici su bili definisani i primenjeni na različite sisteme. Posebno je važno da simulacije i bisimulacije specificiraju odnose između stanja različitih tranzicionih sistema, što često nije slučaj kada se određuje inkluzija ili ekvivalencija između ovih sistema. Da bi se postigla puna snaga kvantitativne analize, simulacije i bisimulacije takođe treba da budu kvantifikovane, treba da obezbede neku kvantitativnu meru odnosa između stanja razmatranih sistema. U slučaju WFA to znači da bi trebalo da budu težinske relacije, odnosno matrice sa vrednostima iz poluprstena. Takav pristup simulacijama i bisimulacijama korišćen je pri definisanju dve vrste simulacije, a četiri vrste bisimulacija su uvedene za konačne fazi i težinske automate. Na osnovu toga, konstruisani su algoritmi za testiranje postojanja i izračunavanje najvećih simulacija i bisimulacija za ove automate. Oni su zasnovani na iterativnim procedurama koje se u nekim slučajevima ne završavaju u konačnom broju koraka. Za takve slučajeve razvijeni su modifikovani algoritmi koji testiraju postojanje i izračunavaju najveće slabe simulacije i bisimulacije. Ovim su pokazane velike prednosti kvantitativnih simulacija i bisimulacija u odnosu na klasične Bulove. Problem minimizacije je opšti problem teorije automata koji zahteva pronalaženje automata sa najmanjim mogućim brojem stanja, koji je ekvivalentan datom automatu. Iako takav automat postoji za bilo koju vrstu automata sa konačnim brojem stanja, često nije lako konstruisati ovakav automat. Za mnoge tipove automata sa konačnim stanjima problem minimizacije je neizvodljiv, kao na primer za nedeterminističke konačne automate. Iz tog razloga, problem minimizacije je u mnogim slučajevima zamenjen problemom redukcije broja stanja, kojim se pronalazi automat ekvivalentan datom automatu koji nije nužno minimalan, ali ima razumno mali broj stanja i može se efikasno konstruisati. Svaki nedeterministički konačan automat (NFA) može se determinizovati, u smislu da se konvertuje u ekvivalentan deterministički konačni automat (DFA). Ova dobro poznata činjenica je osnovni uzrok svojevrsne ravnoteže u klasičnoj teoriji automata između prednosti DFA u praktičnim primenama i bolje efikasnosti NFA u opisivanju jezika. Međutim, težinski konačni automati su u potpuno drugačijoj situaciji, pošto se ne može svaki WFA prevesti u ekvivalentan konačan deterministički težinski automat, što čini ovaj problem još važnijim. Definisane su dve vrste determinizacije težinskih automata:

GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA

- kompletan deterministički težinski automat (skraćeno CDWA) i
- deterministički težinski automat (skraćeno DWA).

Osnovna razlika među njima je u tome što konačni DWA mogu samo da računaju funkcije konačnog opsega, dok konačni CDWA mogu da izračunaju i funkcije beskonačnog opsega. Još jedan izuzetno važan praktični problem je kako konstruisati mašinu koja obavlja dati posao. U kontekstu težinskih konačnih automata to je problem kako rekonstruisati ovaj automat iz njegovog ponašanja. Postoje dve verzije ovog problema. Prvi je da se rekonstruiše običan WFA bez izlaza iz funkcije reči koju izračunava, a drugi je da se rekonstruiše WFA sa izlazom iz sekvencijalne težinske ulazno-izlazne transformacije koju obavlja. Dodatni praktični zahtev je da rekonstruisani WFA ima što je moguće manje stanja, poželjno je da bude minimalan. Problem usko vezan za rekonstrukciju problema izdvajanja težinskog konačnog automata iz rekurentnih neuronskih mreža o čemu se raspravljalo u velikom broju novijih radova. Osnovni problemi teorije kvantnih automata razmatraju se i na problemima kvantnih socijalnih mreža, gde je pristup malo više zasnovan na metodama i alatima iz teorije grafova.

Najznačajniji radovi ove grupe istraživača sa departmana za Računarske nauke predstavljani su u radovima [18–21, 35–38, 41, 42, 64, 116–123]

5.3 Fazi regulatori

5.3.1 Fazi logika i regulatori

Često se rešenja za razne problematične situacije traže u sposobnosti tačnog i apstraktnog izražavanja misli i tumačenja čulnih stimulansa (pokret, govor, slika), definišući time osnovu ljudske inteligencije. Iskustvo nas uči da, čak i kada ulazne informacije nisu dovoljno precizne, ljudi mogu da obrađuju veliku količinu informacija i donose adekvatne, učinkovite odluke. Svakako, stepen obrazovanja i iskustvo imaju veliki uticaj na stvarni uspeh postupaka ljudi. Inženjeri mnogim metodama veštačke inteligencije pokušavaju da oponašaju model ljudskog razmišljanja i donošenja odluka i implementiraju ga u razna praktična rešenja tehničkih problema. Korišćenje nedovoljno poznatih ili neprecizno definisanih pojmova,

5.3. FAZI REGULATORI

uz često oslanjanje na intuiciju ili subjektivni osećaj, donelo je teoriji fazi logike mnogo protivnika, naročito među zapadnim zemljama, tvrdeći da je ova teorija bez potencijala za praktičnu primenu, uz obrazloženje da se sve neodređenosti i nepreciznosti mogu opisati teorijom verovatnoće. Čak su i na polju automatskog upravljanja naučnici tvrdili da su tradicionalne tehnike upravljanja moćnije od fazi logike. U današnje vreme, promenom osnovnog pristupa naučnoj analizi, inženjeri shvataju da je klasična teorija skupova samo granični slučaj teorije fazi skupova i da se zamenom *crisp* skupova fazi skupovima svaka teorija može fazifikovati. Tako je i klasičan proporcionalno-integralni regulator samo jedan oblik fazi regulatora, a i neki klasični metodi upravljanja se analiziraju primenom fazi logike [13, 134, 147]. Nemogućnost identifikacije svih mogućih događaja nekog sistema, njihovo nepotpuno poznavanje i nepredvidiva učestalost njihovih pojavljivanja znatno otežavaju opisivanje sistema i nameću upotrebu približnih sistemskih modela. U tu svrhu, u teoriji upravljanja sistemima postoje alati za približno modelovanje sistema i dizajn analitički zasnovanih algoritama upravljanja kao što su linearni modeli drugog reda za dizajn PI i PID regulatora. Postoji direktna proporcija između podudaranja procesa i modela i odziva sistema regulisanog upravljačkim algoritmima dizajniranim po približnom modelu sistema. Problem nepraktičnog dizajna regulatora uslovljen nepoznatim sistemom, njegovom složenošću ili visokim stepenom promena parametara, može se rešiti upotrebom adaptivnih metoda upravljanja koji zbog komplikovanog matematičkog aparata obično zahtevaju veliki broj računskih iteracija [46, 57]. Za rešavanje visoko nelinearnih procesa na koje veliki uticaj imaju spoljašnji faktori presudnu ulogu imaju višegodišnje iskustvo i znanje operatera, naročito u oblasti statičkih i dinamičkih karakteristika sistema, gde operater, praćenjem stanja važnih promenljivih i odstupanja od referentnih vrednosti, odlučuje gde i koliko treba da deluje na proces kako bi ostvario cilj, izvršavajući time svoj upravljački program. Odluka operatera se sprovodi po pravilu AKO (su stanja promenljivih takva...) – ONDA (je potrebna ovakva upravljačka radnja...). Iskustvo i znanje operatera su od neprocenjive važnosti, ali se kao mogući problem javlja njihova primena u upravljački algoritam. Upotrebom viševrednosne logike lingvistički izrazi u AKO-ONDA pravilima koja opisuju radnje operatera se mogu efikasno pretvoriti u potpuno strukturirani regulacioni algoritam primenljiv u fazi procesorima [31, 91, 96]. Kako fazi

GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA

algoritam ima karakteristike univerzalnog aproksimatora, skupom AKO-ONDA fazi pravila može se modelirati nepoznat proces, čak i opisati stanje kada operateri nisu u mogućnosti da opišu pravila koja spovode [133]. Još jedna primena fazi logike u dizajnu regulatora tiče se značajnog skraćanja vremena potrebnog za dizajn i primenu [107].

Oblašću Automatike, primenom fazi logike i regulatora, bavi se katedra za Automatiku na Elektronskom fakultetu Univerziteta u Nišu. Neki od važnijih radova grupe nastavnika sa ove katedre su [1, 2, 66–69, 74, 75, 94, 97]

5.3.2 Fazi regulatori i osobine

Struktura fazi regulatora zavisi od objekta upravljanja i potrebnog stepena kontrole. Kako je mogućnost primene fazi regulatora velika, oni će se razlikovati po broju ulaza i izlaza, obliku funkcija pripadnosti, formi pravila ili čak defazifikaciji. Za sve njih je zajedničko to što se fazi regulator, najvažniji deo fazi sistema automatskog upravljanja, može predstaviti kao veštački donosilac odluke koji radi u sistemu sa zatvorenim spregom u realnom vremenu [22, 52]. Struktura fazi regulatora prikazana u formi blok dijagrama predstavljena je na Slici 5.13 [22].



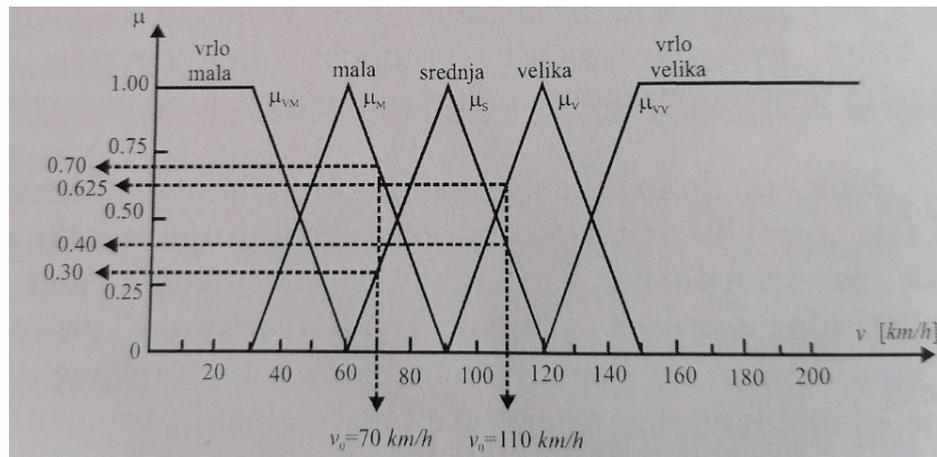
Slika 5.13: Struktura fazi regulatora

U nastavku će biti objašnjene četiri komponente fazi regulatora.

[1] Uloga **bloka za fazifikaciju** sastoji se u preslikavanju fizičkih vrednosti ulaznih promenljivih u odgovarajuće normalizovane domene definisnosti, i konvertovanje ulaznih podataka u odgovarajuće lingvističke vrednosti i fazi skupove. Kao jednostavan primer može se navesti brzina automobila $v = 70km/h$ koju

5.3. FAZI REGULATORI

prvo treba transformisati kako bi je regulator *razumeo*. Ulazna veličina, brzina automobila, transformiše se u fazi skup određen nekim domenom, recimo: vrlo mala brzina (μ_{VM}), mala brzina (μ_M), srednja brzina (μ_S), velika brzina (μ_V) i vrlo velika brzina (μ_{VV}).



Slika 5.14: Fazifikacija brzine automobila za vrednosti $v_0 = 70\text{km/h}$ i $v_0 = 110\text{km/h}$ [22]

Kao što se može videti sa Slike 5.14, fazifikacijom determinisane vrednosti automobila $v_0 = 70\text{km/h}$ određene su funkcije pripadnosti $\mu_M = 0.7$, $\mu_S = 0.3$ i $\mu_{VM} = \mu_V = \mu_{VV} = 0$. Na istoj Slici 5.14 prikazane su i vrednosti $\mu_S = 0.4$ i $\mu_V = 0.625$ koje se dobijaju za brzinu automobila $v_0 = 110\text{km/h}$.

[2] Sva znanja koja se tiču primene i ciljeva upravljanja nalaze se u **bazi znanja** koja se sastoji iz *baze podataka* i *baze pravila*. Elementi *baze podataka* su funkcije pripadnosti i faktori skaliranja. Najčešće se, zbog male upotrebe memorije i lakoće opisivanja parametara, koriste trougaona i trapezoidna funkcija pripadnosti, što ima veliki uticaj na performanse fazi logičkog operatora. Za dve date funkcije pripadnosti μ_1 i μ_2 koje opisuju dve različite vrednosti lingvističke promenljive x , tačka ukrštanja predstavlja vrednost x^* za koju važi da je $\mu_1(x^*) = \mu_2(x^*) > 0$. Vrednost $\mu_1(x^*)$ predstavlja stepen pripadnosti vrednosti x^* . Na slici 5.14 je predstavljena tačka preseka $x^* = 70$ za koju je $\mu_{PM} = \mu_{PS} = 0.33$. Kada se skup vrednosti ulaznih promenljivih preslikava u funkcije pripadnosti, mora se voditi računa da svaka vrednost ulaznog skupa pripada najmanje jednoj funkciji pripadnosti čiji je stepen pozitivan broj. Time se osigurava aktiviranje

GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA

svih zadatih pravila i nesmetan protok upravljanja. Kako bi upravljanje bilo optimalno, preporučuje se korišćenje simetričnih funkcija pripadnosti (osim na krajevima domena definisanosti) sa nivoom preseka dve susedne funkcije 0.5. Takođe, savetuje se da broj lingvističkih vrednosti, zbog simetrije oko nule, bude neparan i ne veći od 7, kako ne bi došlo do nepotrebnog otežavanja procesa defazifikacije. Faktori skaliranja imaju veliku ulogu u određivanju performansi i stabilnosti sistema. Mogu se odrediti analitičkim putem, uspostavljanjem veze između faktora skaliranja i ponašanja sistema, ili metodom probe i greške. Da bi *baza pravila* fazi regulatora bila ispravno formirana, treba obratiti pažnju na izbor promenljivih stanja sistema i izlaznih upravljačkih promenljivih, kao i sadržaj premisa i posledica pravila. Cilj fazi regulatora je da oponaša razmišljanje operatera i da, koristeći znanja o upravljačkom sistemu, donosi odluke slične ljudskim. To se postiže fazi pravilima koja generišu bazu pravila. Fazi pravila čine centralnu komponentu fazi regulatora i predstavljaju *inteligenciju* svakog fazi upravljačkog algoritma [12]. Na osnovu znanja i iskustva operatera mora ispravno da se formira skup pravila. Fazi pravilo je oblika AKO-ONDA, gde premisa (AKO...) opisuje uslove, i posledica (ONDA...) objašnjava posledične radnje upravljačke aktivnosti. Ovakav oblik fazi pravila omogućava definisanje raznih nelinearnih kontrolnih funkcija koje omogućavaju fazi regulatorima da se uspešno izbore i sa nelinearnim upravljačkim problemima. Najčešći oblik fazi pravila sadrži dve premise povezane relacijom i jedan izlaz kojim se daje predlog aktivnosti. Organizacija baze pravila se smatra najzahtevnijim korakom u procesu definisanja fazi regulatora jer su svi ostali delovi, broj ulaznih elemenata, odabir funkcije pripadanja i postupak određivanja izlaza regulatora manje značajni od same baze. Veličina baze pravila zavisi od broja fazi pravila, koji je pak uslovljen brojem ulaznih i izlaznih promenljivih i njihovim vrednostima. Svaka baza pravila mora biti *konzistentna* - da ne postoje pravila koja imaju iste premise, a daju različite posledice. Može se desiti da posledični deo fazi pravila sadrži funkciju kojom se određuje veza između ulaza i izlaza regulatora. Ovaj tip regulatora, baziran na Takagi - Sugeno tipu fazi zaključivanja, ima oblik

AKO (x_1 - osobina), ..., i/ili AKO (x_n - osobina), ONDA ($u = f(x_1, \dots, x_n)$),

gde je f funkcija i x_1, \dots, x_n su numeričke (kvantitativne) vrednosti ulaza. Ako

5.3. FAZI REGULATORI

je funkcija f linearna, $f = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, i koeficijenti $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, onda pravila Takagi - Sugeno regulatora postaju jednaka pravilima fazi regulatora koji u posledičnom delu sadrži singleton, odnosno,

AKO (x_1 - osobina), \dots , i/ili AKO (x_n - osobina), ONDA ($u = a_0$).

[3] **Logika za zaključivanje** biće predstavljena primerom funkcionisanja sistema za grejanje i hlađenje.

Primer 5.4. [52] Neka je dat sistem za grejanje i hlađenje (klima uređaj) čiji je rad uslovljen spoljnom i unutrašnjom temperaturom i definisanim fazi pravilima (bazom pravila). Definišimo sledeće lingvističke promenljive:

$ST = \text{spoljna temperatura} = \{\text{niska, srednja, visoka}\}$

$UT = \text{unutrašnja temperatura} = \{\text{hladna, topla, vruća}\}$

$KU = \text{rad klima uređaja} = \{\text{hlađenje, stanje mirovanja, grejanje}\}$.

Premisa, povezana fazi relacijom predstavljaće spoj ulaznih promenljivih ST i UT , dok će KU označavati izlaznu promenljivu fazi pravila.

U nastavku ćemo opisati 9 mogućih fazi relacija (FR).

$FR_1 = ST \text{ je niska i } UT \text{ je hladna}$

$FR_2 = ST \text{ je niska i } UT \text{ je topla}$

$FR_3 = ST \text{ je niska i } UT \text{ je vruća}$

$FR_4 = ST \text{ je srednja i } UT \text{ je hladna}$

$FR_5 = ST \text{ je srednja i } UT \text{ je topla}$

$FR_6 = ST \text{ je srednja i } UT \text{ je vruća}$

$FR_7 = ST \text{ je visoka i } UT \text{ je hladna}$

$FR_8 = ST \text{ je visoka i } UT \text{ je topla}$

$FR_9 = ST \text{ je visoka i } UT \text{ je vruća}$

Navedimo i 3 moguće vrednosti izlazne promenljive (IP).

$IP_1 = KU \text{ hladi}$

$IP_2 = KU \text{ je u stanju mirovanja}$

$IP_3 = KU \text{ greje}$

GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA

Nakon definisanja AKO i ONDA delova možemo uspostaviti fazi pravila i time formirati bazu. Logično je da, ako je napolju niska temperatura, i unutrašnja temperatura je hladna, klima uređaj treba da greje. Ovaj zaključak je prikazan pravilom FPR_1 , za kojim su navedena još neka pravila.

$$FPR_1 = AKO FR_1, ONDA IP_3.$$

$$FPR_2 = AKO FR_5, ONDA IP_2.$$

$$FPR_3 = AKO FR_3, ONDA IP_2.$$

$$FPR_4 = AKO FR_4, ONDA IP_3.$$

$$FPR_5 = AKO FR_9, ONDA IP_1.$$

$$FPR_6 = AKO FR_8, ONDA IP_1.$$

$$FPR_7 = AKO FR_2, ONDA IP_3.$$

Naredni zadatak je tumačiti definisana pravila, odnosno, odrediti kako AKO deo utiče na ONDA deo. Ovaj postupak se naziva *fazi implikacija*. Kako se značenje premisa i fazi pravila može objasniti funkcijama pripadnosti, na taj način će se interpretirati i fazi implikacija. Najčešće korišćeni oblici definisanja fazi implikacije su *Implikacija zasnovana na proizvodu*, gde je funkcija pripadnosti određena sa $\mu_{FPR_i} = \mu_{FR_i} \cdot \mu_{IP_i}$ i *Mamdanijeva ili min implikacija* za koju je $\mu_{FPR_i} = \min\{\mu_{FR_i}, \mu_{IP_i}\}$. Nekada se, radi preciznijeg izražavanja, kako bi bilo jasno koje se ulazne i izlazne promenljive koriste, umesto μ_{FPR_i} piše $\mu_{FR_i} \rightarrow \mu_{IP_i}$.

U narednom primeru će biti objašnjena oba tipa fazi implikacije.

Primer 5.5. [52] *Neka su data dva diskretna fazi skupa, A i B sa trougaonim funkcijama pripadnosti*

$$\mu_A = \{(0.25, 2), (0.5, 3), (0.75, 4), (1, 5), (0.75, 6), (0.5, 7), (0.25, 8)\},$$

$$\mu_B = \{(0.33, 10), (0.67, 11), (1, 12), (0.67, 13), (0.33, 14)\}.$$

Neka je dato fazi pravilo $FPR = AKO FR, ONDA IP$, gde je FR fazi relacija oblika x je A i y je B . Operator min biće predstavljen T-normom.

Za konkretne vrednosti $x = 4$ i $y = 10$, postupkom fazifikacije se dobija da je

5.3. FAZI REGULATORI

$\mu_A(4) = 0.75$ i $\mu_B(10) = 0.33$, odakle sledi da je

$$\mu_{FR}(4, 10) = \min\{\mu_A(4), \mu_B(10)\} = \min\{0.75, 0.33\} = 0.33.$$

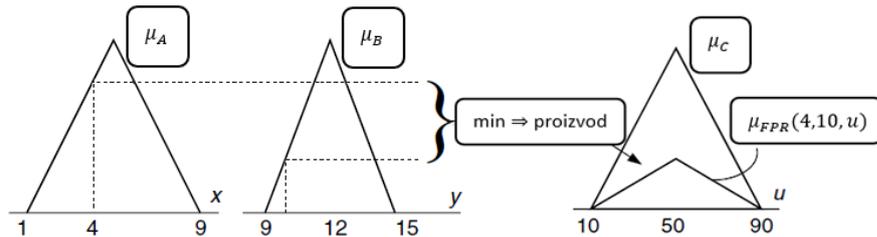
Neka je *IP* posledica fazi pravila *FPR* oblika *IP*: *u* je *C*, gde je *u* lingvistička promenljiva, a *C* lingvistička vrednost određena sa

$$\mu_C = \{(0.25, 20), (0.5, 30), (0.75, 40), (1, 50), (0.75, 60), (0.5, 70), (0.25, 80)\}.$$

Interpretacija fazi pravila *FPR* biće predstavljena funkcijom pripadnosti μ_{FPR} određenom primenom pravila proizvoda

$$\mu_{FPR}(4, 10, u) = \mu_{FR}(4, 10) \cdot \mu_C(u) = 0.33 \cdot \mu_C(u),$$

a njen grafički prikaz može se videti na Slici 5.15.



Slika 5.15: Implikacija fazi proizvoda (prilagođeno iz [52])

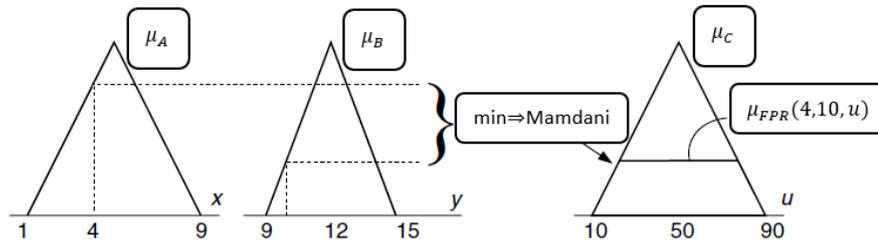
Funkcija pripadnosti μ_{FPR} kojom se predstavlja fazi pravilo *FPR*, korišćenjem Mamdanijevog, odnosno *min* pravila, ima oblik

$$\mu_{FPR}(4, 10, u) = \min\{\mu_{FR}(4, 10), \mu_C(u)\} = \min\{0.33, \mu_C(u)\}.$$

Grafički prikaz ovog pravila može se videti na Slici 5.16.

Sa prethodne dve slike se jasno vidi razlika u primeni dva pravila fazi implikacije. Primenom pravila proizvoda μ_{FPR} funkcija pripadnosti se dobija skaliranjem $\mu_C(u)$ i zadržava svoj trougaoni oblik, dok, primenom *min* pravila početna funkcija $\mu_C(u)$ prelazi u trapezoidni oblik. Prethodna situacija navodi na zaključak da tip fazi implikacije igra važnu ulogu u dizajniranju fazi regulatora, sa

GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA



Slika 5.16: Mamdanijeva (min) fazi implikacija (prilagođeno iz [52])

velikim uticajem na strukturu upravljačkog fazi algoritma.

Ukoliko ONDA deo fazi pravila sadrži singleton (jednoelementan) fazi skup, oba tipa fazi implikacije, i Mamdanijeva i pravilo proizvoda, daju istu funkciju pripadnosti fazi pravila. U našem primeru bi to bilo

$$\mu_{FPR}(4, 10, u) = \mu_{FR}(4, 10) \cdot \mu_C(u) = 0.33 \cdot 1 = 0.33 \text{ i}$$

$$\mu_{FPR}(4, 10, u) = \min\{\mu_{FR}(4, 10), \mu_C(u)\} = \min\{0.33, 1\} = 0.33.$$

Fazi implikacijom se, za svako aktivirano pravilo, kao rezultat dobija fazi skup, ali nije jasan uticaj tog skupa na crisp izlaz fazi regulatora. Crisp vrednost svake ulazne promenljive obično pripada u bar dva ulazna fazi skupa, što dovodi do aktiviranja više od jednog fazi pravila, pa više od jednog izlaznog fazi skupa daje svoj doprinos izlaznoj veličini.

Nakon aktivacije svih fazi pravila sa po jednim izlaznim fazi skupom treba doći do konačnog fazi skupa koji predstavlja rešenje i koji će se, procesom defazifikacije, prevesti u običan, crisp broj, kao izlaznu vrednost. Za ovaj postupak se koristi proces agregacije. Najčešće korišćeni operatori agregacije su max operator i sum operator.

[4] Kako bi se fazi skup, izlaz iz fazi regulatora, mogao primeniti na objekat upravljanja, on mora biti razumljiv (čitljiv), odnosno, mora se primeniti postupak **defazifikacije**. Postoji više verzija ovog postupka koji se može objasniti kao operacija kojom se, na osnovu dobijene funkcije pripadnosti $\mu_C(u)$, dobija izlazna veličina u , za $u \in C$.

Jedan od najčešće korišćenih metoda defazifikacije je metod Težišta (COA-

5.3. FAZI REGULATORI

center of area method) definisan sa

$$u_0 = \frac{\sum_i u_i \cdot \mu_C(x, y, u_i)}{\sum_i \mu_C(x, y, u_i)}, \quad (5.123)$$

gde u_0 predstavlja izlaznu vrednost fazi regulatora, $u_i \in C$ su elementi diskretnog izlaznog fazi skupa, dok su odgovarajuće funkcije pripadnosti označene sa $\mu_C(x, y, u_i)$. Ukoliko je fazi skup C neprekidan, sume iz prethodne formule treba zameniti integralima.

Još jedan metod koji se često primenjuje u sistemima za regulaciju je metod Gravitacije (COG-center of gravity method) koji je definisan na sledeći način

$$u_0 = \frac{\sum_i u_i \sum_{j=1}^r \mu_{FPR}(x, y, u_i)}{\sum_i \sum_{j=1}^r \mu_{FPR}(x, y, u_i)}, \quad (5.124)$$

gde r predstavlja broj fazi pravila.

Može se uočiti da se u metodu Gravitacije javljaju pojedinačni rezultati primene fazi pravila, zbog čega se ne koristi postupak agregacije. Osnovne karakteristike ovog metoda su jednostavnost i mala zahtevnost pri računanju, što kod sistema za upravljanje omogućava česte kontrole u malim intervalima. Ukoliko je primenjena max agregacija i nekoliko aktiviranih pravila imaju isti rezultat, metod Gravitacije će računati svaki slučaj i doprinos svakog od pravila, bez obzira na činjenicu da će svi delovi biti isti, dok će metod Težišta računati samo onaj slučaj čija je funkcija pripadnosti najviša.

Metod Gravitacije se nekada naziva i *metodom suma* zato što se u njegovoj definiciji nalazi suma funkcija pripadnosti. Takođe, nekada se metod Gravitacije naziva i metodom Težišta zato što je individualni fazi skup dobijen kao izlaz kod metoda Gravitacije jednak funkciji pripadnosti kod metoda Težišta dobijenoj agregacijom korišćenjem operatora suma.

Narednim primerom biće objašnjena razlika između ova dva metoda defazifikacije [52].

Primer 5.6. Neka su fazi skupovima $FPR_1(4, 10, u)$ i $FPR_2(4, 10, u)$ definisanim na sledeći način $FPR_1 = \{(0.25, 20), (0.25, 30), (0.25, 40), (0.25, 50), (0.25, 60),$

GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA

$(0.33, 70), (0.33, 80), (0.33, 90), (0.33, 100), (0.33, 110), (0.25, 120)\}$ i $FPR_2 = \{(0.25, 60), (0.33, 70), (0.33, 80), (0.33, 90), (0.33, 100), (0.33, 110), (0.25, 120)\}$ predstavljena dva aktivirana pravila. Na osnovu njih treba odrediti crisp izlazne vrednosti.

Proces defazifikacije počecemo metodom Težišta za koji je potrebno uraditi agregaciju pravila FPR_1 i FPR_2 . Korišćenjem max operatora agregacije dobija se da je

$$C(u) = \{(0.25, 20), (0.25, 30), (0.25, 40), (0.25, 50), (0.25, 60), (0.33, 70), (0.33, 80), (0.33, 90), (0.33, 100), (0.33, 110), (0.25, 120)\},$$

odakle sledi da je

$$u_0 = (0.25 \cdot 20 + 0.25 \cdot 30 + 0.25 \cdot 40 + 0.25 \cdot 50 + 0.25 \cdot 60 + 0.33 \cdot 70 + \dots + 0.25 \cdot 120) / (0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.33 + \dots + 0.25) = \frac{228.5}{3.15} = 72.5397.$$

Kada se za agregaciju primeni operator sume, dobija se da je

$$C(u) = \{(0.25, 20), (0.25, 30), (0.25, 40), (0.25, 50), (0.5, 60), (0.58, 70), (0.58, 80), (0.33, 90), (0.33, 100), (0.33, 110), (0.25, 120)\},$$

odakle sledi da je

$$u_0 = (0.25 \cdot 20 + 0.25 \cdot 30 + 0.25 \cdot 40 + 0.25 \cdot 50 + 0.5 \cdot 60 + 0.58 \cdot 70 + \dots + 0.25 \cdot 120) / (0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.5 + 0.58 + \dots + 0.25) = \frac{281}{3.9} = 72.0513.$$

Odradimo sada proces defazifikacije metodom Gravitacije.

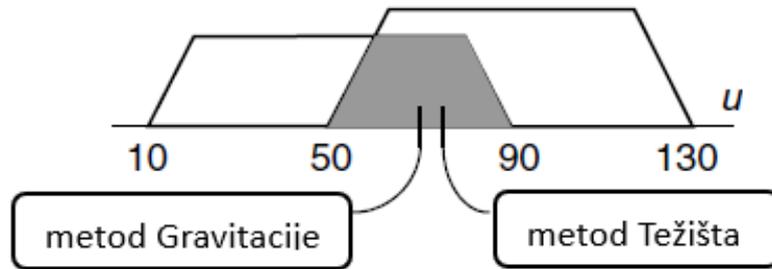
$$u_0 = (0.25 \cdot 20 + 0.25 \cdot 30 + 0.25 \cdot 40 + 0.25 \cdot 50 + (0.25 + 0.25) \cdot 60 + (0.25 + 0.33) \cdot 70 + \dots + 0.25 \cdot 120) / (0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.25 + (0.25 + 0.25) + (0.25 + 0.33) + \dots + 0.25) =$$

5.3. FAZI REGULATORI

$$= \frac{281}{3.9} = 72.0513.$$

Ovim je primerom potvrđeno da metod Težišta i metod Gravitacije daju isti rezultat kada se za agregaciju koristi metod sume.

Vrednost u_0 se kod mestoda Težišta računa tako što se svaka diskretna vrednost $u_i \in C$ pomnoži odgovarajućom funkcijom pripadnosti μ_C , dok se vrednost u_0 kod metoda Gravitacije izračunava množenjem svake diskretne vrednosti u_i sumom funkcija pripadnosti aktiviranih fazi pravilima. Razlika između ova dva metoda može se videti na Slici 5.17, gde je osenčena površina korišćena jednom kod COA i dva puta kod COG metoda.



Slika 5.17: Primer razlike između metoda Težišta i metoda Gravitacije (prilagođeno iz [52])

Ukoliko izlazne fazi skupove sa trougaonim funkcijama pripadnosti zamenimo jednoelementnim skupovima, recimo $C_1(u) = \{(1, 50)\}$ i $C_2(u) = \{(1, 90)\}$, u velikoj meri će se, korišćenjem samo nekoliko operacija sabiranja i množenja za dobijanje crisp vrednosti, pojednostaviti proces defazifikacije.

Tada je

$$\mu_{FPR1}(4, 10, u) = \min\{\mu_{FR1}(4, 10), \mu_C(u)\} = \min\{0.25, 1\} = 0.25,$$

$$\mu_{FPR2}(4, 10, u) = \min\{\mu_{FR2}(4, 10), \mu_C(u)\} = \min\{0.33, 1\} = 0.33,$$

odakle je

$$u_0 = \frac{0.25 \cdot 50 + 0.33 \cdot 90}{0.25 + 0.33} = \frac{42/2}{0.25} = 72.7586.$$

5.3.3 Primena različitih metoda defazifikacije na projektovanje fazi regulatora

U narednom primeru će biti više reči o različitim metodima defazifikacije i vremenu potrebnom za izvršenje te operacije.

Primer 5.7. *Projektovati fazi regulator Mamdanijevog tipa za reaktor A u nuklearnoj elektrani. Na radioaktivnost jezgra utiču tri glavna faktora: količina vodene pare u sistemu - VP (više pare => veća radioaktivnost), toplota nuklearnog goriva - NG (toplije gorivo => manja radioaktivnost) i koncentracija ksenona u jezgru - KS (više ksenona => manja radioaktivnost). Nuklearnom reakcijom se upravlja kontrolnim šipkama od bora koje se mogu uvlačiti ili izvlačiti iz jezgra reaktora - BO. Što je veći deo šipki ubačen u jezgro, to će one upijati više slobodnih neutrona za fisiju i tako smanjivati nuklearnu reakciju.*

Dakle, fazi regulator ima 3 ulaza: VP na domenu $[0, 100]$, NG na domenu $[0, 1000]$ i KS na domenu $[0, 10]$, kao i jedan izlaz BO na domenu $[0, 100]$ (VP, KS i BO se izražavaju u procentima, dok se NG izražava u stepenima Celzijusove skale).

Lingvističke promenljive su definisane preko svojih funkcija pripadnosti na sledeći način:

$$VP : L(10, 40), \Lambda(20, 50, 80), \Gamma(60, 90),$$

$$NG : L(100, 300), \Pi(200, 250, 400, 500), \Pi(400, 600, 700, 800), \Gamma(650, 750),$$

$$KS : L(3, 8), \Gamma(2, 7),$$

$$BO : L(10, 30), \Pi(10, 20, 40, 50), \Lambda(40, 50, 60), \Pi(50, 60, 80, 90), \Gamma(70, 90).$$

*Odgovarajući skupovi lingvističkih vrednosti koje odgovaraju zadatim funkcijama pripadnosti su: $L(VP) = \{Mala, Srednja, Velika\}$,
 $L(NG) = \{Hladno, Mlako, Vruce, Vrelo\}$, $L(KS) = \{Niska, Visoka\}$,
 $L(BO) = \{Izvuci - Brzo, Izvuci - Polako, Nema - Promene, Spusti - Polako, Spusti - Brzo\}$.*

5.3. FAZI REGULATORI

Definisana su sledeća pravila:

Pravilo 1: Ako NG je Vrelo i KS je Visoka onda BO je Izvuci-Brzo,

Pravilo 2: Ako VP je Srednja i KS je Visoka onda BO je Izvuci-Polako,

Pravilo 3: Ako VP je Srednja i NG nije Hladno onda BO je Nema-Promene,

Pravilo 4: Ako VP je Velika ili NG je Mlako ili KS je Niska onda BO je Spusti-Polako

Pravilo 5: Ako VP je Velika i NG je Hladno i KS je Niska onda BO je Spusti-Brzo

Operacija ili se definiše preko operatora \max , operacija i preko operatora \min , implikacija onda se izvršava prostim odsecanjem, a defazifikacija se vrši metodom težišta (centroid).

Prikazati grafički proceduru fazi zaključivanja i izračunati vrednost ubacivanja kontrolnih šipki u jezgro reaktora (BO) ako je $VP = 70$, $NG=360$ i $KS=4$.

U nastavku ćemo prikazati nekoliko rešenja: korišćenjem MATLAB funkcija Fuzzy logic toolbox, metodima defazifikacije predstavljenim u radovima [24, 59] i određivanjem prave $x = x_0$ kojom je (fazifikacijom) dobijeni poligon podeljen na dva dela jednakih površina.

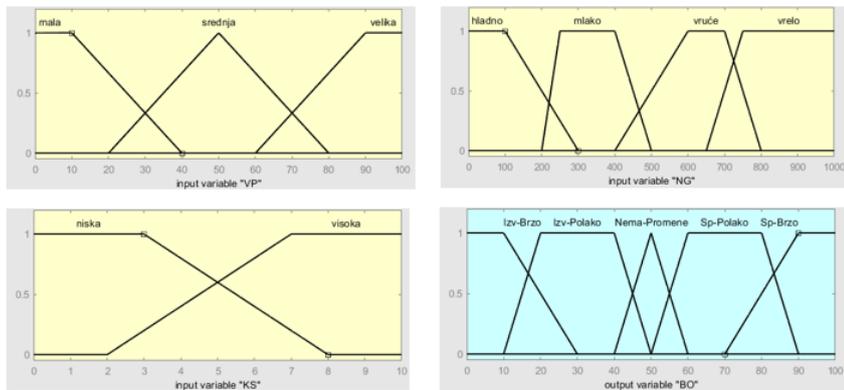
Rešenje 1: Korišćenjem MATLAB fuzzy toolbox-a određujemo parametre fazi regulatora. Lingvističke promenljive odabrane za ulaz su VP, NG i KS, dok je za izlaz određena promenljiva BO. Njihove funkcije pripadnosti prikazane su na Slici 5.18.

Detaljan prikaz procesa fazifikacije, zaključivanja, određivanja izlaza i defazifikacije za konkretne vrednosti $VP = 70$, $NG = 360$ i $KS = 4$ može se videti na Slici 5.19, na kojoj se uočava da je trenutna vrednost izlaza za zadate ulaze jednaka $BO = 58.2$.

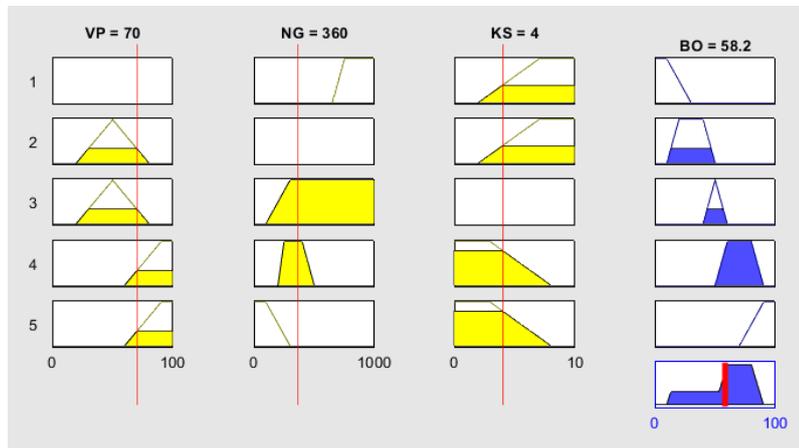
Upravljačka površina dobijena na osnovu datih ulaznih parametra može se videti na Slici 5.20.

Vreme potrebno za izvršavanje potrebnih proračune procesa defazifikacije je 0.765s.

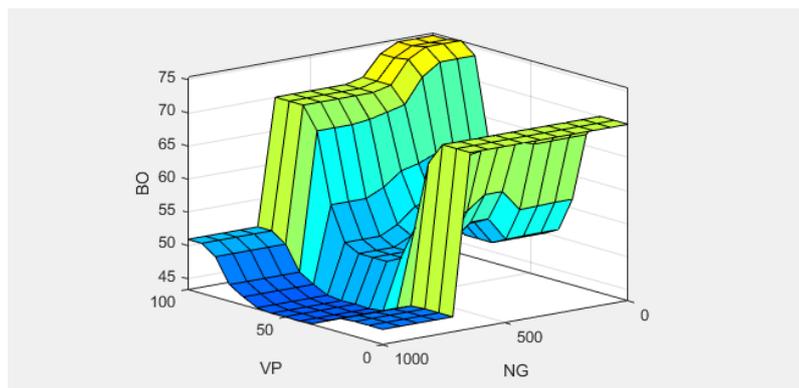
GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA



Slika 5.18: Funkcije pripadnosti za vrednosti lingvističkih promenljivih



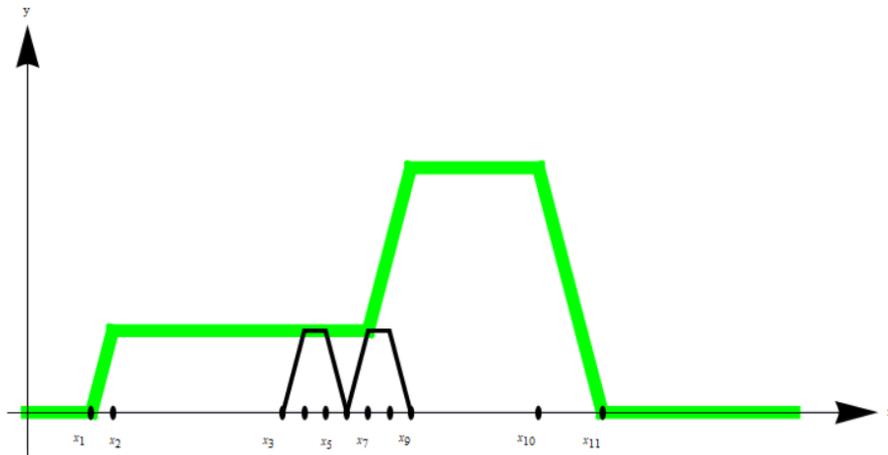
Slika 5.19: Proces zaključivanja i upravljanja nuklearnim reaktorom



Slika 5.20: Upravljačka površina fazi regulatora

5.3. FAZI REGULATORI

Rešenje 2: Agregacijom u Rešenju 1 dobija se poligon sa Slike 5.21. Tačke na x – osi u kojima se nalaze temena duže osnovice dobijenih trapeza i podnožja njihovih visina su redom označene sa $x_1 = 10, x_2 = \frac{40}{3}, x_3 = 40, x_4 = \frac{130}{3}, x_5 = \frac{140}{3}, x_6 = 50, x_7 = \frac{160}{3}, x_8 = \frac{170}{3}, x_9 = 60, x_{10} = 80$ i $x_{11} = 90$.



Slika 5.21: Poligon dobijen agregacijom

Korišćenjem ideje predstavljene u radu [24] po kojoj se trapezoidni fazi broj $\tilde{A} = (a, m, n, b)$ defazifikuje formulom

$$KV = \frac{1}{6}(a + 2(m + n) + b), \quad (5.125)$$

crisp vrednosti (KV) tri trapeza $\tilde{A}_1 = (10, \frac{40}{3}, \frac{170}{3}, 60)$, $\tilde{A}_2 = (50, 60, 80, 90)$ i $\tilde{A}_3 = (50, \frac{160}{3}, \frac{170}{3}, 60)$ koja su određena poligonom jednake su redom $KV_1 = 35$, $KV_2 = 70$ i $KV_3 = 55$, pa je tražena vrednost površine poligona jednaka $P = 50$.

Vreme potrebno za izvršavanje potrebnih proračuna procesa defazifikacije je 0.686s.

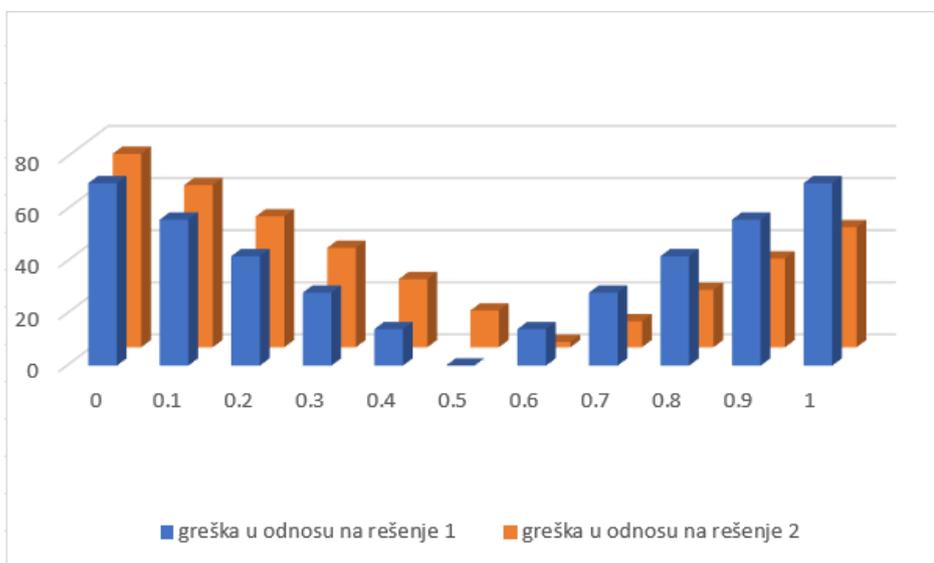
Rešenje 3: Koristeći ideju predstavljenu u radu [59] po kojoj se trapezoidni fazi broj $\tilde{A} = (a, m, n, b)$ defazifikuje formulom

GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA

$$KV = \frac{1}{2}((1 - \lambda)(a + m) + \lambda(b + n)), \quad (5.126)$$

gde vrednost $\lambda \in [0, 1]$, označava indeks optimizma, za umereni stepen optimizma, $\lambda = 0.5$, dobijamo da su crisp vrednosti trapeza jednake vrednostima dobijenim u Rešenju 2, dok je greška u odnosu na vrednost dobijenu u Rešenju 1 jednaka 14.09%.

Na Slici 5.22 biće prikazan odnos greške Rešenja 3 u poređenju sa prva dva dobijena Rešenja, za različite vrednosti parametra λ .



Slika 5.22: Odnos grešaka među rešenjima izražen u procentima

Uočavamo da se sa obe strane vrednosti $\lambda = 0.5$ procenat greške u odnosu na Rešenje 1 simetrično povećava za 14%, dok je u poređenju sa Rešenjem 2 taj procenat jednak približno 12% i širi se simetrično počev od vrednosti dobijene za vrednost $\lambda = 0.6$ u kojoj je procenat greške jednak 2.062%. U prvom slučaju, najmanji procenat greške se javlja za umeren stav donosioca odluke, dok se procenat greške povećava kada se mišljenje donosioca odluke bliži optimističnom ili pesimističnom stavu. Slična je situacija i u drugom slučaju kada je najmanja greška nastala za indeks optimizma malo veće vrednosti $\lambda = 0.6$ u odnosu na umeren stav donosioca odluke, povećavajući grešku

5.3. FAZI REGULATORI

menjanjem vrednosti indeksa optimizma. Ovi su zaključci saglasni sa činjenicom da se realni rezultati u donošenju odluka uglavnom dobijaju za srednju vrednost indeksa optimizma.

Vreme potrebno za izvršavanje potrebnih proračuna procesa defazifikacije je 0.67s.

Primedba 5.1. Upoređivanjem vremena ponuđenih rešenja potrebnih za izvršavanje procesa defazifikacije uočava se da je najmanje vremena potrebno u Rešenju 2, 0.67s, zatim u Rešenju 3, 0.686s, dok se najviše vremena utroši za postupak prikazan u Rešenju 1, 0.765s. Ako bi se upoređivala potrebna vremena za pojedine delove postupka defazifikacije, ona su po rešenjima jednaka: Rešenje 1 = 0.686s + 0.686s + 0.701s, Rešenje 2 = 0.67s + 0.67s + 0.67s, dok je kod Rešenja 3, podelom poligona na delove i korišćenjem formule 5.123, za rešavanje određenih integrala čije su granice sa x-ose odgovarajućih podelonih tačaka poligona, potrebno redom za brojilac 0.779s + 0.785s + 0.811s + 0.826s + 0.826s i imenilac 0.826s + 0.826s + 0.826s + 0.826s + 0.841s. Odavde se jasno uočava da su postupci defazifikacije prikazani u Rešenju 2 i Rešenju 3 znatno brži od uobičajenog postupka prikazanog u Rešenju 1.

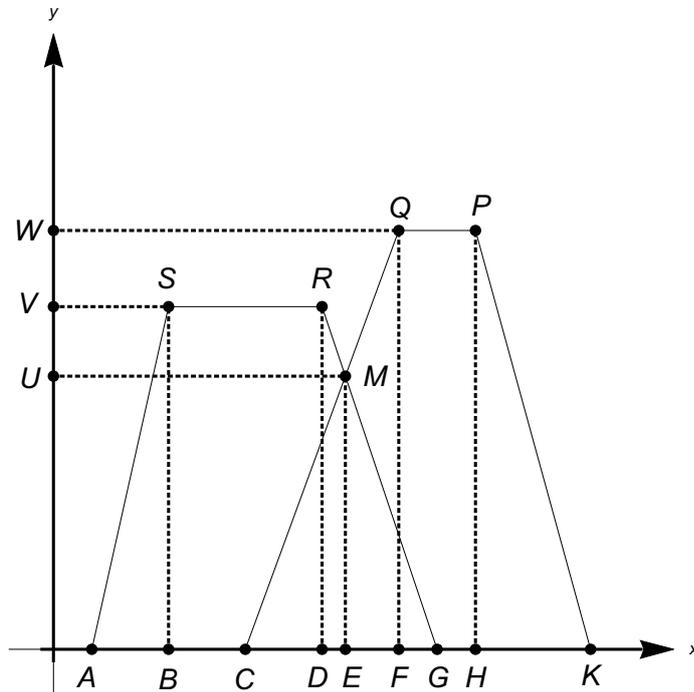
Rešenje 4: Ideja ovog rešenja se svodi na određivanje prave $x = x_0$ kojom će dobijeni poligon AKPQMRS sa Slike 5.23 biti podeljen na dva dela jednakih površina.

Koordinate tačaka na Slici 5.23 su

$$\begin{aligned}
 &A(x_1, 0), \quad B(x_2, 0), \quad C(x_3, 0), \quad D(x_4, 0) \quad E(x_5, 0), \\
 &F(x_6, 0), \quad G(x_7, 0), \quad H(x_8, 0), \quad K(x_9, 0), \quad M(x_5, \mu), \\
 &P(x_8, y_2), \quad Q(x_6, y_2), \quad R(x_4, y_1), \quad S(x_2, y_1), \quad U(0, \mu), \\
 &V(0, y_1), \quad W(0, y_2).
 \end{aligned}
 \tag{5.127}$$

Površina mnogougla AKPQMRS je jednaka zbiru površina $P_1 = P_{\triangle ABS}$,

GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA



Slika 5.23: Dva trapeza sa zajedničkom površinom

$P_2 = P_{\square BDRS}$, $P_3 = P_{\square DEMR}$, $P_4 = P_{\square EFQM}$, $P_5 = P_{\square FHPQ}$,
 $P_6 = P_{\triangle HKP}$. Ta površina je jednaka

$$P = \frac{1}{2}AB \cdot BS + BD \cdot DR + \frac{1}{2}DE \cdot (DR + EM) + \frac{1}{2}EF(EM + FQ) + FH \cdot HP + \frac{1}{2}HK \cdot KP. \quad (5.128)$$

Na osnovu koordinata $x_1, \dots, x_9, y_1, y_2, \mu$, površina P zadata jed-
 načinom (5.128) se transformiše u

$$P = \frac{1}{2}(x_4 + x_5 - x_1 - x_2)y_1 + \frac{1}{2}(x_8 + x_9 - x_5 - x_6)y_2 + \frac{1}{2}(x_6 - x_4)\mu. \quad (5.129)$$

Važi još i

5.3. FAZI REGULATORI

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{1}{2}(x_2 - x_1)y_1, & P_2 &= (x_4 - x_2)y_1, \\
 P_3 &= \frac{1}{2}(\mu + y_1)(x_5 - x_4), & P_4 &= \frac{1}{2}(\mu + y_2)(x_6 - x_5), \\
 P_5 &= (x_8 - x_6)y_2, & P_6 &= \frac{1}{2}(x_9 - x_8)y_2,
 \end{aligned} \tag{5.130}$$

kao i

$$\begin{aligned}
 \tilde{P} &= \frac{1}{2}P = \frac{1}{4}(x_4 + x_5 - x_1 - x_2)y_1 \\
 &\quad + \frac{1}{4}(x_8 + x_9 - x_5 - x_6)y_2 + \frac{1}{4}(x_6 - x_4)\mu,
 \end{aligned} \tag{5.131}$$

$$P_{12} = P_1 + P_2 = \frac{1}{2}(2x_4 - x_1 - x_2)y_1, \tag{5.132}$$

$$P_{123} = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{2}(x_5 - x_4)\mu + \frac{1}{2}(x_4 + x_5 - x_1 - x_2)y_1, \tag{5.133}$$

$$\begin{aligned}
 P_{1234} &= P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \\
 &= \frac{1}{2}(x_4 + x_5 - x_1 - x_2)y_1 + \frac{1}{2}(x_6 - x_5)y_2 + \frac{1}{2}(x_6 - x_4)\mu.
 \end{aligned} \tag{5.134}$$

Razmotrimo tačku $X_0 = (x_0, 0)$ i odgovarajući presek prave $x = x_0$ i izlomljene linije $ASRMQPK$ koji je tačka $\tilde{X}_0(x_0, y_0)$. Postoje sledeći slučajevi:

(a) Ako je $x_0 \in [x_1, x_2)$, onda se tačka \tilde{X} nalazi na duži AB . Trouglovi $\triangle AX_0\tilde{X}_0$ i $\triangle ABS$ su slični kao pravougli sa zajedničkim oštrim uglom $\angle \tilde{X}_0AX_0 \equiv \angle SAB$. Na osnovu proporcije $\frac{X_0A}{BA} = \frac{\tilde{X}_0A}{SA}$, dolazimo do zaključka da je

$$\begin{aligned}
 \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} &= \frac{y_0}{y_1} \Rightarrow y_0 = \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}y_1 \\
 \Rightarrow \tilde{P} &= \frac{1}{2}(x_0 - x_1)y_0 \Rightarrow \tilde{P} = \frac{1}{2} \frac{(x_0 - x_1)^2}{x_2 - x_1}y_1.
 \end{aligned} \tag{5.135}$$

GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA

Odatle sledi da x_0 zadovoljava kvadratnu jednačinu

$$\begin{aligned}
 0 = & \frac{y_1}{x_2 - x_1} (x_0)^2 - 2 \frac{x_1 y_1}{x_2 - x_1} x_0 + \frac{(x_1)^2 y_1}{x_2 - x_1} \\
 & - \frac{1}{2} (x_4 + x_5 - x_1 - x_2) y_1 - \frac{1}{2} (x_8 + x_9 - x_5 - x_6) y_2 \\
 & - \frac{1}{4} (x_6 - x_4) \mu.
 \end{aligned}
 \tag{5.136}$$

(b) U slučaju da je $x_0 \in [x_2, x_4)$, važi $y_0 = y_1$. Odatle sledi da je $P_1 + BX_0 \cdot BS = \tilde{P}$, tj.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} (x_2 - x_1) y_1 + (x_0 - x_2) y_1 = & \frac{1}{4} (x_4 + x_5 - x_1 - x_2) y_1 \\
 & + \frac{1}{4} (x_8 + x_9 - x_5 - x_6) y_2 \\
 & + \frac{1}{4} (x_6 - x_4) \mu.
 \end{aligned}$$

Na osnovu toga zaključujemo da je

$$x_0 = \frac{1}{4} (x_1 + x_2 + x_4 + x_5) y_1 + \frac{1}{4} (x_8 + x_9 - x_5 - x_6) y_2 + \frac{1}{4} (x_6 - x_4) \mu.
 \tag{5.137}$$

(c) Ukoliko je $x_0 \in [x_4, x_5)$, tada je $\tilde{X}_0 = \tilde{X}_0(x_0, y_0)$ tačka preseka prave $x = x_0$ i duži RM . U tom slučaju, važi $\triangle \tilde{X}_0 X_0 G \sim \triangle RDG$ (pravougli trouglovi sa zajedničkim oštrim uglom). Odatle sledi da je $\frac{x_7 - x_0}{x_7 - x_4} = \frac{y_0}{y_1}$, tj. $y_0 = \frac{x_7 - x_0}{x_7 - x_4} y_1$. Površina mnogougla $AX_0 \tilde{X}_0 RS$ je jednaka $P_1 + P_2 + \frac{1}{2} (x_0 - x_4) (y_0 + y_1) = \frac{1}{2} (2x_4 - x_1 - x_2) y_1 + \frac{1}{2} (x_0 - x_4) \left(\frac{x_7 - x_0}{x_7 - x_4} y_1 + y_1 \right)$. Sređivanjem ove jednakosti, dolazimo do zaključka da je x_0 rešenje jednačine

5.3. FAZI REGULATORI

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{y_1}{2(x_4 - x_7)}(x_0)^2 - \frac{x_7 y_1}{x_4 - x_7}x_0 + \frac{1}{4}(x_4 - x_6)\mu \\
&+ \frac{1}{4}\left(\frac{2x_4 x_7}{x_4 - x_7} + x_4 - x_1 - x_2 - x_5\right)y_1 \\
&+ \frac{1}{4}(x_5 + x_6 - x_8 - x_9)y_2.
\end{aligned} \tag{5.138}$$

(d) Razmotrimo slučaj kada je $x_0 \in [x_5, x_6]$. U tom slučaju, prava $x = x_0$ (koja sadrži tačku $X_0 = X_0(x_0, 0)$) seče duž MQ u tački $\tilde{X}_0 = \tilde{X}_0(x_0, y_0)$. Trouglovi $\triangle QFC$ i $\triangle \tilde{X}_0 X_0 C$ su slični kao pravougli sa zajedničkim oštrim uglom $\angle QCF \equiv \angle \tilde{X}_0 C X_0$. Na osnovu te sličnosti sledi da je $\frac{x_0 - x_3}{x_6 - x_3} = \frac{y_0}{y_2}$, tj. $y_0 = \frac{x_0 - x_3}{x_6 - x_3}y_2$. Površina poligona $AX_0\tilde{X}_0MRS$ je jednaka $P_1 + P_2 + P_3 + \frac{1}{2}(x_0 - x_5)(y_0 + \mu)$. Sređivanjem tog izraza, i izjednačavanjem istog sa \tilde{P} , zaključujemo da x_0 zadovoljava narednu kvadratnu jednačinu

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{y_2}{x_3 - x_6}(x_0)^2 - \left(\mu + \frac{(x_3 + x_5)y_2}{x_3 - x_6}\right)x_0 + \frac{1}{2}\mu(x_4 + x_6) \\
&+ \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_4 - x_5)y_1 \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{x_5(x_3 + x_6)}{x_3 - x_6} + x_8 + x_9 - x_6\right)y_2.
\end{aligned} \tag{5.139}$$

(e) U slučaju kada je $x_0 \in [x_6, x_8]$, tačka $X_0 = (x_0, 0)$ je na duži FH dok prava $x = x_0$ seče duž PQ u tački $\tilde{X}_0 = \tilde{X}_0(x_0, y_2)$. Površina četvorougla $AX_0\tilde{X}_0QMRS$ je jednaka $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + (x_0 - x_6)y_2$. Izjednačavanjem te površine sa \tilde{P} , dobijamo da je

$$\begin{aligned}
x_0 &= -\frac{1}{4y_2}\mu(x_6 - x_4) - \frac{1}{4y_2}(x_4 + x_5 - x_1 - x_2)y_1 \\
&- \frac{1}{4y_2}(x_9 - x_8 - x_6 - x_5)y_2
\end{aligned} \tag{5.140}$$

GLAVA 5. PRIMENE TENZORA U PROJEKTOVANJU FAZI REGULATORA

(f) U slučaju kada je $x_0 \in [x_8, x_9]$, trouglovi $\triangle PHK$ i $\triangle \tilde{X}_0 X_0 H$, gde je $X_0 = X_0(x_0, 0)$ i $\tilde{X}_0 = \tilde{X}_0(x_0, y_0)$ tačka preseka duži PK i prave $x = x_0$, su slični kao pravougli trouglovi sa zajedničkim oštrim uglom $\angle PKH \equiv \angle \tilde{X}_0 K X_0$. Odatle sledi da je $\frac{y_2}{y_0} = \frac{x_9 - x_8}{x_9 - x_0}$, tj. $y_0 = \frac{x_9 - x_0}{x_9 - x_8} y_2$. Kako prava $x = x_0$ polovi površinu mnogougla $AKPQMRS$, sledi da je površina trougla $\triangle \tilde{X}_0 X_0 K$ jednaka \tilde{P} . To znači da je $KX_0 \cdot X_0 \tilde{X}_0 = P$, tj.

$$\begin{aligned} \frac{(x_9 - x_0)^2}{x_9 - x_8} y_2 &= \frac{1}{2} (x_4 + x_5 - x_1 - x_2) y_1 \\ &+ \frac{1}{2} (x_8 + x_9 - x_5 - x_6) y_2 \\ &+ \frac{1}{2} (x_6 - x_4) \mu. \end{aligned} \quad (5.141)$$

Sređivanjem ove jednačine, dobijamo da važi

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{y_2}{x_9 - x_8} (x_0)^2 - \frac{2x_9 y_2}{x_9 - x_8} x_0 - \frac{1}{2} (x_4 + x_5 - x_1 - x_2) y_1 \\ &- \frac{1}{2} (x_8 + x_9 - x_5 - x_6 - \frac{(x_9)^2}{x_9 - x_8}) y_2 + \frac{1}{2} (x_6 - x_4) \mu. \end{aligned} \quad (5.142)$$

Razmotrimo sada specijalan slučaj sa Slike 5.23, kada je $M \equiv R$ odnosno ekvivalentno $x_5 = x_4$ i $\mu = y_1$. Opštih šest slučajeva, prethodno obrađenih, svode se na

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{x_2 - x_1} (x_0)^2 - 2 \frac{x_1 y_1}{x_2 - x_1} x_0 + \frac{(x_1)^2 y_1}{x_2 - x_1} \\ = \frac{1}{2} (x_4 + x_6 - x_1 - x_2) y_1 + \frac{1}{2} (x_8 + x_9 - x_4 - x_6) y_2, \end{aligned} \quad (5.143)$$

$$x_0 = \frac{1}{4} (x_1 + x_2 + x_4 + x_6) y_1 + \frac{1}{4} (x_8 + x_9 - x_5 - x_6) y_2, \quad (5.144)$$

5.3. FAZI REGOLATORI

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{2(x_4 - x_7)}(x_0)^2 - \frac{x_7 y_1}{x_4 - x_7} x_0 + \frac{1}{4}(x_4 + x_6 - x_8 - x_9)y_2 \\ + \frac{1}{4}\left(\frac{2x_4 x_7}{x_4 - x_7} + x_4 - x_1 - x_2 - x_6\right)y_1 = 0, \end{aligned} \quad (5.145)$$

$$\begin{aligned} \frac{y_2}{x_3 - x_6}(x_0)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x_4(x_3 + x_6)}{x_3 - x_6} + x_8 + x_9 - x_6\right)y_2 \\ - \left(y_1 + \frac{(x_3 + x_4)y_2}{x_3 - x_6}\right)x_0 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_6 - x_4)y_1 = 0, \end{aligned} \quad (5.146)$$

$$x_0 = -\frac{1}{4y_2}(x_4 + x_6 - x_1 - x_2)y_1 - \frac{1}{4y_2}(x_9 - x_8 - x_6 - x_5)y_2, \quad (5.147)$$

$$\begin{aligned} \frac{y_2}{x_9 - x_8}(x_0)^2 - \frac{2x_9 y_2}{x_9 - x_8} x_0 - \frac{1}{2}(3x_4 - x_6 - x_1 - x_2)y_1 \\ - \frac{1}{2}\left(x_8 + x_9 - x_5 - x_6 - \frac{(x_9)^2}{x_9 - x_8}\right)y_2 = 0. \end{aligned} \quad (5.148)$$

GLAVA 6

ZAKLJUČAK

Ova teza je sublimat različitih razmatranja u diferencijalnoj geometriji i odgovarajućih primena u rešavanju problema transporta i konstruisanja fazi regulatora. Sama teza, sačinjena je od Uvoda i pet poglavlja.

U prvom poglavlju, navedeni su osnovni pojmovi definisani u diferencijalnoj geometriji. Nakon definicije površi u trodimenzionalnom euklidskom prostoru i definicije tenzora, prikazani su Rimanov i generalisani Rimanov prostor, prostori simetrične i nesimetrične afine koneksije, kao i preslikavanja prostora afine koneksije.

U narednom poglavlju, unapređena su istraživanja o tenzorima krivine prostora nesimetrične afine koneksije. Motivisani dosadašnjim rezultatima, gde se insistira na postojanju tenzora krivine, izvedenih tenzora krivine i pseudotenzora krivine prostora nesimetrične afine koneksije, razmotreno je da li pseudotenzori krivine postoje kao veličine smisleno ravnopravne sa tenzorima krivine prostora nesimetrične afine koneksije.

U sledećem poglavlju, razmatrane su invarijante preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije. U prvom delu tog poglavlja su navedeni prethodno dobijeni rezultati o univerzalnim oblicima invarijanti preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije. U drugom delu ovog poglavlja su uvedene dve vrste invarijanti geometrijskih preslikavanja (vrednosna i totalna), koje su karakteristične za skoro geodezijska preslikavanja trećeg tipa. U trećem delu ovog poglavlja, prikazani su do sada neobjavljeni rezultati koji invarijante preslikavanja prostora

nesimetrične affine koneksije prikazuju u operatorskom obliku.

Četvrti deo ove disertacije je posvećen linearnom programiranju i transportnom problemu kao specijalnom obliku linearnog programiranja. Nakon razmatranja, transportni problem je uopšten na taj način što u njemu učestvuje i simetričan metrički tenzor. Zamenom dve Kronekerove delte kontravarijantnim simetričnim metričkim tenzorima uopštena je ciljna funkcija.

Peto poglavlje ove disertacije je posvećeno primenama tenzorskog računa u fazi logici. U prvom delu tog poglavlja, prikazani su osnovni pojmovi fazi logike. U drugom delu uvedeni su površinski fazi skupovi koji su nastali kao uopštenje sferičnih fazi brojeva, opisana su njihova algebarska svojstva i primena u teoriji odlučivanja. U trećem delu je razmotrena primena različitih fazi brojeva u cilju preciznijeg definisanja ulaznih veličina AKO-ONDA pravila. Na taj način, kao i korišćenjem različitih metoda defazifikacije skraćuje se vreme potrebno za izvršavanje nekih računskih operacije i time poboljšavaju sistemi automatskog upravljanja sa fazi regulatorima.

Literatura

- [1] D. Antić, B. Danković, S. Nikolić, M. Milojković, and Z. Jovanović, “Approximation based on orthogonal and almost orthogonal functions,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 349, no. 1, pp. 323–336, 2012.
- [2] D. Antić, S. Nikolić, M. Milojković, N. Danković, Z. Jovanović, and S. Perić, “Sensitivity analysis of imperfect systems using almost orthogonal filters,” *Acta Polytechnica Hungarica*, vol. 8, no. 6, pp. 79–94, 2011.
- [3] G. Appa, “The transportation problem and its variants,” *Journal of the Operational Research Society*, vol. 24, no. 1, pp. 79–99, 1973.
- [4] K. T. Atanassov, “Other extensions of intuitionistic fuzzy sets,” *Intuitionistic Fuzzy Sets: Theory and Applications*, pp. 179–198, 1999.
- [5] K. T. Atanassov and S. Stoeva, “Intuitionistic fuzzy sets,” *Fuzzy sets and Systems*, vol. 20, no. 1, pp. 87–96, 1986.
- [6] O. Belova, J. Mikeš, and K. Strambach, “About almost geodesic curves,” *Filomat*, vol. 33, no. 4, pp. 1013–1018, 2019.
- [7] V. Berezovski, J. Mikeš, P. Peška, and L. Rýparová, “On canonical f-planar mappings of spaces with affine connection,” *Filomat*, vol. 33, no. 4, pp. 1273–1278, 2019.
- [8] V. Berezovski, J. Mikeš, L. Rýparová, and A. Sabykanov, “On canonical almost geodesic mappings of type $\pi 2$ (e),” *Mathematics*, vol. 8, no. 1, p. 54, 2020.

LITERATURA

- [9] V. Berezovskii and J. Mikě, “Almost geodesic mappings of spaces with affine connection,” *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 207, no. 3, pp. 389–409, 2015.
- [10] M. Bergmann, *An introduction to many-valued and fuzzy logic: semantics, algebras, and derivation systems*. Cambridge University Press, 2008.
- [11] G. Bojadziev and M. Bojadziev, *Fuzzy sets, fuzzy logic, applications*. World scientific, 1995, vol. 5.
- [12] M. Braae and D. Rutherford, “Theoretical and linguistic aspects of the fuzzy logic controller,” *Automatica*, vol. 15, no. 5, pp. 553–577, 1979.
- [13] T. Brehm and K. Rattan, “A classical controller: a special case of the fuzzy logic controller,” *Fuzzy Logic and Intelligent Systems*, pp. 125–155, 1995.
- [14] C. Carlsson and R. Fullér, “Possibility for decision,” in *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer, 2011, vol. 270.
- [15] T. Chaira, *Fuzzy set and its extension: The intuitionistic fuzzy set*. John Wiley & Sons, 2019.
- [16] D.-Y. Chang, “Applications of the extent analysis method on fuzzy AHP,” *European journal of operational research*, vol. 95, no. 3, pp. 649–655, 1996.
- [17] G. Chen and T. T. Pham, *Introduction to fuzzy sets, fuzzy logic, and fuzzy control systems*. CRC press, 2000.
- [18] M. Ćirić, J. Ignjatović, M. Bašić, and I. Jančić, “Nondeterministic automata: equivalence, bisimulations, and uniform relations,” *Information Sciences*, vol. 261, pp. 185–218, 2014.
- [19] M. Ćirić, J. Ignjatović, I. Jančić, and N. Damljanović, “Computation of the greatest simulations and bisimulations between fuzzy automata,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 208, pp. 22–42, 2012.

LITERATURA

- [20] M. Ćirić, J. Ignjatović, Ž. Popović, and A. Stamenković, “Positive fuzzy quasi-orders on semigroups,” *Filomat*, vol. 37, no. 5, pp. 1341–1365, 2023.
- [21] M. Ćirić, J. Ignjatović, and I. Stanković, “Regular fuzzy equivalences on multi-mode multi-relational fuzzy networks,” in *2015 Conference of the International Fuzzy Systems Association and the European Society for Fuzzy Logic and Technology (IFSA-EUSFLAT-15)*. Atlantis Press, 2015, pp. 398–403.
- [22] B. Danković, D. Antić, and Z. Jovanović, “Upravljanje procesima,” *Elektronski fakultet*, 2010.
- [23] G. B. Dantzig, “Application of the simplex method to a transportation problem,” *Activity analysis and production and allocation*, 1951.
- [24] Q. H. Do, J.-F. Chen, and H.-N. Hsieh, “Trapezoidal fuzzy ahp and fuzzy comprehensive evaluation approaches for evaluating academic library service,” *WSEAS Trans. Comput.*, vol. 14, pp. 607–619, 2015.
- [25] F. Ecer and D. Pamucar, “Marcos technique under intuitionistic fuzzy environment for determining the covid-19 pandemic performance of insurance companies in terms of healthcare services,” *Applied Soft Computing*, vol. 104, p. 107199, 2021.
- [26] L. P. Eisenhart, “Generalized riemann spaces,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 37, no. 5, pp. 311–315, 1951.
- [27] ———, *Riemannian geometry*. Princeton university press, 1997, vol. 51.
- [28] ———, *Non-riemannian geometry*. Courier Corporation, 2012.
- [29] C. Gao, C. Yan, Z. Zhang, Y. Hu, S. Mahadevan, and Y. Deng, “An amoeboid algorithm for solving linear transportation problem,” *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, vol. 398, pp. 179–186, 2014.
- [30] F. Gomide, “Fundamentals of fuzzy set theory,” in *HANDBOOK ON COMPUTATIONAL INTELLIGENCE: Volume 1: Fuzzy Logic, Systems, Artifi-*

LITERATURA

- cial Neural Networks, and Learning Systems.* World Scientific, 2016, pp. 5–42.
- [31] S. Guo, L. Peters, and H. Surmann, “Design and application of an analog fuzzy logic controller,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 4, no. 4, pp. 429–438, 1996.
- [32] M. Hanss, *Applied fuzzy arithmetic.* Springer, 2005.
- [33] T. Heckenthaler and S. Engell, “Approximately time-optimal fuzzy control of a two-tank system,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 14, no. 3, pp. 24–30, 1994.
- [34] F. L. Hitchcock, “The distribution of a product from several sources to numerous localities,” *Journal of mathematics and physics*, vol. 20, no. 1-4, pp. 224–230, 1941.
- [35] J. Ignjatović, M. Ćirić, and Z. Jančić, “Weighted finite automata with output,” *Soft Computing*, vol. 22, pp. 1121–1138, 2018.
- [36] J. Ignjatović, M. Ćirić, B. Šešelja, and A. Tepavčević, “Fuzzy relational inequalities and equations, fuzzy quasi-orders, closures and openings of fuzzy sets,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 260, pp. 1–24, 2015.
- [37] J. Ignjatović, M. Ćirić, and V. Simović, “Fuzzy relation equations and sub-systems of fuzzy transition systems,” *Knowledge-Based Systems*, vol. 38, pp. 48–61, 2013.
- [38] J. Ignjatovic, M. Ciric, and I. Stankovic, “Bisimulations in fuzzy social network analysis,” in *2015 Conference of the International Fuzzy Systems Association and the European Society for Fuzzy Logic and Technology (IFSA-EUSFLAT-15)*. Atlantis Press, 2015, pp. 404–411.
- [39] S. Ivanov and M. Zlatanović, “Connections on a non-symmetric (generalized) riemannian manifold and gravity,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 33, no. 7, p. 075016, 2016.

LITERATURA

- [40] M. Jaller and I. Otay, "Evaluating sustainable vehicle technologies for freight transportation using spherical fuzzy ahp and topsis," in *International Conference on Intelligent and Fuzzy Systems*. Springer, 2020, pp. 118–126.
- [41] Z. Jančić and M. Ćirić, "Brzozowski type determinization for fuzzy automata," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 249, pp. 73–82, 2014.
- [42] Z. Jančić, I. Micić, J. Ignjatović, and M. Ćirić, "Further improvements of determinization methods for fuzzy finite automata," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 301, pp. 79–102, 2016.
- [43] Z. Juman and M. Hoque, "An efficient heuristic to obtain a better initial feasible solution to the transportation problem," *Applied Soft Computing*, vol. 34, pp. 813–826, 2015.
- [44] J. Kacprzyk, "Studies in fuzziness and soft computing 295," 2013.
- [45] D. Karabašević, D. Stanujkić, E. K. Zavadskas, P. Stanimirović, G. Popović, B. Predić, and A. Ulutaş, "A novel extension of the topsis method adapted for the use of single-valued neutrosophic sets and hamming distance for e-commerce development strategies selection," *Symmetry*, vol. 12, no. 8, p. 1263, 2020.
- [46] H. Kaufman, I. Barkana, and K. Sobel, *Direct adaptive control algorithms: theory and applications*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [47] P. T. Kieu, V. T. Nguyen, V. T. Nguyen, and T. P. Ho, "A spherical fuzzy analytic hierarchy process (sf-ahp) and combined compromise solution (co-coso) algorithm in distribution center location selection: A case study in agricultural supply chain," *Axioms*, vol. 10, no. 2, p. 53, 2021.
- [48] G. Klir and B. Yuan, *Fuzzy sets and fuzzy logic*. Prentice hall New Jersey, 1995, vol. 4.
- [49] L. Kocić, G. Milovanović, and S. Marinković, "Operaciona istraživanja," 2008.

LITERATURA

- [50] L. Kocinac, “Linearna algebra i analiticka geometrija,” *Drugo izdanje, Prosveta, Niš*, 1997.
- [51] T. C. Koopmans, “Measurement without theory,” *The Review of Economics and Statistics*, vol. 29, no. 3, pp. 161–172, 1947.
- [52] Z. Kovacic and S. Bogdan, *Fuzzy controller design: theory and applications*. CRC press, 2018.
- [53] O. Kulak, M. B. Durmuşoğlu, and C. Kahraman, “Fuzzy multi-attribute equipment selection based on information axiom,” *Journal of materials processing technology*, vol. 169, no. 3, pp. 337–345, 2005.
- [54] F. Kutlu Gündoğdu and C. Kahraman, “A novel vikor method using spherical fuzzy sets and its application to warehouse site selection,” *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, vol. 37, no. 1, pp. 1197–1211, 2019.
- [55] ———, “Spherical fuzzy sets and spherical fuzzy topsis method,” *Journal of intelligent & fuzzy systems*, vol. 36, no. 1, pp. 337–352, 2019.
- [56] ———, “A novel spherical fuzzy analytic hierarchy process and its renewable energy application,” *Soft Computing*, vol. 24, pp. 4607–4621, 2020.
- [57] Y. LANDAU, “Adaptive control: The model reference approach(book),” *New York, Marcel Dekker, Inc.(Control and Systems Theory*, vol. 8, p. 426, 1979.
- [58] S.-S. Lin, S.-L. Shen, A. Zhou, and Y.-S. Xu, “Risk assessment and management of excavation system based on fuzzy set theory and machine learning methods,” *Automation in Construction*, vol. 122, p. 103490, 2021.
- [59] T.-S. Liou and M.-J. J. Wang, “Ranking fuzzy numbers with integral value,” *Fuzzy sets and systems*, vol. 50, no. 3, pp. 247–255, 1992.
- [60] T. Mahmood, K. Ullah, Q. Khan, and N. Jan, “An approach toward decision-making and medical diagnosis problems using the concept of spherical fuzzy sets,” *Neural Computing and Applications*, vol. 31, pp. 7041–7053, 2019.

LITERATURA

- [61] M. Mathew, R. K. Chakraborty, and M. J. Ryan, "A novel approach integrating ahp and topsis under spherical fuzzy sets for advanced manufacturing system selection," *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 96, p. 103988, 2020.
- [62] R. Meier, J. Nieuwland, A. Zbinden, and S. Hacisalihzade, "Fuzzy logic control of human blood pressure during anesthesia," *IEEE control systems magazine*, vol. 12, no. 6, pp. 12–17, 1992.
- [63] J. R. Meyer, J. F. Kain, and M. Wohl, *The urban transportation problem*. Harvard University Press, 1965.
- [64] I. Micić, Z. Jančić, J. Ignjatović, and M. Ćirić, "Determinization of fuzzy automata by means of the degrees of language inclusion," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 23, no. 6, pp. 2144–2153, 2015.
- [65] J. Mikeš, E. Stepanova, A. Vanžurová, S. Bácsó, V. Berezovski, O. Chepurina, M. Chodorová, H. Chudá, M. Gavrilchenko, M. Haddad *et al.*, *Differential geometry of special mappings*. Palacký University Olomouc, Czech Republic, 2015.
- [66] M. Milojković, D. Antić, M. Milovanović, S. S. Nikolić, S. Perić, and M. Almawlawe, "Modeling of dynamic systems using orthogonal endocrine adaptive neuro-fuzzy inference systems," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 137, no. 9, p. 091013, 2015.
- [67] M. Milojković, M. Milovanović, S. S. Nikolić, M. Spasić, and A. Antić, "Designing optimal models of nonlinear mimo systems based on orthogonal polynomial neural networks," *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, vol. 27, no. 1, pp. 246–262, 2021.
- [68] M. T. Milojković, D. S. Antić, S. S. Nikolić, Z. D. Jovanović, and S. L. Perić, "On a new class of quasi-orthogonal filters," *International Journal of Electronics*, vol. 100, no. 10, pp. 1361–1372, 2013.
- [69] M. T. Milojkovic, A. D. Djordjevic, S. L. Peric, M. B. Milovanovic, Z. H. Peric, and N. B. Dankovic, "Model predictive control of nonlinear mimo

LITERATURA

- systems based on adaptive orthogonal polynomial networks,” *Elektronika ir Elektrotehnika*, vol. 27, no. 2, pp. 4–10, 2021.
- [70] D. M. Milošević, M. R. Milošević, and D. J. Simjanović, “Implementation of adjusted fuzzy AHP method in the assessment for reuse of industrial buildings,” *Mathematics*, vol. 8, no. 10, p. 1697, 2020.
- [71] M. R. Milošević, D. M. Milošević, A. D. Stanojević, D. M. Stević, and D. J. Simjanović, “Fuzzy and interval ahp approaches in sustainable management for the architectural heritage in smart cities,” *Mathematics*, vol. 9, no. 4, p. 304, 2021.
- [72] P. Milošević, B. Petrović, and I. Dragović, “A novel approach to generalized intuitionistic fuzzy sets based on interpolative boolean algebra,” *Mathematics*, vol. 9, no. 17, p. 2115, 2021.
- [73] P. Milošević, B. Petrović, and V. Jeremić, “Ifs-iba similarity measure in machine learning algorithms,” *Expert Systems with Applications*, vol. 89, pp. 296–305, 2017.
- [74] M. B. Milovanović, D. S. Antić, M. T. Milojković, S. S. Nikolić, S. L. Perić, and M. D. Spasić, “Adaptive pid control based on orthogonal endocrine neural networks,” *Neural Networks*, vol. 84, pp. 80–90, 2016.
- [75] M. B. Milovanović, D. S. Antić, M. T. Milojković, and M. D. Spasić, “Adaptive control of nonlinear mimo system with orthogonal endocrine intelligent controller,” *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 52, no. 2, pp. 1221–1232, 2020.
- [76] S. Minčić, “Ricci identities in the space of non-symmetric affine connexion,” *Matematički vesnik*, vol. 10, no. 57, pp. 161–172, 1973.
- [77] S. Mincic, “On curvature tensors and pseudotensors of the spaces with non-symmetric affine connection,” *Math. Balkanica (NS)*, vol. 76, no. 4, pp. 427–430, 1974.

LITERATURA

- [78] S. Minčić, “Curvature tensors of the space of non-symmetric affine connexion, obtained from the curvature pseudotensors,” *Matematički Vesnik*, vol. 13, no. 62, pp. 421–435, 1976.
- [79] S. Mincic, “Independent curvature tensors and pseudotensors of spaces with non-symmetric affine connexion,” *Coll. Math. Soc. János Bolyai*, vol. 31, pp. 445–460, 1979.
- [80] S. Minčić, “Generalisani rimanovi prostori,” Ph.D. dissertation, University of Novi Sad (Serbia), 1975.
- [81] S. M. Minčić, “New commutation formulas in the non-symmetric affine connexion space,” *Publications de l’Institut Mathématique*, vol. 22, no. 42, pp. 189–199, 1977.
- [82] —, “On curvature tensors of non-symmetric affine connection,” *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*, vol. 9, pp. 13–20, 2005.
- [83] —, “On ricci type identities in manifolds with non-symmetric affine connection,” *Publications de l’Institut Mathématique*, vol. 94, no. 108, pp. 205–217, 2013.
- [84] —, “On some properties of non-symmetric connections,” *Filomat*, vol. 29, no. 3, pp. 585–591, 2015.
- [85] S. M. Mincic and M. S. Stankovic, “Equitortion geodesic mappings of generalized riemannian spaces,” *Publ. Inst. Math.(Beograd)(NS)*, vol. 61, no. 75, pp. 97–104, 1997.
- [86] S. M. Minčić and L. S. Velimirović, “Spaces with non-symmetric affine connection.” *Novi Sad Journal of Mathematics*, vol. 38, no. 3, pp. 157–164, 2008.
- [87] S. Minčić and V. LJ, “Diferencijalna geometrija krivih i površi,” *Prirodno matematički fakultet u Nišu, Niš*, 2007.

LITERATURA

- [88] S. M. Minčić and M. V. Lj, “Diferencijalna geometrija mnogostrukosti,” *Prirodno matematički fakultet u Nišu, Niš*, 2011.
- [89] —, “Tenzorski račun, drugo izdanje,” *Prirodno matematički fakultet u Nišu, Niš*, 2020.
- [90] Đ. Mušicki and B. Milić, *Matematičke osnove teorijske fizike: sa zbirkom rešenih zadataka*. Prirodno-matematički fakultet Univerziteta, 1984.
- [91] K. Nakamura, N. Sakashita, Y. Nitta, K. Shimomura, and T. Tokuda, “Fuzzy inference and fuzzy inference processor,” *IEEE Micro*, vol. 13, no. 5, pp. 37–48, 1993.
- [92] M. B. Naumović, “Tehnike optimalnog upravljanja,” *Elektronski fakultet u Nišu*, pp. 47–51, 2007.
- [93] P.-H. Nguyen, J.-F. Tsai, T.-T. Dang, M.-H. Lin, H.-A. Pham, and K.-A. Nguyen, “A hybrid spherical fuzzy mcdm approach to prioritize governmental intervention strategies against the covid-19 pandemic: A case study from vietnam,” *Mathematics*, vol. 9, no. 20, p. 2626, 2021.
- [94] S. S. Nikolić, D. S. Antić, S. L. Perić, N. B. Danković, and M. T. Milojković, “Design of generalised orthogonal filters: Application to the modelling of dynamical systems,” *International Journal of Electronics*, vol. 103, no. 2, pp. 269–280, 2016.
- [95] E. Pap, *Fazi mere i njihova primena*. Prirodno-matematički fakultet, 1999.
- [96] M. J. Patyra, J. L. Grantner, and K. Koster, “Digital fuzzy logic controller: design and implementation,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 4, no. 4, pp. 439–459, 1996.
- [97] S. L. Perić, D. S. Antić, M. B. Milovanović, D. B. Mitić, M. T. Milojković, and S. S. Nikolić, “Quasi-sliding mode control with orthogonal endocrine neural network-based estimator applied in anti-lock braking system,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 21, no. 2, pp. 754–764, 2015.

LITERATURA

- [98] M. Z. Petrović, “Canonical almost geodesic mappings of type $\pi_{\theta}^2(0, f)$, $\theta \in \{1, 2\}$ between generalized parabolic kaehler manifolds,” *Miskolc Mathematical Notes*, vol. 19, no. 1, pp. 469–482, 2018.
- [99] —, “Generalized para-kähler spaces in eisenhart’s sense admitting a holomorphically projective mapping,” *Filomat*, vol. 33, no. 13, pp. 4001–4012, 2019.
- [100] M. Z. Petrović and M. S. Stanković, “Special almost geodesic mappings of the first type of non-symmetric affine connection spaces,” *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, vol. 40, no. 3, pp. 1353–1362, 2017.
- [101] M. Z. Petrović and L. S. Velimirović, “Generalized kähler spaces in eisenhart’s sense admitting a holomorphically projective mapping,” *Mediterranean Journal of Mathematics*, vol. 15, no. 4, pp. 1–22, 2018.
- [102] —, “A new type of generalized para-kähler spaces and holomorphically projective transformations,” *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, vol. 45, no. 4, pp. 1021–1043, 2019.
- [103] M. Z. Petrović, N. O. Vesić, and M. L. Zlatanović, “Curvature properties of metric and semi-symmetric linear connections,” *Quaestiones Mathematicae*, vol. 45, no. 10, pp. 1603–1627, 2022.
- [104] G. Peyré, M. Cuturi *et al.*, “Computational optimal transport: With applications to data science,” *Foundations and Trends® in Machine Learning*, vol. 11, no. 5-6, pp. 355–607, 2019.
- [105] S. G. Quek, G. Selvachandran, M. Munir, T. Mahmood, K. Ullah, L. H. Son, P. H. Thong, R. Kumar, and I. Priyadarshini, “Multi-attribute multi-perception decision-making based on generalized t-spherical fuzzy weighted aggregation operators on neutrosophic sets,” *Mathematics*, vol. 7, no. 9, p. 780, 2019.
- [106] A. Schrijver, “On the history of the transportation and maximum flow problems,” *Mathematical programming*, vol. 91, pp. 437–445, 2002.

LITERATURA

- [107] K. Self, “Designing with fuzzy logic,” *IEEE spectrum*, vol. 27, no. 11, pp. 42–44, 1990.
- [108] D. J. Simjanović and N. O. Vesić, “Commutation formulae with respect to non-symmetric affine connection,” *Quaestiones Mathematicae*, vol. 45, no. 11, pp. 1669–1682, 2022.
- [109] D. J. Simjanović, N. Zdravković, and N. O. Vesić, “On the factors of successful e-commerce platform design during and after covid-19 pandemic using extended fuzzy ahp method,” *Axioms*, vol. 11, no. 3, p. 105, 2022.
- [110] N. Sinyukov, “Geodesic mappings of riemannian spaces,” 1979.
- [111] F. Smarandache, “Definition of neutrosophic logic: a generalization of the intuitionistic fuzzy logic,” in *Proceedings of the third conference of the European society for fuzzy logic and technology (EUSFLAT)*, 2003, pp. 141–146.
- [112] —, *A unifying field in logics: neutrosophic logic. Neutrosophy, neutrosophic set, neutrosophic probability: neutrosophic logic. Neutrosophy, neutrosophic set, neutrosophic probability.* Infinite Study, 2005.
- [113] —, “Neutrosophic logic-a generalization of the intuitionistic fuzzy logic,” *Multispace & multistructure. Neutrosophic transdisciplinarity (100 collected papers of science)*, vol. 4, p. 396, 2010.
- [114] V. Sobchuk, J. Mikeš, and O. Pokorná, “On almost geodesic mappings between semisymmetric riemannian spaces.” *Novi Sad Journal of Mathematics*, vol. 29, no. 3, pp. 309–312, 1999.
- [115] B. Srdjevic and Y. D. P. Medeiros, “Fuzzy AHP assessment of water management plans,” *Water Resources Management*, vol. 22, no. 7, pp. 877–894, 2008.
- [116] A. Stamenković, M. Ćirić, and M. Bašić, “Ranks of fuzzy matrices. applications in state reduction of fuzzy automata,” *Fuzzy Sets and systems*, vol. 333, pp. 124–139, 2018.

LITERATURA

- [117] A. Stamenković, M. Ćirić, and D. Djurdjanović, “Weakly linear systems for matrices over the max-plus quantale,” *Discrete Event Dynamic Systems*, pp. 1–25, 2022.
- [118] A. Stamenković, M. Ćirić, and J. Ignjatović, “Reduction of fuzzy automata by means of fuzzy quasi-orders,” *Information Sciences*, vol. 275, pp. 168–198, 2014.
- [119] S. Stanimirović, M. Ćirić, and J. Ignjatović, “Determinization of fuzzy automata by factorizations of fuzzy states and right invariant fuzzy quasi-orders,” *Information Sciences*, vol. 469, pp. 79–100, 2018.
- [120] S. Stanimirović, I. Micić, and M. Ćirić, “Approximate bisimulations for fuzzy automata over complete heyting algebras,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 30, no. 2, pp. 437–447, 2020.
- [121] S. Stanimirović, A. Stamenković, and M. Ćirić, “Improved algorithms for computing the greatest right and left invariant boolean matrices and their application,” *Filomat*, vol. 33, no. 9, pp. 2809–2831, 2019.
- [122] I. Stankovic, M. Ciric, and J. Ignjatovic, “Bisimulations for weighted networks with weights in a quantale,” *Filomat*, vol. 37, no. 11, pp. 3335–3355, 2023.
- [123] M. Stanković, M. Ćirić, and J. Ignjatović, “Simulations and bisimulations for fuzzy multimodal logics over heyting algebras,” *Filomat*, vol. 37, no. 3, pp. 711–743, 2023.
- [124] M. Stanković, “On a special almost geodesic mapping of third type of affine spaces.” *Novi Sad Journal of Mathematics*, vol. 31, no. 2, pp. 125–135, 2001.
- [125] M. S. Stankovic, “First type almost geodesic mappings of general affine connection spaces,” *Novi Sad J. Math*, vol. 29, no. 3, pp. 313–323, 1999.
- [126] M. S. Stanković, “On a canonic almost geodesic mappings of the second type of affine spaces,” *Filomat*, pp. 105–114, 1999.

LITERATURA

- [127] ———, “Special equitorsion almost geodesic mappings of the third type of non-symmetric affine connection spaces,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 244, pp. 695–701, 2014.
- [128] M. S. Stanković, M. L. Zlatanović, and L. S. Velimirović, “Equitorsion holomorphically projective mappings of generalized kählerian space of the first kind,” *Czechoslovak Mathematical Journal*, vol. 60, no. 3, pp. 635–653, 2010.
- [129] D. Stanujkic, D. Karabasevic, G. Popovic, F. Smarandache, E. K. Zavadskas, and I. Meidute-Kavaliauskiene, *Multiple-criteria decision-making based on the use of single-valued neutrosophic sets and similarity measures*. Infinite Study, 2021.
- [130] C.-C. Sun, “A performance evaluation model by integrating fuzzy AHP and fuzzy TOPSIS methods,” *Expert systems with applications*, vol. 37, no. 12, pp. 7745–7754, 2010.
- [131] H. J. Sussmann and J. C. Willems, “300 years of optimal control: from the brachistochrone to the maximum principle,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 17, no. 3, pp. 32–44, 1997.
- [132] W. Szwarz, “Some remarks on the time transportation problem,” *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 18, no. 4, pp. 473–485, 1971.
- [133] T. Takagi and M. Sugeno, “Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control,” *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, no. 1, pp. 116–132, 1985.
- [134] K. L. Tang and R. J. Mulholland, “Comparing fuzzy logic with classical controller designs,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 17, no. 6, pp. 1085–1087, 1987.
- [135] M. Tavana, A. Shaabani, S. Mansouri Mohammadabadi, and N. Varzгани, “An integrated fuzzy ahp-fuzzy multimoora model for supply chain risk-benefit assessment and supplier selection,” *International Journal of Systems Science: Operations & Logistics*, vol. 8, no. 3, pp. 238–261, 2021.

LITERATURA

- [136] D. Teodorović and S. Kikuchi, “Fuzzy skupovi i primene u saobraćaju,” *Beograd: Saobraćajni fakultet*, 1994.
- [137] A. Tolstoi, “Methods of finding the minimal total kilometrage in cargo transportation planning in space,” *TransPress of the National Commissariat of Transportation*, vol. 1, pp. 23–55, 1930.
- [138] N. O. Vesić, “Eighty one ricci-type identities,” *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, pp. 1059–1078, 2021.
- [139] N. O. Vesić, D. D. Dimitrijević, and D. J. Simjanović, “Generalized riemannian spaces with respect to 4-velocity vectors and functions of state parameters,” *Filomat*, vol. 35, no. 5, pp. 1519–1541, 2021.
- [140] N. O. Vesić, L. S. Velimirović, and M. S. Stanković, “Some invariants of equitortion third type almost geodesic mappings,” *Mediterranean Journal of Mathematics*, vol. 13, no. 6, pp. 4581–4590, 2016.
- [141] N. O. Vesić, N. Zdravković, and D. J. SIMJANOVIĆ, “Securing online assessments using christoffel symbols,” *For Publisher*, p. 54, 2020.
- [142] N. O. Vesić, “Basic invariants of geometric mappings,” *Miskolc Mathematical Notes*, pp. 473–487, 2020.
- [143] W.-M. Wang, A. H. Lee, and D.-T. Chang, “An integrated FA-FEAHP approach on the social indicators of Taiwan’s green building,” *Global Business and Economics Review*, vol. 11, no. 3-4, pp. 304–316, 2009.
- [144] W. L. Winston, “Operations research: Application and algorithms 4th edition: Thomson learning,” 2004.
- [145] ———, *Operations research: applications and algorithms*. Cengage Learning, 2022.
- [146] R. Yager, “Pythagorean fuzzy subsets,[in:] 2013 joint ifsa world congress and nafips annual meeting (ifsa/nafips),” 2013.

LITERATURA

- [147] H. Ying, W. Siler, and J. J. Buckley, “Fuzzy control theory: A nonlinear case,” *Automatica*, vol. 26, no. 3, pp. 513–520, 1990.
- [148] L. A. Zadeh, “Fuzzy sets,” *Information and control*, vol. 8, no. 3, pp. 338–353, 1965.
- [149] ———, “Fuzzy sets,” in *Fuzzy sets, fuzzy logic, and fuzzy systems: selected papers by Lotfi A Zadeh*. World Scientific, 1996, pp. 394–432.
- [150] ———, “The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—i,” *Information sciences*, vol. 8, no. 3, pp. 199–249, 1975.
- [151] M. L. Zlatanović, “On equitorsion geodesic mappings of general affine connection spaces onto generalized riemannian spaces,” *Applied Mathematics Letters*, vol. 24, no. 5, pp. 665–671, 2011.
- [152] ———, “New projective tensors for equitorsion geodesic mappings,” *Applied Mathematics Letters*, vol. 25, no. 5, pp. 890–897, 2012.

BIOGRAFIJA AUTORA

Dušan J. Simjanović je rođen 10. 12. 1985. g. u Skoplju. Osnovnu školu je završio u Prizrenu i Nišu sa odličnim uspehom (5,00) i gimnaziju u Nišu sa prosečnom ocenom 4,93. Studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu, na Departmanu za matematiku i informatiku, smer Teorijska matematika i primene, završio je 2010. g. sa prosekom 8,43.

Karijeru nastavnika matematike započeo je u gimnaziji *Svetozar Marković* u Nišu i osnovnoj školi *Vuk Karadžić* u Doljevcu. Na Fakultetu Informatičkih Tehnologija Univerziteta Metropolitan radi od 2016. g. kao asistent matematičke grupe predmeta. Tokom svoje univerzitetske karijere bio je angažovan na obavljanju nastave iz predmeta Matematika 1, Matematika za IT, Matematika 2, Linearna algebra, Matematička analiza, Diskretne strukture, Verovatnoća i statistika i Poslovna statistika sa verovatnoćom.

Do sada je objavio 45 radova u naučnim i stručnim časopisima i zbornicima sa konferencija, od kojih 7 radova u časopisima sa SCI/SCIE liste. Oblasti interesovanja i naučnog rada su mu Tenzorski račun, Fazi logika i Višekriterijumsko odlučivanje.

Spoljni je saradnik Zavoda za vrednovanje kvaliteta obrazovanja i vaspitanja.

Oženjen je i otac jednog deteta.

POPIS RADOVA AUTORA

M14:

1. **D. Milošević, M. Milošević, D. Simjanović**, *A Comparative Study of FAHP with Type-1 and Interval Type-2 Fuzzy Sets for ICT Implementation in Smart Cities*, Lecture notes in networks and systems 308, Series Editor Janusz Kacprzyk, 2022 ISSN: 2367-3370.
2. **D. J. Simjanović, N. Zdravković, T. Šibaliija**, *Applying AHP to smart-city development: Mobility, Healthcare and Education*, in book *Advanced Engineering Optimization Through Intelligent Techniques*, 2022, DOI : 10.1007/978-981-19-9285-8.

M21A:

1. **D. M. Milošević, M. R. Milošević, D. J. Simjanović**, *Implementation of Adjusted Fuzzy AHP Method in the Assessment for Reuse of Industrial Buildings*, *Mathematics*, 2020, 8, 1697.
2. **M. R. Milošević, D. M. Milošević, D. J. Simjanović**, *Fuzzy and Interval AHP Approaches in Sustainable Management for the Architectural Heritage in Smart Cities*, *Mathematics*, 2021, 9, 304.

M21:

1. **D. J. Simjanović, N. O. Vesić**, *Commutation formulae with respect to non-symmetric affine connection*, *Quaestiones Mathematicae*, 2022, 45 (11), 1669–1682.

2. **D. J. Simjanović, N. Zdravković, N. O. Vesić**, *On the Factors of Successful e-Commerce Platform Design during and after COVID-19 Pandemic Using Extended Fuzzy AHP Method*, *Axioms*, 2022, 11(3), 105.

M22:

1. **D. J. Simjanović, N. O. Vesić**, *Novel invariants for almost geodesic mappings of the third type*, *Miskolc Mathematical Notes*, 2021, 22 (2), 961–975.
2. **N. O. Vesić, D. D. Dimitrijević, D. J. Simjanović**, *Generalized Riemannian Spaces With Respect to 4-Velocity Vectors and Functions of State Parameters*, *Filomat*, 2021, 35 (5), 1519–1541.
3. **D. J. Simjanović, N. O. Vesić, J. M. Ignjatović, B. M. Randelović**, *A Novel Surface Fuzzy Analytic Hierarchy Process*, *Filomat*, 2023, 37 (11), 3357–3370.

M24:

1. **M. Grčak, D. Grčak, A. Penjišević, D. Simjanović, B. Orbović, N. Đukić, V. Rajčić**, *The trends in maize and wheat production in the republic of Serbia*, *Acta Agriculturae Serbica*, 2020, 25(50), 121–127.

1. **N. Zdravković, N. O. Vesić, D. J. Simjanović**, *Securing online assessments using Cristoffel symbols*, The 11th International Conference on eLearning 24-25 September, 2020, Belgrade, Serbia, 54–57.
2. **D. J. Simjanović, N. O. Vesić, B. M. Ranđelović, N. Zdravković, Đ. Vujadinović**, *A new cryptographic algorithm based on affine connection coefficients*, The 12th International Conference on Business Information Security, 3rd December, Belgrade, Serbia, 71–74, 2021.
3. **D. J. Simjanović, N. Zdravković, B. M. Ranđelović, N. O. Vesić**, *Utilizing AHP for smart-city development with blockchain-based solutions for Healthcare, Government and Education*, In: Zdravkovic, M., Trajanovic, M., Konjovic, Z. (Eds.), ICIST 2022 Proceedings, 2022, 172–175.
4. **D. J. Simjanović, D. M. Milošević, M. R. Milošević**, *Fuzzy AHP based Ranking of Cryptography Indicators*, In 15th International Conference on Advanced Technologies, Systems and Services in Telecommunications (TELSIKS), IEEE, 2021, 237–240.
5. **D. J. Simjanović, N. O. Vesić, B. M. Ranđelović, Đ. Vujadinović**, *Cyber Security Criteria: Fuzzy AHP approach*, The 13th International Conference on Business Information Security, 2022, 2nd December, Belgrade, Serbia, 62–67.
6. **D. Stević, M. Milošević, D. Milošević, D. Simjanović**, *Analysis of numerical indicators of ecological conditions of Belvil complex using aero-photogrammetry*, The 8th International conference Contemporary achievements in civil engineering, 22–23. April 2021., Subotica, Serbia, 497–504.
7. **D. Milošević, M. Milošević, D. Simjanović**, *A comparative study of FAHP with type-1 and interval type-2 fuzzy sets for ICT implementation in smart cities*, In Intelligent and Fuzzy Techniques for Emerging Conditions and Digital Transformation, Proceedings of

the INFUS 2021 Conference, held August 24–26, 2021, Springer International Publishing, 2022, Volume 2, 845–852.

M51

1. **M. Milošević, D. Milošević, A. Stanojević, D. Simjanović**, *IAHP kao podrška primeni tehnoloških inovacija u razvoju pametnih gradova*, *Ecologica*, 2020, 27 (99), 407–413.
2. **V. Knežević, A. Penjišević, D. Simjanović, M. Grčak**, *Statistical analysis of macroeconomic importance of agriculture for Serbia*, *Agroekonomika*, 2021, vol. 92, 31–44.
3. **D. Stević, M. Milošević, D. Milošević, D. Simjanović**, *Analiza numeričkih indikatora ekoloških uslova kompleksa "Belvil" primenom aerofotogrametrije*, *Zbornik radova građevinskog fakulteta u Subotici*, 2021, Vol. 37, 497–504.

M52

1. **N. O. Vesić, D. J. Simjanović**, *Matrix-based algorithm for text-data hiding and information processing*, *Vojnotehnicki glasnik/Military Technical Courier*, 2014, 62(1), 42–57.
2. **D. J. Simjanović, B. M. Randelović**, *Kriterijumi koji utiču na akademske performanse tokom KOVID-19 pandemije*, *Zbornik učiteljskog fakulteta u Leposaviću*, 2022, 18, 39–48.

M53

1. **D. J. Simjanović, B. M. Randelović, N. O. Vesić, A. Penjišević**, *Examples of mathematical problems in primary and secondary education that include the actual calendar year*, *Facta Universitatis: Series: Teaching, Learning and Teacher Education* Vol. 5, No. 2, 2021, 191–200.
2. **D. J. Simjanović**, *Tensor approach to finding a basic feasible solution of the transportation problem*, *Appl. Math. Comp. Sci.*, 2023, 7 (1), 25–35.

POPIS RADOVA AUTORA

M64

1. **D. Simjanović, B. Randelović**, *Criteria Affecting Academic Performance During the COVID-19 Pandemic*, Scientific Conference with International Participation „Obrazovne aktivnosti i vaspitno-obrazovni rad u uslovima pandemije”, Leposavic, March 04, 2022, Proc. of Abstracts (ed: B.Randjelovic), Teachers Faculty, Leposavic, 2022 pp.39–40.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

Тензорски рачун у просторима симетричне и несиметричне афине конекције и примене у линеарном програмирању и пројектовању фази регулатора

која је одбрањена на Електронском факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао/ла на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, _____

Потпис аутора дисертације:


Душан Ј. Симјановић

**ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ЕЛЕКТРОНСКОГ И ШТАМПАНОГ ОБЛИКА
ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ**

Наслов дисертације

**Тензорски рачун у просторима симетричне и несиметричне афине конекције и
примене у линеарном програмирању и пројектовању фази регулатора**

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам
предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу**, истоветан
штампаном облику.

У Нишу, _____

Потпис аутора дисертације:


Душан Ј. Симјановић

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

Тензорски рачун у просторима симетричне и несиметричне афине конекције и примене у линеарном програмирању и пројектовању фази регулатора

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде (CC BY-NC-ND)
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство – без прераде (CC BY-ND)
6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

У Нишу, _____

Потпис аутора дисертације:


Душан Ј. Симјановић