UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Aleksandar S. Kostić

FIKSNE I NAJBOLJE APROKSIMACIONE TAČKE ZA PRESLIKAVANJA NA METRIČKIM PROSTORIMA I UOPŠTENJA

DOKTORSKA DISERTACIJA

Niš, 2020.

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS

Aleksandar S. Kostić

FIXED AND BEST PROXIMITY POINTS FOR MAPPINGS ON METRIC SPACES AND GENERALIZATIONS

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2020.

Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	Др Владимир Ракочевић, редовни професор, Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет, дописни члан САНУ
Наслов:	Фиксне и најбоље апроксимационе тачке за пресликавања на метричким просторима и уопштења
Резиме:	Тема докторске дисертације су теореме о тачкама најбоље апроксимације и фиксним тачкама оператора на метричким и генералисаним метричким просторима. Из одговарајућих теорема о тачкама најбоље апроксимације могуће је извести као последице тврђења о фиксним тачкама за дати тип пресликавања. Слично, из резултата на просторима са генералисаним метрикама се даље изводе одговарајући резултати у обичним метричким просторима. На тај начин се обједињују многи познати резултати из теорије фиксне тачке. Текст дисертације подељен је у три главе. Прва глава је уводног карактера. Друга глава садржи главне резултате до којих је аутор дошао самостално или у коауторству у радовима објављеним у истакнутим међународним часописима са SCI листе. У трећој глави је изучавана примена главних резултата на решавање интегралних једначина и варијационих неједнакости, и наведени су правци за могућа даља истраживања.
Научна област:	Математика
Научна дисциплина:	Математичка анализа, Функционална анализа
Кључне речи:	Фиксна тачка, најбоља апроксимациона тачка, метрички простор
УДК:	517.988.5 (043.3)
CERIF класификација:	P 140 Класе, Фуријерова анализа, функционална анализа
Тип лиценце Креативне заједнице:	

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	Dr Vladimir Rakočević, full professor, University of Niš, Faculty of sciences and mathematics, corresponding member of SASA
Title:	Fixed and best proximity points for mappings on metric spaces and generalizations
Abstract:	The theme of this doctoral dissertation are best proximity point and fixed point theorems for operators on metric and generalized metric spaces. From the corresponding best proximity point theorems, it is possible to derive as consequences, the statements about fixed points for given type of mappings. Similarly, from the results in spaces with a generalized metrics, we further deduce corresponding results on usual metric spaces. In that manner, some well-known results of fixed point theory are unified. The text of the dissertation is divided into three chapters. The first chapter is of introductory character. The second chapter contains the main results which were obtained by the author independently or in co-authorship in papers published in distinguished international journals on the SCI list. In the third chapter, the applications of the main results to integral equations and variational inequalities are studied, and some directions for further research are outlined.
Scientific Field:	Mathematics
Scientific Discipline:	Mathematical analysis, Functional analysis
Key Words:	Fixed point, best proximity point, metric space
UDC:	517.988.5 (043.3)
CERIF Classification:	P 140 Series, Fourier analysis, functional analysis
Creative Commons License Type:	

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални / графички
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Александар С. Костић
Ментор, **МН**:	Владимир Ракочевић
Наслов рада, **НР**:	ФИКСНЕ И НАЈБОЉЕ АПРОКСИМАЦИОНЕ ТАЧКЕ ЗА ПРЕСЛИКАВАЊА НА МЕТРИЧКИМ ПРОСТОРИМА И УОПШТЕЊА
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2020.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	87 стр., граф. прикази
Научна област, **НО**:	математика
Научна дисциплина, **НД**:	математичка анализа
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	функционална анализа / Фиксна тачка, најбоља апроксимациона тачка , метрички простор
УДК	517.988.5 (043.3)
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	
Извод, **ИЗ**:	Тема докторске дисертације су теореме о тачкама најбоље апроксимације и фиксним тачкама оператора на метричким и генералисаним метричким просторима. Из одговарајућих теорема о тачкама најбоље апроксимације могуће је извести као последице тврђења о фиксним тачкама за дати тип пресликавања. Слично, из резултата на просторима са генералисаним метрикама се даље изводе одговарајући резултати у обичним метричким просторима.
Датум прихватања теме, **ДП**:	25.06.2019.
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**: Председник:	
Члан:	
Члан:	
Члан:	
Члан, ментор:	

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	**monograph**
Type of record, **TR**:	**textual / graphic**
Contents code, **CC**:	**doctoral dissertation**
Author, **AU**:	**Aleksandar S. Kostić**
Mentor, **MN**:	**Vladimir Rakočević**
Title, **TI**:	FIXED AND BEST PROXIMITY POINTS FOR MAPPINGS ON METRIC SPACES AND GENERALIZATIONS
Language of text, **LT**:	**Serbian**
Language of abstract, **LA**:	**English**
Country of publication, **CP**:	**Serbia**
Locality of publication, **LP**:	**Serbia**
Publication year, **PY**:	**2020**
Publisher, **PB**:	**author's reprint**
Publication place, **PP**:	**Niš, Višegradska 33.**
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	**87 p. ; graphic representations**
Scientific field, **SF**:	**mathematics**
Scientific discipline, **SD**:	**mathematical analysis**
Subject/Key words, **S/KW**:	**functional analysis / Fixed point, best proximity point, metric space**
UC	**517.988.5 (043.3)**
Holding data, **HD**:	**library**
Note, **N**:	
Abstract, **AB**:	The theme of this doctoral dissertation are best proximity point and fixed point theorems for operators on metric and generalized metric spaces. From the corresponding best proximity point theorems, it is possible to derive as consequences, the statements about fixed points for given type of mappings. Similarly, from the results in spaces with a generalized metrics, we further deduce corresponding results on usual metric spaces.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	25.06.2019.
Defended on, **DE**:	
Defended Board, **DB**: President:	
Member:	
Member:	
Member:	
Member, Mentor:	

Sadržaj

Predgovor

Teorija fiksne tačke je jedna od fundamentalnih grana matematike. Široke primene ima, pored matematičkih nauka, i u fizici, hemiji, biologiji, ekonomiji, kao i drugim prirodnim i društvenim naukama. Osnove metričke teorije fiksne tačke postavljene su u doktorskoj tezi Banaha publikovanoj 1922. godine [S. Banach: *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations integrals*, Fund. Math. (1922) 3, 133–181]. Tu je dokazana teorema o postojanju i jedinstvenosti fiksne tačke za Lipšicova preslikavanja sa konstantom manjom od 1 na kompletnom metričkom prostoru. Ovaj značajni rezultat uzima se za početak izučavanja teorije fiksne tačke na metričkim prostorima.

Kasnije, pojavljuju se mnogobrojna uopštenja Banahove teoreme. Najpre su u kompletnim metričkim prostorima pronalaženi novi tipovi preslikavanja, opštijih od Banahove kontrakcije, a koja imaju jedinstvenu fiksnu tačku. Značajan je rezultat Bojda i Vonga iz 1969. [D.W. Boyd, J.S.W. Wong: *On nonlinear contractions*, Proc. Amer. Math. Soc. (1969) 20, 458–464]. Oni su izučavali preslikavanja f kompletnog metričkog prostora (X, d) za koja važi kontraktivni uslov oblika:

$$d(fx, fy) \leq \Psi(d(x, y)), \quad x, y \in X,$$

gde je $\Psi : P \to [0, \infty)$ funkcija definisana na zatvorenju skupa

$$P = \{d(x, y) : x, y \in X\},$$

koja je poluneprekidna s desne strane na $\bar{P}$ i važi

$$\Psi(t) < t \text{ za svako } t \in \bar{P} \setminus \{0\}.$$

Pokazali su da takva preslikavanja imaju jedinstvenu fiksnu tačku. Ovde su i prvi put korišćene pomoćne ili kontrolne funkcije u teoriji fiksne tačke. Pomenuta metoda je veoma značajna za dalja istraživanja. Tako je u radu [F. Khojasteh, S. Shukla, S. Radenović: *A new approach to the study of fixed point theory for simulation functions*, Filomat (2015) 29:6, 1189–1194] uveden pojam simulacione funkcije, i $\mathcal{Z}$-kontrakcije kao preslikavanja T kompletnog metričkog prostora (X, d), za koje je

$$\zeta(d(Tx, Ty), d(x, y)) \geq 0, \quad x, y \in X,$$

gde je $\zeta : [0, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ simulaciona funkcija. Pokazano je da i $\mathcal{Z}$-kontrakcije imaju jedinstvenu fiksnu tačku. $\mathcal{Z}$-kontrakcije obuhvataju Banahove kontrakcije i nelinearne kontrakcije Bojda i Vonga.

Novi rezultati dobijaju se tako što se uopštava kontraktivni uslov, ili se posmatraju uopšteni metrički prostori. Jedno od veoma značajnih istraživanja pokrenuli su 1996. Kada, Suzuki i Takahaši u radu [O. Kada, T. Suzuki, W. Takahashi: *Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces*, Math. Japonica (1996) 44, 381–391]. Oni su uveli koncept w-rastojanja na metričkim prostorima i između ostalog uopštili mnoge rezultate (npr. varijacioni princip Ekelanda). O značaju njihovog pomenutog rada govori veliki broj radova koji upotrebljavaju njihove rezultate.

U ovoj disertaciji mi razmatramo problem najbolje aproksimacije koristeći w-rastojanja. Tačke najbolje aproksimacije se javljaju kao prirodna uopštenja standardnog pojma fiksne tačke preslikavanja u slučaju kada se domen i kodomen datog preslikavanja T na nekom metričkom prostoru (X, d) ne poklapaju, ili mogu biti i disjunktni skupovi. U takvoj situaciji je od interesa naći tačku $x \in X$ takvu da je rastojanje između tačke x i njene slike Tx najmanje moguće, odn. da se veličina $d(x, Tx)$ minimizuje pod izvesnim kriterijumima. Problem nalaženja tačaka najbolje aproksimacije u uskoj je vezi sa raznim problemima varijacionih nejednakosti i ima mnogobrojne primene u funkcionalnoj analizi, teoriji integralnih i diferencijalnih jednačina, i dr. Konkretno, u ovoj disertaciji će se razmatrati pomenuti problem u najopštijem mogućem kontekstu u okviru teorije fiksne tačke:

Ako su A i B neprazni skupovi u datom metričkom prostoru (X, d) i $T : A \to B$ preslikavanje, podrazumevaće se da je element $x \in A$ tačka najbolje aproksimacije (najbolja aproksimaciona tačka) za preslikavanje T ako važi

$$d(x, Tx) = d(A, B),$$

gde je $d(A, B)$ rastojanje skupova A i B definisano kao

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Rezultati iz ove disertacije su dobijeni kako samostalno, tako i u koautorstvu sa matematičarima: Vladimirom Rakočevićem i Stojanom Radenovićem (Srbija), Erdalom Karapinarom (Turska), kao i Hamidreza Rahimi i Ghasem Soleimani Rad (Iran). Konkretno, u radu [A. Kostić, V. Rakočević,

S. Radenović: *Best proximity points involving simulation functions with w_0-distances*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas (2019) 113:2, 715–727] uvedena je potpuno nova generalizovana metrika (w_0-rastojanje) i po prvi put su upotrebljene simulacione funkcije za izučavanje tačaka najbolje aproksimacije preslikavanja na prostorima sa w_0-rastojanjem. Uvedeni su pojmovi $\mathcal{Z}$-p-proksimalne kontrakcije prvog i drugog tipa, kao preslikavanja $T : A \to B$ (A i B su neprazni skupovi u kompletnom metričkom prostoru (X, d) sa w_0-rastojanjem p) za koja važi uslov:

$$\zeta(\mu(u, v), \mu(x, y)) \geq 0, \quad (\text{odn. } \zeta(\mu(Tu, Tv), \mu(Tx, Ty)) \geq 0)$$

za svaka dva para tačaka $u, v \in A$ i $x, y \in A$ takva da je

$$d(u, Tx) = d(v, Ty) = d(A, B)$$

($\zeta : [0, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ je simulaciona funkcija, dok je $\mu(x, y) = \max\{p(x, y), p(y, x)\}$.) Određeni su dovoljni uslovi za egzistenciju i jedinstvenost tačke $x \in A$ sa osobinom

$$d(gx, Tx) = d(A, B),$$

gde je $g : A \to A$ dato neprekidno preslikavanje, i pokazano je da tada svaki iterativni niz $\{x_n\}$ određen sa

$$d(gx_{n+1}, Tx_n) = d(A, B), \; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

i proizvoljnom početnom tačkom $x_0 \in A$ konvergira tački x. Kao posledice je moguće izvesti mnoge nove ali i već dobro poznate rezulatate o egzistenciji i jedinstvenosti tačaka najbolje aproksimacije, odn. fiksnih tačaka preslikavanja.

Nastavak pomenutih istraživanja je u radu [A. Kostić, E. Karapınar, V. Rakočević: *Best proximity points and fixed points with R-functions in the framework of w-distances*, Bulletin of the Australian Mathematical Society (2019) 99:3, 497–597]. Ovde se koriste R-funkcije koje su uvedene u radu [A.F. R.L. de Hierro, N. Shahzad: *New fixed point theorem under R-contractions*, Fixed Point Theory Appl. (2015) 2015, Article ID 2015:98] i dobijeni su analogni rezultati o tačkama najbolje aproksimacije, a sa širim dijapazonom primena.

U radu [A. Kostić: *Best proximity points revisited*, Filomat (2019) 33:16, 5159–5166] su izučavana preslikavanja Meir-Keelerovog tipa na prostorima sa w-rastojanjem.

U radu [A. Kostić, H. Rahimi, G. Soleimani Rad: *wt_0-distance and best proximity points involving b-simulation functions*, in review] dobijeni su rezultati za preslikavanja na b-metričkim prostorima.

U samostalnom radu [A. Kostić: *Best proximity points for a new type of set-valued mappings*, Mathematica Slovaca (2019) 69(6), 1395–1402] izučava se postojanje tačaka najbolje aproksimacije skupovno-vrednosnih (višeznačnih) preslikavanja na metričkim prostorima. U ovom slučaju prostori ne moraju biti kompletni, i uveden je novi kontraktivni uslov.

Autor je u radu [A. Kostić: *Solvability of Hammerstein equation via new best proximity point results*, in review] uveo nove rezultate za višeznačna preslikavanja na prosotrima sa w-rastojanjem uz upotrebu simulacionih funkcija. Takođe su razmatrane i primene tih rezultata na rešavanje Hamerštajnove integralne jednačine.

Tekst disertacije podeljen je u tri glave. Prva glava je uvodnog karaktera. Druga glava sadrži glavne rezultate do kojih je autor došao u prethodno navedenim radovima. U trećoj glavi je izučavana primena glavnih rezultata na rešavanje integralnih jednačina i varijacionih nejednakosti, i navedeni su pravci za moguća dalja istraživanja.

* * *

Ovom prilikom bih se zahvalio mentoru Profesoru Dr Vladimiru Rakočeviću, dopisnom članu SANU, na korisnim savetima koji su doprineli poboljšanju kvaliteta disertacije, kao i na pomoći u toku izrade disertacije i doktorskih studija. Takođe sam zahvalan i ostalim članovima komisije za ocenu i odbranu disertacije, Profesorima: Dr Dejanu Iliću, Dr Ljiljani Gajić, akademiku Dr Gradimiru V. Milovanoviću, i Dr Vladimiru Pavloviću.

Zahvaljujem se i svojim koautorima, Profesorima Dr Stojanu Radenoviću i Dr Erdalu Karapinaru, na saradnji i pomoći da naše naučne publikacije budu predstavljene široj naučnoj javnosti.

Na kraju bih izrazio zahvalnost svojoj porodici na podršci, pomoći i razumevanju tokom mojih studija.

Glava 1

Uvod

1.1 Neki osnovni pojmovi i tvrđenja

U ovoj sekciji izlažemo neke osnovne pojmove i stavove koji se koriste u daljem tekstu. Sledeće definicije i tvrđenja se mogu naći u gotovo svakom udžbeniku iz funkcionalne analize (videti npr. [46, 55]).

Definicija 1.1.1. *Neka je X dati neprazan skup. Funkcija $d : X \times X \to [0, \infty)$ naziva se metrika (rastojanje) na skupu X ako zadovoljava sledeće uslove:*

(1) $d(x, y) \geq 0$ za svako $x, y \in X$;

(2) $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$;

(3) $d(x, y) = d(y, x)$ za svako $x, y \in X$ (simetričnost);

(4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ za svako $x, y, z \in X$ (nejednakost trougla).

Par (X, d) se tada naziva metrički prostor.

Neka je (X, d) metrički prostor, $x \in X$ i $r > 0$. Skupovi:

$$K(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\};$$

$$K[x, r] = \{y \in X : d(x, y) \leq r\},$$

nazivaju se redom *otvorena kugla*, odn. *zatvorena kugla u X sa centrom u x poluprečnika r.*

Dijametar skupa $A \subseteq X$ je definisan sa

$$diam(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y).$$

Skup $A \subseteq X$ je:

- *otvoren* ako i samo ako je unija neke familije otvorenih kugli u X;

- *zatvoren* ako i samo ako je on komplement nekog otvorenog skupa u X;

- *ograničen* ako i samo ako je $diam(A) < \infty$, odn. ako i samo ako je sadržan u nekoj kugli prostora X;

- *kompaktan* ako i samo ako za svaku familiju otvorenih skupova $\mathcal{U}$ takvu da je $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ postoje $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ tako da je $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$.

Niz $\{x_n\} \subseteq X$ *konvergira* ka $X \in X$ ako

$$d(x_n, x) \to 0 \text{ kada } n \to \infty,$$

i uobičajeno se piše

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Tačka $x \in X$ je *tačka nagomilavanja skupa* A ako postoji niz $\{x_n\} \subseteq A$ međusobno različitih tačaka koji konvergira ka x.

Teorema 1.1.1. *Skup $A \subseteq X$ je zatvoren u X ako i samo ako za svaki niz $\{x_n\} \subseteq A$ važi da $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$ povlači $x \in A$.*

Teorema 1.1.2. *Skup $A \subseteq X$ je kompaktan ako i samo ako svaki niz $\{x_n\} \subseteq A$ ima tačku nagomilavanja u A.*

Definicija 1.1.2. *Niz $\{x_n\} \subseteq X$ je Košijev ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da za svako $m, n \in \mathbb{N}$ iz $m, n \geq n_\varepsilon$ sledi $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

Svaki konvergentan niz je Košijev, a ako važi i obrat, prostor (X, d) je *kompletan*.

Preslikavanje f sa metričkog prostora (X, d_X) u metrički prostor (Y, d_Y) je *neprekidno* u tački $a \in X$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_\varepsilon > 0$ tako da za svako $x \in X$ iz $d(x, a) < \delta_\varepsilon$ sledi $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Preslikavanje je neprekidno na skupu $A \subseteq X$ ako je ono neprekidno u svakoj tački skupa A.

Definicija 1.1.3. *Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$, gde je $\mathbb{K}$ polje realnih ili kompleksnih brojeva. Funkcija $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ je norma na X ako zadovoljava sledeće uslove:*

(i) $\|x\| \geq 0$ *za svako* $x \in X$*;*

(ii) $\|x\| = 0$ *ako i samo ako je* $x = 0$*;*

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *za svako* $\lambda \in \mathbb{K}$ *i svako* $x \in X$*;*

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *za svako* $x, y \in X$.

Par $(X, \|\cdot\|)$ *se tada naziva normiran prostor.*

Ako je $(X, \|\cdot\|)$ normiran prostor, tada je funkcija $d : X \times X \to [0, \infty)$ definisana sa

$$d(x, y) = \|x - y\| \text{ za svako } x, y \in X$$

metrika na X, koja se naziva *metrika definisana normom*, odn. *prirodna metrika* na X. Ako nije drugačije naglašeno, podrazumeva se da je normiran prostor metrički prostor sa prirodnom metrikom. Ako je normirani prostor X sa prirodnom metrikom kompletan, tada se X naziva *Banahov prostor.*

Definicija 1.1.4. *Neka je* X *vektorski prostor nad poljem realnih brojeva. Funkcija* $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ *je skalarni proizvod na* X *ako zadovoljava sledeće uslove:*

(S1) $(x, x) \geq 0$ *za svako* $x \in X$*;*

(S2) $(x, x) = 0$ *ako i samo ako je* $x = 0$*;*

(S3) $(x, y) = (y, x)$ *za svako* $x, y \in X$*;*

(S4) $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1(x_1, y) + \lambda_2(x_2, y)$ *za svako* $x_1, x_2, y \in X$ *i svako* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Tada se kaže da je X *realan unitaran prostor, odn. prostor sa skalarnim proizvodom.*

Ako je X unitaran prostor, može se dokazati da je sa

$$\|x\| = (x, x)^{1/2} \text{ za svako } x \in X$$

definisana norma na X, koja se naziva *norma definisana skalarnim proizvodom.* Podrazumeva se da je svaki unitaran prostor normiran prostor sa normom definisanom skalarnim proizvodom. Ako je X Banahov prostor, tada se X naziva *realan Hilbertov prostor.*

Podsetimo se osnovnih stavova o fiksnim tačkama preslikavanja na metričkim prostorima.

Definicija 1.1.5. *Neka je* X *neprazan skup i* $T : X \to X$. *Kaže se da preslikavanje* T *ima fiksnu (nepokretnu) tačku ako postoji* $x \in X$ *tako da je*

$$Tx = x,$$

i tada se element X *naziva fiksna (nepokretna) tačka preslikavanja* T.

Za sledeću teoremu, poznatu pod nazivom *Banahov princip kontrakcije* se vezuje početak izučavanja teorije fiksne tačke na metričkim prostorima.

Teorema 1.1.3 ([8])**.** *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor, i neka je preslikavanje $T : X \to X$ kontrakcija, tj. postoji broj $\lambda \in (0, 1)$ tako da važi*

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y) \text{ za svako } x, y \in X.$$

Tada preslikavanje T ima jedinstvenu fiksnu tačku $z \in X$, i $T^n x \to z$ za svako $x \in X$.

Navodimo i važan rezultat koji su dokazali Boyd i Wong 1969. godine, a koji je uopštenje Banahovog principa kontrakcije.

Teorema 1.1.4 ([10])**.** *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor, i neka je $T : X \to X$ preslikavanje koje zadovoljava uslov*

$$d(Tx, Ty) \leq \Psi(d(x, y)), \quad x, y \in X,$$

gde je $\Psi : P \to [0, \infty)$ funkcija definisana na zatvorenju skupa

$$P = \{d(x, y) : x, y \in X\},$$

koja je poluneprekidna s desne strane na $\bar{P}$ i važi

$$\Psi(t) < t \text{ za svako } t \in \bar{P} \setminus \{0\}.$$

Tada preslikavanje T ima jedinstvenu fiksnu tačku z, i $T^n x \to z$ za svako $x \in X$.

Iste godine su Meir i Keeler u radu [47] dokazali sledeći opštiji rezultat.

Teorema 1.1.5 ([47])**.** *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor, i neka je $T : X \to X$ preslikavanje. Pretpostavimo da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tako da za svako $x, y \in X$ važi sledeći uslov:*

$$\varepsilon \leq d(Tx, Ty) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(x, y) < \varepsilon.$$

Tada T ima jedinstvenu fiksnu tačku $z \in X$, i za svako $x \in X$ niz $\{T^n x\}$ konvergira ka z.

1.2 w-Rastojanja

Pojam w-rastojanja na metričkim prostorima su uveli i izučavali japanski matematičari O. Kada, T. Suzuki i W. Takahashi u radu *Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces* iz 1996. godine. Oni su generalizovali ranije rezultate Ekelanda ("varijacioni princip"), Caristija i Takahashija o fiksnim tačkama kontraktivih preslikavanja, i dali razne primere. Za primene w-rastojanja u teoriji fiksne tačke, videti [14, 19, 23, 24, 25, 35, 59, 61].

Definicija 1.2.1. *Ako je (X, d) dati metrički prostor, tada se funkcija $p : X \times X \to [0, \infty)$ koja poseduje sledeća svojstva:*

(P1) za svako $x, y, z \in X$ je $p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z)$;

(P2) za svako $x \in X$ je funkcija $p(x, \cdot) : X \to [0, \infty)$ poluneprekidna sa donje strane;

(P3) za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da iz $p(z, x) \leq \delta$ i $p(z, y) \leq \delta$ sledi $d(x, y) \leq \varepsilon$

naziva w-rastojanje na X.

Podsetimo se da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, gde je (X, d) metrički prostor poluneprekidna sa donje strane (donje poluneprekidna) u tački $x \in X$ ako je ili $\liminf_{x_n \to x} f(x_n) = \infty$ ili $\liminf_{x_n \to x} f(x_n) \geq f(x)$ za svaki niz $\{x_n\}$ u X koji konvergira ka x.

U sledećim primerima koje su dali Kada, Suzuki i Takahashi lako se dokazuje na osnovu definicije da su navedene funkcije w-rastojanja.

Primer 1.2.1. Ako je (X, d) metrički prostor, tada je metrika d ujedno i w-rastojanje na X

Primer 1.2.2. Ako je $(X, ||\cdot||)$ normirani prostor, onda je funkcija $p : X \times X \to [0, \infty)$ određena sa

$$p(x, y) = ||x|| + ||y||$$

za $x, y \in X$ w-rastojanje.

Primer 1.2.3. Neka je $(X, ||\cdot||)$ normirani prostor. Tada je sa

$$p(x, y) = ||y||, \; x, y \in X$$

određeno w-rastojanje na X.

Primer 1.2.4. Kada *i dr.* [29] su dali još i sledeće primere w-rastojanja.

Neka je (X, d) metrički prostor. Svaka funkcija $p : X \times X \to [0, \infty)$ definisana kao u (1)–(4) je w-rastojanje na X.

(1) $p(x, y) = c$, gde je c neki pozitivan realan broj;

(2) $p(x, y) = \max\{d(Tx, y), d(Tx, Ty)\}$, gde je $T : X \to X$ dato neprekidno preslikavanje;

(3) Ako je $X = \mathbb{R}$ sa standardnom metrikom d, tada je

$$p(x, y) = \left| \int_x^y f(u)\, du \right|$$

w-rastojanje na X, gde je $f : X \to [0, \infty)$ neprekidna funkcija takva da je $\inf_{x \in X} \int_x^{x+r} f(u)\, du > 0$ za svako $r > 0$;

(4) $p(x, y) = \begin{cases} d(x, y), & \text{ako } x, y \in F \\ c, & \text{ako } x \notin F \text{ ili } y \notin F \end{cases}$

gde je F zatvoren i ograničen podskup od X i $c \geq diam(F)$.

Sledeće svojstvo je od velike važnosti za dalja razmatranja.

Lema 1.2.1. *Neka je (X, d) metrički prostor, p w-rastojanje na X, $x, y, z \in X$ proizvoljni, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ nizovi u X, a $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ nizovi realnih brojeva koji konvergiraju ka nuli. Tada važi:*

(i) Ako je za svako $n \in \mathbb{N}$ $p(x_n, y) \leq \alpha_n$ i $p(x_n, z) \leq \beta_n$ tada je $y = z$. Specijalno, ako je $p(x, y) = 0$ i $p(x, z) = 0$, tada je $y = z$.

(ii) Ako je za svako $n \in \mathbb{N}$ $p(x_n, y_n) \leq \alpha_n$ i $p(x_n, z) \leq \beta_n$, tada niz $\{y_n\}$ konvergira ka z.

(iii) Ako je za svako $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ $p(x_n, x_m) \leq \alpha_n$, niz $\{x_n\}$ je Košijev.

(iv) Ako je za svako $n \in \mathbb{N}$ $p(y, x_n) \leq \alpha_n$, niz $\{x_n\}$ je Košijev.

U radu [43], Kostić *i dr.* su uveli i proučavali koncept tzv. w_0-rastojanja, koji se neznatno razlikuje u odnosu na originalni koncept w-rastojanja iz [29], po tome što se pretpostavlja da je ono donje poluneprekidno u odnosu na obe promenljive (kada je jedna od njih fiksirana).

Definicija 1.2.2. *Neka je X metrički prostor sa metrikom d. Tada se funkcija $p : X \times X \to [0, \infty)$ naziva w_0-rastojanje na X ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

(P1) $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z)$, *za svako* $x, y, z \in X$,

(P2) *za svako* $x \in X$, *funkcije* $p(x,\cdot), p(\cdot,x) : X \to [0,\infty)$ *su donje poluneprekidne,*

(P3) *za svako* $\epsilon > 0$, *postoji* $\delta > 0$ *tako da iz* $p(z,x) \leq \delta$ *i* $p(z,y) \leq \delta$ *sledi* $d(x,y) \leq \epsilon$.

Napomena 1.2.1. Primetimo da je pojam w_0-rastojanja uveden u Definiciji 1.2.2 opštiji od standardnog pojma metrike, dok je pojam w-rastojanja opštiji od pojma w_0-rastojanja, što je ilustrovano sledećim primerima.

Primer 1.2.5. Neka je (X,d) metrički prostor. Preslikavanje $p : X \times X \to [0,\infty)$ definisano sa

$$p(x,y) = k > 0 \quad \text{za svako } x, y \in X$$

je w_0-rastojanje na X (videti [29, Example 2]). Preslikavanje p nije metrika, pošto je $p(x,x) \neq 0$ za svako $x \in X$.

Primer 1.2.6 ([43]). Neka je skup $X = [0,\infty)$ snabdeven standardnom metrikom d. Neka je funkcija $p : X \times X \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$p(x,y) = c \in (0,1) \quad \text{za svako } x, y \in X$$

i neka je funkcija $\alpha : X \to [0,\infty)$ definisana sa

$$\alpha(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \ x > 0 \\ 2 & , \ x = 0 \end{cases}$$

Funkcija $q : X \times X \to [0,\infty)$ definisana sa

$$q(x,y) = \max\{\alpha(x), c\}, \quad \text{za svako } x, y \in X$$

je tada w-rastojanje na X (videti Primer 1.2.4 (1) i [29, Lemma 3]). Međutim, q nije w_0-rastojanje na X, zato što za proizvoljan niz $\{x_n\} \subset (0,\infty)$ takav da $x_n \to 0$ imamo

$$\liminf_{n\to\infty} q(x_n, y) = \liminf_{n\to\infty} \max\{e^{-x_n}, c\} = 1 < q(0,y) = \max\{\alpha(0), c\} = 2.$$

Primer 1.2.7 ([41]). Ovde dajemo još jedan primer w-rastojanja koje nije donje poluneprekidna funkcija u odnosu na prvu promenljivu, kada je druga promenljiva fiksirana.

Neka je (X, d) metrički prostor sa w-rastojanjem p definisanim kao u Primeru 1.2.4 (4). Neka je $x_0 \in X$ tačka nagomilavanja skupa X, i $\alpha : X \to [0, \infty)$ funkcija definisana sa

$$\alpha(x) = \begin{cases} 3c, & x = x_0, \\ 2c, & x \neq x_0. \end{cases}$$

Funkcija $P : X \times X \to [0, \infty)$ definisana sa

$$P(x, y) = \max\{\alpha(x), p(x, y)\}$$

je takođe w-rastojanje na X, što tvrdi Lema 3 iz [29]. Međutim, P nije w_0-rastojanje na X.

Zaista, pošto je x_0 tačka nagomilavanja skupa X, postoji niz $\{x_n\} \subseteq X$ takav da $x_n \to x_0$ i $x_n \neq x_0$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada imamo:

$$P(x_0, y) = \max\{\alpha(x_0), p(x_0, y)\} = 3c > 2c = \liminf_{n\to\infty} P(x_n, y)$$

za svako $y \in X$, što znači da $P(\cdot, y)$ nije donje poluneprekidna funkcija.

Napomena 1.2.2. Često se u radovima gde se koriste w-rastojanja (videti npr. [62, 64]) pretpostavlja da je w-rastojanje simetrično, tj. važi da je $p(x, y) = p(y, x)$ za svako $x, y \in X$. Specijalno, u radu Takahashi *i dr.* [62] je sa $W_0(X)$ obeležen skup svih simetričnih w-rastojanja na datom metričkom prostoru (X, d).

Primetimo da je svako simetrično w-rastojanje istovremeno i w_0-rastojanje u smislu Definicije 1.2.2, ali obrnuto u opštem slučaju ne važi.

Napomena 1.2.3. Jasno je da su w-rastojanja definisana u svakom od Primera 1.2.1-1.2.4 donje poluneprekidne funkcije u odnosu na obe promenljive. Prema tome, svi primeri w-rastojanja iz rada [29] koji su ovde prezentovani su u stvari primeri w_0-rastojanja. Štaviše, w-rastojanja data u Primerima 1.2.1, 1.2.2 i 1.2.4 pod (1) i (4) su simetrična.

1.3 b-Metrike i wt-rastojanja

Pojam b-metričkog prostora definisali su nezavisno jedan od drugog Bakhtin [7] i Czerwik [13].

Definicija 1.3.1. *Neka je X neprazan skup, i neka je $b \geq 1$ realan broj. Pretpostavimo da preslikavanje $d : X \times X \to [0, \infty)$ zadovoljava sledeće uslove:*

(d_1) *$d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$;*

(d_2) *$d(x, y) = d(y, x)$ za svako $x, y \in X$;*

(d_3) *$d(x, z) \leq b[d(x, y) + d(y, z)]$ za svako $x, y, z \in X$.*

Tada se d naziva b-metrika, dok se par (X, d) naziva b-metrički prostor (ili prostor metričkog tipa); konstanta b je parametar prostora (X, d).

Očigledno, za $b = 1$, b-metrički prostor je metrički prostor. Za više o pojmovima kao što su konvergencija, Košijevi nizovi, kompletnost, neprekidnost itd. u b-metričkim prostorima, upućujemo čitaoce na radove [9, 33].

Hussain *i dr.* su u radu [21] iz 2014. uveli pojam wt-rastojanja na b-metričkom prostoru po analogiji sa w-rastojanjem na metričkom prostoru, i dokazali izvesne teoreme o fiksnoj tački koristeći wt-rastojanja na b-metričkom prostoru sa parcijalnim uređenjem.

Definicija 1.3.2. *Neka je (X, d) b-metrički prostor i neka je $b \geq 1$ dati realan broj. Funkcija $\rho : X \times X \to [0, +\infty)$ se naziva wt-rastojanje na X ako zadovoljava sledeće uslove:*

(wt_1) *$\rho(x, z) \leq b[\rho(x, y) + \rho(y, z)]$ za svako $x, y, z \in X$;*

(wt_2) *ρ je b-donje poluneprekidna funkcija po drugoj promenljivoj, tj. ako $x \in X$ i $y_n \to y$ u X tada $\rho(x, y) \leq b \liminf_{n\to\infty} \rho(x, y_n)$;*

(wt_3) *za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da iz $\rho(z, x) \leq \delta$ i $\rho(z, y) \leq \delta$ sledi $d(x, y) \leq \varepsilon$.*

Podsetimo se da je realna funkcija f definisana na b-metričkom prostoru X b-donje poluneprekidna u tački x_0 u X ako je ili $\liminf_{x_n\to x_0} f(x_n) = \infty$, ili $f(x_0) \leq \liminf_{x_n\to x_0} bf(x_n)$, kad god su $x_n \in X$ i $x_n \to x_0$. Očigledno, za $b = 1$, wt-rastojanje se svodi na w-rastojanje. Ali, w-rastojanje ne mora uvek biti wt-rastojanje. Prema tome, wt-rastojanje je opštiji pojam od w-rastojanja.

Lema 1.3.1. *[21] Neka je (X, d) b-metrički prostor sa parametrom $b \geq 1$ i neka je ρ wt-rastojanje na X. Neka su $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ nizovi u X, i neka su $\{\alpha_n\}$ i $\{\beta_n\}$ nizovi u $[0, +\infty)$ koji konvergiraju ka 0, i neka su dati x, y, $z \in X$. Tada važe sledeća tvrđenja:*

(i) Ako je $\rho(x_n, y) \leq \alpha_n$ i $\rho(x_n, z) \leq \beta_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, onda je $y = z$. Specijalno, ako je $\rho(x, y) = 0$ i $\rho(x, z) = 0$, tada je $y = z$;

(ii) Ako je $\rho(x_n, y_n) \leq \alpha_n$ i $\rho(x_n, z) \leq \beta_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, onda y_n konvergira ka z;

(iii) Ako je $\rho(x_n, x_m) \leq \alpha_n$ za svako $n, m \in \mathbb{N}$ tako da je $m > n$, onda je $\{x_n\}$ Košijev niz;

(iv) Ako je $\rho(y, x_n) \leq \alpha_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada je $\{x_n\}$ Košijev niz.

1.4 Tačke najbolje aproksimacije

Neka su A i B neprazni podskupovi datog metričkog prostora (X, d), i neka je $T : A \to B$ dato preslikavanje. Kao što je poznato, osnovni problem teorije fiksne tačke je nalaženje rešenja jednačine $x = Tx$, i tesno je povezan sa mnogim problemima teorijske i primenjene matematike. Međutim, da bi pomenuta jednačina imala rešenje, tj. da bi preslikavanje T imalo fiksnu tačku neophodno je da bude $A \cap T(A) \neq \emptyset$. U suprotnom je $d(x, Tx) > 0$ za svako $x \in A$. U takvoj situaciji prirodno je tražiti tačku $x \in A$ koja je u izvesnom smislu najbliža svojoj slici Tx. Ovakvi i slični problemi su i dalje predmet proučavanja teorije fiksne tačke i mogu se rešavati istim metodama.

Počinjemo izlaganjem osnovnih pojmova i tvrđenja o tačkama najbolje aproksimacije koja će se koristiti u ovom radu.

Nadalje ćemo podrazumevati da je (X, d) dati metrički prostor, A i B neprazni podskupovi u X, i $T : A \to B$ preslikavanje.

Uvodimo sledeće oznake (videti npr. [1, 6, 11, 27, 31, 32, 36, 63]):

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} \\ d(y, A) &= \inf\{d(x, y) : x \in A\} = d(\{y\}, A) \\ A_0 &= \{x \in A : d(x, y) = d(A, B) \text{ za neko } y \in B\} \\ B_0 &= \{y \in B : d(x, y) = d(A, B) \text{ za neko } x \in A\} \end{aligned}$$

Definicija 1.4.1 ([63]). *Element $x \in A$ je tačka najbolje aproksimacije za preslikavanje T ako važi*

$$d(x, Tx) = d(A, B).$$

Ako je dato neko preslikavanje $g : A \to A$, tačka $x \in A$ je g-tačka najbolje aproksimacije za T ako je

$$d(gx, Tx) = d(A, B).$$

Skup svih tačaka najbolje aproksimacije preslikavanja T označavaćemo sa $B_{est}(T)$, a skup svih g-tačaka najbolje aproksimacije sa $B^g_{est}(T)$ (videti [43]).

Primer 1.4.1. Neka je dat skup $X = \mathbb{R}^2$ sa standardnom Euklidskom metrikom definisanom sa

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

za svako $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Neka su skupovi A i B zadati sa

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x, y \leq -0.5\}$$

i

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0.5 \leq x, y \leq 1\}.$$

Tada je lako videti da je

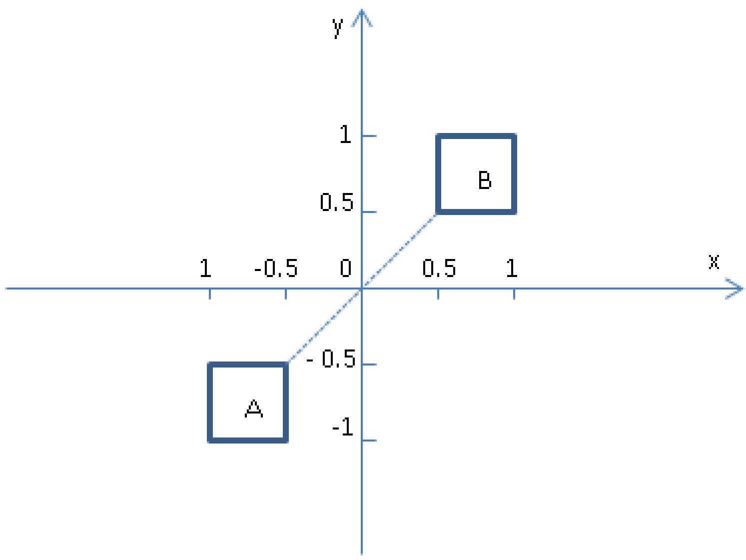
$$d(A, B) = \sqrt{2}.$$

Neka je preslikavanje $T : A \to B$ analitički zadato sa

$$T((x, y)) = (-x, -y) \text{ za svako } (x, y) \in X,$$

tj. T je centralna simetrija ravni $\mathbb{R}^2$ u odnosu na koordinatni početak (0,0).

Tada je tačka (-0.5,-0.5) jedinstvena tačka najbolje aproksimacije za preslikavanje T (videti Sliku 1.1).



Slika 1.1:

Značajniji tipovi preslikavanja koji se razmatraju u problemima određivanja tačaka najbolje aproksimacije su opisani sledećim definicijama (videti [63]).

Definicija 1.4.2. *Preslikavanje T je kontrakcija ako je*

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

za svako $x, y \in A$, gde je $k \in [0, 1)$ konstanta.

Definicija 1.4.3. *Preslikavanje T je proksimalna kontrakcija prvog tipa ako je ispunjeno*

$$\left.\begin{array}{r} d(u, Tx) = d(A, B) \\ d(v, Ty) = d(A, B) \end{array}\right\} \Rightarrow d(u, v) \leq kd(x, y)$$

za svako $u, v, x, y \in A$ i neko $k \in [0, 1)$.

Definicija 1.4.4. *Preslikavanje T se naziva proksimalna kontrakcija drugog tipa ako važi*

$$\left.\begin{array}{r} d(u, Tx) = d(A, B) \\ d(v, Ty) = d(A, B) \end{array}\right\} \Rightarrow d(Tu, Tv) \leq kd(Tx, Ty)$$

za svako $u, v, x, y \in A$ i neku konstantu $k \in [0, 1)$.

Navedimo i definiciju P-svojstva.

Definicija 1.4.5 ([2, 6, 27, 52])**.** *Ako je $A_0 \neq \emptyset$, tada se kaže da par (A, B) poseduje P-svojstvo ako je ispunjeno*

$$\left.\begin{array}{r} d(x_1, y_1) = d(A, B) \\ d(x_2, y_2) = d(A, B) \end{array}\right\} \Rightarrow d(x_1, x_2) = d(y_1, y_2)$$

za svako $x_1, x_2 \in A_0$ i $y_1, y_2 \in B_0$.

Jasno je da za svaki neprazan skup A par (A, A) uvek ima P-svojstvo.

Glava 2

Glavni rezultati

U ovoj glavi će biti prezentovani originalni rezultati autora dobijeni u radovima [37, 38, 39, 40, 41, 42, 43].

2.1 Tačke najbolje aproksimacije u prostorima sa w_0-rastojanjem

Sledeći rezultati su dobijeni korišćenjem simulacionih funkcija, a objavljeni su u radu [43].

Podsetimo se najpre pojma simulacione funkcije (videti npr. [4, 30, 34, 48, 58, 63]).

Definicija 2.1.1. *Neka je $\zeta : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dato preslikavanje. Tada se ζ naziva simulaciona funkcija ako zadovoljava sledeće uslove:*

(ζ_1) $\zeta(t, s) < s - t$ za svako $t, s > 0$;

(ζ_2) ako su $\{t_n\}, \{s_n\}$ nizovi u $(0, \infty)$ takvi da je $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_n > 0$, onda je

$$\limsup_{n\to\infty} \zeta(t_n, s_n) < 0.$$

Napomena 2.1.1. Simulaciona funkcija je prvobitno definisana u radu Khojasteh *i dr.* [34] kao preslikavanje $\zeta : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ za koje važi i $\zeta(0, 0) = 0$ pored uslova (ζ_1) i (ζ_2) iz Definicije 2.1.1. U radu [43] upotrebljava se modifikovana definicija iz rada Argoubi *i dr.* [4].

Klasu svih simulacionih funkcija ćemo obeležavati sa $\mathcal{Z}$.

Sada, navedimo neke primere simulacionih funkcija.

Primer 2.1.1 ([30]). Neka je funkcija $\zeta_i : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, 6$ definisana sa

(1) $\zeta_1(t,s) = \psi(s) - \phi(t)$ za svako $t, s \in [0,\infty)$, gde su $\phi, \psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ dve neprekidne funkcije takve da je $\phi(t) = \psi(t) = 0$ ako i samo ako je $t = 0$ i $\psi(t) < t \leq \phi(t)$ za svako $t > 0$.

(2) $\zeta_2(t,s) = s - \frac{f(t,s)}{g(t,s)} t$ za svako $t, s \in [0,\infty)$, gde su $f, g : [0,\infty) \to (0,\infty)$ dve funkcije neprekidne po obe promenljive, tako da je $f(t,s) > g(t,s)$ za svako $t, s > 0$.

(3) $\zeta_3(t,s) = s - \varphi(s) - t$ za svako $t, s \in [0,\infty)$, gde je $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ neprekidna funkcija takva da je $\varphi(t) = 0$ ako i samo ako je $t = 0$.

(4) Ako je $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ funkcija takva da je $\limsup_{t\to r+} \varphi(t) < 1$ za svako $r > 0$, definišemo

$$\zeta_4(t,s) = s\varphi(s) - t \quad \text{za svako } t, s \in [0,\infty).$$

(5) Ako je $\eta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ gornje poluneprekidno preslikavanje takvo da je $\eta(t) < t$ za svako $t > 0$ i $\eta(0) = 0$, definišemo

$$\zeta_5(t,s) = \eta(s) - t \quad \text{for all } t, s \in [0,\infty).$$

(6) Ako je $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ funkcija takva da $\int_0^\varepsilon \phi(u)\,du$ postoji i $\int_0^\varepsilon \phi(u)\,du > \varepsilon$ za svako $\varepsilon > 0$, definišemo

$$\zeta_6(t,s) = s - \int_0^t \phi(u)\,du \quad \text{za svako } t, s \in [0,\infty).$$

Lako se proverava da je svaka funkcija ζ_i $(i = 1, \dots, 6)$ simulaciona funkcija.

U ovom poglavlju ćemo proširiti rezultate o tačkama najbolje aproksimacije iz rada [63] na prostore sa w-rastojanjem. Da bi se to moglo učiniti, prethodno se moraju modifikovati pojmovi proksimalnih kontrakcija (Definicije 1.4.2–1.4.4).

Nadalje podrazumevamo da je (X,d) metrički prostor, p w_0-rastojanje na X, i A i B neprazni podskupovi od X (koji u opštem slučaju nisu jednaki). Takođe, za svako $x, y \in X$ neka je

$$\mu(x,y) := \max\{p(x,y), p(y,x)\}.$$

Napomena 2.1.2. Lako se proverava da funkcija $\mu : X \times X \to [0,\infty)$ ima sledeće osobine:

1. $\mu(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$;

2. $\mu(x,y) = \mu(y,x)$, odn. μ je simetrična funkcija;

3. $\mu(x,y) \leq \mu(x,z) + \mu(z,y)$, odn. za μ važi nejednakost trougla,

što će reći da je μ dislocirana metrika na X.

Definicija 2.1.2. *Preslikavanje T je p-kontrakcija ako je*

$$p(Tx,Ty) \leq kp(x,y)$$

za svako $x,y \in A$, i neko konstantno $k \in [0,1)$.

Definicija 2.1.3. *Preslikavanje T je p-proksimalna kontrakcija prvog tipa ako je tačna implikacija*

$$\left.\begin{aligned} d(u,Tx) = d(A,B) \\ d(v,Ty) = d(A,B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mu(u,v) \leq k\mu(x,y)$$

za svako $u,v,x,y \in A$ i neko $k \in [0,1)$.

Definicija 2.1.4. *Preslikavanje T se naziva p-proksimalna kontrakcija drugog tipa ako važi*

$$\left.\begin{aligned} d(u,Tx) = d(A,B) \\ d(v,Ty) = d(A,B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mu(Tu,Tv) \leq k\mu(Tx,Ty)$$

za svako $u,v,x,y \in A$ i neko $k \in [0,1)$.

Definicija 2.1.5 ([43])**.** *Za preslikavanje T kažemo da je $\mathcal{Z}$-p-proksimalna kontrakcija prvog tipa ako postoji simulaciona funkcija $\zeta : [0,\infty)\times[0,\infty) \to \mathbb{R}$ tako da važi*

$$\left.\begin{aligned} d(u,Tx) = d(A,B) \\ d(v,Ty) = d(A,B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \zeta(\mu(u,v),\mu(x,y)) \geq 0$$

za svako $u,v,x,y \in A$.

Definicija 2.1.6 ([43])**.** *Preslikavanje T je $\mathcal{Z}$-p-proksimalna kontrakcija drugog tipa ako važi*

$$\left.\begin{aligned} d(u,Tx) = d(A,B) \\ d(v,Ty) = d(A,B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \zeta(\mu(Tu,Tv),\mu(Tx,Ty)) \geq 0$$

za svako $u,v,x,y \in A$ i neku simulacionu funkciju $\zeta : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$.

Napomena 2.1.3. U slučaju $p = d$, pojmovi $\mathcal{Z}$-p-proksimalnih kontrakcija se svode na $\mathcal{Z}$-proksimalne kontrakcije iz Tchier et al. [63].

Ako je u Definiciji 2.1.5 simulaciona funkcija ζ data sa $\zeta(t,s) = \alpha s - t$ za neko $\alpha \in [0,1)$, jasno je da je preslikavanje T tada p-proksimalna kontrakcija prvog tipa. Ako je još i $p = d$, onda je T proksimalna kontrakcija prvog tipa.

Zadržaćemo standardne oznake iz prethodne sekcije (A_0, B_0, $d(A,B)$, $d(y,A)$) sa istim značenjem. Oznake uvedene u radu [63] ćemo prilagoditi u skladu sa izmenama učinjenim u definicijama proksimalnih kontrakcija. Za $T : A \to B$ i $g : A \to A$ neka je (videti [43])

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_A^p &= \{g : (A,d) \to (A,d) \text{ neprekidno} : p(x,y) \leq p(gx,gy),\ \forall x,y \in A\}\\
\mathcal{T}_g^p &= \{T : A \to B : p(Tx,Ty) \leq p(Tgx,Tgy),\ \forall x,y \in A\}.
\end{aligned}$$

Sada možemo dokazati glavne rezultate.

Teorema 2.1.1. *Neka su A i B neprazni podskupovi kompletnog metričkog prostora (X,d) sa w_0-rastojanjem p takvi da je A_0 neprazan zatvoren skup, a $\zeta : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ simulaciona funkcija. Neka su $g : A \to A$ i $T : A \to B$ preslikavanja koja zadovoljavaju sledeće uslove:*

a) T je $\mathcal{Z}$-p-proksimalna kontrakcija prvog tipa;

b) $g \in \mathcal{G}_A^p$;

c) $A_0 \subseteq g(A_0)$;

d) $T(A_0) \subseteq B_0$.

Tada za proizvoljno početno $x_0 \in A_0$ postoji niz $\{x_n\} \subseteq A_0$ takav da je $d(gx_{n+1}, Tx_n) = d(A,B)$ za svako $n \in \mathbb{N}_0$ i koji konvergira ka nekoj g-tački najbolje aproksimacije preslikavanja T.

Dokaz. Neka je $x_0 \in A_0$ proizvoljno. Iz c) i d) tada sledi da postoji $x_1 \in A_0$ tako da je

$$d(gx_1, Tx_0) = d(A,B).$$

Opet, zbog c) i d), za $x_1 \in A_0$ postoji $x_2 \in A_0$ za koje je

$$d(gx_2, Tx_1) = d(A,B).$$

Ponavljanjem ovog postupka dobijamo da za svako $x_n \in A_0$ postoji $x_{n+1} \in A_0$ tako da je

$$d(gx_{n+1}, Tx_n) = d(A,B).$$

Ako prilikom konstrukcije niza (x_n) za neko $m > n$ dobijemo da je $Tx_m = Tx_n$ onda uzimamo $x_{m+1} = x_{n+1}$.

Zbog uslova a) i b), kao i osobine (ζ_1) simulacione funkcije imamo

$$\begin{aligned} 0 \leq \zeta(\mu(gx_{n+1}, gx_n), \mu(x_n, x_{n-1})) &< \mu(x_n, x_{n-1}) - \mu(gx_{n+1}, gx_n) \\ &\leq \mu(x_n, x_{n-1}) - \mu(x_{n+1}, x_n). \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Dakle, sledi

$$\mu(x_{n+1}, x_n) < \mu(x_n, x_{n-1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.1.2}$$

Ako je za neko $m \in \mathbb{N}$ $\mu(x_m, x_{m-1}) = 0$, sledi da je tada $x_m = x_{m-1}$, pa je $d(gx_m, Tx_{m-1}) = d(gx_m, Tx_m) = d(A, B)$, tj. x_m je g-tačka najbolje aproksimacije za T.

Zato uzmimo da je $\mu(gx_n, gx_{n-1}) \geq \mu(x_n, x_{n-1}) > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Na osnovu (2.1.2) je $\{\mu(x_n, x_{n-1})\}$ opadajući niz, pa postoji

$$\lim_{n\to\infty} \mu(x_n, x_{n-1}) = r \geq 0. \tag{2.1.3}$$

Pretpostavimo da je $r > 0$. Iz (2.1.1) je i

$$\mu(gx_{n+1}, gx_n) < \mu(x_n, x_{n-1})$$

za sve n. S druge strane, iz uslova b) i prethodne nejednakosti je

$$\mu(x_{n+1}, x_n) \leq \mu(gx_{n+1}, gx_n) < \mu(x_n, x_{n-1})$$

za svako n. Odatle je

$$\lim_{n\to\infty} \mu(gx_{n+1}, gx_n) = r. \tag{2.1.4}$$

Zbog (2.1.3) i (2.1.4) i uz a), prema osobini simulacione funkcije (ζ_2) dobija se

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} \zeta(\mu(gx_{n+1}, gx_n), \mu(x_n, x_{n-1})) < 0$$

što je kontradikcija. Dakle, $r = 0$, odn.

$$\lim_{n\to\infty} \mu(x_n, x_{n-1}) = 0. \tag{2.1.5}$$

Pretpostavimo da ne važi

$$\lim_{n,m\to\infty} \mu(x_n, x_m) = 0.$$

Tada postoje $\varepsilon_0 > 0$ i nizovi $\{m_k\}, \{n_k\} \subseteq \mathbb{N}_0$ takvi da je $m_k > n_k \geq k$ i važi

$$\mu(x_{n_k}, x_{m_k}) \geq \varepsilon_0 \tag{2.1.6}$$

za svako $k \in \mathbb{N}$. Neka je m_k minimalni indeks za koji važi (2.1.6). Tada je

$$\mu(x_{n_k}, x_{m_k-1}) < \varepsilon_0.$$

Odavde, koristeći nejednakost trougla za μ i (2.1.6) imamo

$$\varepsilon_0 \leq \mu(x_{n_k}, x_{m_k}) \leq \mu(x_{n_k}, x_{m_k-1}) + \mu(x_{m_k-1}, x_{m_k}) < \varepsilon_0 + \mu(x_{m_k-1}, x_{m_k}).$$

Prelaskom na graničnu vrednost u gornjoj nejednakosti (kad $k \to \infty$) dobija se

$$\lim_{k\to\infty} \mu(x_{n_k}, x_{m_k}) = \varepsilon_0. \tag{2.1.7}$$

jer je po (2.1.5) $\lim_{k\to\infty} \mu(x_{m_k-1}, x_{m_k}) = 0$.

Sada pokažimo da je

$$\lim_{k\to\infty} \mu(x_{n_k+1}, x_{m_k+1}) = \varepsilon_0. \tag{2.1.8}$$

Upotrebljavajući nejednakost trougla za μ imamo

$$\mu(x_{n_k}, x_{m_k}) \leq \mu(x_{n_k}, x_{n_k+1}) + \mu(x_{n_k+1}, x_{m_k+1}) + \mu(x_{m_k+1}, x_{m_k})$$

i

$$\mu(x_{n_k+1}, x_{m_k+1}) \leq \mu(x_{n_k+1}, x_{n_k}) + \mu(x_{n_k}, x_{m_k}) + \mu(x_{m_k}, x_{m_k+1})$$

pa puštajući da $k \to \infty$ u zadnje dve nejednakosti, s obzirom na (2.1.5), (2.1.7) i (2.1.8) dobijamo redom

$$\varepsilon_0 \leq \lim_{k\to\infty} \mu(x_{n_k+1}, x_{m_k+1}),$$

odn.

$$\lim_{k\to\infty} \mu(x_{n_k+1}, x_{m_k+1}) \leq \varepsilon_0,$$

što povlači (2.1.8).

Na osnovu uslova a) i b), definicije niza $\{x_n\}$ i osobine (ζ_1) sledi

$$\begin{aligned} 0 &\leq \zeta(\mu(gx_{n_k+1}, gx_{m_k+1}), \mu(x_{n_k}, x_{m_k})) \\ &< \mu(x_{n_k}, x_{m_k}) - \mu(gx_{n_k+1}, gx_{m_k+1}) \\ &\leq \mu(x_{n_k}, x_{m_k}) - \mu(x_{n_k+1}, x_{m_k+1}) \end{aligned}$$

odakle, kada pustimo da $k \to \infty$, sledi

$$\lim_{k\to\infty} \mu(gx_{n_k+1}, gx_{m_k+1}) = \varepsilon_0 \tag{2.1.9}$$

jer važe (2.1.7) i (2.1.8).

Iz (2.1.7) i (2.1.9) se vidi da nizovi $t_k := \mu(gx_{n_k+1}, gx_{m_k+1})$ i $s_k := \mu(x_{n_k}, x_{m_k})$ imaju isti pozitivan limes. Na osnovu a) i osobine (ζ_2) je tada

$$0 \leq \limsup_{k\to\infty} \zeta(t_k, s_k) < 0$$

što je kontradikcija.

Prema tome, dokazali smo da je

$$\lim_{n,m\to\infty} \mu(x_n, x_m) = 0. \tag{2.1.10}$$

Primenom Leme 1.2.1. onda zaključujemo da je niz $\{x_n\}$ Košijev. Kako je $x_n \in A_0$ za sve n, a A_0 zatvoren podskup kompletnog metričkog prostora (X, d), to postoji $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in A_0$. Onda je i $\lim_{n\to\infty} gx_n = gx$ zato što je g neprekidno. Takođe je $gx \in A_0$ jer je $gx_n \in A_0$ za sve n, a A_0 zatvoren skup. S druge strane, pošto je $x \in A_0$ i važi uslov d), za x postoji $z \in A_0$ tako da je $d(z, Tx) = d(A, B)$. Ponovo zbog uslova a) i (ζ_1) imamo

$$0 \leq \zeta(\mu(gx_{n+1}, z), \mu(x_n, x)) < \mu(x_n, x) - \mu(gx_{n_k+1}, z)$$

a odatle je

$$\mu(gx_{n+1}, z) < \mu(x_n, x) \tag{2.1.11}$$

za proizvoljno n.

Pokažimo da je $z = gx$. Ako je $z = gx_n$ za beskonačno mnogo vrednosti $n \in \mathbb{N}$, tada je $z = gx$. Zato možemo pretpostaviti da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $z \neq gx_n$ za svako $n \geq n_0$. Ako je $\mu(gx_n, z) = 0$ za neko $n \geq n_0$ onda je $gx_n = z$, tako da mora biti $\mu(gx_n, z) > 0$ za svako $n \geq n_0$. Takođe, postoji podniz $\{x_{n_k}\}$ od $\{x_n\}$ takav da je $\mu(x_{n_k}, x) > 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$ (ako to nije slučaj, onda postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da je $\mu(x_n, x) = 0$ za svako $n \geq n_1$, i stoga $\mu(x_n, x_{n-1}) = 0$ za svako $n \geq n_1$, što je kontradikcija).

Pošto je T $\mathcal{Z}$-p-proksimalna kontrakcija prvog tipa i $g \in \mathcal{G}_A^p$, dobijamo

$$\begin{aligned}
0 &\leq \zeta(\mu(gx_{n_k+1}, z), \mu(x_{n_k}, x)) \\
&< \mu(x_{n_k}, x) - \mu(gx_{n_k+1}, z) \\
&\leq \mu(gx_{n_k}, gx) - \mu(gx_{n_k+1}, z),
\end{aligned}$$

odakle sledi da je

$$\mu(gx_{n_k+1}, z) < \mu(gx_{n_k}, gx) \tag{2.1.12}$$

za svako $k \in \mathbb{N}$ tako da je $n_k \geq n_0$.

Sa druge strane, sličnim rezonovanjem kao i ranije zaključujemo da je $\lim\limits_{m,n\to\infty} \mu(gx_n, gx_m) = 0$. To znači da za svako $\epsilon > 0$ postoji $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tako da je $\mu(gx_n, gx_m) < \epsilon$ za svako $m > n \geq N_\epsilon$. Za fiksno $n \in \mathbb{N}$ takvo da je $n \geq \max\{n_0, N_\epsilon\}$, funkcija $p(gx_n, \cdot)$ je donje poluneprekidna; stoga, dobijamo da je

$$p(gx_n, gx) \leq \liminf_{m\to\infty} p(gx_n, gx_m) < \epsilon.$$

Dakle,

$$\lim_{k\to\infty} p(gx_{n_k}, gx) = 0. \tag{2.1.13}$$

Slično je i $\lim\limits_{k\to\infty} p(gx, gx_{n_k}) = 0$, što u kombinaciji sa (2.1.13) povlači

$$\lim_{k\to\infty} \mu(gx_{n_k}, gx) = 0.$$

Sada na osnovu (2.1.12) imamo

$$\lim_{k\to\infty} \mu(gx_{n_k+1}, z) = 0. \tag{2.1.14}$$

Ako $k \to \infty$ u nejednakosti

$$\mu(gx_{n_k}, z) \le \mu(gx_{n_k}, gx_{n_k+1}) + \mu(gx_{n_k+1}, z),$$

onda iz (2.1.4) i (2.1.14) sledi da je $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(gx_{n_k}, z) = 0$. Dakle,

$$\lim_{k\to\infty} p(gx_{n_k}, z) = 0. \tag{2.1.15}$$

Na osnovu (2.1.13) i (2.1.15), koristeći Lemu 1.2.1. (i) imamo da je $z = gx$. Konačno, zbog $d(z, Tx) = d(A, B)$ dobijamo $d(gx, Tx) = d(A, B)$.

Da dokažemo jedinstvenost, pretpostavimo da je y tačka u A_0 takva da je

$$d(gy, Ty) = d(A, B).$$

Pretpostavimo da je $\mu(gx, gy) \ge \mu(x, y) > 0$. Pošto je $g \in \mathcal{G}_A^p$ i T je $\mathcal{Z}$-p-proksimalna kontrakcija prvog tipa, imamo

$$\begin{aligned} 0 &\le \zeta(\mu(gx, gy), \mu(x, y)) \\ &< \mu(x, y) - \mu(gx, gy) \\ &\le \mu(x, y) - \mu(x, y) = 0 \end{aligned}$$

što vodi do kontradikcije. Zato je $\mu(x, y) = 0$, odakle sledi $x = y$.

Slično se može dokazati da je i $p(x, x) = 0$. Pretpostavimo da je $\mu(x, x) = p(x, x) > 0$. Tada je $\mu(gx, gx) > 0$ i imamo

$$\begin{aligned} 0 &\le \zeta(\mu(gx, gx), \mu(x, x)) \\ &< \mu(x, x) - \mu(gx, gx) \\ &\le \mu(x, x) - \mu(x, x) = 0, \end{aligned}$$

što je kontradikcija. □

Kada je u Teoremi 2.1.1. g identičko preslikavanje kao posledica se dobija rezultat o egzistenciji tačke najbolje aproksimacije za $\mathcal{Z}$-p-proksimalne kontrakcije prvog tipa.

Posledica 2.1.1. *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor sa w_0-rastojanjem p, a A i B neprazni podskupovi od X takvi da je A_0 neprazan i zatvoren skup. Neka je $T : A \to B$ dato preslikavanje koje ima osobine*

a) T je $\mathcal{Z}$-p-proksimalna kontrakcija prvog tipa;

b) $T(A_0) \subseteq B_0$.

Tada za svako $x_0 \in A_0$ postoji niz $\{x_n\} \subseteq A_0$ tako da je $d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ za svako $n \in \mathbb{N}_0$. Svaki ovakav niz konvergira ka nekoj tački najbolje aproksimacije $x \in A_0$ za T.

Iz Teoreme 2.1.1. se može izvesti i zanimljiv rezultat o g-tačkama najbolje aproksimacije p-proksimalnih kontrakcija prvog tipa.

Posledica 2.1.2. *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor sa w_0-rastojanjem p, a A i B neprazni podskupovi od X sa osobinom da je A_0 neprazan i zatvoren podskup u X. Neka su data preslikavanja $T : A \to B$ i $g : A \to A$ za koja pretpostavljamo da važe naredni uslovi*

a) T je p-proksimalna kontrakcija (sa konstantom $k \in [0, 1)$);

b) $g \in \mathcal{G}_A^p$;

c) $T(A_0) \subseteq B_0$;

d) $A_0 \subseteq g(A_0)$.

Tada preslikavanje T ima g-tačku najbolje aproksimacije u skupu A_0, odn. postoji $x \in A_0$ tako da je $d(gx, Tx) = d(A, B)$. Počev od svakog $x_0 \in A_0$ može se konstruisati niz $\{x_n\} \subseteq A_0$ koji konvergira ka nekoj g-tački najbolje aproksimacije za T, i za svako $n \in \mathbb{N}_0$ važi $d(gx_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$.

Dokaz. Primetimo da je p-proksimalna kontrakcija prvog tipa sa konstantom $k \in [0, 1)$ ujedno i $\mathcal{Z}$-p-proksimalna kontrakcija prvog tipa, ako je simulaciona funkcija $\zeta : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definisana sa $\zeta(t, s) = ks - t$ za svako $t, s > 0$. Kako su zadovoljeni svi uslovi Teoreme 2.1.1. izvodi se isti zaključak. $\square$

Ako se u Teoremi 2.1.1. uzme $p = d$, onda se dobija glavni rezultat rada Tchier i dr. [63].

Posledica 2.1.3. *Neka su A i B neprazni podskupovi kompletnog metričkog prostora (X, d). Pretpostavimo da je A_0 neprazan i zatvoren skup. Neka su data preslikavanja $T : A \to B$ i $g : A \to A$ koja zadovoljavaju uslove*

a) T je $\mathcal{Z}$-proksimalna kontrakcija prvog tipa;

b) $g \in \mathcal{G}_A$;

c) $T(A_0) \subseteq B_0$;

d) $A_0 \subseteq g(A_0)$.

Tada postoji jedinstvena g-tačka najbolje aproksimacije preslikavanja T u A, tj. postoji jedinstveno $x \in A$ tako da je $d(gx, Tx) = d(A, B)$. Štaviše, za svako početno $x_0 \in A_0$ postoji niz $\{x_n\} \subseteq A_0$ takav da je $d(gx_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$, i $\{x_n\}$ konvergira ka x.

Prelazimo na rezultate o $\mathcal{Z}$-p-proksimalnim kontrakcijama drugog tipa.

Teorema 2.1.2. *Neka su A i B neprazni podskupovi kompletnog metričkog prostora (X, d) sa w_0-rastojanjem p, takvi da je skup $T(A_0)$ neprazan i zatvoren. Pretpostavimo da preslikavanja $T : A \to B$ i $g : A \to A$ imaju sledeće osobine*

a) T je $\mathcal{Z}$-p-proksimalna kontrakcija drugog tipa;

b) T je injektivno na A_0;

c) $T \in \mathcal{T}_g^p$;

d) $T(A_0) \subseteq B_0$;

e) $A_0 \subseteq g(A_0)$.

Tada postoji konvergentan niz $\{x_n\} \subseteq A_0$ tako da je $d(gx_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ za svako $n \in \mathbb{N}_0$ (gde je $x_0 \in A_0$ proizvoljno) a čija je granična vrednost $x \in A_0$ jedinstvena g-tačka najbolje aproksimacije preslikavnja T, tj. važi $d(gx, Tx) = d(A, B)$, i imamo $p(Tx, Tx) = 0$.

Dokaz. Sličnim rezonovanjem kao u dokazu Teoreme 2.1.1. počev od datog $x_0 \in A_0$ može se konstruisati niz $\{x_n\}$ tako da je $d(gx_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ za svako $n \in \mathbb{N}_0$. Ako u procesu konstrukcije pomenutog niza dobijemo da je za neke n i m $(m > n)$ $Tx_n = Tx_m$, uzimamo da je $x_{m+1} = x_{n+1}$.

Zbog načina konstrukcije niza x_n, i uslova a) zaključuje se da je

$$\zeta(\mu(Tgx_n, Tgx_{n+1}), \mu(Tx_{n-1}, Tx_n)) \geq 0$$

za svako n. Onda je na osnovu a), c) i osobine simulacionih funkcija (ζ_1)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \zeta(\mu(Tgx_n, Tgx_{n+1}), \mu(Tx_{n-1}, Tx_n)) \\ &< \mu(Tx_{n-1}, Tx_n) - \mu(Tgx_n, Tgx_{n+1}) \\ &\leq \mu(Tx_{n-1}, Tx_n) - \mu(Tx_n, Tx_{n+1}) \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

za svako n.

Odavde imamo

$$\mu(Tx_n, Tx_{n+1}) < \mu(Tx_{n-1}, Tx_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.1.17}$$

što znači da je niz $\{\mu(Tx_{n-1}, Tx_n)\}$ opadajući.

Ako je za neko m $\mu(Tx_{m-1}, Tx_m) = 0$, sledi da je $Tx_{m-1} = Tx_m$, pa je tada $d(gx_{m-1}, Tx_m) = d(gx_{m-1}, Tx_{m-1}) = d(A, B)$, i dokaz je završen.

Zato nadalje smatramo da je $\mu(Tx_{n-1}, Tx_n) > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Stoga postoji

$$\lim_{n\to\infty} \mu(Tx_{n-1}, Tx_n) = r \geq 0.$$

Pretpostavimo da je $r > 0$. Iz (2.1.16) se takođe može zaključiti da je

$$\mu(Tgx_n, Tgx_{n+1}) < \mu(Tx_{n-1}, Tx_n).$$

Iz uslova c) je onda

$$\mu(Tx_n, Tx_{n+1}) \leq \mu(Tgx_n, Tgx_{n+1}) < \mu(Tx_{n-1}, Tx_n)$$

za svako n. Prelaskom na graničnu vrednost kada $n \to \infty$ sledi da je i

$$\lim_{n\to\infty} \mu(Tgx_n, Tgx_{n+1}) = r.$$

Upotrebimo osobinu (ζ_2) da dobijemo

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} \zeta(\mu(Tgx_n, Tgx_{n+1}), \mu(Tx_{n-1}, Tx_n)) < 0$$

što je kontradikcija, pa je zato $r = 0$, tj. pokazali smo da je

$$\lim_{n\to\infty} \mu(Tx_{n-1}, Tx_n) = 0. \tag{2.1.18}$$

Zatim, dokažimo da je

$$\lim_{n,m\to\infty} \mu(Tx_n, Tx_m) = 0. \tag{2.1.19}$$

Pretpostavimo suprotno, što znači da postoje $\varepsilon > 0$ i nizovi $\{m_k\}, \{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ takvi da je $m_k > n_k \geq k$ i

$$\mu(Tx_{n_k}, Tx_{m_k}) \geq \varepsilon$$

za svako $k \in \mathbb{N}$ (i pritom je m_k najmanji broj za koji ova nejednakost važi). Sličnim postupkom kao u dokazu Teoreme 2.1.1. se dolazi da zbog (2.1.16) i (2.1.18) mora biti

$$\lim_{k\to\infty} \mu(Tx_{n_k}, Tx_{m_k}) = \lim_{k\to\infty} \mu(Tx_{n_k+1}, Tx_{m_k+1}) = \varepsilon. \tag{2.1.20}$$

Opet na osnovu uslova a) i c) imamo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \zeta(\mu(Tgx_{n_k+1}, Tgx_{m_k+1}), \mu(Tx_{n_k}, Tx_{m_k})) \\ &< \mu(Tx_{n_k}, Tx_{m_k}) - \mu(Tgx_{n_k+1}, Tgx_{m_k+1}) \\ &\leq \mu(Tx_{n_k}, Tx_{m_k}) - \mu(Tx_{n_k+1}, Tx_{m_k+1}) \end{aligned}$$

za sve $k \in \mathbb{N}$. Iz ove nejednakosti i (2.1.20) sledi

$$\lim_{k\to\infty} \mu(Tgx_{n_k+1}, Tgx_{m_k+1}) = \varepsilon.$$

Odavde i iz (2.1.20) vidimo da nizovi $t_k := \mu(Tgx_{n_k+1}, Tgx_{m_k+1})$ i $s_k := \mu(Tx_{n_k}, Tx_{m_k})$ imaju istu graničnu vrednost $\varepsilon > 0$, a onda je prema (ζ_2)

$$0 \leq \limsup_{k\to\infty} \zeta(t_k, s_k) < 0$$

i dobili smo kontradikciju. Time smo dokazali da važi (2.1.19), što će reći da je prema Lemi 1.2.1. niz (Tx_n) Košijev.

Prostor (X, d) je po pretpostavci kompletan, a $T(A_0)$ je zatvoren podskup od X, pa pošto je $Tx_n \subseteq T(A_0)$ Košijev niz, postoji $\lim_{n\to\infty} Tx_n = y \in T(A_0) \subseteq B_0$. S obzirom da je $y \in T(A_0)$ može se pisati $y = Tu$ za neko $u \in A_0$, tj. $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tu \in B_0$. Tada po definiciji skupa B_0 postoji $z \in A_0$ tako da je

$$d(z, Tu) = d(A, B)$$

Kako važi uslov e), to je $z = gx$ za neko $x \in A_0$, pa je

$$d(gx, Tu) = d(A, B) \tag{2.1.21}$$

Ako $Tx_n = Tx$ važi za beskonačno mnogo vrednosti $n \in \mathbb{N}$, onda je $Tx = Tu$. Prema tome, može se pretpostaviti da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da $Tx_n \neq Tx$ za svako $n \geq n_0$. Takođe, postoji podniz $\{x_{n_k}\}$ niza $\{x_n\}$ takav da je $\mu(Tx_{n_k}, Tu) > 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Ponovo, pošto je T $\mathcal{Z}$-p-proksimalna kontrakcija drugog tipa, dobijamo

$$0 \leq \zeta(\mu(Tgx_{n_k+1}, Tgx), \mu(Tx_{n_k}, Tu)) < \mu(Tx_{n_k}, Tu) - \mu(Tgx_{n_k+1}, Tgx)$$

i stoga

$$\mu(Tx_{n_k+1}, Tx) \leq \mu(Tgx_{n_k+1}, Tgx) < \mu(Tx_{n_k}, Tu) \tag{2.1.22}$$

za svako $k \in \mathbb{N}$ takvo da je $n_k \geq n_0$, jer $T \in \mathcal{T}_g^p$.

Prema (2.1.19) sledi da za svako $\epsilon > 0$ postoji $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tako da je $\mu(Tx_n, Tx_m) < \epsilon$ za svako $m > n \geq N_\epsilon$. Tada na osnovu osobine (P2) w_0-rastojanja imamo da

$$p(Tx_n, Tu) \leq \liminf_{m\to\infty} p(Tx_n, Tx_m) < \epsilon$$

za bilo koje fiksno $n \geq \max\{n_0, N_\epsilon\}$, odakle je

$$\lim_{k\to\infty} p(Tx_{n_k}, Tu) = 0 \tag{2.1.23}$$

i slično $\lim\limits_{k\to\infty} p(Tu, Tx_{n_k}) = 0$, pa je $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(Tx_{n_k}, Tu) = 0$. Iz poslednje jednačine i (2.1.22) dobijamo $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(Tx_{n_k+1}, Tx) = 0$. Uzmimo da $k \to \infty$ u $\mu(Tx_{n_k}, Tx) \leq \mu(Tx_{n_k}, Tx_{n_k+1}) + \mu(Tx_{n_k+1}, Tx)$. Prema (2.1.18) dobijamo $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(Tx_{n_k}, Tx) = 0$. Dakle, imamo da je

$$\lim_{k\to\infty} p(Tx_{n_k}, Tx) = 0. \tag{2.1.24}$$

Prema (2.1.23) i (2.1.24) i na osnovu Leme 1.2.1. (i) zaključujemo da je $Tx = Tu$. Sada zamenom $Tx = Tu$ u jednačini (2.1.21) dobijamo $d(gx, Tx) = d(A, B)$.

Da bismo dokazali jedinstvenost, neka je y tačka u A_0 takva da je

$$d(gy, Ty) = d(A, B),$$

tj. $y \in B_{est}^g(T)$. Pretpostavimo da $\mu(Tgx, Tgy) \geq \mu(Tx, Ty) > 0$. Pošto je $T \in \mathcal{T}_g^p$ $\mathcal{Z}$-p-proksimalna kontrakcija drugog tipa, imamo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \zeta(\mu(Tgx, Tgy), \mu(Tx, Ty)) \\ &< \mu(Tx, Ty) - \mu(Tgx, Tgy) \\ &\leq \mu(Tx, Ty) - \mu(Tx, Ty) = 0 \end{aligned}$$

što je kontradikcija. Dakle, $\mu(Tx, Ty) = 0$, što znači da je $Tx = Ty$. Injektivnost preslikavanja T na A_0 sada povlači $x = y$.

Konačno, pretpostavimo da je $\mu(Tx, Tx) = p(Tx, Tx) > 0$. Tada je $\mu(Tgx, Tgx) > 0$. Slično kao u prethodnom pasusu, imamo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \zeta(\mu(Tgx, Tgx), \mu(Tx, Tx)) \\ &< \mu(Tx, Tx) - \mu(Tgx, Tgx) \\ &\leq \mu(Tx, Tx) - \mu(Tx, Tx) = 0 \end{aligned}$$

što je kontradikcija. Prema tome, $p(Tx, Tx) = 0$. $\square$

Naredno tvrđenje o egzistenciji tačke najbolje aproksimacije $\mathcal{Z}$-p-proksimalne kontrakcije drugog tipa je specijalan slučaj Teoreme 2.1.2. kada je g identičko preslikavanje.

Posledica 2.1.4. *Neka je dat kopmletan metrički prostor (X, d) sa w_0-rastojanjem p, $A, B \subseteq X$ sa osobinom da je $A \neq \emptyset \neq B$, i neka je preslikavanje $T : A \to B$ takvo da je $T(A_0)$ zatvoren i neprazan skup. Pretpostavimo da za preslikavanje T važi*

a) T je $\mathcal{Z}$-p-proksimalna kontrakcija drugog tipa;

b) T je injektivno na A_0;

c) $T(A_0) \subseteq B_0$.

Tada postoji jedinstvena tačka najbolje aproksimacije $x \in A_0$ preslikavanja T, tj. $d(x, Tx) = d(A, B)$, i važi $p(Tx, Tx) = 0$. Štaviše, za svako $x_0 \in A_0$ postoji niz $\{x_n\} \subseteq A_0$ koji konvergira ka tački najbolje aproksimacije za T, i važi $d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ za svako $n \in \mathbb{N}_0$.

Kao posledica se opet može dobiti glavni rezultat rada Tchier i dr. [63]

Posledica 2.1.5. *Neka su A i B neprazni podskupovi kompletnog metričkog prostora (X, d), takvi da je skup $T(A_0)$ neprazan i zatvoren. Pretpostavimo da preslikavanja $T : A \to B$ i $g : A \to A$ imaju sledeće osobine*

a) T je $\mathcal{Z}$-proksimalna kontrakcija drugog tipa;

b) T je injektivno na A_0;

c) $T \in \mathcal{T}_g$;

d) $T(A_0) \subseteq B_0$;

e) $A_0 \subseteq g(A_0)$.

Tada T ima jedinstvenu g-tačku najbolje aproksimacije x u skupu A, tj. postoji jedinstveno $x \in A$ za koje je $d(gx, Tx) = d(A, B)$. Pritom, postoji niz $\{x_n\} \subseteq A$ tako da je $d(gx_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ za svako $n \in \mathbb{N}_0$ (gde je $x_0 \in A_0$ proizvoljno) i $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Primer 2.1.2. Neka je dat skup $X = [0, \infty)$ sa standardnom metrikom

$$d(x, y) = |x - y| \quad \text{za svako } x, y \in X$$

i w_0-rastojanjem p definisanim sa

$$p(x, y) = x + y \quad \text{za svako } x, y \in X.$$

Tada imamo da je $\mu(x, y) = \max\{p(x, y), p(y, x)\} = x + y$. Neka je $A = \left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \{1, 2\}$ i $B = \left[0, \frac{1}{8}\right] \cup \{1, 2\}$.

Zatim, definišimo preslikavanje $T : A \to B$ sa $Tx = \frac{x}{4}$ ako $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$, i $T1 = 2$, $T2 = 1$. Takođe definišemo simulacionu funkciju $\zeta : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ kao $\zeta(t, s) = \alpha s - t, \alpha \in \left[\frac{1}{4}, 1\right)$ za svako $s, t \in [0, \infty)$.

Lako se proverava da je $d(A, B) = 0$, $A_0 = B_0 = B$, kao i da je T $\mathcal{Z}$-p-proksimalna kontrakcija prvog tipa, kao i da važi $B_{est}(T) = \{0\}$, tj. $x = 0$ je jedinstvena tačka najbolje aproksimacije preslikavanja T koja zadovoljava uslove u zaključku Posledice 2.1.1.

2.2 R-Funkcije

Rezultati izloženi u prethodnoj sekciji su dalje poboljšani u radu [41] uz pomoć R-funkcija. Nastavljamo sa glavnim rezultatima rada [41].

Inspirisani simulacionim funkcijama koje su uvedene u radu Khojasteh *i dr.* [34], koncept R-funkcije su predložili Roldán López de Hierro i Shahzad u svom radu [57] iz 2015. Od tada, mnogi autori su dali svoj doprinos proučavanju teorije fiksne tačke, kao i tačaka najbolje aproksimacije pomoću R-funkcija, videti npr. Nastasi *i dr.* [51], Zarinfar *i dr.* [64], Pirbavafa *i dr.* [54], Gholizadeh i Karapınar [18], i Karapınar i Khojasteh [31].

Definicija 2.2.1. *Neka je $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ neprazan skup, i neka je $\varrho : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ dato preslikavanje. Kažemo da je ϱ R-funkcija ako važe sledeći uslovi:*

(ϱ_1) *$a_n \to 0$ za svaki niz $\{a_n\} \subset (0, \infty) \cap \mathbb{A}$ takav da je $\varrho(a_{n+1}, a_n) > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$;*

(ϱ_2) *za svaka dva niza $\{a_n\}, \{b_n\} \subset (0, \infty) \cap \mathbb{A}$ takva da je $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L \geq 0$, $L < a_n$ i $\varrho(a_n, b_n) > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$, imamo $L = 0$.*

Familija svih R-funckcija sa domenom $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$ se obeležava sa $R_{\mathbb{A}}$.

Ako još važi i sledeći uslov, tada se ϱ naziva jaka R-funkcija. Klasa svih jakih R-funkcija definisanih na domenu $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$ se označava sa $R^s_{\mathbb{A}}$.

(ϱ_3) ako su $\{a_n\}, \{b_n\} \subset (0, \infty) \cap \mathbb{A}$ dva niza takvi da je $b_n \to 0$ i $\varrho(a_n, b_n) > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada je $a_n \to 0$.

Sledeći primeri R-funkcija se mogu naći npr. u [18, 31, 34, 57, 64].

Primer 2.2.1. (a) $\varrho(t, s) = s\varphi(s) - t$, gde je $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1)$ preslikavanje takvo da je $\limsup_{t \to s+} \varphi(t) < 1$ za svako $s \in (0, \infty)$;

(b) $\varrho(t, s) = s\varphi(s) - t$, gde je $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1)$ preslikavanje takvo da $\lim_{n \to \infty} \varphi(t_n) = 1$ povlači $\lim_{n \to \infty} t_n = 0$ za svaki niz $\{t_n\} \subseteq [0, \infty)$;

(c) $\varrho(t, s) = \varphi(s) - t$, gde je $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ funkcija za koju važe sledeći uslovi:

(i) $\varphi(0) = 0$;

(ii) $\varphi(t) > 0$ za svako $t > 0$;

(ii) za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je $\varphi(t) < \varepsilon$ za svako $t \in [\varepsilon, \varepsilon + \delta)$;

(d) $\varrho(t, s) = \zeta(t, s)$, gde je $\zeta : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ simulaciona funkcija;

(e) $\varrho(t, s) = \psi(s) - \varphi(s) - \psi(t)$, gde su $\psi, \varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ funkcije takve da je ψ neopadajuća i neprekidna zdesna, dok je φ donje poluneprekidna i važi $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$;

(f) $\varrho(t, s) = \frac{s}{t+1} - t$;

(g) $\varrho(t, s) = se^{-t} - t$;

(h) $\varrho(t, s) = \ln(s + 1) - t$.

Sada dajemo definiciju R-proksimalnih kontrakcija uvedenu u radu [41].

Definicija 2.2.2. *Neka je (X, d) metrički prostor sa w_0-rastojanjem p i $\emptyset \neq A, B \subseteq X$. Preslikavanje $T : A \to B$ takvo da važi*

$$\left.\begin{array}{l} d(u, Tv) = d(A, B) \\ d(x, Ty) = d(A, B) \end{array}\right\} \Rightarrow \varrho\left(\mu(u, x), \mu(v, y)\right) > 0$$

za svako $u, v, x, y \in A$ (gde je $\varrho : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to [0, \infty)$ jaka R-funkcija i $\{p(x, y) : x, y \in X\} \subseteq \mathbb{A}$) se naziva R-proksimalna kontrakcija prvog tipa.

Preslikavanje T se naziva R-proksimalna kontrakcija drugog tipa ako važi

$$\left.\begin{aligned} d(u,Tv) = d(A,B) \\ d(x,Ty) = d(A,B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varrho\left(\mu(Tu,Tx),\mu(Tv,Ty)\right) > 0$$

za svako $u, v, x, y \in A$.

Sledeće pomoćno tvrđenje se koristi u dokazima glavnih rezultata.

Lema 2.2.1. *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor sa w_0-rastojanjem p, i neka je $\{x_n\}$ niz elemenata u X takav da je*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(x_n, x_{n+1}) = 0. \tag{2.2.1}$$

Tada važi jedno od sledeća dva tvrđenja:

(i) $\lim_{m,n\to\infty} \mu(x_n, x_m) = 0$*; ili:*

(ii) postoji $\varepsilon > 0$ i dva podniza $\{x_{m_k}\}$ i $\{x_{n_k}\}$ niza $\{x_n\}$ sa $m_k > n_k$ za svako $k \in \mathbb{N}$, takvi da je $\mu(x_{n_k}, x_{m_k}) \geq \varepsilon$ za svako $k \in \mathbb{N}$ i

$$\lim_{k\to\infty} \mu(x_{n_k}, x_{m_k}) = \lim_{k\to\infty} \mu(x_{n_k-1}, x_{m_k-1}) = \varepsilon.$$

Dokaz. Pretpostavimo da (i) nije tačno. Tada postoje $\varepsilon > 0$ i nizovi $\{m_k\}$, $\{n_k\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ sa $m_k > n_k \geq k$ tako da je

$$\mu(x_{n_k}, x_{m_k}) \geq \varepsilon \tag{2.2.2}$$

za svako $k \in \mathbb{N}$. Neka je m_k minimalni indeks za koji važi (2.2.2). Tada je

$$\mu(x_{n_k}, x_{m_k-1}) < \varepsilon \tag{2.2.3}$$

za svako $k \in \mathbb{N}$. Odavde, koristeći nejednakost trougla za μ zajedno sa (2.2.2) i (2.2.3) imamo

$$\varepsilon \leq \mu(x_{n_k}, x_{m_k}) \leq \mu(x_{n_k}, x_{m_k-1}) + \mu(x_{m_k-1}, x_{m_k}) < \varepsilon + \mu(x_{m_k-1}, x_{m_k}).$$

Prelaskom na graničnu vrednost u gornjoj nejednakosti (kad $k \to \infty$) dobija se

$$\lim_{k\to\infty} \mu(x_{n_k}, x_{m_k}) = \varepsilon \tag{2.2.4}$$

jer je po (2.2.1) $\lim_{k\to\infty} \mu(x_{m_k-1}, x_{m_k}) = 0$.

Sada pokažimo da je

$$\lim_{k\to\infty} \mu(x_{n_k-1}, x_{m_k-1}) = \varepsilon. \tag{2.2.5}$$

Upotrebljavajući nejednakost trougla imamo

$$\mu(x_{n_k-1}, x_{m_k-1}) \leq \mu(x_{n_k-1}, x_{n_k}) + \mu(x_{n_k}, x_{m_k}) + \mu(x_{m_k}, x_{m_k-1})$$

i

$$\mu(x_{n_k}, x_{m_k}) \leq \mu(x_{n_k}, x_{n_k-1}) + \mu(x_{n_k-1}, x_{m_k-1}) + p(x_{m_k-1}, x_{m_k})$$

pa puštajući da $k \to \infty$ u zadnje dve nejednakosti, s obzirom na (2.2.1) i (2.2.4) dobijamo redom

$$\lim_{k\to\infty} \mu(x_{n_k-1}, x_{m_k-1}) \leq \varepsilon,$$

odn.

$$\varepsilon \leq \lim_{k\to\infty} \mu(x_{n_k-1}, x_{m_k-1}),$$

što jedno sa drugim povlači (2.2.5). □

Sada se može formulisati prvi glavni rezultat iz [41].

Teorema 2.2.1. *Neka su A i B neprazni podskupovi kompletnog metričkog prostora (X, d) sa w_0-rastojanjem p takvi da je A_0 neprazan zatvoren skup. Neka su $g : A \to A$ i $T : A \to B$ preslikavanja koja zadovoljavaju sledeće uslove:*

(a) T je R-proksimalna kontrakcija prvog tipa;

(b) $T(A_0) \subseteq B_0$

(c) $p(gx, gy) = p(x, y)$ za svako $x, y \in X$;

(d) g je neprekidno; i

(e) $A_0 \subseteq g(A_0)$.

Tada postoji jedinstvena tačka $z \in$ za koju je $d(gz, Tz) = d(A, B)$ i $p(z, z) = 0$. Štaviše, za proizvoljno početno $x_0 \in A_0$ postoji niz $\{x_n\} \subseteq A_0$ takav da je $d(gx_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ za svako $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i koji konvergira ka nekoj g-tački najbolje aproksimacije preslikavanja T.

Dokaz. Neka je $x_0 \in A_0$ proizvoljno. Zbog uslova (b) i (e) tada sledi da postoji $x_1 \in A_0$ tako da je

$$d(gx_1, Tx_0) = d(A, B).$$

Opet, zbog (b) i (e), za $x_1 \in A_0$ postoji $x_2 \in A_0$ za koje je

$$d(gx_2, Tx_1) = d(A, B).$$

Ponavljanjem ovog postupka dobijamo da za svako $x_n \in A_0$ postoji $x_{n+1} \in A_0$ tako da je

$$d(gx_{n+1}, Tx_n) = d(A, B).$$

Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $\mu(x_{n_0-1}, x_{n_0}) = 0$, onda je $x_{n_0-1} = x_{n_0}$, što po konstrukciji niza $\{x_n\}$ znači da je $d(gx_{n_0-1}, Tx_{n_0}) = d(gx_{n_0-1}, Tx_{n_0-1}) = d(A, B)$, tj. x_{n_0-1} je g-tačka najbolje aproksimacije za preslikavanje T, i dokaz je završen.

Zato bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da je $\mu(x_{n-1}, x_n) > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Pokažimo da niz $\{x_n\}$ konvergira. Pošto je T R-proksimalna kontrakicja prvog tipa imamo

$$0 < \varrho(\mu(gx_n, gx_{n+1}), \mu(x_{n-1}, x_n)) = \varrho(\mu(x_n, x_{n+1}), \mu(x_{n-1}, x_n)).$$

Dakle, na osnovu osobine R-funkcije (ϱ_1) sledi

$$\lim_{n\to\infty} \mu(x_{n-1}, x_n) = 0.$$

Dokažimo sada da je

$$\lim_{m,n\to\infty} \mu(x_n, x_m) = 0. \tag{2.2.6}$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da limes u (2.2.6) nije nula. Tada po Lemi 2.2.1 postoji $\varepsilon > 0$ i dva niza $\{m_k\}, \{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ sa $m_k > n_k$ za svako $k \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\mu(x_{n_k}, x_{m_k}) \geq \varepsilon \tag{2.2.7}$$

za svako $k \in \mathbb{N}$ i

$$\lim_{k\to\infty} \mu(x_{n_k}, x_{m_k}) = \lim_{k\to\infty} \mu(x_{n_k-1}, x_{m_k-1}) = \varepsilon. \tag{2.2.8}$$

Pošto je T R-proksimalna kontrakcija prvog tipa i zadovoljen je uslov (c), to je

$$0 < \varrho(\mu(gx_{n_k}, gx_{m_k}), \mu(x_{n_k-1}, x_{m_k-1})) = \varrho(\mu(x_{n_k}, x_{m_k}), \mu(x_{n_k-1}, x_{m_k-1}))$$

za svako $k \in \mathbb{N}$. Sada stavimo $a_k := \mu(x_{n_k}, x_{m_k})$ i $b_k := \mu(x_{n_k-1}, x_{m_k-1})$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Prema poslednjoj nejednakosti i zbog osobine (ϱ_2), kao i (2.2.7) i (2.2.8) dobija se

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0,$$

što je kontradikcija. Stoga važi (2.2.6).

Primenom Leme 1.2.1 iz (2.2.6) onda zaključujemo da je niz (x_n) Košijev. Kako je $x_n \in A_0$ za svako $n \in \mathbb{N}$, a A_0 zatvoren podskup kompletnog metričkog prostora (X, d), to postoji $\lim_{n\to\infty} x_n = z \in A_0$. Onda je i $\lim_{n\to\infty} gx_n = gz$ zato što je g neprekidno prema uslovu (d). Takođe je $gz \in A_0$ jer je $gx_n \in A_0$ za sve n, a A_0 zatvoren skup. S druge strane, pošto je $z \in A_0$ i po uslovu (b) je $Tz \in B_0$, za z postoji $u \in A_0$ tako da je $d(u, Tz) = d(A, B)$.

Da bismo kompletirali dokaz, treba još dokazati da je $u = gz$ i $p(z, z) = 0$.

Ako je $u = gx_n$ za beskonačno mnogo indeksa $n \in \mathbb{N}$, onda je $u = gz$. Stoga pretpostavimo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $u \neq gx_n$ za svako $n \geq n_0$. Ako je $\mu(gx_n, u) = 0$ za neko $n \geq n_0$, onda je $gx_n = u$, pa mora biti $\mu(gx_n, u) > 0$ za svako $n \geq n_0$. Takođe, postoji podniz $\{x_{n_k}\}$ niza $\{x_n\}$ takav da je $\mu(x_{n_k}, z) > 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$ (ako to nije tačno, onda postoji $N \in \mathbb{N}$ takvo da je $\mu(x_n, z) = 0$ za svako $n \geq N$, i onda je $\mu(x_{n-1}, x_n) = 0$ za svako $n \geq N$, što je u suprotnosti sa našim pretpostavkama). Pored toga je i $\mu(gx_{n_k}, u) > 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$ takvo da je $n_k \geq n_0$. Da bi se dokaz pojednostavio, bez gubljenja opštosti ćemo od sada identifikovati podniz $\{x_{n_k}\}$ sa celim nizom $\{x_n\}$.

Na osnovu (2.2.6) za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da je $\mu(x_n, x_m) < \varepsilon$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$ za koje je $m > n \geq N_\varepsilon$. Za fiksno $n \in \mathbb{N}$ tako da je $n \geq \max\{n_0, N_\varepsilon\}$ funkcija $p(x_n, \cdot)$ je poluneprekidna sa donje strane, pa je zato

$$p(x_n, z) \leq \liminf_{m\to\infty} p(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Odatle je $\lim_{n\to\infty} p(x_n, z) = 0$. Slično je i $\lim_{n\to\infty} p(z, x_n) = 0$, što zajedno sa prethodnom jednakosti daje

$$\lim_{n\to\infty} \mu(x_n, z) = \lim_{n\to\infty} \mu(gx_n, gz) = 0. \tag{2.2.9}$$

Uzmimo sada da je $a_n := \mu(gx_{n+1}, u)$ i $b_n := \mu(x_n, z)$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Onda koristeći osobinu R-funkcije (ϱ_3) uz (2.2.9) dobijamo

$$\lim_{n\to\infty} \mu(gx_{n+1}, u) = 0. \tag{2.2.10}$$

Konačno, iz (2.2.9) i (2.2.10) zaključujemo da je $gz = u$ na osnovu Leme 1.2.1 (i). Jedinstvenost se sada lako pokazuje pomoću osobine (ϱ_1), kada se uzme da je $\{a_n\}$ konstantan niz definisan sa $a_n := \mu(gv, gz) = \mu(v, z)$ za svako $n \in \mathbb{N}$, gde je $v \in A$ takvo da je $d(gv, Tv) = d(A, B)$. Analogno se pokazuje i da je $p(z, z) = \mu(z, z) = 0$. □

Na sličan način se pokazuje i naredni rezultat o tačkama najbolje aproksimacije za R-proksimalne kontrakcije drugog tipa.

Teorema 2.2.2. *Neka su A i B neprazni podskupovi kompletnog metričkog prostora (X, d) sa w_0-rastojanjem p takvi da je $T(A_0)$ neprazan zatvoren skup. Neka su $g : A \to A$ i $T : A \to B$ preslikavanja koja zadovoljavaju sledeće uslove:*

(a) T je R-proksimalna kontrakcija drugog tipa;

(b) $T(A_0) \subseteq B_0$;

(c) T je injektivno na A_0;

(d) $p(Tgx, Tgy) = p(Tx, Ty)$ za svako $x, y \in X$;

(e) g je neprekidno; i

(f) $A_0 \subseteq g(A_0)$.

Tada postoji jedinstvena tačka $z \in$ za koju je $d(gz, Tz) = d(A, B)$ i $p(Tz, Tz) = 0$. Štaviše, za proizvoljno početno $x_0 \in A_0$ postoji niz $\{x_n\} \subseteq A_0$ takav da je $d(gx_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ za svako $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i koji konvergira ka nekoj g-tački najbolje aproksimacije preslikavanja T.

Dokaz. Neka je $x_0 \in A_0$ proizvoljno. Zbog uslova (b) i (f) tada sledi da postoji $x_1 \in A_0$ tako da je

$$d(gx_1, Tx_0) = d(A, B).$$

Opet, zbog (b) i (f), za $x_1 \in A_0$ postoji $x_2 \in A_0$ za koje je

$$d(gx_2, Tx_1) = d(A, B).$$

Ponavljanjem ovog postupka dobijamo da za svako $x_n \in A_0$ postoji $x_{n+1} \in A_0$ tako da je

$$d(gx_{n+1}, Tx_n) = d(A, B).$$

Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $\mu(Tx_{n_0-1}, Tx_{n_0}) = 0$, onda je $x_{n_0-1} = x_{n_0}$, što po konstrukciji niza $\{x_n\}$ znači da je $d(gx_{n_0-1}, Tx_{n_0}) = d(gx_{n_0-1}, Tx_{n_0-1})$ $= d(A, B)$, tj. x_{n_0-1} je g-tačka najbolje aproksimacije za preslikavanje T, i dokaz je završen.

Zato bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da je $\mu(Tx_{n-1}, Tx_n) > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Pokažimo da niz $\{Tx_n\}$ konvergira. Pošto je T R-proksimalna kontrakicja drugog tipa imamo

$$\begin{aligned} 0 &< \varrho(\mu(Tgx_n, Tgx_{n+1}), \mu(Tx_{n-1}, Tx_n)) \\ &= \varrho(\mu(Tx_n, Tx_{n+1}), \mu(Tx_{n-1}, Tx_n)). \end{aligned}$$

Dakle, na osnovu osobine R-funkcije (ϱ_1) sledi

$$\lim_{n\to\infty} \mu(Tx_{n-1}, Tx_n) = 0.$$

Dokažimo sada da je

$$\lim_{m,n\to\infty} \mu(Tx_n, Tx_m) = 0. \tag{2.2.11}$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da limes u (2.2.11) nije nula. Tada po Lemi 2.2.1 postoji $\varepsilon > 0$ i dva niza $\{m_k\}, \{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ sa $m_k > n_k$ za svako $k \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\mu(Tx_{n_k}, Tx_{m_k}) \geq \varepsilon \tag{2.2.12}$$

za svako $k \in \mathbb{N}$ i

$$\lim_{k\to\infty} \mu(Tx_{n_k}, Tx_{m_k}) = \lim_{k\to\infty} \mu(Tx_{n_k-1}, Tx_{m_k-1}) = \varepsilon. \tag{2.2.13}$$

Pošto je T R-proksimalna kontrakcija drugog tipa i zadovoljen je uslov (d), to je

$$\begin{aligned} 0 <&\varrho(\mu(Tgx_{n_k}, Tgx_{m_k}), \mu(Tx_{n_k-1}, Tx_{m_k-1})) \\ =&\varrho(\mu(Tx_{n_k}, Tx_{m_k}), \mu(Tx_{n_k-1}, Tx_{m_k-1})) \end{aligned}$$

za svako $k \in \mathbb{N}$. Sada stavimo $a_k := \mu(Tx_{n_k}, Tx_{m_k})$ i $b_k := \mu(Tx_{n_k-1}, Tx_{m_k-1})$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Prema poslednjoj nejednakosti i zbog osobine (ϱ_2), kao i (2.2.12) i (2.2.13) dobija se

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0,$$

što je kontradikcija. Stoga važi (2.2.11).

Primenom Leme 1.2.1 iz (2.2.11) onda zaključujemo da je niz (Tx_n) Košijev. Kako je $Tx_n \in T(A_0)$ za svako $n \in \mathbb{N}$, a $T(A_0)$ zatvoren podskup kompletnog metričkog prostora (X, d), to postoji $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tz \in T(A_0)$. Takođe je po uslovu (b) $Tz \in T(A_0) \subseteq B_0$, pa postoji $u \in A_0$ tako da je $d(u, Tz) = d(A, B)$. Na osnovu uslova (f) je i $u = gx$ za neko $x \in A_0$. Stoga je $d(gx, Tz) = d(A, B)$.

Dokažimo sada da je $Tx = Tz$.

Ako je $Tx = Tx_n$ za beskonačno mnogo indeksa $n \in \mathbb{N}$, onda je $Tz = Tx$. Stoga pretpostavimo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $Tx \neq Tx_n$ za svako $n \geq n_0$. Ako je $\mu(Tx_n, Tx) = 0$ za neko $n \geq n_0$, onda je $Tx_n = Tx$, pa mora biti $\mu(Tx_n, Tx) > 0$ za svako $n \geq n_0$. Takođe, postoji podniz $\{x_{n_k}\}$ niza $\{x_n\}$ (koji bez gubljenja opštosti identifikujemo sa celim nizom) takav da je $\mu(Tx_{n_k}, Tz) > 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$

Na osnovu (2.2.11) za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da je $\mu(Tx_n, Tx_m) < \varepsilon$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$ za koje je $m > n \geq N_\varepsilon$. Za fiksno $n \in \mathbb{N}$ tako da je $n \geq \max\{n_0, N_\varepsilon\}$ funkcija $p(Tx_n, \cdot)$ je poluneprekidna sa donje strane, pa je zato

$$p(Tx_n, Tz) \leq \liminf_{m\to\infty} p(Tx_n, Tx_m) < \varepsilon.$$

Odatle je $\lim_{n\to\infty} p(Tx_n, Tz) = 0$. Slično je i $\lim_{n\to\infty} p(Tz, Tx_n) = 0$, što zajedno sa prethodnom jednakosti daje

$$\lim_{n\to\infty} \mu(Tx_n, Tz) = 0. \tag{2.2.14}$$

Uzmimo sada da je $a_n := \mu(Tgx_{n+1}, Tgx) = \mu(Tx_{n+1}, Tx)$ i $b_n := \mu(Tx_n, Tz)$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Onda koristeći osobinu R-funkcije (ϱ_3) uz (2.2.14) dobijamo

$$\lim_{n\to\infty} \mu(Tx_{n+1}, Tx) = 0. \tag{2.2.15}$$

Konačno, iz (2.2.14) i (2.2.15) zaključujemo da je $Tx = Tz$ na osnovu Leme 1.2.1 (i). Jedinstvenost se sada lako pokazuje pomoću osobine (ϱ_1), kada se uzme da je $\{a_n\}$ konstantan niz definisan sa $a_n := \mu(Tgv, Tgz) = \mu(Tv, Tz)$ za svako $n \in \mathbb{N}$, gde je $v \in A$ takvo da je $d(gv, Tv) = d(A, B)$. Analogno se pokazuje i da je $p(Tz, Tz) = \mu(Tz, Tz) = 0$. □

Napomena 2.2.1. Ovde ćemo navesti neke posledice naših glavnih rezultata koji su predstavljeni u ovom pododeljku. Ako je u Teoremi 2.2.1:

- $\varrho : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ simulaciona funkcija, $g = id_A$ i $p = d$, dobija se Posledica 2.1 iz rada Tchier *i dr.* [63];

- p simetrično w-rastojanje na X, i $A = B$, dobijamo Teoremu 9 iz rada Zarinfar *i dr.* [64];

- $\varrho(t, s) = \phi(s) - t$, gde je $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ funkcija kao u Primeru 2.2.1 (c), dobija se uopštenje rezultata o tački najbolje aproksimacije iz rada Jleli *i dr.* [27]; ovde su i pretpostavke koje zadovoljavaju skupovi A i B oslabljene.

- $\varrho(t, s)$ definisano kao u Primeru 2.2.1 (b), i $A = B$, dobija se da teorema o fiksnoj tački koju je dao Geraghty [17] važi i na prostorima sa w_0-rastojanjem.

2.3 Meir-Keelerova preslikavanja

Meir i Keeler su u radu [47] iz 1969. godine dokazali sledeću veoma značajnu teoremu.

Teorema 2.3.1. *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor, i neka je T sopstveno preslikavanje na X. Pretpostavimo da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tako da za svako $x, y \in X$, važi sledeći uslov:*

$$\varepsilon \leq d(Tx, Ty) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(x, y) < \varepsilon.$$

Tada T ima jedinstvenu fiksnu tačku $x \in X$, i za svako $x_0 \in X$ niz $\{T^n x_0\}$ konvergira ka x.

U ovom odeljku predstavljeni su rezultati autora iz [38], gde su razmatrane tačke najbolje aproksimacije za preslikavanja Meir-Keelerovog tipa na prostorima sa w-rastojanjem. Najpre su uvedeni pojmovi MK-p-proksimalnih kontrakcija upotrebljavajući koncepat w-rastojanja. Zatim su dokazani novi rezultati o tački najbolje aproksimacije za MK-p-proksimalne kontrakcije na kompletnim metričkim prostorima. Primenom glavnih rezultata, kao posledice su izvedeni skoriji rezultati o tački najbolje aproksimacije iz rada Jleli *i dr.* [27].

Neka je (X, d) metrički prostor, $p : X \times X \to [0, \infty)$ w-rastojanje na X, i neka su A i B neprazni podskupovi od X (koji ne moraju biti jednaki).

Uvodimo sledeće oznake (videti npr. [43, 63]) :

$$\mathcal{G}_{A,p} = \{g : A \to A : p(x, y) \leq p(gx, gy),\ \forall x, y \in A\}$$
$$\mathcal{T}_{g,p} = \{T : A \to B : p(Tx, Ty) \leq p(Tgx, Tgy),\ \forall x, y \in A\}.$$

Definicija 2.3.1. *Preslikavanje $T : A \to B$ se naziva MK-p-proksimalna kontrakcija prvog tipa ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tako da važi:*

$$\left.\begin{aligned} d(u, Tx) = d(A, B) \\ d(v, Ty) = d(A, B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow (p(x, y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow p(u, v) < \varepsilon)$$

za svako $u, v, x, y \in A$.

Definicija 2.3.2. *Preslikavanje $T : A \to B$ se naziva MK-p-proksimalna kontrakcija drugog tipa ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tako da važi:*

$$\left.\begin{aligned} d(u, Tx) = d(A, B) \\ d(v, Ty) = d(A, B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow (p(Tx, Ty) < \varepsilon + \delta \Rightarrow p(Tu, Tv) < \varepsilon)$$

za svako $u, v, x, y \in A$.

Sledeća dva pomoćna tvrđenja će se koristiti u dokazu glavnih rezultata.

Lema 2.3.1. *Ako je $T : A \to B$ MK-p-proksimalna kontrakcija prvog tipa, onda važi:*

$$\left.\begin{array}{r} d(u,Tx) = d(A,B) \\ d(v,Ty) = d(A,B) \end{array}\right\} \Rightarrow p(u,v) \leq p(x,y)$$

za svako $u, v, x, y \in A$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon = p(x,y) + \lambda$ i $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, gde je $\lambda > 0$ proizvoljno. Tada važi nejednakost

$$p(x,y) < p(x,y) + \lambda + \delta,$$

odakle sledi

$$p(u,v) < \varepsilon = p(x,y) + \lambda \tag{2.3.1}$$

pošto je T MK-p-proksimalna kontrakcija prvog tipa. Puštajući da $\lambda \to 0$ u (2.3.1) dobijamo $p(u,v) \leq p(x,y)$. □

Lema 2.3.2. *Ako je $T : A \to B$ MK-p-proksimalna kontrakcija drugog tipa, onda važi:*

$$\left.\begin{array}{r} d(u,Tx) = d(A,B) \\ d(v,Ty) = d(A,B) \end{array}\right\} \Rightarrow p(Tu,Tv) \leq p(Tx,Ty)$$

za svako $u, v, x, y \in A$.

Dokaz. Uzmimo da je $\varepsilon = p(Tx,Ty) + \lambda$ i $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ za neko proizvoljno $\lambda > 0$. Tada važi sledeća nejednakost:

$$p(Tx,Ty) < p(Tx,Ty) + \lambda + \delta,$$

što povlači da je

$$p(Tu,Tv) < \varepsilon = p(Tx,Ty) + \lambda \tag{2.3.2}$$

pošto je T MK-p-proksimalna kontrakcija drugog tipa. Ako pustimo da $\lambda \to 0$ u (2.3.2), dobija se $p(Tu,Tv) \leq p(Tx,Ty)$. □

Sada se mogu dokazati glavni rezultati.

Teorema 2.3.2. *Neka su A i B neprazni podskupovi u kompletnom metričkom prostoru (X,d) sa w-rastojanjem p, tako da je skup A_0 neprazan i zatvoren. Pretpostavimo da preslikavanja $g : A \to A$ i $T : A \to B$ zadovoljavaju sledeće uslove:*

1. *T je MK-p-proksimalna kontrakcija prvog tipa;*

2. *$g \in \mathcal{G}_{A,p}$;*

3. $A_0 \subseteq g(A_0)$*;*

4. $T(A_0) \subseteq B_0$.

Tada postoji jedinstvena tačka $x \in A_0$ *tako da važi* $d(gx, Tx) = d(A, B)$ *i* $p(x, x) = 0$*. Štaviše, za svako početno* $x_0 \in A_0$ *postoji niz* $\{x_n\} \subseteq A_0$ *koji konvergira ka* x*, tako da je* $d(gx_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ *za svako* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*.*

Dokaz. Neka je $x_0 \in A_0$ proizvoljno. Pošto je $T(A_0) \subseteq B_0$ i $A_0 \subseteq g(A_0)$, postoji $x_1 \in A_0$ tako da je

$$d(gx_1, Tx_0) = d(A, B).$$

Slično, za $x_1 \in A_0$ postoji $x_2 \in A_0$ tako da je

$$d(gx_2, Tx_1) = d(A, B).$$

Nastavljajući ovaj proces, za svako $x_n \in A_0$ možemo naći $x_{n+1} \in A_0$ tako da je

$$d(gx_{n+1}, Tx_n) = d(A, B).$$

Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tako da je

$$p(x_{n_0}, x_{n_0+1}) = 0, \tag{2.3.3}$$

onda na osnovu Leme 2.3.1 imamo da je $p(gx_{n_0+1}, gx_{n_0+2}) = 0$, pa je

$$\begin{aligned} p(x_{n_0}, x_{n_0+2}) &\leq p(x_{n_0}, x_{n_0+1}) + p(x_{n_0+1}, x_{n_0+2}) \\ &\leq p(x_{n_0}, x_{n_0+1}) + p(gx_{n_0+1}, gx_{n_0+2}) = 0, \end{aligned}$$

odakle

$$p(x_{n_0}, x_{n_0+2}) = 0. \tag{2.3.4}$$

Međutim, primenom Leme 1.2.1 (i), zbog (2.3.3) i (2.3.4) dobijamo da je $x_{n_0+2} = x_{n_0+1}$, pa je tada $d(gx_{n_0+2}, Tx_{n_0+1}) = d(gx_{n_0+1}, Tx_{n_0+1}) = d(A, B)$.

Zato možemo pretpostaviti da je $p(x_{n-1}, x_n) > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Pošto je T MK-proksimalna kontrakcija prvog tipa, na osnovu Leme 2.3.1 dobijamo

$$p(gx_{n+1}, gx_{n+2}) \leq p(x_n, x_{n+1}) \leq p(gx_n, gx_{n+1}) \tag{2.3.5}$$

za svako $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, što znači da je niz $\{p(gx_n, gx_{n+1})\} \subseteq (0, \infty)$ opadajući. Stoga, postoji $r \geq 0$ tako da je

$$p(gx_n, gx_{n+1}) \to r \text{ kada } n \to \infty. \tag{2.3.6}$$

Pretpostavimo da je $r > 0$. Sada izaberimo $\delta = \delta(r) > 0$, pa prema (2.3.6) postoji $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ tako da je $p(x_m, x_{m+1}) \leq p(gx_m, gx_{m+1}) < r+\delta$. Pošto je T MK-p-proksimalna kontrakcja prvog tipa, dobijamo $p(gx_{m+1}, gx_{m+2}) < r$, što je kontradikcija.

Dakle, imamo $r = 0$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} p(gx_n, gx_{n+1}) = 0. \tag{2.3.7}$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Bez gubljenja opštosti, možemo pretpostaviti da je $\delta = \delta(\varepsilon) < \varepsilon$. Prema (2.3.7) postoji $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tako da je

$$p(gx_n, gx_{n+1}) < \delta \text{ za svako } n \geq N. \tag{2.3.8}$$

Pokazaćemo da za svako $n \geq N$ i $k \in \mathbb{N}$ važi

$$p(gx_n, gx_{n+k}) < \varepsilon + \delta \tag{2.3.9}$$

indukcijom po k. Fiksirajmo $n \geq N$. Prema (2.3.8), (2.3.9) važi za $k = 1$. Pretpostavimo da (2.3.9) važi za neko $k \in \mathbb{N}$, tj.

$$p(x_n, x_{n+k}) \leq p(gx_n, gx_{n+k}) < \varepsilon + \delta.$$

Ali onda je

$$p(gx_{n+1}, gx_{n+k+1}) < \varepsilon$$

pošto je T MK-p-proksimalna kontrakcija prvog tipa. Stoga prema (2.3.8), imamo

$$p(gx_n, gx_{n+k+1}) \leq p(gx_n, gx_{n+1}) + p(gx_{n+1}, gx_{n+k+1}) < \delta + \varepsilon.$$

U (2.3.9) je $\delta < \varepsilon$, pa je zapravo

$$p(gx_n, gx_{n+k}) < 2\varepsilon \tag{2.3.10}$$

za svako $n \geq N$ and $k \in \mathbb{N}$. Drugim rečima, dokazali smo da je

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m>n} p(gx_n, gx_m) = 0,$$

pa na osnovu Leme 1.2.1 (iii) zaključujemo da je $\{gx_n\}$ Košijev niz u A_0. Pošto je (X, d) kompletan metrički prostor i A_0 je zatvoren podskup od X, postoji $\lim_{n\to\infty} gx_n = gx$ za neko $x \in A_0$. Pošto je $gx_n \in A_0$ za svako $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i A_0 je zatvoren skup, takođe imamo da je $gx \in A_0$. Sa druge strane je $gx \in A_0$ i $T(A_0) \subseteq B_0$, pa za x postoji $z \in A_0$ tako da je $d(z, Tx) = d(A, B)$.

Dokažimo da je $z = gx$.

Prema (2.3.10), za svako $\varepsilon > 0$, postoji $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tako da za svako fiksno $n \geq N$ važi

$$p(gx_n, gx) \leq \liminf_{k\to\infty} p(gx_n, gx_{n+k}) < 2\varepsilon$$

odakle sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} p(gx_n, gx) = 0. \tag{2.3.11}$$

Pošto je T MK-p-proksimalna kontrakcija prvog tipa, primenom Leme 2.3.1 dobijamo

$$p(gx_{n+1}, z) \leq p(x_n, x) \leq p(gx_n, gx)$$

za svako $n \geq N$, što zajedno sa (2.3.11) povlači

$$\lim_{n\to\infty} p(gx_{n+1}, z) = 0. \tag{2.3.12}$$

Konačno, iz (2.3.11) i (2.3.12) zaključujemo da je $z = gx$ na osnovu Leme 1.2.1 (i). Kako je $d(z, Tx) = d(A, B)$, to je $d(gx, Tx) = d(A, B)$.

Da bismo dokazali jedinstvenost, pretpostavimo da je y iz A_0 takvo da je

$$d(gy, Ty) = d(A, B).$$

Pretpostavimo da je $p(gx, gy) \geq p(x, y) > 0$. Uzmimo $\varepsilon = p(x, y)$ i $\delta = \delta(\varepsilon)$, pa je $p(x, y) < \varepsilon + \delta$. Pošto je T MK-p-proksimalna kontrakcija prvog tipa, dobijamo $p(gx, gy) < \varepsilon = p(x, y)$, što je kontradikcija.

Dakle,

$$p(x, y) = 0 \tag{2.3.13}$$

i simetrično se može pokazati da je takođe $p(y, x) = 0$, odakle sledi $p(x, x) \leq p(x, y) + p(y, x) = 0$, tj.

$$p(x, x) = 0. \tag{2.3.14}$$

Prema Lemi 1.2.1 (i), iz (2.3.13) i (2.3.14) zaključujemo da je $x = y$.

Slično se dokazuje da je $p(x, x) = 0$. □

Analogno Teoremi 2.3.2, možemo dokazati sledeći rezultat o tačkama najbolje aproksimacije za MK-p-proksimalne kontrakcije drugog tipa.

Teorema 2.3.3. *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor sa w-rastojanjem p, i neka su A i B neprazni podskupovi od X tako da je A_0 neprazan i zatvoren. Pretpostavimo da preslikavanja $T : A \to B$ i $g : A \to A$ zadovoljavaju sledeće uslove:*

1. *T je MK-p-proksimalna kontrakcija drugog tipa;*

2. $T \in \mathcal{T}_{g,p}$*;*

3. $A_0 \subseteq g(A_0)$*;*

4. $T(A_0) \subseteq B_0$*.*

Tada postoji tačka $x \in A_0$ *tako da važi* $d(gx, Tx) = d(A, B)$*, i* $p(Tx, Tx) = 0$*. Štaviše, za svako* $x_0 \in A_0$ *postoji niz* $\{x_n\} \subseteq A_0$ *koji konvergira ka* x *takav da je* $d(gx_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ *za savko* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*.*

Ako je još i T *injektivno preslikavanje na* A*, tada je tačka najbolje aproksimacije* x *opisana u prethodnom paragrafu jedinstvena.*

Dokaz. Analogno dokazu Teoreme 2.3.2, zaključujemo da za svako $x_0 \in A_0$ postoji niz $\{x_n\} \subseteq A_0$ takav da je $d(gx_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ za svako $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a koji konvergira ka $x \in A_0$ tako da je

$$d(gx, Tx) = d(A, B)$$

i

$$p(Tx, Tx) = 0. \tag{2.3.15}$$

Sada pretpostavimo da je $y \in A_0$ još jedna tačka (različita od x) takva da je

$$d(gy, Ty) = d(A, B).$$

Ponovo, upotrebljavajući sličan postupak kao u dokazu Teoreme 2.3.2, dobijamo da je

$$p(Tx, Ty) = 0. \tag{2.3.16}$$

Prema (2.3.15) i (2.3.16), na osnovu Leme 1.2.1 dobijamo da je $Tx = Ty$, odakle je $x = y$, pošto je T injektivno preslikavanje na A. $\square$

U nastavku ćemo pod slabijim pretpostavkama izvesti rezultate iz rada Jleli *i dr.* [27] kao posledice naših glavnih rezultata.

Da bismo to učinili, podsetimo najpre na pojmove MK-proksimalnih kontrakcija koje su uveli Jleli i dr. [27]:

Definicija 2.3.3. *Preslikavanje* $T : A \to B$ *se naziva* MK*-proksimalna kontrakcija prvog tipa ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tako da važi*

$$\left.\begin{array}{l} d(u, Tx) = d(A, B) \\ d(v, Ty) = d(A, B) \end{array}\right\} \Rightarrow (\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(u, v) < \varepsilon)$$

za svako $u, v, x, y \in A$*.*

Definicija 2.3.4. *Preslikavanje* $T : A \to B$ *se naziva* MK*-proksimalna kontrakcija drugog tipa ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tako da važi*

$$\left.\begin{array}{r} d(u, Tx) = d(A, B) \\ d(v, Ty) = d(A, B) \end{array}\right\} \Rightarrow (\varepsilon \leq d(Tx, Ty) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(Tu, Tv) < \varepsilon)$$

za svako $u, v, x, y \in A$.

Sada dokazujemo prvi glavni rezultat iz rada Jleli *i dr.* ([27, Theorem 3.1]):

Teorema 2.3.4. *Neka su* A *i* B *zatvoreni podskupovi kompletnog metričkog prostora* (X, d) *tako da je skup* A_0 *neprazan i par* (A, B) *ima slabo* P*-svojstvo. Pretpostavimo da preslikavanja* $g : A \to A$ *i* $T : A \to B$ *zadovoljavaju sledeće uslove:*

(a) T *je* MK*-proksimalna kontrakcija prvog, odn. drugog tipa;*

(b) $T(A_0) \subseteq B_0$;

(c) g *je izometrija (tj.* $d(gx, gy) = d(x, y)$ *za svako* $x, y \in X$*);*

(d) $A_0 \subseteq g(A_0)$;

(e) T *očuvava izometrički rastojanje u odnosu na* g *(tj.* $d(Tgx, Tgy) = d(Tx, Ty)$ *za svako* $x, y \in X$*).*

Tada, postoji jedinstvena tačka $x^* \in A$ *tako da je* $d(gx^*, Tx^*) = d(A, B)$. *Štaviše, za svaki fiksni element* $x_0 \in A_0$, *iterativni niz* $\{x_n\}$ *definisan sa* $d(gx_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ *konvergira ka* x^*.

Dokaz. Primetimo da svi uslovi Teoreme 2.3.2 (odn. 2.3.3) važe ako uzmemo da je $p = d$. Prema tome, važi i isti zaključak. □

Analogno se može pokazati drugi glavni rezultat rada Jleli *i dr.* ([27, Theorem 3.5]):

Teorema 2.3.5. *Neka su* A *i* B *zatvoreni podskupovi kompletnog metričkog prostora* (X, d) *takvi da je* A_0 *neprazan, par* (A, B) *ima slabo* P*-svojstvo, i* B *je aproksimativno kompaktan u odnosu na* A. *Pretpostavimo da preslikavanja* $g : A \to A$ *i* $T : A \to B$ *zadovoljavaju sledeće uslove:*

(a) T *je* MK*-proksimalna kontrakcija prvog tipa;*

(b) $T(A_0) \subseteq B_0$;

(c) g je izometrija;

(d) $A_0 \subseteq g(A_0)$.

Tada postoji jedinstvena tačka $x^* \in A$ tako da je $d(gx^*, Tx^*) = d(A, B)$. Štaviše, za svaki fiksni element $x_0 \in A_0$, iterativni niz $\{x_n\}$, definisan sa $d(gx_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ konvergira ka x^*.

Napomena 2.3.1. Neka su A i B neprazni podskupovi u metričkom prostoru (X, d) tako da je $A_0 \neq \emptyset$. Onda se kaže da par (A, B) ima slabo P-svojstvo ([2, 6, 27]) ako i samo ako važi

$$\left.\begin{aligned} d(x_1, y_1) = d(A, B) \\ d(x_2, y_2) = d(A, B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Takođe, kaže se da je B aproksimativno kompaktan ([27]) u odnosu na A ako svaki niz $\{y_n\}$ u B takav da je $d(x, y_n) \to d(x, B)$ za neko $x \in A$ ima konvergentan podniz. Primetimo da je u radu Jleli *i dr.* [27] u formulaciji i dokazima glavnih rezulata upotrebljavano slabo P-svojstvo i svojstvo aproksimativne kompaktnosti. Ovde je pokazano da su te pretpostavke suvišne. Štaviše, naši glavni rezultati su opštiji, dok su dokazi značajno prostiji.

2.4 Višeznačna preslikavanja

Podsetimo se najpre definicije i osnovnih osobina Hausdorfovog rastojanja (videti npr. [49, 55]).

Neka je (X, d) metrički prostor. Tada $\mathrm{CB}(X)$ označava familiju svih nepraznih zatvorenih i ograničenih podskupova u X.

Neka je $H : \mathrm{CB}(X) \times \mathrm{CB}(X) \to \mathbb{R}$ funkcija definisana sa

$$H(S, Q) = \max\left\{\sup_{x\in S} d(x, Q), \sup_{y\in Q} d(y, S)\right\}$$

za svako $S, Q \in \mathrm{CB}(X)$. Funkcija H se naziva *Hausdorfovo rastojanje*, i može se pokazati da je $(\mathrm{CB}(X), H)$ metrički prostor.

Štaviše, za svako $S, Q, F \in \mathrm{CB}(X)$ i $x \in S$, $y \in Q$ imamo

$$\begin{aligned} d(x, F) \le d(x, y) + d(y, F) \le d(x, y) + H(Q, F); \\ d(x, F) \le d(x, Q) + H(Q, F) \le H(S, Q) + H(Q, F). \end{aligned}$$

Funkcija $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ se naziva *L-funkcija* ([45]) ako je $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) > 0$ za svako $t > 0$, i za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je $\varphi(t) \le \varepsilon$ za svako $t \in [\varepsilon, \varepsilon + \delta]$.

Definicija 2.4.1 ([65]). *Neka je $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ neprazan skup i neka je $\varrho : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ data funkcija. Kažemo da je ϱ SR-funkcija ako zadovoljava uslov:*

(SR) Ako je $\{a_n\} \subseteq (0, \infty) \cap \mathbb{A}$ niz takav da je $\varrho(a_{n+1}, a_n) > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$, onda $a_n \to 0$ kad $n \to \infty$.

Sa $SR_{\mathbb{A}}$ označavamo klasu svih SR-funkcija sa domenom $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$.

Primer 2.4.1. Ovde navodimo neke primere SR-funkcija iz [65]:

(i) $\varrho : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{R}$, gde je ϱ R-funkcija;

(ii) $\varrho(t, s) = \zeta(t, s)$, gde je $\zeta : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ simulaciona funkcija;

(iii) $\varrho(t, s) = \varphi(s) - t$, gde je $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ L-funkcija;

(iv) $\varrho(t, s) = s\varphi(s) - t$, gde je $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1)$ preslikavanje takvo da je $\limsup_{t \to s^+} \varphi(t) < 1$ za svako $s \in (0, \infty)$;

(v) $\varrho(t, s) = s\varphi(s) - t$, gde je $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1)$ preslikavanje takvo da $\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n) = 1$ povlači $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ za svaki niz $\{t_n\} \subseteq (0, \infty)$;

(vi) $\varrho(t, s) = \psi(s) - \varphi(s) - \psi(t)$, gde su $\psi, \varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ funkcije takve da je ψ neopadajuća i neprekidna zdesna, a φ je donje poluneprekidna i $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$;

(vii) $\varrho(t, s) = \frac{s}{t+1} - t$ za svako $t, s \in [0, \infty)$;

(viii) $\varrho(t, s) = \frac{s}{e^t} - t$ za svako $t, s \in [0, \infty)$;

(ix) $\varrho(t, s) = \ln(s + 1) - t$ za svako $t, s \in [0, \infty)$;

(x) $\varrho(t, s) = s - \int_0^t \Phi(u)\, du$ gde je $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ funkcija takva da $\int_0^\varepsilon \Phi(u)\, du$ postoji i veći je od ε, za svako $\varepsilon > 0$. $\square$

Neka je (X, d) metrički prostor, i neka su A i B neprazni podskupovi od X. U ovom odeljku će se razmatrati višeznačna preslikavanja oblika $T : A \to \mathrm{CB}(B)$.

Višeznačno preslikavanje T je *neprekidno* ako $H(Tx_n, Tx) \to 0$ kada $n \to \infty$ za svaki niz $\{x_n\} \subseteq A$ koji konvergira ka nekom $x \in A$.

Tačka $x \in A$ je *tačka najbolje aproksimacije* višeznačnog preslikavanja T ako je $d(x, Tx) = d(A, B)$. I za tačke najbolje aproksimacije višeznačnih preslikavanja važe iste oznake kao u prethodnim sekcijama (videti npr. [1, 36, 54]):

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \inf\{d(x,y) : x \in A, y \in B\}; \\ A_0 &= \{x \in A : d(x,y) = d(A,B) \text{ za neko } y \in B\}; \\ B_0 &= \{y \in B : d(x,y) = d(A,B) \text{ za neko } x \in A\}. \end{aligned}$$

Sada možemo dokazati glavne rezultate rada [39].

Prvi je teorema o tačkama najbolje aproksimacije za višeznačna preslikavanja sa SR-funkcijama.

Teorema 2.4.1. *Neka je (X,d) metrički prostor, i neka su A i B neprazni podskupovi od X tako da je skup A_0 neprazan i kompaktan. Neka je $T : A \to \mathrm{CB}(B)$ neprekidno višeznačno preslikavanje takvo da je $Tx \subseteq B_0$ za svako $x \in A_0$, i za svako $x_1, x_2 \in A_0$ i $y_1 \in Tx_1$ postoji $y_2 \in Tx_2$ tako da je*

$$\varrho(d(x_2,y_2) - d(A,B), d(x_1,y_1) - d(A,B)) > 0$$

gde je $\varrho \in SR_{\mathbb{A}}$ SR-funkcija takva da je $\{d(x,y) - d(A,B) : x \in A_0, y \in B_0\} \subseteq \mathbb{A}$. Tada T ima tačku najbolje aproksimacije u A_0.

Dokaz. Neka su $x_1 \in A_0$ i $y_1 \in Tx_1$ dve proizvoljne tačke. Pošto $Tx_1 \subseteq B_0$, postoji $x_2 \in A_0$ tako da je

$$d(y_1, x_2) = d(A,B).$$

Prema kontraktivnom uslovu za T, možemo naći $y_2 \in Tx_2$ tako da je

$$\varrho(d(x_2,y_2) - d(A,B), d(x_1,y_1) - d(A,B)) > 0.$$

Ponovo, pošto je $Tx_2 \subseteq B_0$, postoji $x_3 \in A_0$ tako da je

$$d(y_2, x_3) = d(A,B),$$

i možemo naći $y_3 \in Tx_3$ tako da je

$$\varrho(d(x_3,y_3) - d(A,B), d(x_2,y_2) - d(A,B)) > 0.$$

Nastavljajući ovaj proces možemo konstruisati nizove $\{x_n\} \subseteq A_0$ i $\{y_n\} \subseteq B_0$ takve da je

$$d(y_n, x_{n+1}) = d(A,B)$$

i

$$\varrho(d(x_{n+1},y_{n+1}) - d(A,B), d(x_n,y_n) - d(A,B)) > 0 \tag{2.4.1}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$.

Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $d(x_{n_0}, y_{n_0}) - d(A, B) = 0$, tada imamo

$$\begin{aligned} d(A, B) &\leq d(x_{n_0}, Tx_{n_0}) \\ &\leq d(x_{n_0}, y_{n_0}) \\ &= d(A, B) \end{aligned}$$

što znači da je $d(x_{n_0}, Tx_{n_0}) = d(A, B)$, odn. x_{n_0} je tačka najbolje aproksimacije za T.

Prema tome, možemo pretpostaviti da je $d(x_n, y_n) - d(A, B) > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Sada, primenjujući osobinu (SR) na niz $\{a_n\} \subseteq (0, \infty)$ definisan sa $a_n := d(x_n, y_n) - d(A, B)$ za svako $n \in \mathbb{N}$, prema (2.4.1) dobijamo da $a_n \to 0$, odn.

$$d(x_n, y_n) \to d(A, B) \tag{2.4.2}$$

kada $n \to \infty$.

S obzirom da je A_0 kompaktan podskup od X i $\{x_n\} \subseteq A_0$, postoji podniz $\{x_{n_k}\}$ niza $\{x_n\}$ koji konvergira ka nekom $x \in A_0$. Dokazaćemo da je x tačka najbolje aproksimacije za T.

Zaista, za proizvoljno $k \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned} d(A, B) &\leq d(x_{n_k}, Tx_{n_k}) \\ &\leq d(x_{n_k}, y_{n_k}) \to d(A, B) \end{aligned}$$

prema (2.4.2), odakle sledi da

$$d(x_{n_k}, Tx_{n_k}) \to d(A, B) \tag{2.4.3}$$

kada $k \to \infty$.

Tada na osnovu (2.4.3) dobijamo

$$\begin{aligned} d(A, B) &\leq d(x, Tx) \\ &\leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, Tx) \\ &\leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, Tx_{n_k}) + H(Tx_{n_k}, Tx) \to d(A, B) \end{aligned}$$

pošto $x_{n_k} \to x$ kada $k \to \infty$, dok je T neprekidno višeznačno preslikavanje. Konačno, zaključujemo da je $d(x, Tx) = d(A, B)$. □

Kao posledicu dobijamo naš sledeći glavni rezultat o tačkama najbolje aproksimacije za višeznačna preslikavanja na kompaktnom metričkom prostoru, uzimajući da je $A = B = X$ u Teoremi 2.4.1.

Posledica 2.4.1. *Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor, i neka je $T : X \to \mathrm{CB}(X)$ neprekidno višeznačno preslikavanje. Pretpostavimo da za svako $x_1, x_2 \in X$ i $y_1 \in Tx_1$ postoji $y_2 \in Tx_2$ tako da je*

$$\varrho(d(x_2, y_2), d(x_1, y_1)) > 0$$

gde je $\varrho \in SR_{\mathbb{A}}$ SR-funkcija takva da je $\{d(x, y) : x, y \in X\} \subseteq \mathbb{A}$. Tada T ima fiksnu tačku u X.

Ako je u Teoremi 2.4.1 Tx jednoelementni skup za svako $x \in A$, dobijamo sledeći rezultat o tačkama najbolje aproksimacije za jednoznačna preslikavanja.

Posledica 2.4.2. *Neka je (X, d) metrički prostor, i neka su A i B neprazni podskupovi od X tako da je skup A_0 neprazan i kompaktan. Neka je $T : A \to B$ neprekidno preslikavanje takvo da je $T(A_0) \subseteq B_0$, i za svako $x_1, x_2 \in A_0$ imamo da važi*

$$\varrho(d(x_2, Tx_2) - d(A, B), d(x_1, Tx_1) - d(A, B)) > 0$$

gde je $\varrho \in SR_{\mathbb{A}}$ SR-funkcija takva da je $\{d(x, y) - d(A, B) : x \in A_0, y \in B_0\} \subseteq \mathbb{A}$. Tada T ima tačku najbolje aproksimacije u A_0.

Sledeća teorema o fiksnim tačkama jednoznačnih preslikavanja na kompaktnim metričkim prostorima se dobija kao specijalan slučaj Posledice 2.4.2 kada je $A = B = X$.

Posledica 2.4.3. *Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor, i neka je $T : X \to X$ neprekidno preslikavanje. Pretpostavimo da za svako $x_1, x_2 \in X$ važi*

$$\varrho(d(x_1, Tx_1), d(x_2, Tx_2)) > 0$$

gde je $\varrho \in SR_{\mathbb{A}}$ SR-funkcija takva da je $\{d(x, y) : x, y \in X\} \subseteq \mathbb{A}$. Tada T ima fiksnu tačku u X.

U nastavku, dokazujemo verziju Teoreme 2.4.1 sa nešto drugačijim kontraktivnim uslovom.

Teorema 2.4.2. *Neka je (X, d) metrički prostor, i neka su A i B neprazni podskupovi od X tako da je skup A_0 neprazan i kompaktan. Neka je $A \to \mathrm{CB}(B)$ neprekidno višeznačno preslikavanje takvo da je $Tx \subseteq B_0$ za svako $x \in A_0$, i za svako $x_1, x_2 \in A_0$ važi*

$$\varrho(d(x_1, Tx_1) - d(A, B), d(x_2, Tx_2) - d(A, B)) > 0$$

gde je $\varrho \in SR_{\mathbb{A}}$ SR-funkcija takva da je $\{d(x, C) - d(A, B) : x \in A_0, C \subseteq B_0\} \subseteq \mathbb{A}$. Tada T ima tačku najbolje aproksimacije u A_0.

Dokaz. Neka su $x_1 \in A_0$ i $y_1 \in Tx_1$ dve proizvoljne tačke. Tada postoji $x_2 \in A_0$ tako da je
$$d(y_1, x_2) = d(A, B)$$
jer je $Tx_1 \subseteq B_0$.

Izaberimo sada proizvoljnu tačku $y_2 \in Tx_2$, pa zbog $Tx_2 \subseteq B_0$ postoji $x_3 \in A_0$ tako da je
$$d(y_2, x_3) = d(A, B).$$
Nastavljajući ovaj postupak, konstruišemo nizove $\{x_n\} \subseteq A_0$ i $\{y_n\} \subseteq B_0$ takve da je
$$d(y_n, x_{n+1}) = d(A, B)$$
za svako $n \in \mathbb{N}$.

Takođe, upotrebljavajući kontraktivni uslov za T dobijamo
$$\varrho(d(x_{n+1}, Tx_{n+1}) - d(A, B), d(x_n, Tx_n) - d(A, B)) > 0 \tag{2.4.4}$$
za svako $n \in \mathbb{N}$.

Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $d(x_{n_0}, Tx_{n_0}) - d(A, B) = 0$, onda je $x_{n_0} \in A_0$ tačka najbolje aproksimacije za T.

U suprotnom, $d(x_n, Tx_n) - d(A, B) > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Tada prema (2.4.4) primenom osobine (SR) dobijamo da niz $\{a_n\} \subseteq (0, \infty)$ definisan sa $a_n := d(x_n, Tx_n) - d(A, B)$ konvergira ka 0, odn.
$$d(x_n, Tx_n) \to d(A, B) \tag{2.4.5}$$
kada $n \to \infty$.

Ostatak dokaza je potpuno analogan dokazu Teoreme 2.4.1. □

Iz Teoreme 2.4.2 dobijamo sledeću posledicu na sličan način kao što smo dobili Posledicu 2.4.1 iz Teoreme 2.4.1.

Posledica 2.4.4. *Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor, i neka je $T : X \to \mathrm{CB}(X)$ neprekidno višeznačno preslikavanje. Pretpostavimo da za svako $x_1, x_2 \in X$ važi*
$$\varrho(d(x_1, Tx_1), d(x_2, Tx_2)) > 0$$
gde je $\varrho \in SR_{\mathbb{A}}$ SR-funkcija takva da je $\{d(x, C) : x \in X, C \in \mathrm{CB}(X)\} \subseteq \mathbb{A}$. Tada T ima fiksnu tačku u X.

Napomena 2.4.1. Primetimo da u slučaju kada je Tx jednoelementni skup za svako $x \in A$, Posledica 2.4.2 sledi na osnovu Teoreme 2.4.2. Ako je još i $A = B = X$, dobijamo Posledicu 2.4.3.

Primer 2.4.2. Neka je dat skup $X = \mathbb{R}$ sa standardnom Euklidskom metrikom $d : X \times X \to [0, \infty)$ definisanom sa:

$$d(x, y) = |x - y|$$

za svako $x, y \in X$.

Neka je $A = [-1, 0]$ i $B = [1, 2]$. Tada imamo:

$$d(A, B) = \inf\{|x - y| : x \in [-1, 0], y \in [1, 2]\} = 1$$

i ovaj infimum se dostiže za $x = 0 \in A$ i $y = 1 \in B$. Stoga je $A_0 = \{0\}$ i $B_0 = \{1\}$, i A_0 neprazan kompaktan skup.

Definišimo preslikavanje $T : A \to \mathrm{CB}(B)$ sa:

$$Tx = \{1, 1 - x\}$$

za svako $x \in A$. Lako se proverava da je T neprekidno višeznačno preslikavanje i $T(0) = \{1\} = B_0$.

Konačno, neka je $\varrho : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ SR-funkcija zadata sa:

$$\varrho(t, s) = \begin{cases} 1, & t = s = 0; \\ \frac{1}{2}s - t, & \text{u suprotnom.} \end{cases}$$

Tada za $x_1 = x_2 = 0 \in A_0$ i $y_1 = 1 \in Tx_1$ postoji $y_2 = 1 \in Tx_2$ tako da je

$$\varrho(d(x_2, y_2) - d(A, B), d(x_1, y_1) - d(A, B)) = \varrho(0, 0) = 1 > 0.$$

Zaključujemo da su svi uslovi Teoreme 2.4.1 ispunjeni. Zaista, T ima (jedinstvenu) tačku najbolje aproksimacije $x = 0 \in A_0$. □

Sada primenom naših glavnih rezultata izvodimo verziju teoreme o fiksnim tačkama iz rada Javahernia *i dr.* ([26, Theorem 3.1]) za neprekidna višeznačna preslikavanja na kompaktnim metričkim prostorima.

Pre nego što to učinimo, navodimo definiciju jakih izvodljivih funkcija.

Definicija 2.4.2 ([26])**.** *Funkcija $\vartheta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je jaka izvodljiva (strong manageable) ako zadovoljava sledeće uslove:*

(ϑ_1) $\vartheta(t, s) < s - t$ za svako $s, t > 0$;

(ϑ_2) za proizvoljne nizove $\{t_n\}, \{s_n\} \subseteq (0, \infty)$ takve da je $\limsup_{n\to\infty} t_n = \limsup_{n\to\infty} s_n < \infty$ važi $\limsup_{n\to\infty} \frac{t_n + \vartheta(t_n, s_n)}{s_n} < 1$.

Teorema 2.4.3. *Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor, i neka je $T : X \to \mathrm{CB}(X)$ neprekidno višeznačno preslikavanje. Pretpostavimo da za svako $x, y \in X$ tako da je $x \neq y$ važi*

$$\vartheta(d(x, Tx), d(y, Ty)) \geq 0$$

gde je ϑ jaka izvodljiva funkcija. Tada T ima fiksnu tačku u X.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je ϑ SR-funkcija, tj. da zadovoljava uslov (SR). Tada tvrđenje sledi na osnovu Posledice 2.4.4.

Dokaz će biti izveden slično onome u [57, Lemma 16].

Neka je $\{a_n\} \subseteq (0, \infty)$ niz takav da je

$$\vartheta(a_{n+1}, a_n) > 0 \tag{2.4.6}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada prema osobini (ϑ_1) i (2.4.6) imamo

$$0 < \vartheta(a_{n+1}, a_n) < a_n - a_{n+1} \tag{2.4.7}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$.

Sada na osnovu (2.4.7) sledi da je $\{a_n\}$ strogo opadajući niz pozitivnih realnih brojeva, pa postoji

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \geq 0. \tag{2.4.8}$$

Preptostavimo da je $L > 0$.

Neka su $\{t_n\}, \{s_n\} \subseteq (0, \infty)$ nizovi definisani sa $t_n := a_{n+1}$ i $s_n := a_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tako da je

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_n = L \tag{2.4.9}$$

prema (2.4.8). Primenom osobine (ϑ_2), a na osnovu (2.4.9), dobijamo

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{t_n + \vartheta(t_n, s_n)}{s_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} + \vartheta(a_{n+1}, a_n)}{a_n} < 1. \tag{2.4.10}$$

Konačno, iz (2.4.6) i (2.4.10) dobijamo

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} + \vartheta(a_{n+1}, a_n)}{a_n} < 1$$

što je kontradikcija, pa prema tome $L = 0$ u (2.4.8). □

Napomena 2.4.2. Svi rezultati predstavljeni u ovom odeljku su nezavisni od sličnih rezultata iz rada Pirbavafa *i dr.* [53], zato što su preslikavanja proučavana u [53] ciklična.

U nastavku predstavljamo originalne rezultate autora iz rada [40] o tačkama najbolje aproksimacije za višeznačna preslikavanja na metričkim prostorima sa w-rastojanjem.

Najpre se podsetimo još nekih osnovnih činjenica i pojmova koji se pominju u nastavku.

Definicija 2.4.3 ([5]). *Neka je X neprazan skup, i neka je $q : X \times X \to [0, \infty)$. Par (X, q) je dislocirani metrički prostor ako:*

(D1) $q(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ *za svako* $x, y \in X$;

(D2) $q(x, y) = q(y, x)$ *za svako* $x, y \in X$;

(D3) $q(x, y) \le q(x, z) + q(z, y)$ *za svako* $x, y, z \in X$.

Neka je Ψ familija svih funkcija $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ sa sledećim osobinama (videti [52]):

(ψ_1) ψ je neopadajuća na $(0, \infty)$;

(ψ_2) red $\sum_{i=1}^{\infty} \psi^n(t)$ konvergira za svako $t > 0$ (gde je $\psi^n(t)$ n-ta iteracija funkcije ψ u tački t).

Iz [52, Lemma 2.4] neposredno se dobija da važi sledeće tvrđenje.

Lema 2.4.1. *Za svaku funkciju $\psi \in \Psi$ važi da je $\psi(t) < t$ za proizvoljno $t > 0$.*

Definicija 2.4.4 ([54]). *Višeznačno preslikavanje $T : X \to P(X)$ je zatvoreno ako za svaka dva niza $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ u X takva da je $x_n \to x \in X$, $y_n \to y \in X$ kada $n \to \infty$, i $y_n \in Tx_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, važi da je $y \in Tx$.*

U nastavku, pretpostavljamo da je (X, d) kompletan metrički prostor sa w-rastojanjem p, dok su A i B neprazni podskupovi od X. Sa $C(X)$ obeležavamo familiju svih nepraznih kompaktnih podskupova od X

Za svako $x, y \in X$ definišimo

$$q(x, y) = \max\{p(x, y), p(y, x)\}.$$

Lako se proverava da je tada (X, q) dislocirani metrički prostor (videti [43]).

Definišemo *Hausdorfovo q-rastojanje* između A i B kao

$$H_q(A, B) = \max\left\{\sup_{x \in A} q(x, B), \sup_{y \in B} q(y, A)\right\}$$

gde je $q(x, B) = \inf_{y \in B} q(x, y)$. Dokaz sledeće Leme je klasičan. Za više o osobinama funkcije H_q videti [5].

Lema 2.4.2. *Neka je (X, d) metrički prostor sa w-rastojanjem p. Neka je $A, B \in C(X)$ i $h \geq 1$. Za svako $x \in A$ postoji $y = y(x) \in B$ tako da je*

$$q(x, y) \leq hH_q(A, B).$$

U radu [40] uvedena je i nova verzija P-svojstva na metričkim prostorima sa w-rastojanjem.

Definicija 2.4.5. *Neka je (X, d) metrički prostor sa w-rastojanjem p i $A, B \subseteq X$. Kažemo da par (A, B) poseduje slabo P-svojstvo ako važi*

$$d(x_1, y_1) = d(x_2, y_2) = d(A, B) \Rightarrow q(x_1, x_2) \leq q(y_1, y_2)$$

za svako $x_1, x_2 \in A$ i $y_1, y_2 \in B$.

Sada možemo dokazati glavne rezultate iz rada [40].

Teorema 2.4.4. *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor sa w-rastojanjem p. Takođe, neka su A i B neprazni podskupovi od X takvi da su skupovi A_0 i B_0 neprazni i zatvoreni, i par (A, B) ima slabo P-svojstvo. Ako zatvoreno višeznačno preslikavanje $T : A \to C(B)$ zadovoljava uslov*

$$\zeta\left(H_q(Tx, Ty), \psi\left(q(x, y)\right)\right) \geq 0 \text{ za svako } x, y \in A \tag{2.4.11}$$

gde je $\zeta : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ simulaciona funkicija, $\psi \in \Psi$, i $Tx \subseteq B_0$ za svako $x \in A_0$, onda T ima tačku najbolje aproksimacije u A_0.

Dokaz. Neka su $x_0 \in A_0$ i $y_1 \in Tx_0$ dve proizvoljne tačke. Pošto je $Tx_0 \subseteq B_0$, postoji $x_1 \in A_0$ tako da je

$$d(x_1, y_1) = d(A, B). \tag{2.4.12}$$

Na osnovu Leme 2.4.2 postoji $y_2 \in Tx_1$ tako da je $q(y_1, y_2) \leq H_q(Tx_0, Tx_1)$. Na osnovu (2.4.11) primenom osobine simulacionih funkcija (ζ_1) takođe dobijamo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \zeta\left(H_q(Tx_0, Tx_1), \psi\left(q(x_0, x_1)\right)\right) \\ &< \psi\left(q(x_0, x_1)\right) - H_q(Tx_0, Tx_1), \end{aligned}$$

što na osnovu Leme 2.4.1 povlači $H_q(Tx_0, Tx_1) < \psi\left(q(x_0, x_1)\right) < q(x_0, x_1)$. Ponovo, zbog $Tx_1 \subseteq B_0$ možemo naći $x_2 \in A_0$ tako da je

$$d(x_2, y_2) = d(A, B). \tag{2.4.13}$$

Par (A, B) ima slabo P-svojstvo, pa iz (2.4.12) i (2.4.13) sledi da je $q(x_1, x_2) \leq q(y_1, y_2)$.

Nastavljajući ovaj postupak, dobijamo dva niza $\{x_n\} \subseteq A_0$ i $\{y_n\} \subseteq B_0$ tako da je

$$y_{n+1} \in Tx_n,\ d(x_n, y_n) = d(A, B) \text{ za svako } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{2.4.14}$$

i

$$\begin{aligned} q(x_0, x_1) &> \psi\left(q(x_0, x_1)\right) > H_q(Tx_0, Tx_1) \geq q(y_1, y_2) \geq \\ &\geq q(x_1, x_2) > \psi\left(q(x_1, x_2)\right) > H_q(Tx_1, Tx_2) \geq q(y_2, y_3) \geq \dots \end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tako da je $q(x_{n_0}, x_{n_0+1}) = 0$, onda imamo $x_{n_0} = x_{n_0+1}$, i prema (2.4.14) dobijamo da $y_{n_0+1} \in Tx_{n_0} \equiv Tx_{n_0+1}$ i $d(x_{n_0+1}, y_{n_0+1}) = d(A, B)$, odakle dalje sledi

$$\begin{aligned} d(A, B) &\leq d(x_{n_0+1}, Tx_{n_0+1}) = \inf\{d(x_{n_0+1}, z) : z \in Tx_{n_0+1}\} \\ &\leq d(x_{n_0+1}, y_{n_0+1}) = d(A, B). \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

Iz (2.4.16) je lako videti da važi $d(x_{n_0+1}, Tx_{n_0+1}) = d(A, B)$, odn. x_{n_0+1} je tačka najbolje aproksimacije za T. Stoga, bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je $q(x_n, x_{n+1}) > 0$ za svako $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

U nastavku dokazujemo da je $\{x_n\}$ Košijev niz. Da bismo to učinili, prema Lemi 1.2.1 je dovoljno pokazati da važi

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m>n} q(x_n, x_m) = 0. \tag{2.4.17}$$

S obzirom da je ψ neopadajuća funkcija (osobina (ψ_1)), indukcijom u (2.4.15) dobijamo

$$q(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^n\left(q(x_0, x_1)\right) \text{ za svako } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{2.4.18}$$

Primenom osobine (ψ_2) sledi da je red $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^k\left(q(x_0, x_1)\right)$ konvergentan. Prema tome, za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\ell = \ell(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\sum_{k=\ell}^{\infty} \psi^k\left(q(x_0, x_1)\right) < \varepsilon. \tag{2.4.19}$$

Sada za proizvoljne $m, n \in \mathbb{N}$ tako da je $m > n \geq \ell$ imamo

$$\begin{aligned} q(x_n, x_m) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} q(x_k, x_{k+1}) \text{ (po nejednakosti trougla za } q) \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \psi^k\left(q(x_0, x_1)\right) \text{ (po (2.4.18))} \\ &\leq \sum_{k=\ell}^{\infty} \psi^k\left(q(x_0, x_1)\right) < \varepsilon \text{ (po (2.4.19))}. \end{aligned} \tag{2.4.20}$$

Na osnovu (2.4.20) zaključujemo da (2.4.17) važi. Dakle, postoji

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in A_0, \tag{2.4.21}$$

zato što je (X,d) kompletan metrički prostor, a A_0 je njegov zatvoren podskup.

Na sličan način može se pokazati da je $\{y_n\}$ takođe Košijev niz, pa takođe postoji i

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y \in B_0. \tag{2.4.22}$$

Metrika d je neprekidna funkcija po obe promenljive, pa puštajući da $n \to \infty$ u (2.4.14), na osnovu (2.4.21) i (2.4.22) dobijamo

$$d(x,y) = d(A,B). \tag{2.4.23}$$

Uzimajući u obzir da je višeznačno preslikavanje T zatvoreno, prema (2.4.14), (2.4.21) i (2.4.22) dobijamo da je $y \in Tx$, što prema (2.4.23) znači da

$$d(A,B) \le d(x,Tx) = \inf\{d(x,z) : z \in Tx\} \le d(x,y) = d(A,B),$$

tj. $d(x,Tx) = d(A,B)$, što će reći da je $x \in A_0$ jedna tačka najbolje aproksimacije za T. $\square$

2.5 b-Simulacione funkcije

Ovde ćemo predstaviti originalne rezultate autora iz rada Kostić *i dr.* [42] o tački najbolje aproksimacije za preslikavanja na b-metričkim prostorima sa wt-rastojanjem uz korišćenje uopštenja simulacionih funkcija.

Najpre ćemo uvesti pojam wt_0-rastojanja, koji se neznatno razlikuje u odnosu na originalni pojam wt-rastojanja iz [21], po tome što se pretpostavlja da je ono donje b-poluneprekidno u odnosu na obe promenljive (kada je jedna od njih fiksirana).

Definicija 2.5.1. *Neka je (X,d) b-metrički prostor sa parametrom $b \ge 1$. Tada se funkcija $P : X \times X \to [0,\infty)$ naziva wt_0-rastojanje na X ako zadovoljava sledeće uslove:*

(P_1) $P(x,z) \le b[P(x,y) + P(y,z)]$, *za svako* $x,y,z \in X$,

(P_2) *za svako* $x \in X$, *funkcije* $P(x,\cdot), P(\cdot,x) : X \to [0,\infty)$ *su donje b-poluneprekidne,*

(P_3) *za svako* $\epsilon > 0$, *postoji* $\delta > 0$ *tako da* $P(z,x) \le \delta$ *i* $P(z,y) \le \delta$ *povlače* $d(x,y) \le \epsilon$.

Primetimo da je pojam wt-rastojanja opštiji od pojma wt_0-rastojanja, dok je ono opštije od standardnog pojma b-metrike, što je ilusturovano sledećim primerima. Takođe, svako w_0-rastojanje je i wt_0-rastojanje (kada je $b = 1$), ali obrat u opštem slučaju ne važi. Dakle, wt_0-rastojanje je uopštenje w_0-rastojanja.

Primer 2.5.1. Neka je (X, d) b-metrički prostor, gde je $b = 2$, $X = \mathbb{R}$ i $d(x, y) = |x-y|^2$ za svako $x, y \in \mathbb{R}$ i definišimo wt_0-rastojanje P sa $P(x, y) = |x|^2 + |y|^2$ za svako $x, y \in \mathbb{R}$ (videti [21]). Preslikavanje P nije metrika, pošto je $P(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y = 0$ (a ne za svako $x, y \in \mathbb{R}$).

Primer 2.5.2. Neka su (X, d) i P dati kao u prethodnom primeru.

Neka je funkcija $\alpha : X \to [0, \infty)$ zadata sa

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \neq 0 \\ c & , \ x = 0 \end{cases}$$

gde je $c > 2$. Onda se može pokazati da je funkcija $Q : X \times X \to [0, \infty)$ definisana sa

$$Q(x, y) = \max\{P(x, y), \alpha(x)\}$$

za svako $x, y \in X$ takođe wt-rastojanje na X.

Međutim, Q nije wt_0-rastojanje na X. Zaista, neka je $\{x_n\}$ niz u X takav da je $x_n \neq 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i $x_n \to 0$ kada $n \to \infty$. Onda imamo

$$Q(0, 0) = \max\{P(0, 0), \alpha(0)\} = c > 2 = 2 \liminf_{x_n \to 0} Q(x_n, 0)$$

što znači da $Q(\cdot, 0)$ nije donje 2-poluneprekidna funkcija.

Sada uvodimo pojmove $\mathcal{Z}$-P-proksimalnih kontrakcija i proširujemo rezultate o tačkama najbolje aproksimacije iz radova Kostić *i dr.* [43] i Tchier *i dr.* [63] na b-metričke prostore sa wt_0-rastojanjem.

Nedavno su Demma *i dr.* u radu [16], kao i Mongkolkeha *i dr.* u [48] uveli pojam b-simulacione funkcije kao uopštenje simulacione funkcije, pogodnije za primenu na b-metričkim prostorima.

Definicija 2.5.2. *b-simulaciona funkcija je svaka funkcija $\xi : [0, +\infty)^2 \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava sledeće uslove:*

(ξ_1) $\xi\,(bt, s) < s - bt$ *za svako* $t, s > 0$*;*

(ξ_2) *ako su* $\{t_n\}, \{s_n\}$ *nizovi u* $(0, +\infty)$ *takvi da je*

$$0 < \lim_{n\to+\infty} t_n \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} s_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} s_n \leq b \lim_{n\to+\infty} t_n < +\infty,$$

tada je $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\xi\,(bt_n, s_n) < 0$.

Jasno je da se u slučaju $b = 1$, b-simulacione funkcije svode na simulacione funkcije.

Primer 2.5.3. [16] Neka je funkcija $\xi : [0, +\infty)^2 \to \mathbb{R}$ definisana sa

(i) $\xi(t, s) = \lambda s - t$ za svako $t, s \in [0, +\infty)$, gde je $\lambda \in [0, 1)$.

(ii) $\xi(t, s) = \psi(s) - \varphi(t)$ za svako $t, s \in [0, +\infty)$, gde su $\varphi, \psi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ neprekidne funkcije takve da je $\psi(t) = \varphi(t) = 0$ ako i samo ako je $t = 0$ i $\psi(t) < t \leq \varphi(t)$ za svako $t > 0$.

(iii) $\xi(t, s) = s - \frac{f(t,s)}{g(t,s)} t$ za svako $t, s \in [0, +\infty)$, gde su $f, g : [0, +\infty)^2 \to (0, +\infty)$ funkcije neprekidne po obe promenljive, takve da je $f(t, s) > g(t, s)$ za svako $t, s > 0$.

(iv) $\xi(t, s) = s - \varphi(s) - t$ za svako $t, s \in [0, +\infty)$, gde je $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ donje poluneprekidna funkcija takva da je $\varphi(t) = 0$ ako i samo ako je $t = 0$.

(v) $\xi(t, s) = s\varphi(s) - t$ za svako $t, s \in [0, +\infty)$, gde je $\varphi : [0, +\infty) \to [0, 1)$ funkcija takva da je $\lim\limits_{t \to r^+} \varphi(t) < 1$ za svako $r > 0$.

Svaka od funkcija definisanih u (i)-(v) je b-simulaciona funkcija.

Nedavno su simulacione funkcije i b-simulacione upotrebljene za proučavanje fiksnih i najboljih aproksimacionih tačaka na b-metričkim prostorima (videti [48, 50, 56, 58, 60, 63]).

Neka je (X, d) b-metrički prostor, $P : X \times X \to [0, \infty)$ wt_0-rastojanje na X, i neka su A i B neprazni podskupovi od X (ne obavezno jednaki). Takođe, za svako $x, y \in X$, neka je $\nu(x, y) := \max\{P(x, y), P(y, x)\}$. Lako se proverava da funkcija $\nu : X \times X \to [0, \infty)$ poseduje sledeće osobine (za svako $x, y, z \in X$):

1. $\nu(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$;
2. $\nu(x, y) = \nu(y, x)$;
3. $\nu(x, y) \leq b[\nu(x, z) + \nu(z, y)]$.

Definicija 2.5.3. *Preslikavanje $T : A \to B$ se naziva $\mathcal{Z}$-P-proksimalna kontrakcija prvog tipa ako postoji b-simulaciona funkcija $\xi : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tako da je*

$$\left.\begin{aligned} d(u, Tx) = d(A, B) \\ d(v, Ty) = d(A, B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \xi(b\nu(u, v), \nu(x, y)) \geq 0$$

za svako $u, v, x, y \in A$.

Definicija 2.5.4. *Preslikavanje $T : A \to B$ se naziva $\mathcal{Z}$-P-proksimalna kontrakcija drugog tipa ako je*

$$\left.\begin{aligned} d(u, Tx) = d(A, B) \\ d(v, Ty) = d(A, B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \xi(b\nu(Tu, Tv), \nu(Tx, Ty)) \geq 0$$

za svako $u, v, x, y \in A$, gde je $\xi : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ b-simulaciona funkcija.

Napomena 2.5.1. U slučaju da je $P = d$ i $b = 1$ (tj. kada je d standardna metrika), pojmovi $\mathcal{Z}$-P-proksimalnih kontrakcija se svode na $\mathcal{Z}$-proksimalne kontrakcije iz rada Tchier *i dr.* [63]. Upotrebljavaćemo istu terminologiju i ako je $P = d$ i $b > 1$.

U Definiciji 2.5.3, ako je b-simulaciona funkcija ξ zadata sa $\xi(t, s) = \alpha s - t$ za neko $\alpha \in [0, 1)$, preslikavanje T se naziva *P-proksimalna kontrakcija prvog tipa.* Ako je pritom još i $P = d$ i $b = 1$, T je proksimalna kontrakcija prvog tipa.

Uvedimo sledeće oznake:

$$\mathcal{G}_{A,P} = \{g : (A, d) \to (A, d) \text{ je neprekidno} : P(x, y) \leq P(gx, gy),\ \forall x, y \in A\}$$
$$\mathcal{T}_{g,P} = \{T : A \to B : P(Tx, Ty) \leq P(Tgx, Tgy),\ \forall x, y \in A\}.$$

U slučaju $P = d$ i $b = 1$, $\mathcal{G}_{A,P}$ se obeležava sa $\mathcal{G}_A$, a $\mathcal{T}_{g,P}$ sa $\mathcal{T}_g$ (videti [63]).

Sada možemo dokazati glavne rezultate ovog poglavlja.

Teorema 2.5.1. *Neka su A i B neprazni podskupovi kompletnog b-metričkog prostora (X, d) sa wt_0-rastojanjem P, tako da je A_0 neprazan i zatvoren. Pretpostavimo da preslikavanja $g : A \to A$ i $T : A \to B$ zadovoljavaju sledeće uslove:*

a) T je $\mathcal{Z}$-P-proksimalna kontrakcija prvog tipa;

b) $g \in \mathcal{G}_{A,P}$;

c) $A_0 \subseteq g(A_0)$;

d) $T(A_0) \subseteq B_0$.

Tada postoji jedinstvena tačka $x \in A_0$ takva da je $d(gx, Tx) = d(A, B)$ i $P(x, x) = 0$. Štaviše, za svako početno $x_0 \in A_0$ postoji niz $\{x_n\} \subseteq A_0$ koji konvergira ka x, takav da je $d(gx_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ za svako $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Dokaz. Neka je $x_0 \in A_0$ proizvoljna tačka. Pošto je $T(A_0) \subseteq B_0$ i $A_0 \subseteq g(A_0)$, postoji $x_1 \in A_0$ tako da je $d(gx_1, Tx_0) = d(A, B)$. Slično, za $x_1 \in A_0$

postoji $x_2 \in A_0$ tako da je $d(gx_2, Tx_1) = d(A, B)$. Nastavljajući ovaj proces, za svako $x_n \in A_0$ možemo naći $x_{n+1} \in A_0$ tako da je $d(gx_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$.

Sada, ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $\nu(x_{n_0}, x_{n_0-1}) = 0$, onda je $x_{n_0-1} = x_{n_0}$. Dakle, $d(gx_{n_0-1}, Tx_{n_0-1}) = d(A, B)$, tj. x_{n_0-1} je g-tačka najbolje aproksimacije za T i teorema je dokazana. Stoga, pretpostavimo da je $\nu(x_n, x_{n-1}) > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada je $\nu(gx_n, gx_{n-1}) > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$ jer je $g \in \mathcal{G}_{A,P}$. Pošto je T $\mathcal{Z}$-P-proksimalna kontrakcija prvog tipa i $g \in \mathcal{G}_{A,P}$, imamo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \xi(b\nu(gx_{n+1}, gx_n), \nu(x_n, x_{n-1})) \\ &< \nu(x_n, x_{n-1}) - b\nu(gx_{n+1}, gx_n) \\ &\leq \nu(x_n, x_{n-1}) - b\nu(x_{n+1}, x_n). \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Prema tome,

$$\nu(x_{n+1}, x_n) \leq b\nu(x_{n+1}, x_n) < \nu(x_n, x_{n-1})$$

za svako $n \in \mathbb{N}$, što znači da je niz $\{\nu(x_n, x_{n-1})\}$ opadajući. Zato postoji $r \geq 0$ tako da je $\lim_{n\to\infty} \nu(x_n, x_{n-1}) = r \geq 0$. Pretpostavimo da je $r > 0$. Takođe, prema (2.5.1) dobijamo da je

$$\nu(gx_{n+1}, gx_n) \leq b\nu(gx_{n+1}, gx_n) < \nu(x_n, x_{n-1})$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Sa druge strane, $g \in \mathcal{G}_{A,P}$ i zato je

$$\nu(x_{n+1}, x_n) \leq \nu(gx_{n+1}, gx_n) \leq \nu(x_n, x_{n-1})$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Ovo povlači da je $\lim_{n\to\infty} \nu(gx_{n+1}, gx_n) = r$. Sada, upotrebljavajući osobinu (ξ_2) b-simulacionih funkcija, dobijamo

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} \xi(b\nu(gx_{n+1}, gx_n), \nu(x_n, x_{n-1})) < 0$$

što je kontradikcija. Dakle, imamo $r = 0$ što će reći da je

$$\lim_{n\to\infty} \nu(x_n, x_{n-1}) = 0. \tag{2.5.2}$$

Dokažimo sada da je

$$\lim_{m,n\to\infty} \nu(x_n, x_m) = 0. \tag{2.5.3}$$

Ako (2.5.3) ne važi, onda postoje $\varepsilon > 0$ i nizovi $\{m_k\}, \{n_k\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ takvi da je $m_k > n_k \geq k$ i

$$\nu(x_{n_k}, x_{m_k}) \geq \varepsilon \tag{2.5.4}$$

za svako $k \in \mathbb{N}$. Možemo pretpostaviti da je m_k najmanji indeks za koji (2.5.4) važi. Tada takođe imamo

$$\nu(x_{n_k}, x_{m_k-1}) < \varepsilon \tag{2.5.5}$$

za svako $k \in \mathbb{N}$. Upotrebljavajući nejednakost trougla za ν, iz (2.5.4) i (2.5.5) dobijamo

$$\varepsilon \le \nu(x_{n_k}, x_{m_k}) \le b\nu(x_{n_k}, x_{m_k-1}) + b\nu(x_{m_k-1}, x_{m_k}) < b\varepsilon + b\nu(x_{m_k-1}, x_{m_k}).$$

Prelaskom na graničnu vrednost kada $k \to \infty$, prema (2.5.2) zaključujemo da je

$$\varepsilon \le \lim_{k\to\infty} \nu(x_{n_k}, x_{m_k}) < b\varepsilon. \tag{2.5.6}$$

Sada tvrdimo da je

$$\lim_{k\to\infty} \nu(x_{n_k+1}, x_{m_k+1}) < \varepsilon. \tag{2.5.7}$$

Ako je $\lim\limits_{k\to\infty} \nu(x_{n_k+1}, x_{m_k+1}) \ge \varepsilon$, onda postoji niz $\{k_s\}$ i $\delta > 0$ tako da je

$$\lim_{s\to\infty} \nu(x_{n_{k_s}+1}, x_{m_{k_s}+1}) = \delta \ge \varepsilon. \tag{2.5.8}$$

Ponovo, kako je T $\mathcal{Z}$-P-proksimalna kontrakcija prvog tipa, to je

$$d(gx_{n_{k_s}+1}, Tx_{n_{k_s}}) = d(A, B) = d(gx_{m_{k_s}+1}, Tx_{m_{k_s}}).$$

Stoga, prema osobini (ξ_1) dobijamo

$$\begin{aligned} 0 &\le \xi(b\nu(gx_{n_{k_s}+1}, gx_{m_{k_s}+1}), \nu(x_{n_{k_s}}, x_{m_{k_s}})) \\ &< \nu(x_{n_{k_s}}, x_{m_{k_s}}) - b\nu(gx_{n_{k_s}+1}, gx_{m_{k_s}+1}) \\ &\le \nu(x_{n_{k_s}}, x_{m_{k_s}}) - b\nu(x_{n_{k_s}+1}, x_{m_{k_s}+1}) \\ &\le \nu(x_{n_{k_s}}, x_{m_{k_s}}) - \nu(x_{n_{k_s}+1}, x_{m_{k_s}+1}) \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

za svako $k \in \mathbb{N}$. Iz (2.5.6), (2.5.8) i (2.5.9) sledi da je

$$b\delta = \lim_{s\to\infty} b\nu(x_{n_{k_s}+1}, x_{m_{k_s}+1}) < \lim_{s\to\infty} \nu(x_{n_{k_s}}, x_{m_{k_s}}) < b\varepsilon, \tag{2.5.10}$$

što je nemoguće, pa važi (2.5.7). Prema tome, nizovi $t_k = \nu(x_{n_k+1}, x_{m_k+1})$ i $v_k = \nu(x_{n_k}, x_{m_k})$ zadovoljavaju pretpostavke iz (ξ_2) (po (2.5.6) i (2.5.7)). Na osnovu osobine (ξ_2) zaključujemo da je

$$0 \le \limsup_{k\to\infty} \xi(bt_k, v_k) < 0,$$

što je kontradikcija i stoga važi (2.5.3).

Sada, na osnovu Leme 1.3.1 (iii), $\{x_n\}$ je Košijev niz u A_0. Pošto je (X, d) kompletan b-metrički prostor i A_0 je zatvoren skup u X, postoji $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in A_0$. Štaviše, zbog neprekidnosti g imamo da je i $\lim\limits_{n\to\infty} gx_n = gx$. Kako je $gx_n \in A_0$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i A_0 je zatvoren, takođe imamo da je $gx \in A_0$. Sa druge strane, s obzirom da je $x \in A_0$ i $T(A_0) \subseteq B_0$, za x postoji $z \in A_0$ tako da je $d(z, Tx) = d(A, B)$.

Pokažimo da je $z = gx$. Ako je $z = gx_n$ za beskonačno mnogo vrednosti $n \in \mathbb{N}$, tada je $z = gx$. Zato možemo pretpostaviti da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $z \neq gx_n$ za svako $n \geq n_0$. Ako je $\nu(gx_n, z) = 0$ za neko $n \geq n_0$ onda je $gx_n = z$, tako da mora biti $\nu(gx_n, z) > 0$ za svako $n \geq n_0$. Takođe, postoji podniz $\{x_{n_k}\}$ od $\{x_n\}$ takav da je $\nu(x_{n_k}, x) > 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$ (ako to nije slučaj, onda postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da je $\nu(x_n, x) = 0$ za svako $n \geq n_1$, i stoga $\nu(x_n, x_{n-1}) = 0$ za svako $n \geq n_1$, što je kontradikcija).

Pošto je T $\mathcal{Z}$-P-proksimalna kontrakcija prvog tipa i $g \in \mathcal{G}_{A,P}$, dobijamo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \xi(b\nu(gx_{n_k+1}, z), \nu(x_{n_k}, x)) \\ &< \nu(x_{n_k}, x) - b\nu(gx_{n_k+1}, z) \\ &\leq \nu(gx_{n_k}, gx) - \nu(gx_{n_k+1}, z), \end{aligned}$$

odakle sledi da je

$$\nu(gx_{n_k+1}, z) < \nu(gx_{n_k}, gx) \tag{2.5.11}$$

za svako $k \in \mathbb{N}$ tako da je $n_k \geq n_0$.

Sa druge strane, sličnim rezonovanjem kao i ranije zaključujemo da je $\lim\limits_{m,n\to\infty} \nu(gx_n, gx_m) = 0$. To znači da za svako $\epsilon > 0$ postoji $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tako da je $\nu(gx_n, gx_m) < \frac{\epsilon}{b}$ za svako $m > n \geq N_\epsilon$. Za fiksno $n \in \mathbb{N}$ takvo da je $n \geq \max\{n_0, N_\epsilon\}$, funkcija $P(gx_n, \cdot)$ je donje b-poluneprekidna; stoga, dobijamo da je

$$P(gx_n, gx) \leq \liminf_{m\to\infty} bP(gx_n, gx_m) < \epsilon.$$

Dakle,

$$\lim_{k\to\infty} P(gx_{n_k}, gx) = 0. \tag{2.5.12}$$

Slično je i $\lim\limits_{k\to\infty} P(gx, gx_{n_k}) = 0$, što u kombinaciji sa (2.5.12) povlači

$$\lim_{k\to\infty} \nu(gx_{n_k}, gx) = 0.$$

Sada na osnovu (2.5.11) imamo

$$\lim_{k\to\infty} \nu(gx_{n_k+1}, z) = 0. \tag{2.5.13}$$

Ako $k \to \infty$ u nejednakosti

$$\nu(gx_{n_k}, z) \leq b\nu(gx_{n_k}, gx_{n_k+1}) + b\nu(gx_{n_k+1}, z),$$

onda iz (2.5.2) i (2.5.13) sledi da je $\lim_{k\to\infty} \nu(gx_{n_k}, z) = 0$. Dakle,

$$\lim_{k\to\infty} P(gx_{n_k}, z) = 0. \tag{2.5.14}$$

Na osnovu (2.5.12) i (2.5.14), koristeći Lemu 1.3.1 (i) imamo da je $z = gx$. Konačno, zbog $d(z, Tx) = d(A, B)$ dobijamo $d(gx, Tx) = d(A, B)$.

Da dokažemo jedinstvenost, pretpostavimo da je y tačka u A_0 takva da je $d(gy, Ty) = d(A, B)$. Pretpostavimo da je $\nu(gx, gy) \geq \nu(x, y) > 0$. Pošto je $g \in \mathcal{G}_{A,P}$ i T je $\mathcal{Z}$-P-proksimalna kontrakcija prvog tipa, imamo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \xi(b\nu(gx, gy), \nu(x, y)) \\ &< \nu(x, y) - b\nu(gx, gy) \\ &\leq \nu(x, y) - \nu(x, y) = 0 \end{aligned}$$

što vodi do kontradikcije. Zato je $\nu(x, y) = 0$, odakle sledi $x = y$.

Slično se može dokazati da je i $P(x, x) = 0$. Pretpostavimo da je $\nu(x, x) = P(x, x) > 0$. Tada je $\nu(gx, gx) > 0$ i imamo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \xi(b\nu(gx, gx), \nu(x, x)) \\ &< \nu(x, x) - b\nu(gx, gx) \\ &\leq \nu(x, x) - \nu(x, x) = 0, \end{aligned}$$

što je kontradikcija. □

Sledeći rezultat o tački najbolje aproksimacije $\mathcal{Z}$-P-proksimalnih kontrakcija prvog tipa je direktna posledica Teoreme 2.5.1 za slučaj da je g identičko preslikavanje na A.

Posledica 2.5.1. *Neka su A i B neprazni podskupovi kompletnog b-metričkog prostora (X, d) sa wt_0-rastojanjem P, tako da je A_0 neprazan i zatvoren skup. Pretpostavimo da preslikavanje $T : A \to B$ zadovoljava sledeće uslove:*

a) T je $\mathcal{Z}$-P-proksimalna kontrakcija prvog tipa;

b) $T(A_0) \subseteq B_0$.

Tada postoji jedinstvena tačka najbolje aproksimacije $x \in A_0$ preslikavanja T, takva da je $P(x, x) = 0$, i za svako $x_0 \in A_0$ postoji niz $\{x_n\} \subseteq A_0$ koji konvergira ka x, takav da je $d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ za svako $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Primer 2.5.4. Neka je skup $X = \mathbb{R}$ snabdeven 2-metrikom

$$d(x, y) = |x - y|^2 \quad \text{za svako } x, y \in X$$

i wt_0-rastojanjem P definisanim sa

$$P(x,y) = x^2 + y^2 \quad \text{za svako } x, y \in X.$$

Tada imamo $\nu(x,y) = \max\{P(x,y), P(y,x)\} = x^2 + y^2$ za svako $x, y \in X$.

Neka je $A = [-1, 0]$ i $B = [1, 2]$, i neka je $T : A \to B$ preslikavanje dato sa $Tx = 1 - x$ za svako $x \in A$. Sada se lako dobija da je $d(A, B) = 1$, $A_0 = \{0\}$ i $B_0 = \{1\}$, pa je $T(A_0) = \{1\} = B_0$.

Neka je 2-simulaciona funkcija $\xi : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definisana sa $\xi(t, s) = \lambda s - t$ za svako $s, t \in [0, \infty)$ (gde je $\lambda \in [0, 1)$). Sada imamo da je $d(u, Tx) = |u - Tx|^2 = d(A, B) = 1$ ako i samo ako je $|u - Tx| = |u - 1 + x| = 1$, što je jedino moguće za $u = x = 0$, pošto je $x, u \in [-1, 0]$, i slično, $d(v, Ty) = d(A, B)$ je ekvivalentno sa $v = y = 0$. Dakle, za $u = v = x = y = 0$ dobijamo

$$\xi(2\nu(u, v), \nu(x, y)) = \lambda \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$$

čime je pokazano da je T $\mathcal{Z}$-P-proksimalna kontrakcija prvog tipa.

Zaključujemo da su svi uslovi Posledice 2.5.1 ispunjeni, i zaista, $B_{est}(T) = \{0\}$ i $P(0, 0) = 0$.

Iz Teoreme 2.5.1 je takođe moguće izvesti interesantan rezultat za g-tačku najbolje aproksimacije za P-proksimalne kontrakcije prvog tipa.

Posledica 2.5.2. *Neka su A i B neprazni podskupovi kompletnog b-metričkog prostora (X, d) sa wt_0-rastojanjem P, tako da je A_0 neprazan i zatvoren. Pretpostavimo da preslikavanja $T : A \to B$ i $g : A \to A$ zadovoljavaju sledeće uslove:*

a) T je P-proksimalna kontrakcija prvog tipa u odnosu na $\alpha \in [0, 1)$;

b) $g \in \mathcal{G}_{A,P}$;

c) $T(A_0) \subseteq B_0$;

d) $A_0 \subseteq g(A_0)$.

Tada postoji jedinstvena tačka $x \in A_0$ takva da je $d(gx, Tx) = d(A, B)$ i $P(x, x) = 0$. Štaviše, za svako $x_0 \in A_0$ postoji niz $\{x_n\} \subseteq A_0$ koji konvergira ka x, takav da je $d(gx_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ za svako $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Dokaz. Primetimo da je P-proksimalna kontrakcija prvog tipa u odnosu na $\alpha \in [0, 1)$ takođe i $\mathcal{Z}$-P-proksimalna kontrakcija prvog tipa u odnosu na b-simulacionu funkciju $\xi : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definisanu sa $\xi(t, s) = \alpha s - t$ za svako $t, s \geq 0$. Tvrđenje onda direktno sledi na osnovu Teoreme 2.5.1. $\square$

Uzimajući da je $d = P$ u Teoremi 2.5.1, dobijamo isti rezultat u b-metričkim prostorima.

Posledica 2.5.3. *Neka su A i B neprazni podskupovi u kompletnom b-metričkom prostoru (X, d), tako da je A_0 neprazan i zatvoren. Pretpostavimo da preslikavanja $T : A \to B$ i $g : A \to A$ zadovoljavaju sledeće uslove:*

a) T je $\mathcal{Z}$-proksimalna kontrakcija prvog tipa;

b) $g \in \mathcal{G}_A$;

c) $T(A_0) \subseteq B_0$;

d) $A_0 \subseteq g(A_0)$.

Tada postoji jedinstveno $x \in A$ tako da je $d(gx, Tx) = d(A, B)$. Štaviše, za svako $x_0 \in A_0$ postoji niz $\{x_n\} \subseteq A_0$ takav da je $d(gx_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ za svako $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, i $\{x_n\}$ konvergira ka x.

Napomena 2.5.2. U Teoremi 2.5.1 i njenim posledicama, uzmimo da je $b = 1$. Tada se dobijaju glavni rezultati iz rada Kostić *i dr.* [43] o tački najbolje aproksimacije za $\mathcal{Z}$-p-proksimalne kontrakcije prvog tipa sa simulacionim funkcijama na metričkim prostorima sa w_0-rastojanjem.

Naredni rezultat je teorema o g-tački najbolje aproksimacije za $\mathcal{Z}$-P-proksimalne kontrakcije drugog tipa.

Teorema 2.5.2. *Neka su A i B neprazni podskupvi u kompletnom b-metričkom prostoru (X, d) sa wt_0-rastojanjem P, takvi da je skup $T(A_0)$ neprazan i zatvoren. Pretpostavimo da preslikavanja $T : A \to B$ i $g : A \to A$ zadovoljavaju sledeće uslove:*

a) T je $\mathcal{Z}$-P-proksimalna kontrakcija drugog tipa;

b) T je injektivno na A_0;

c) $T \in \mathcal{T}_{g,P}$;

d) $T(A_0) \subseteq B_0$;

e) $A_0 \subseteq g(A_0)$.

Tada postoji jedinstveno $x \in A_0$ tako da je $d(gx, Tx) = d(A, B)$ i $P(Tx, Tx) = 0$. Štaviše, za svako $x_0 \in A_0$ postoji niz $\{x_n\} \subseteq A_0$ koji konvergira ka x, takav da je $d(gx_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ za svako $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Dokaz. Sličnim rezonovanjem kao u dokazu Teoreme 2.5.1 možemo konstruisati niz $\{x_n\}$ takav da je $d(gx_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ za svako $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ako se prilikom konstrukcije niza $\{x_n\}$ desi da je $Tx_n = Tx_m$ za neke $m > n$, onda se uzima $x_{m+1} = x_{n+1}$.

Pošto je T $\mathcal{Z}$-P-proksimalna kontrakcija drugog tipa, imamo da je

$$\xi(b\nu(Tgx_n, Tgx_{n+1}), \nu(Tx_{n-1}, Tx_n)) \geq 0$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Zato što je T injektivno na A_0 i $T \in \mathcal{T}_{g,P}$, upotrebljavajući osobinu (ξ_1) b-simulacionih funkcija dobijamo da je

$$\begin{aligned} 0 &\leq \xi(b\nu(Tgx_n, Tgx_{n+1}), \nu(Tx_{n-1}, Tx_n)) \\ &< \nu(Tx_{n-1}, Tx_n) - b\nu(Tgx_n, Tgx_{n+1}) \\ &\leq \nu(Tx_{n-1}, Tx_n) - \nu(Tx_n, Tx_{n+1}) \end{aligned} \tag{2.5.15}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Stoga imamo $\nu(Tx_n, Tx_{n+1}) < \nu(Tx_{n-1}, Tx_n)$ za svako $n \in \mathbb{N}$, odakle sledi da je niz $\{\nu(Tx_{n-1}, Tx_n)\}$ opadajući.

Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $\nu(Tx_{n_0-1}, Tx_{n_0}) = 0$, onda je $Tx_{n_0-1} = Tx_{n_0}$ pa zbog injektivnosti T na skupu A_0 sledi $x_{n_0-1} = x_{n_0}$. Ali onda je $d(gx_{n_0-1}, Tx_{n_0}) = d(gx_{n_0}, Tx_{n_0}) = d(A, B)$ i x_{n_0} je g-tačka najbolje aproksimacije za T, tj. $x_{n_0} \in B^g_{est}(T)$.

Sada, neka je $\nu(Tx_{n-1}, Tx_n) > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Stoga, postoji

$$\lim_{n\to\infty} \nu(Tx_{n-1}, Tx_n) = r \geq 0.$$

Pretpostavimo da je $r > 0$. Na osnovu (2.5.15) takođe zaključujemo da je

$$\nu(Tgx_n, Tgx_{n+1}) \leq b\nu(Tg_n, Tgx_{n+1}) < \nu(Tx_{n-1}, Tx_n).$$

Sa druge strane je $T \in \mathcal{T}_{g,P}$ i zato je

$$\nu(Tx_n, Tx_{n+1}) \leq \nu(Tgx_n, Tgx_{n+1}) < \nu(Tx_{n-1}, Tx_n)$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Prelazeći na graničnu vrednost kada $n \to \infty$ dobijamo da je $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(Tgx_n, Tgx_{n+1}) = r$. Sada na osnovu osobine (ξ_2) b-simulacionih funkcija, imamo

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} \xi(b\nu(Tgx_{n+1}, Tgx_n), \nu(Tx_{n-1}, Tx_n)) < 0$$

što je kontradikcija, pa je $r = 0$.

Pokazali smo da je

$$\lim_{n\to\infty} \nu(Tx_{n-1}, Tx_n) = 0. \tag{2.5.16}$$

Sada ćemo pokazati da je

$$\lim_{m,n\to\infty} \nu(Tx_n, Tx_m) = 0. \tag{2.5.17}$$

Pretpostavimo da (2.5.17) ne važi. Tada postoji neko $\varepsilon > 0$ i nizovi $\{m_k\}$, $\{n_k\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ sa $m_k > n_k \geq k$ tako da je

$$\nu(Tx_{n_k}, Tx_{m_k}) \geq \varepsilon \tag{2.5.18}$$

za svako $k \in \mathbb{N}$. Možemo pretpostaviti da je m_k minimalni indeks za koji (2.5.18) važi. Tada takođe imamo

$$\nu(Tx_{n_k}, Tx_{m_k-1}) < \varepsilon \tag{2.5.19}$$

za svako $k \in \mathbb{N}$. Koristeći nejednakost trougla za ν, prema (2.5.18) i (2.5.19) imamo

$$\begin{aligned}\varepsilon \leq \nu(Tx_{n_k}, Tx_{m_k}) &\leq b\nu(Tx_{n_k}, Tx_{m_k-1}) + b\nu(Tx_{m_k-1}, Tx_{m_k}) \\ &< b\varepsilon + b\nu(Tx_{m_k-1}, Tx_{m_k}).\end{aligned}$$

Prelaskom na graničnu vrednost kada $k \to \infty$ i na osnovu (2.5.16) zaključujemo da je

$$\varepsilon \leq \lim_{k\to\infty} \nu(Tx_{n_k}, Tx_{m_k}) < b\varepsilon. \tag{2.5.20}$$

Dokažimo sada

$$\lim_{k\to\infty} \nu(Tx_{n_k+1}, Tx_{m_k+1}) < \varepsilon. \tag{2.5.21}$$

Ako $\lim\limits_{k\to\infty} \nu(Tx_{n_k+1}, Tx_{m_k+1}) \geq \varepsilon$, onda postoji niz $\{k_s\}$ i neko $\delta > 0$ tako da je

$$\lim_{s\to\infty} \nu(Tx_{n_{k_s}+1}, Tx_{m_{k_s}+1}) = \delta \geq \varepsilon. \tag{2.5.22}$$

Ponovo, T je $\mathcal{Z}$-P-proksimalna kontrakcija drugog tipa, pa je

$$d(gx_{n_{k_s}+1}, Tx_{n_{k_s}}) = d(A, B) = d(gx_{m_{k_s}+1}, Tx_{m_{k_s}}).$$

Stoga, na osnovu osobine (ξ_1) dobijamo

$$\begin{aligned}0 &\leq \xi(b\nu(Tgx_{n_{k_s}+1}, Tgx_{m_{k_s}+1}), \nu(Tx_{n_{k_s}}, Tx_{m_{k_s}})) \\ &< \nu(Tx_{n_{k_s}}, Tx_{m_{k_s}}) - b\nu(Tgx_{n_{k_s}+1}, Tgx_{m_{k_s}+1}) \\ &\leq \nu(Tx_{n_{k_s}}, Tx_{m_{k_s}}) - b\nu(Tx_{n_{k_s}+1}, Tx_{m_{k_s}+1}) \\ &\leq \nu(Tx_{n_{k_s}}, Tx_{m_{k_s}}) - \nu(Tx_{n_{k_s}+1}, Tx_{m_{k_s}+1})\end{aligned} \tag{2.5.23}$$

za svako $k \in \mathbb{N}$. Iz (2.5.20), (2.5.22) i (2.5.23) sledi

$$b\delta = \lim_{s\to\infty} b\nu(Tx_{n_{k_s}+1}, Tx_{m_{k_s}+1}) < \lim_{s\to\infty} \nu(Tx_{n_{k_s}}, Tx_{m_{k_s}}) < b\varepsilon, \tag{2.5.24}$$

što je nemoguće, pa važi (2.5.21). Dakle, nizovi $t_k = \nu(Tx_{n_k+1}, Tx_{m_k+1})$ i $v_k = \nu(Tx_{n_k}, Tx_{m_k})$ ispunjavaju uslove iz (ξ_2) (po (2.5.21) i (2.5.22)). Na osnovu osobine (ξ_2), zaključujemo da je

$$0 \leq \limsup_{k\to\infty} \xi(bt_k, v_k) < 0$$

što je kontradikcija, pa važi (2.5.17).

Sada je na osnovu Leme 1.3.1 (iii), $\{Tx_n\}$ Košijev niz. Kako je (X, d) kompletan b-metrički prostor, a $T(A_0)$ je zatvoren podskup u X, postoji $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tu \in T(A_0) \subseteq B_0$. Štaviše, postoji $z \in A_0$ tako da je $d(z, Tu) = d(A, B)$. Pošto je $A_0 \subseteq g(A_0)$, imamo da je $z = gx$ za neko $x \in A_0$, i zato

$$d(gx, Tu) = d(A, B). \tag{2.5.25}$$

Ako $x_n = x$ važi za beskonačno mnogo vrednosti $n \in \mathbb{N}$, onda je $Tx = Tu$. Prema tome, može se pretpostaviti da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da $x_n \neq x$ za svako $n \geq n_0$. Takođe, postoji podniz $\{x_{n_k}\}$ niza $\{x_n\}$ takav da je $\nu(Tx_{n_k}, Tu) > 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Ponovo, pošto je T $\mathcal{Z}$-P-proksimalna kontrakcija drugog tipa, dobijamo

$$0 \leq \xi(b\nu(Tgx_{n_k+1}, Tgx), \nu(Tx_{n_k}, Tu)) < \nu(Tx_{n_k}, Tu) - b\nu(Tgx_{n_k+1}, Tgx)$$

i stoga

$$\nu(Tx_{n_k+1}, Tx) \leq b\nu(Tgx_{n_k+1}, Tgx) < \nu(Tx_{n_k}, Tu) \tag{2.5.26}$$

za svako $k \in \mathbb{N}$ tako da je $n_k \geq n_0$, jer $T \in \mathcal{T}_{g,P}$.

Prema (2.5.17) sledi da za svako $\epsilon > 0$ postoji $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tako da je $\nu(Tx_n, Tx_m) < \frac{\epsilon}{b}$ za svako $m > n \geq N_\epsilon$. Tada na osnovu osobine (P_2) wt_0-rastojanja imamo da

$$P(Tx_n, Tu) \leq \liminf_{m\to\infty} bP(Tx_n, Tx_m) < \epsilon$$

za bilo koje fiksno $n \geq \max\{n_0, N_\epsilon\}$, odakle je

$$\lim_{k\to\infty} P(Tx_{n_k}, Tu) = 0 \tag{2.5.27}$$

i slično $\lim\limits_{k\to\infty} P(Tu, Tx_{n_k}) = 0$, pa je $\lim\limits_{k\to\infty} \nu(Tx_{n_k}, Tu) = 0$. Iz poslednje jednačine i (2.5.26) dobijamo $\lim\limits_{k\to\infty} \nu(Tx_{n_k+1}, Tx) = 0$. Uzmimo da $k \to \infty$ u $\nu(Tx_{n_k}, Tx) \leq b\nu(Tx_{n_k}, Tx_{n_k+1}) + b\nu(Tx_{n_k+1}, Tx)$. Prema (2.5.16) dobijamo $\lim\limits_{k\to\infty} \nu(Tx_{n_k}, Tx) = 0$. Dakle, imamo da je

$$\lim_{k\to\infty} P(Tx_{n_k}, Tx) = 0. \tag{2.5.28}$$

Prema (2.5.27) i (2.5.28) i na osnovu Leme 1.3.1 (i) zaključujemo da je $Tx = Tu$. Sada zamenom $Tx = Tu$ u jednačini (2.5.25) dobijamo $d(gx, Tx) = d(A, B)$.

Da bismo dokazali jedinstvenost, neka je y tačka u A_0 takva da je

$$d(gy, Ty) = d(A, B),$$

tj. $y \in B^g_{est}(T)$. Pretpostavimo da $\nu(Tgx, Tgy) \geq \nu(Tx, Ty) > 0$. Pošto je $T \in \mathcal{T}_{g,P}$ $\mathcal{Z}$-P-proksimalna kontrakcija drugog tipa, imamo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \xi(b\nu(Tgx, Tgy), \nu(Tx, Ty)) \\ &< \nu(Tx, Ty) - b\nu(Tgx, Tgy) \\ &\leq \nu(Tx, Ty) - \nu(Tx, Ty) = 0 \end{aligned}$$

što je kontradikcija. Dakle, $\nu(Tx, Ty) = 0$, što znači da je $Tx = Ty$. Injektivnost preslikavanja T na A_0 sada povlači $x = y$.

Konačno, pretpostavimo da je $\nu(Tx, Tx) = P(Tx, Tx) > 0$. Tada je $\nu(Tgx, Tgx) > 0$. Slično kao u prethodnom pasusu, imamo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \xi(b\nu(Tgx, Tgx), \nu(Tx, Tx)) \\ &< \nu(Tx, Tx) - b\nu(Tgx, Tgx) \\ &\leq \nu(Tx, Tx) - \nu(Tx, Tx) = 0 \end{aligned}$$

što je kontradikcija. Prema tome, $P(Tx, Tx) = 0$. □

Naredni rezultat o tački najbolje aproksimacije se dobija kao specijalan slučaj Teoreme 2.5.2 kada je g identičko preslikavanje na A.

Posledica 2.5.4. *Neka su A i B neprazni podskupovi u kompletnom b-metričkom prostoru (X, d) sa wt_0-rastojanjem P, tako da je skup $T(A_0)$ neprazan i zatvoren. Pretpostavimo da preslikavanje $T : A \to B$ zadovoljava sledeće uslove:*

a) T je $\mathcal{Z}$-P-proksimalna kontrakcija drugog tipa;

b) T je injektivno na A_0;

c) $T(A_0) \subseteq B_0$.

Tada postoji jedinstvena tačka najbolje aproksimacije $x \in A_0$ za T, za koju je $P(Tx, Tx) = 0$, i za svako $x_0 \in A_0$ postoji niz $\{x_n\} \subseteq A_0$ koji konvergira ka x, tako da je $d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ za svako $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Uzimajući $d = P$ u Teoremi 2.5.2, dobijamo analogni rezultat u b-metričkim prostorima.

Posledica 2.5.5. *Neka su A i B neprazni podskupovi u kompletnom b-metričkom prostoru (X, d), tako da je $T(A_0)$ neprazan i zatvoren skup. Pretpostavimo da preslikavanja $T : A \to B$ i $g : A \to A$ zadovoljavaju sledeće uslove:*

a) T je $\mathcal{Z}$-proksimalna kontrakcija drugog tipa;

b) T je injektivno na A_0;

c) $T \in \mathcal{T}_g$;

d) $T(A_0) \subseteq B_0$;

e) $A_0 \subseteq g(A_0)$.

Tada postoji jedinstveno $x \in A$ tako da je $d(gx, Tx) = d(A, B)$. Štaviše, za svako $x_0 \in A_0$ postoji niz $\{x_n\} \subseteq A$ takav da je $d(gx_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ za svako $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Napomena 2.5.3. U Teoremi 2.5.2 i njenim posledicama uzmimo da je $b = 1$. Tada se dobijaju glavni rezultati rada Kostić *i dr.* [43] za $\mathcal{Z}$-p-proksimalne kontrakcije drugog tipa na metričkim prostorima sa w_0-rastojanjem.

Napomena 2.5.4. U Posledicama 2.5.3 i 2.5.5 neka je $b = 1$. Tada dobijamo glavne rezultate iz rada Tchier *i dr.* [63].

Glava 3

Primene i zaključci

3.1 Integralne jednačine

U ovoj sekciji, izučavaćemo egzistenciju rešenja sledeće *Hamerštajnove integralne jednačine*:

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t,s) f\,(s, x(s))\; ds \tag{3.1.1}$$

u prostoru $C \equiv C[a,b]$ primenom Teoreme 2.4.4. Rezultati koji su ovde predstavljeni sadržani su u radu [40].

Pretpostavimo da funkcije $K, f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ u jednačini (3.1.1) zadovoljavaju sledeće uslove:

(i) K je neprekidna po obe promenljive na $[a,b]$, a f je neprekidna za svako $s \in [a,b]$ i $|x| \leq R$ gde je $R > 0$ data konstanta;

(ii) postoji neko $k \in (0,1)$ tako da imamo

$$|f(s,x)| \leq k|x| \text{ za svako } s \in [a,b] \text{ i } x \in \mathbb{R}.$$

Sada možemo dokazati sledeći rezultat o egzistenciji rešenja jednačine (3.1.1).

Teorema 3.1.1. *Pod uslovima (i)–(ii) jednačina* (3.1.1) *ima rešenje na prostoru C ako je $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, gde je $M = \max_{t,s\in[a,b]} |K(t,s)|$.*

Dokaz. Neka je prostor C snabdeven standardnom normom $\|\cdot\|$ definisanom sa

$$\|x(t)\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| \text{ za svako } x \in C$$

i prirodnom metrikom d. Takođe, neka je p w-rastojanje na C definisano sa

$$p(x,y) = \|x\| + \|y\| \text{ za svako } x,y \in C.$$

Prema tome, imamo $q(x,y) = p(x,y)$ za svako $x,y \in C$. Posmatrajmo nelinearni integralni operator $T : A \to C$ definisan na zatvorenoj kugli $A \equiv K[0;R] = \{x \in C : \|x\| \leq R\}$ sledećom formulom:

$$Tx(t) = \lambda \int_a^b K(t,s) f\left(s, x(s)\right)\, ds \text{ za svako } x(t) \in A,\ t,s \in [a,b].$$

Sada se problem problem nalaženja rešenja integralne jednačine (3.1.1) svodi na problem nalaženja tačke najbolje aproksimacije preslikavanja T na skupu A. Pošto je $A \subseteq C$, očigledno je $d(A,C) = 0$, pa je stoga $A_0 = A$ zatvoren podskup od C. Takođe, lako se proverava da pošto važi uslov (i), preslikavanje $T : A \to C$ je dobro definisano i neprekidno (videti npr. [22, Lemma 4.2.7]), pa je zbog toga zatvoreno.

Jezgro K je neprekidno na kompaktnom skupu $[a,b] \times [a,b]$, što će reći da postoji konstanta $M > 0$ takva da je

$$\max_{t,s \in [a,b]} |K(t,s)| = M < \infty, \tag{3.1.2}$$

tj. K je ograničeno na $[a,b] \times [a,b]$.

Za proizvoljno $x \in A$ imamo da je

$$\begin{aligned} |Tx| &= \left| \lambda \int_a^b K(t,s) f\left(s, x(s)\right)\, ds \right| \\ &\leq |\lambda|(b-a) \max_{s\in[a,b]} |K(t,s)| \max_{s\in[a,b]} |f\left(s,x(s)\right)| \ \text{ (po (3.1.2) i (ii))} \\ &\leq |\lambda| M (b-a) \max_{s\in[a,b]} k\,|x(s)| \leq |\lambda| M(b-a) k \|x\|. \end{aligned}$$

Prema tome, za svako $x,y \in A$ onda dobijamo

$$\begin{aligned} q(Tx,Ty) &= \|Tx\| + \|Ty\| \leq |\lambda| M(b-a)k\left(\|x\| + \|y\|\right) \\ &= |\lambda| M(b-a) k q(x,y), \end{aligned}$$

tj.

$$|\lambda| M(b-a)kq(x,y) - q(Tx,Ty) \geq 0. \tag{3.1.3}$$

Prema (3.1.3) zaključujemo da T zadovoljava kontraktivni uslov (2.4.11), uzimajući da su simulaciona funkcija ζ i $\psi \in \Psi$ zadati sa $\zeta(t,s) = |\lambda| M(b-a)s - t$ za svako $t,s \in [0,\infty)$ (što je zaista simulaciona funkcija, pošto je $|\lambda| M(b-a) < 1$, videti [34, Corollary 2.10] i njen dokaz), odn. $\psi(t) = kt$ za svako $t \in [0,\infty)$.

Dakle, svi uslovi Teoreme 2.4.4 su ispunjeni, pa preslikavanje T ima tačku najbolje aproksimacije u A. $\square$

3.2 Varijacione nejednakosti

Sada izlažemo pojedine primene rezultata dobijenih u radu [43], a na koje je ukazano u radu [63].

Neka je u daljem tekstu H realan Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom $(\cdot,\cdot)$ i njime definisanom normom $\|\cdot\|$. Neka je K neprazan, zatvoren i konveksan podskup prostora H. Konkretno će biti ilustrovane primene na rešavanje *monotonih problema varijacionih nejednakosti*:

Primer 3.2.1. Naći $u \in K$ tako da je $(Su, v-u) \geq 0$ za svako $v \in K$, gde je $S : H \to H$ monotoni operator (tj. važi $(Su - Sv, v-u) \geq 0$ za sve $u, v \in K$).

Podsetimo i na pojam *metričke projekcije*: poznato je da za svako $u \in H$ postoji jedinstvena "tačka najbolje aproksimacije" $P_K u \in K$ za koju je

$$\|u - P_K u\| \leq \|u - v\|, \quad \forall v \in K.$$

Na ovaj način je određeno preslikavanje $P_K : H \to K$ koje ćemo zvati metrička projekcija.

Dalje navodimo pomoćna tvrđenja koja se tiču egzistencije rešenja problema varijacione nejednakosti, i postojanja fiksne tačke određenog tipa preslikavanja.

Lema 3.2.1. *Neka je $z \in H$. Tada $u \in K$ zadovoljava nejednakost $(u - z, y - z) \geq 0$ za svako $y \in K$ ako i samo ako je $u = P_K z$.*

Lema 3.2.2. *Neka je $S : H \to H$ monotoni operator. Tada je $u \in K$ rešenje nejednačine $(Su, v-u) \leq 0$ za proizvoljno $v \in K$ ako i samo ako je $u = P_K(u - \lambda Su)$ za neko $\lambda > 0$.*

Prikazujemo rezultate o rešavanju problema u Primeru 3.2.1 pomoću konstrukcije iterativnog niza, koji se dobijaju primenom Teoreme 2.1.1 ili Teoreme 2.1.2. U tu svrhu, pošto je H Hilbertov prostor, može se smatrati da se p odnosi na w_0-rastojanje na H dato kao u Primeru 1.2.2 ili 1.2.3.

Teorema 3.2.1. *Neka je K neprazan, zatvoren i konveksan podskup realnog Hilbertovog prostora H, i I_K identički operator na K. Pretpostavimo da monotoni operator $S : H \to H$ poseduje osobinu*

a) $P_K(I_K - \lambda S) : K \to K$ je $\mathcal{Z}$-p-proksimalna kontrakcija prvog tipa, gde je $\lambda > 0$.

Tada postoji jedinstvena tačka $u \in K$ tako da je $(Su, v-u) \geq 0$ za sve $v \in K$. Štaviše, za svako početno $u_0 \in K$ postoji niz $\{u_n\} \subseteq K$ definisan rekurzivno sa $u_{n+1} = P_K(u_n - \lambda Su_n)$ za svako $n \in \mathbb{N}_0$ koji konvergira ka jedinstvenom rešenju Primera 3.2.1.

Dokaz. Definišimo $T : K \to K$ sa $Tx = P_K(x - \lambda Sx)$ za svako $x \in K$. Tada je prema Lemi 3.2.1 $u \in K$ rešenje za $(Su, v - u) \geq 0$ za sve $v \in K$ ako i samo ako je $u = Tu$. Operator T zadovoljava sve pretpostavke Teoreme 2.1.1 za $A = B = K$. Tada traženi zaključci važe na osnovu Teoreme 2.1.1. □

Teorema 3.2.1 određuje i algoritam za rešavanje Primera 3.2.1.

Algoritam za rešavanje problema varijacione nejednakosti

1. Korak (inicijalizacija): Izabrati proizvoljnu početnu tačku $u_0 \in K$.

2. Korak (iteracija): Za tekuće aproksimativno rešenje $u_n \in K$, $n \in \mathbb{N}_0$ odrediti

$$u_{n+1} = P_K(u_n - \lambda S u_n)$$

koje zadovoljava a) iz Teoreme 3.2.1.

U svetlu dokaza Teoreme 3.2.1 (ili Teoreme 2.1.1) ovaj algoritam generiše niz koji konvergira ka jedinstvenom rešenju Primera 3.2.1.

Na osnovu Posledice 2.1.4 dobijamo sledeći rezultat o rešenju varijacione nejednakosti.

Teorema 3.2.2. *Neka je K neprazan, zatvoren i konveksan podskup realnog Hilbertovog prostora H, i I_K identičko preslikavanje na K. Neka monotoni operator $S : H \to H$ zadovoljava sledeće uslove*

a) $P_K(I_K - \lambda S) : K \to K$ je $\mathcal{Z}$-p-proksimalna kontrakcija drugog tipa, gde je $\lambda > 0$;

b) $P_K(I_K - \lambda S)$ je injektivno na K;

c) $P_K(I_K - \lambda S)(K)$ je zatvoren skup.

Tada za svako $u_0 \in K$ niz definisan sa $u_{n+1} = P_K(u_n - \lambda S u_n)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ konvergira ka jedinstvenom rešenju u problema $(Su, v - u) \geq 0$ za svako $v \in K$.

Iz Teoreme 3.2.2 se može izvesti još jedan algoritam za rešavanje Primera 3.2.1.

Algoritam za rešavanje problema varijacione nejednakosti II

1.Korak (inicijalizacija): Izabrati proizvoljno početno $u \in K$.

2.Korak (iteracija): Na osnovu izračunatog aproksimativnog rešenja $u_n \in K$ odrediti

$$u_{n+1} = P_K(u_n - \lambda S u_n)$$

koje zadovoljava a)–c) Teoreme 3.2.2.

Neki poznati problemi koji su obuhvaćeni Primerom 3.2.1 su dati u narednim primerima (videti [63]).

Primer 3.2.2. Naći $u \in K$ tako da je $(\nabla f u, v - u) \geq 0$ za svako $v \in K$ gde je $f : H \to \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilna funkcija konveksna na K, a $\nabla f u$ označava gradijent od f u u.

Primer 3.2.3. Neka je $Fix(g) := \{x \in K : x = gx\}$, gde je $g : K \to K$ takvo da je $\|gx - gy\| \leq \|x - y\|$ (tj. g je neekspanzivno). Naći $u \in Fix(g)$ za koje je $(Su, v - u) \geq 0$ za sve $v \in K$, gde je $S : K \to K$ monotoni operator.

Primer 3.2.4. Označimo sa Π_K Gâteaux-ov usmereni izvod metričke projekcije P_K

$$\Pi_K(x, -S(x)) := \lim_{t \to 0+} \frac{P_K(x - tS(x)) - x}{t}$$

gde je $S : K \to H$ neprekidno.

Posmatra se Košijev problem

$$\frac{dx(t)}{dt} = \Pi_K(x(t), -S(x(t))), \quad x(0) = x_0 \in K, \ t \in [0, +\infty)$$

čije kritične tačke zadovoljavaju $\frac{dx(t)}{dt} = 0$.

Dokazano je da je svaka kritična tačka navedenog problema ujedno rešenje Primera 3.2.1 i obratno (videti [63]).

3.3 Zaključak

U ovoj doktorskoj disertaciji razmatrani su problemi određivanja tačaka najbolje aproksimacije preslikavanja na metričkim prostorima sa w-rastojanjem. Na taj način su mnogi poznati rezultati o fiksnim i najboljim aproksimacionim tačkama uopšteni ili poboljšani. Razmatrane su i primene naših rezultata u teoriji integralnih jednačina i varijacionih nejednakosti.

Poznato je da se rezultati o fiksnim i najboljim aproksimacionim tačkama, pored ovde navedenih oblasti mogu primenjivati i u teoriji diferencijalnih i diferencnih jednačina, varijacionog računa, kao i u mnogim drugim oblastima nelinearne funkcionalne analize (videti npr. [3, 15, 28, 36, 63] i reference u tim radovima).

Mogući pravci u daljim istraživanjima bi se odnosili na uopštavanje postojećih rezultata na konusnim metričkim prostorima. Pojam konusnog metričkog prostora je uveo još 1935. Đuro Kurepa u svojoj doktorskoj disertaciji [44]. Huang i Zhang su u radu [20] prvi proučavali teoreme o fiksnim tačkama na konusnim prostorima.

Ako je E realan Banahov prostor, tada je $P \subseteq E$ *konus* u E (videti [20, 24]) ako važi:

(i) P je zatvoren, neprazan i $P \neq \{0\}$;

(ii) $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $x, y \in P \Rightarrow ax + by \in P$;

(iii) $P \cap (-P) = \{0\}$ (gde je $-P = \{-x : x \in P\}$).

Za dati konus $P \subseteq E$ je sa

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P$$

definisano parcijalno uređenje $\leq$ u odnosu na P. Takođe se piše $x \ll y$ ako je $y - x \in int\, P$, gde je $int\, P$ unutrašnjost skupa P.

Definicija 3.3.1 ([20, 24])**.** *Ako je X neprazan skup, a E realan Banahov prostor sa konusom P, tada se preslikavanje $d : X \times X \to E$ naziva konusna metrika na X ako zadovoljava sledeće uslove:*

(1) $0 < d(x, y)$ *za svako* $x, y \in X$ *i* $d(x, y) = 0$ *ako i samo ako je* $x = y$*;*

(2) $d(x, y) = d(y, x)$ *za svako* $x, y \in X$*;*

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *za svako* $x, y, z \in X$*.*

Par (X, d) se tada naziva konusni metrički prostor.

Pojmovi konvergencije, Košijevog niza i sl. se definišu analogno kao u metričkim prostorima.

Postoje mnoga uopštenja pojma w-rastojanja na konusnim metričkim prostorima, a jedno od njih je pojam c-rastojanja koji su uveli Cho *i dr.* u radu [12].

Definicija 3.3.2 ([12])**.** *Ako je (X, d) konusni metrički prostor, funkcija $q : X \times X \to E$ je c-rastojanje na X ako važe sledeći uslovi:*

(Q1) $0 < q(x, y)$ *za svako* $x, y \in X$*;*

(Q2) $q(x, y) \leq q(x, z) + q(z, y)$ *za svako* $x, y, z \in X$*;*

(Q3) Ako niz $\{x_n\} \subseteq X$ konvergira ka $y \in X$, i ako za neko $x \in X$ i $u = u(x) \in P$ važi $q(x, y_n) \leq u$ za svako $n \in \mathbb{N}$, onda je $q(x, y) \leq u$;

(Q4) Za svako $c \in E$ takvo da je $0 \ll c$ postoji $e \in E$ tako da za svako $x, y, z \in X$ iz $q(z, x) \ll e$ i $q(z, y) \ll e$ sledi $d(x, y) \ll c$.

Bibliografija

[1] M. Abbas, Y.I. Suleiman, C. Vetro: *A simulation function approach for best proximity point and variational inequality problems*, Miskolc Math. Notes (2017) 18:1, 3–16.

[2] A. Almeida, E. Karapinar, K. Sadarangani: *A note on best proximity point theorems under weak P-property*, Abstract and Applied Analysis (2014) 2014, Article ID 716825.

[3] H. H. Al-Sulami, N. Hussain, J. Ahmad: *Best proximity results with applications to nonlinear dynamical systems*, Mathematics (2019) 7(10), 900.

[4] H. Argoubi, B., Samet, C. Vetro: *Nonlinear contractions involving simulation functions in metric space with a partial order*, J. Nonlinear Sci. Appl. (2015) 8, 1082–1094.

[5] H. Aydi, A. Felhi, E. Karapinar, S. Sahmim, *A Nadler-type fixed point theorem in dislocated spaces and applications*, Miskolc Math. Notes (2018) 19, 111–124.

[6] H. Aydi, E. Karapinar, I.M. Erhan, P. Salimi: *Best proximity points of generalized almost ψ-Geraghty contractive non-self mappings*, Fixed Point Theory and Applications (2014) 2014, Article ID 2014:32.

[7] I.A. Bakhtin: *The contraction mapping principle in almost metric space*, Functional Analysis (1989) 30, 26–37.

[8] S. Banach: *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations integrals*, Fund. Math. (1922) 3, 133-181.

[9] M. Bota, A. Molnar, C. Varga: *On Ekeland's variational principle in b-metric spaces*, Fixed Point Theory (2011) 12 (2), 21–28.

[10] D.W. Boyd, J.S.W. Wong: *On nonlinear contractions*, Proc. Amer. Math. Soc. (1969) 20, 458-464.

[11] Y.J. Cho, A. Gupta, E. Karapinar, P. Kumam, E. Sintunavarat: *Tripled best proximity point theorem in metric spaces*, Mathematical Inequalities & Applications (2013) 16(4), 1197–1216.

[12] Y. J. Cho, R. Saadati, S. Wang: *Common fixed point theorems on generalized distance in ordered cone metric spaces*, Computers and Mathematics with Applications (2011) 61 (4), 1254-1260.

[13] S. Czerwik: *Contraction mappings in b-metric spaces*, Acta Math. Inform. Univ. Ostrav. (1993) 1 (1), 5–11.

[14] Lj.B. Ćirić, H. Lakzian, V. Rakočević: *Fixed point theorems for w-cone distance contraction mappings in TVS- cone metric spaces*, Fixed Point Theory and Applications (2012) 2012, Article ID 2012:3.

[15] M. De la Sen, E. Karapinar: *Best proximity points of generalized semicyclic impulsive self-mappings: applications to impulsive differential and difference equations*, Abstract and Applied Analysis (2013) 2013, Article ID 505487.

[16] M. Demma, R. Saadati, P. Vetro: *Fixed point results on b-metric space via Picard sequences and b-simulation functions*, IJMSI (2016) 11 (1), 123–136.

[17] M.A. Geraghty: *On contractive mappings*, Proceedings of the American Mathematical Society (1973) 40, 604–608.

[18] L. Gholizadeh, E. Karapinar: *Best proximity point results in dislocated metric spaces via R-functions*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas (2018) 112, 1391–1407.

[19] E. Graily, S.M. Vaezpour: *Generalized distance and fixed point theorems for weakly contractive mappings*, J. Basic. Appl. Sci. Res. (2013) 3(4), 161–164.

[20] L.-G. Huang, X. Zhang: *Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, J. Math. Anal. Appl. (2007) 332, 1468–1476.

[21] N. Hussain, R. Saadati, R.P. Agrawal: *On the topology and wt-distance on metric type spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2014) 2014, Article ID 2014:88.

[22] V. Hutson, J.S. Pym: *Applications of functional analysis and operator theory*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 146, Academic Press, London (1980).

[23] D. Ilić, V. Rakočević: *Common fixed points for maps on metric space with w-distance*, Applied Mathematics and Computation (2008) 199, 599–610.

[24] D. Ilić, V. Rakočević: *Kontraktivna preslikavanja na metričkim prostorima i uopštenja*, Prirodno-Matematički Fakultet, Univerzitet u Nišu, Niš (2014).

[25] M. Imdad, F. Rouzkard: *Fixed point theorems in ordered metric spaces via w-distances*, Fixed Point Theory Appl. (2012) 2012, Article ID 2012:222.

[26] M. Javahernia, A. Razani, F. Khojasteh: *Fixed point of multi-valued contractions via manageable functions and Liu's generalization*, Cogent Math. (2016) 3:1276818.

[27] M. Jleli, E. Karapinar, B. Samet: *Best proximity point results for MK-proximal contractions*, Abstract and Applied Analysis (2012) 2012, Article ID 193085.

[28] M. Jleli, B. Samet: *Best proximity points for α-ψ-proximal contractive type mappings and applications*, Bulletin des Sciences Mathématiques (2013) 137 (8), 977–995.

[29] O. Kada, T. Suzuki, W. Takahashi: *Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces*, Math. Japonica (1996) 44, 381–391.

[30] E. Karapinar: *Fixed point results via simulation functions*, Filomat (2016) 30:8, 2343–2350.

[31] E. Karapinar, F. Khojasteh: *An approach to best proximity points results via simulation functions*, J. Fixed Point Theory Appl. (2017) 19 (3), 1983–1995.

[32] E. Karapinar, A.F. R.L. de Hierro, K. Sadarangani: *Existence and uniqueness of best proximity points under rational contractivity conditions*, Mathematica Slovaca (2016) 66(6), 1427–1442.

[33] M.A. Khamsi, N. Hussain: *KKM mappings in metric type spaces*, Nonlinear Anal. (2010) 73, 3123–3129.

[34] F. Khojasteh, S. Shukla, V. Radenović: *A new approach to the study of fixed point theorems via simulation functions*, Filomat (2015) 29:6, 1189–1194.

[35] D. Kocev, V. Rakočević: *On a theorem of Brian Fisher in the framework of w-distance*, Carpathian Journal of Mathematics (2017) 33(2), 199–205.

[36] S. Komal, P. Kumam, D. Gopal: *Best proximity point for $\mathcal{Z}$-contraction and Suzuki type $\mathcal{Z}$-contraction mappings with an application to fractional calculus*, Appl. Gen. Topol. (2016) 2, 185–198.

[37] A. Kostić: *Control functions in fixed point theory with applications to best approximation problems*, predavanje na seminaru, Prirodno-Matematički Fakultet, Niš, 27.12.2018.

[38] A. Kostić: *Best proximity points revisited*, Filomat (2019) 33:16, 5159–5166.

[39] A. Kostić: *Best proximty points for a new type of set-valued mappings*, Mathematica Slovaca (2019) 69(6), 1395–1402.

[40] A. Kostić: *Solvability of Hammerstein equation via new best proximity point results*, in review.

[41] A. Kostić, E. Karapınar, V. Rakočević: *Best proximity points and fixed points with R-functions in the framework of w-distances*, Bulletin of the Australian Mathematical Society (2019) 99:3, 497–597.

[42] A. Kostić, H. Rahimi, G. Soleimani Rad: *wt_0-distance and best proximity points involving b-simulation functions*, in review.

[43] A. Kostić, V. Rakočević, S. Radenović: *Best proximity points involving simulation functions with w_0-distance*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas (2019) 113:2, 715–727.

[44] Đ. Kurepa: *Ensembles ordonnés et ramifiés*, Doktorska disertacija, Paris (1935).

[45] T.C. Lim: *On characterizations of Meir-Keeler contractive maps*, Nonlinear Anal. (2001) 46, 113–120.

[46] E. Malkowsky, V. Rakočević: *Advanced Functional Analysis* (1st Ed.), CRC Press, Boca Raton (2019).

[47] A. Meir, E. Keeler: *A theorem on contraction mappings*, J. Math. Anal. Appl. (1969) 28, 326–329.

[48] C. Mongkolkeha, Y.J. Cho, P. Kumam: *Fixed point theorems for simulation functions in b-metric spaces via the wt-distance*, Appl. Gen. Topol. (2017) 18 (1), 91–105.

[49] S.B. Nadler: *Multi-valued contraction mappings*, Pacific J. Math. (1969) 30:2, 475–488.

[50] A. Nastasi, P. Vetro: *Existence and uniqueness for a first-order periodic differential problem via fixed point results*, Results Math. (2017) 71 (3-4), 889–909.

[51] A. Nastasi, P. Vetro, S. Radenović: *Some fixed point results via R-functions*, Fixed Point Theory Appl. (2016) 2016, Article ID 2016:81.

[52] M. Omidvari, S.M. Vaezpour, R. Saadati, S.J. Lee: *Best proximity point theorems with Suzuki distances*, J. Inequal. Appl. (2015) 2015, 27.

[53] S. Pirbavafa, S.M. Vaezpour, F. Khojasteh: *Global minimization of R-contractions via best proximity points*, Journal of Mathematical Analysis (2017) 8, 3, 125–134.

[54] R. Plebaniak: *On best proximity points for set-valued contractions of Nadler type with respect to b-generalized pseudodistances in b-metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2014) 2014, Article ID 2014:39.

[55] V. Rakočević: *Funkcionalna analiza*, Naučna Knjiga, Beograd (1994).

[56] A. Roldan, E. Karapınar, C. Roldan, J. Martinez-Moreno: *Coincidence point theorems on metric spaces via simulation* functions, J. Comut. Appl. Math. (2015) 275, 345–355.

[57] A. F. Roldán López de Hierro, N. Shahzad: *New fixed point theorem under R-contractions*, Fixed Point Theory Appl. (2015) 2015, Article ID 2015:98.

[58] B. Samet: *Best proximity point results in partially ordered metric spaces via simulation functions*, Fixed Point Theory Appl. (2015) 2015, Article ID 2015:232.

[59] N. Shioji, T. Suzuki, W. Takahashi: *Contractive mappings, Kannan mappings and metric completeness*, Proc. Amer. Math. Soc. (1998) 126 (10), 3117–3124.

[60] G. Soleimani Rad, S. Radenovic, D. Dolicanin-Dekic: *A shorter and simple approach to study fixed point results via b-simulation functions*, IJMSI (2018) 13 (1), 97–102.

[61] T. Suzuki, W. Takahashi: *Fixed point theorems and characterizations of metric completeness*, Topol. Methods Nonlinear Anal. (1996) 8, 371–382.

[62] W. Takahashi, N.C. Wong, J.C. Yao: *Fixed point theorems for general contractive mappings with w-distances in metric spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. (2013) 14, 637–648.

[63] F. Tchier, C. Vetro, F. Vetro: *Best approximation and variational inequality problems involving a simulation function*, Fixed Point Theory Appl. (2016) 2016, Article ID 2016:26.

[64] F. Zarinfar, F. Khojasteh, S.M. Vaezpour: *A new approach to the study of fixed point theorems with w-distances via R-functions*, Journal of Function Spaces, (2016) 2016, Article ID 6978439.

[65] F. Zarinfar, F. Khojasteh, M. Vaezpour: *Extension of Darbos fixed point theorem via SR_μ-contractions with application to integral equations*, Filomat (2018) 32:1, 55–69.

Biografija

Aleksandar Kostić je rođen 28.04.1991. u Nišu, gde je završio Osnovnu Školu "Ratko Vukićević" 2006. godine i Gimnaziju "Svetozar Marković" - specijalizovano odeljenje za učenike obdarene za matematiku 2010. godine.

Prirodno-Matematički Fakultet u Nišu, osnovne akademske studije na Departmanu za matematiku, upisao je 2010. godine a završio 2013. godine, sa prosečnom ocenom 9.00, i stekao visoko obrazovanje i stručni naziv Matematičar. Master akademske studije na Departmanu za matematiku Prirodno-Matematičkog Fakulteta u Nišu upisao je 2013. godine, a završio 2015. godine sa prosečnom ocenom 9.06, i stekao stručni naziv Master matematičar. Master rad na temu "Grupe kretanja. Izometrijske transformacije i njihove grupe" odbranio je 06.11.2015. sa ocenom 10.00. Na istom fakultetu upisao je prvu godinu doktorskih akademskih studija na studijskom programu Matematika 2015. godine, gde je položio ukupno 14 ispita i ostvario 165 ESPB sa prosečnom ocenom 9.93.

U toku osnovnih i master akademskih studija bio je korisnik stipendije Ministarstva prosvete, a u 2016. godini stipendije Grada Niša za talentovane učenike i studente. Od 01. Aprila 2017. godine je stipendista Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja i uključen je u projekat Ministarstva "Problemi nelinearne analize, teorije operatora, topologije i primene" (OI 174025) na Prirodno-Matematičkom Fakultetu u Nišu. Pored toga, 2017. godine je uključen i u projekat "Matrične transformacije, teorija fiksne tačke i primene", koji se realizuje preko ogranka Srpske Akademije Nauka i Umetnosti u Nišu.

Dana 01.06.2018. zasnovao je radni odnos na Prirodno-Matematičkom Fakultetu u Nišu kao istraživač-pripravnik angažovan na projektu Ministarstva "Problemi nelinearne analize, teorije operatora, topologije i primene" (OI 174025). Dana 09.04.2020. izabran je u zvanje istraživač-saradnik, u kome se i trenutno nalazi.

Bibliografija autora

Aleksandar Kostić je autor ukupno četiri naučne publikacije u istaknutim međunarodnim časopisima iz kategorije M20:

- **Aleksandar Kostić**, Vladimir Rakočević, Stojan Radenović: *Best proximity points involving simulation functions with w_0-distance*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas (2019) 113:2, 715-727. (kategorija M21)

- **Aleksandar Kostić**, Erdal Karapınar, Vladimir Rakočević: *Best proximity points and fixed points with R-functions in the framework of w-distances*, Bulletin of the Australian Mathematical Society (2019) 99:3, 497-597. (kategorija M22)

- **Aleksandar Kostić**: *Best proximity points revisited*, Filomat (2019) 33:16, 5159-5166. (kategorija M22)

- **Aleksandar Kostić**: *Best proximty points for a new type of set-valued mappings*, Mathematica Slovaca (2019) 69(6), 1395-1402. (kategorija M23)

Pored toga, u disertaciji su prezentovani i originalni rezultati autora sadržani u dva rada koji su trenutno na recenziji u istaknutim međunarodnim i domaćim časopisima:

- **Aleksandar Kostić**: *Solvability of Hammerstein equation via new best proximity point results*, in review.

- **Aleksandar Kostić**, Hamidreza Rahimi, Ghasem Soleimani Rad: *wt_0-distance and best proximity points involving b-simulation functions*, in review.

Autor je održao i jedno predavanje po pozivu na seminaru učesnika projekta Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije "Problemi nelinearne analize, teorije operatora, topologije i primene" (OI 124075), održanog na Prirodno-Matematičkom Fakultetu u Nišu dana 27.12.2018:

- **Aleksandar Kostić**: *Control functions in fixed point theory with applications to best approximation problems*, predavanje na seminaru, Prirodno-Matematički Fakultet, Niš, 27.12.2018.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

ФИКСНЕ И НАЈБОЉЕ АПРОКСИМАЦИОНЕ ТАЧКЕ ЗА ПРЕСЛИКАВАЊА НА МЕТРИЧКИМ ПРОСТОРИМА И УОПШТЕЊА

која је одбрањена на Природно Математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао/ла на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 07.09.2020.

Потпис аутора дисертације:

Александар С. Костић

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ЕЛЕКТРОНСКОГ И ШТАМПАНОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Наслов дисертације:

ФИКСНЕ И НАЈБОЉЕ АПРОКСИМАЦИОНЕ ТАЧКЕ ЗА ПРЕСЛИКАВАЊА НА МЕТРИЧКИМ ПРОСТОРИМА И УОПШТЕЊА

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу,** истоветан штампаном облику.

У Нишу, 07.09.2020.

Потпис аутора дисертације:

Александар С. Костић

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

ФИКСНЕ И НАЈБОЉЕ АПРОКСИМАЦИОНЕ ТАЧКЕ ЗА ПРЕСЛИКАВАЊА НА МЕТРИЧКИМ ПРОСТОРИМА И УОПШТЕЊА

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство **(CC BY)**

2. Ауторство – некомерцијално **(CC BY-NC)**

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде **(CC BY-NC-ND)**

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима **(CC BY-NC-SA)**

5. Ауторство – без прераде **(CC BY-ND)**

6. Ауторство – делити под истим условима **(CC BY-SA)**

У Нишу, 07.09.2020.

Потпис аутора дисертације:

Александар С. Костић