UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU

Dragan S. Rakić

PARCIJALNA UREĐENJA ODREĐENA UOPŠTENIM INVERZIMA I ANULATORIMA

Doktorska disertacija

Niš, 2014.

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Dragan S. Rakić

PARTIAL ORDERS BASED ON GENERALIZED INVERSES AND ANNIHILATORS

PhD thesis

Niš, 2014.

Mentor:

dr Dragan S. Đorđević,

redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu

Članovi komisije:

1.

2.

3.

4.

Datum odbrane:

Disertaciju posvećujem mojoj majci

ZAHVALNICA

Najveću zahvalnost dugujem svojim roditeljima, sestri, sestričini i devojci Dragani. Bez njihove ljubavi, konstantne podrške i neophodnog razumevanja ova disertacija ne bi bila moguća.

Posebno se zahvaljujem svom mentoru profesoru Draganu Đorđeviću na predloženoj interesantnoj i aktuelnoj problematici, na korisnim savetima sa jedne strane i potpunoj slobodi u radu sa druge strane, kao i na prijateljskom odnosu tokom ovih godina.

Zahvaljujem se koautorima prof. Janku Marovtu i prof. Nebojši Dinčiću na uloženom trudu i pomoći.

Zahvaljujem se prof. Vladimiru Rakočeviću na korisnim savetima koji su poboljšali kvalitet ove disertacije.

Takođe se zahvaljujem profesorima Miroslavu Ristiću i Dragani Cvetković-Ilić na nesebičnoj pomoći i savetima.

Zahvalnost dugujem profesoru i prijatelju Milošu Milosavljeviću i nastavniku matematike Radoju Košaninu koji su mi na najbolji način preneli ljubav prema matematici.

Zahvaljujem se Mašinskom fakultetu u Nišu na pruženoj finansiskoj pomoći tokom prijave ove disertacije.

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

[illegible], **РБР**:	
[illegible], **ИБР**:	
[illegible], **ТД**:	[illegible]
[illegible], **ТЗ**:	[illegible]
[illegible], **ВР**:	[illegible]
[illegible], **АУ**:	[illegible]
[illegible], **МН**:	[illegible]
[illegible], **НР**:	[illegible]
[illegible], **ЈП**:	[illegible]
[illegible], **ЈИ**:	[illegible]
[illegible], **ЗП**:	[illegible]
[illegible], **УГП**:	[illegible]
[illegible], **ГО**:	2014.
[illegible], **ИЗ**:	[illegible]
[illegible], **МА**:	[illegible] 33.
[illegible], **ФО**: ([illegible])	5 / vi + 158 / 113 / 0 / 0 / 0 / 0
[illegible], **НО**:	[illegible]
[illegible], **НД**:	[illegible]
[illegible], **ПО**:	[illegible]
УДК	517.983.23/24 (043.3) 517.986.3 (043.3) 512.643 (043.3) 512.562 (043.3)
[illegible], **ЧУ**:	[illegible]
[illegible], **ВН**:	

[illegible], **ИЗ**:	[illegible] $a<b$, [illegible] G [illegible] a [illegible] b [illegible] 3×3 [illegible] *- [illegible]
[illegible], **ДП**:	16.09.2013.
[illegible], **ДО**:	
[illegible], **КО**: [illegible]:	

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	monograph
Type of record, **TR**:	textual
Contents code, **CC**:	doctoral dissertation
Author, **AU**:	Dragan S. Rakiĺ
Mentor, **MN**:	Dragan S. ņorĽeviĺ
Title, **TI**:	Partial orders based on generalized inverses and annihilators
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	English
Country of publication, **CP**:	Serbia
Locality of publication, **LP**:	Serbia
Publication year, **PY**:	2014
Publisher, **PB**:	authorȇs reprint
Publication place, **PP**:	Niġ, Viġegradska 33
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	5 / vi + 158 / 113 / 0 / 0 / 0 / 0
Scientific field, **SF**:	mathematics
Scientific discipline, **SD**:	mathematical analysis
Subject/Key words, **S/KW**:	functional analysis
UC	517.983.23/24 (043.3) 517.986.3 (043.3) 512.643 (043.3) 512.562 (043.3)
Holding data, **HD**:	in the library of Faculty of sciences and mathematics, Niġ
Note, **N**:	

Abstract, **AB**:		The dissertation is a contribution in defining and studying different types of partial orders on rings, particularly on von Neumann regular and Rickart rings, as well as on the algebras of bounded operators on Banach and Hilbert spaces. In the first part of the dissertation, using generalized inverses of elements, the definitions of the minus, star, sharp, core and dual core partial orders are extended from the set of complex matrices to an arbitrary ring (with or without an involution). In a unified approach it is shown that the condition *a*<*b*, where < is one of the above mentioned relation, or any other *G* relation, defines two decompositions of the identity of the ring, and thus, the representations of *a* and *b* in the diagonal 3×3 matrix forms. It is shown that the most important properties of the matrix partial orders based on generalized inverses stay valid in the ring case. Moreover, the considerable number of new results are proved. In the second part of the dissertation, the above mentioned relations are characterized using the notion of annihilators. This approach allows us to define the relations for elements which do not possess a generalized inverse. Partial orders based on annihilators are specially investigated on the Rickart and Rickart *-rings. Both approaches give as a corollary the appropriate results on the algebras of bounded operators on Banach or Hilbert spaces. The main ideas in the dissertation are precisely motivated by this case.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:		16.09.2013.
Defended on, **DE**:		
Defended Board, **DB**:	President:	
	Member:	
	Member:	
	Member:	
	Member, Mentor:	dr Dragan S. ṇorĽeviĺ , full professor

Sadržaj

Predgovor

Tokom poslednje četiri decenije, nekoliko matričnih uređenja je definisano i ispitivano od strane istraživača iz oblasti linearne algebre. Ako je $\mathcal{G}(A)$ određeni podskup skupa svih uopštenih inverza kompleksne matrice A, onda kažemo da je A manja od matrice B u odnosu na relaciju $<^{\mathcal{G}}$ ako postoji matrica X iz $\mathcal{G}(A)$ tako da je

$$AX = BX \text{ i } XA = XB.$$

Za različite izbore skupa $\mathcal{G}(A)$ dobijamo različita matrična uređenja. Kada je $\mathcal{G}(A)$ skup svih unutrašnjih inverza matrice A, dolazimo do definicije minus parcijalnog uređenja $<^{-}$, kojeg su nezavisno jedan od drugog definisali Hartvig [46] i Namburipad [83] 1980. godine. Kada je $\mathcal{G}(A) = \{A^{\dagger}\}$, gde je $A^{\dagger}$ Mur-Penrouzov inverz od A, dobijamo zvezda parcijalno uređenje $<^{*}$, koje je definisao Drejzin 1977. godine, [33]. Ako je $\mathcal{G}(A) = \{A^{\#}\}$, gde je $A^{\#}$ grupni inverz od A, onda se relacija $<^{\mathcal{G}}$ svodi na oštro (eng. *sharp*) parcijalno uređenje $<^{\#}$, [74]. Bazična relacija svih pomenutih uređenja je prostorno pre-uređenje $<^{s}$. Kažemo da je $A <^{s} B$ ako je $\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} B$ i $\operatorname{Im} A^{*} \subseteq B^{*}$. Važno je naglasiti da su minus i zvezda uređenje prvobitno definisani i ispitivani na polugrupama i prstenima. Uprkos tome, ova tematika je do sada u velikoj meri ispitana u kontekstu matrica. Sveobuhvatan prikaz teorije je postignut 2010. godine monografijom [77]. Da je oblast u velikoj meri i dalje aktuelna svedoči i nedavno uveden pojam jezgarnog (eng. *core*) $A^{\oplus}$ i dualnog jezgarnog inverza $A_{\oplus}$, i jezgarnog $<^{\oplus}$ i dualnog jezgarnog matričnog uređenja $<_{\oplus}$ koji su ispitivani u nekoliko skorašnjih radova, [9, 66, 67, 71, 87]. Takođe, uvođenjem novih klasa uopštenih inverza kao što su klasa inverza duž elementa [70] i klasa Drejzinovog (b, c) inverza [34], otvara se mogućnost za definisanje novih uređenja baziranih na njima. Teorija matričnih uređenja je blisko povezana sa teorijom uopštenih inverza, ali i sa oblastima linearne algebre kao što su matrične dekompozicije i simultane dijagonalizacije matrica. Matrična uređenja nalaze primenu pre svega u statistici i teoriji električnih mreža.

Cilj predložene doktorske disertacije je proširenje poznatih parcijalnih uređenja zasnovanih na uopštenim inverzima sa skupa kompleksnih matrica na šire matematičke strukture. Uređenja će biti definisana i ispitivana najpre na proizvoljnim i fon Nojmanovim regularnim prstenima (sa ili bez involucije), a zatim i na Rikartovim i Rikartovim $*$-prstenima. Ovi prsteni, uvedeni sredinom prošlog veka, su nastali kao pokušaj algebrizacije fon Nojmanovih algebri operatora. Značajan deo disertacije je posvećen ispitivanju osobina parcijalnih uređenja na operatorima na Banahovim i Hilbertovim prostorima, kao i na uspostavljanju veze između ovih rezultata i rezultata u kontekstu prstena. Glavni rezultati u disertaciji, koji se tiču uređenja u kontekstu prstena, su direktno motivisani geometrijskim tehnikama dekompozicije prostora.

Da bi objasnili glavne rezultate predložene disertacije, navodimo sledeću poznatu karakterizaciju koja predstavlja jedan od glavnih rezultata matričnih parcijalnih uređenja, [77]. Za kompleksne matrice $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ je $A <^- B$ ako i samo ako postoje regularne matrice R i S takve da je, (videti Teoremu 1.1.4)

$$A = R\begin{bmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} S \text{ i } B = R\begin{bmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_{b-a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} S. \tag{1}$$

Oštro i zvezda uređenje se mogu okarakterisati analognim uslovima, videti Teoreme 1.1.5 i 1.1.8. Korišćenjem ovakvih simultanih dijagonalizacija može se dokazati veliki broj osobina matričnih uređenja. Zbog toga je jedan od ciljeva u disertaciji naći karakterizacije analogne matričnim formama (1) u slučaju kada se relacije $<^-$, $<^*$, $<^\#$, $<^{\textcircled{\#}}$ i $<_{\textcircled{\#}}$ posmatraju na širim matematičkim strukturama. Iz (1), i iz njoj analognih karakterizacija, vidimo da kada je $A < B$ onda postoje baze u $\mathbb{C}^n$ odnosno u $\mathbb{C}^m$ u odnosu na koje linearne transformacije A i B imaju odgovarajući dijagonalni oblik. Tehnike konačno dimenzionalne linearne algebre, koje su dominantno oruđe u ispitivanju matričnih parcijalnih uređenja, su neprimenljive u slučaju operatora na beskonačno dimenzionalnim vektorskim prostorima. Ono što se u slučaju matrica postiže promenom baze, u operatorskom slučaju se može postići odgovarajućim dekompozicijama prostora. Neka su $A, B \in \mathcal{B}(X, Y)$ regularni operatori, gde su X i Y proizvoljni Banahovi prostori. U Teoremi 3.2.15 je pokazano da je uslov $A <^- B$ ekvivalentan postojanju dekompozicija (topoloških direktnih suma)

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \operatorname{Ker} B \quad \text{i} \quad Y = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(B - A) \oplus Y_1,$$

u odnosu na koje operatori $A, B : X_1 \oplus X_2 \oplus \operatorname{Ker} B \to \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(B - A) \oplus Y_1$ imaju sledeće matrične forme

$$A = \begin{bmatrix} C_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} C_A & 0 & 0 \\ 0 & C_{B-A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

gde su C_A i C_{B-A} invertibilni operatori. Ova karakterizacija je analogon matrične karakterizacije (1) i pomoću nje se može dokazati da mnoge osobine matričnog minus parcijalnog uređenja važe i u slučaju operatora. U Teoremama 4.3.12–4.3.15 je za $A, B \in \mathcal{B}(H)$, gde je H Hilbertov prostor, na sličan način okarakterisan uslov $A < B$, gde je $< \in \{<^*, <^\#, <^{\textcircled{\#}}, <_{\textcircled{\#}}\}$. Na primer, uslov $A <^{\textcircled{\#}} B$ indukuje dekompoziciju $H = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(BB^\# - AA^\#) \oplus \operatorname{Ker} B$ i ortogonalnu dekompoziciju $H = \operatorname{Im} A \ominus \operatorname{Im}(B - A) \ominus \operatorname{Ker} B^*$, u odnosu na koje A i B imaju matrične forme kao u (2). Logično je postaviti pitanje da li je moguće karakterizaciju (1), kao najbitniju osobinu svakog matričnog uređenja, uopštiti u slučaju prstena. Prelazak sa matričnog na slučaj prstena je komplikovaniji u tom smislu što se (za razliku od operatorskog slučaja) ne može koristiti analogija sa matričnim dokazima, tj. potrebno je naći drugačiji pristup. Svaka dekompozicija prostora indukuje dekompoziciju jediničnog operatora u vidu sume međusobno ortogonalnih idempotenata, ali i obrnuto. Pristup pomoću idempotenata ima smisla i kada se posmatra na prstenu. Neka su a i b regularni elementi prstena R. U Teoremi 3.1.8 je dokazano da uslov $a <^- b$ prirodno definiše dve trojke međusobno ortogonalnih idempotenata (e_i) i

(f_j), $i, j = 1, 2, 3$ sa sumama jednakim 1. Na taj način se prsten razlaže u direktnu sumu bimodula e_iRf_j. U odnosu na ovu sumu elementi a i b imaju 3×3 dijagonalnu matričnu formu:

$$a <^- b \iff a = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times f} \quad \text{i} \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times f}, \tag{3}$$

pri čemu je $a \in e_1Rf_1$, (e_1, f_1)-invertibilan, a $b - a \in e_2Rf_2$ je (e_2, f_2)-invertibilan, videti Definiciju 3.1.10. Uspostavljen je prirodan tok od karakterizacije (1) preko karakterizacije (2) do karakterizacije (3).

Predložena disertacija je bazirana na rezultatima autora koji su publikovani u vodećim međunarodnim časopisima. Sledi detaljno izlaganje sadržaja. Disertacija je podeljena u 5 glava. U prvoj glavi su prezentovani osnovni pojmovi i rezultati koji su potrebni za razumevanje problematike i za dalji rad.

U drugoj glavi ćemo dati osvrt na pojam topološke direktne sume potprostora normiranog vektorskog prostora X. Svaka dekompozicija jedinice prstena $R = \mathcal{B}(X)$ određuje jednu topološku direktnu sumu potprostora prostora X i obrnuto. Odavde sledi da svaka matrična forma elementa prstena određuje jednu matričnu reprezentaciju operatora i obrnuto. Time se uspostavlja fina veza između čisto algebarskog i analitičko topološkog pojma. To nam omogućuje da parcijalna uređenja ispitujemo na prstenima, a da kao posledicu tih rezultata dobijemo odgovarajuće preformulisane rezultate na operatorima. Rezultati ove glave su deo neobjavljenog rukopisa [89].

Ostatak disertacije možemo podeliti na dva dela. U Glavama 3 i 4 ćemo analizirati parcijalna uređenja određena uopštenim inverzima elemenata, a u Glavi 5 uređenja definisana posredstvom anulatora.

Glava 3 sadrži rezultate koji su publikovani u radovima [91] i [96]. U Poglavlju 3.1 se ispituje prostorno pre-uređenje i minus parcijalno uređenje na proizvoljnim prstenima. S obzirom na prisustvo uopštenih inverza, minus uređenje ima smisla posmatrati pre svega na fon Nojmanovim regularnim prstenima. Koristeći rezultate ovog poglavlja i Glave 2, u Poglavlju 3.2 dobijamo odgovarajuće rezultate prostornog pre-uređenja i minus parcijalnog uređenja na $\mathcal{B}(X, Y)$, gde su X i Y Banahovi prostori. Dokazano je da čak i oni rezultati iz prethodnjog poglavlja koji zahtevaju regularnost prstena R, važe i u ovom slučaju.

U Glavi 4 se paralelno, posredstvom zajedničkih idempotenata, ispituju MP, grupni, jezgarni i dualni jezgarni inverz, kao i odgovarajuća parcijalna uređenja. Većina rezultata ove glave koji se tiču jezgarnog inverza i jezgarnog parcijalnog uređenja su novi čak i u slučaju matričnih parcijalnih uređenja. Najpre, se u Poglavlju 4.1 uvodi ekvivalentna algebarska definicija jezgarnog matričnog inverza, tj. koncept se proširuje na proizvoljan prsten sa involucijom. Jezgarni inverz je okarakterisan skupom jednačina, a takođe je data i njegova matrična forma. Dokazano je da ovaj inverz pripada klasi Drejzinovog (b, c)-inverza i klasi inverza duž elementa. Dat je i veliki broj karakterizacija EP elemenata. Rezultati ovog poglavlja su publikovani u radu [94], a deo se nalazi u radu [90] koji je trenutno na recenziji.

U Poglavlju 4.2 se ispituju osobine relacija $<^*$, $<^\#$, $<^{\oplus}$ i $<_{\oplus}$ na prstenu i dokazuje se da su one zaista relacije poretka. Dekompozicije prstena u obliku direktne sume i karakterizacije analogne sa (3) su dobijene za svako od uređenja. Date su karakterizacije ovih relacija korišćenjem skupovnih inkluzija odgovarajućih podskupova uopštenih inverza. U nastavku je dat veliki broj uslova pod kojima važi implikacija $a <^- b \Rightarrow a < b$, gde je $<$ jedno od četiri posmatrana uređenja. Rezultati ovog poglavlja su deo rada [95] koji je trenutno na reviziji.

U Poglavlju 4.3 se tematika iz prethodnog poglavlja posmatra na algebri $\mathcal{B}(H)$, gde je H Hilbertov prostor. Na početku je definicija jezgarnog inverza proširena sa matrice na operator, ali ovog puta se jezgarni inverz posmatra kao uopšteni inverz sa predefinisanom slikom i jezgrom. Spektralna svojstva ovog inverza su posebno analizirana. Pod pretpostavkom da je $A < B$, gde je $< \in \{<^*, <^\#, <^{\oplus}, <_{\oplus}\}$, određene su dekompozicije prostora H i odgovarajuće matrične forme operatora A i B. Rezultati ovog poglavlja su publikovani u radu [93].

U Poglavlju 4.4 je Mitrina jedinstvena teorija parcijalnih uređenja baziranih na uopštenim inverzima, proširena sa skupa kompleksnih matrica na prsten. Najpre je data algebarska karakterizacija konačno dimenzionalnih vektorskih prostora, pomoću koje je uveden pojam konačno dimenzionalnog (FD) prstena koji je blisko povezan sa pojmom Dedekindovog-konačnog prstena. Matrični koncepti g-preslikavanja i $\mathcal{G}$ relacije su prošireni na proizvoljan prsten. Glavni rezultat ovog poglavlja je dokaz da su potrebni i dovoljni uslovi pod kojima je $\mathcal{G}$ relacija parcijalno uređenje na FD prstenu, isti kao i u matričnom slučaju. Rezultati ovog poglavlja su publikovani u radu [97].

Glavni nedostatak pominjanih parcijalnih uređenja je taj što se oni definišu samo na elementima koji poseduju uopšteni inverz. Ali već na algebri $\mathcal{B}(H)$, proizvoljan operator sa slikom koja nije zatvoren skup ne poseduje uopšteni inverz. Šemrl je prvi posmatrao problem proširenja definicije minus parcijalnog uređenja sa skupa kompleksnih matrica na celu algebru $\mathcal{B}(H)$: $A <^- B$ ako postoje ograničeni idmepotenti P i Q takvi da je

$$\operatorname{Im} P = \overline{\operatorname{Im} A}, \quad \operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} A \quad \text{i} \quad A = PB = BQ.$$

Nastavljajući Šemrlov pristup, Dolinar i Marovt su proširili definiciju zvezda uređenja na $\mathcal{B}(H)$, dok je Efimov proširio definiciju oštrog uređenja na $\mathcal{B}(X)$, gde je X Banahov prostor.

Cilj pete glave disertacije je pronaći ekvivalentnu algebarsku definiciju Šemrlove definicije koja će omogućiti proširenje minus uređenja na opštije matematičke strukture. Jasno je da takva struktura mora biti "bogata" idempotentima, a Rikartovi prsteni upravo imaju ovu osobinu. Prsten $\mathcal{A}$ je Rikartov (Rikartov $*$) prsten ako za svako $a \in \mathcal{A}$ postoje idempotenti (samo-adjungovani idempotenti) p i q iz $\mathcal{A}$ takvi da je ${}^\circ p = {}^\circ a$ i $q^\circ = a^\circ$, gde je ${}^\circ a = \{x \in \mathcal{A} : xa = 0\}$, i slično $a^\circ = \{x \in R : ax = a\}$. Algebra $\mathcal{B}(H)$ je bitan primer Rikartovog $*$-prstena. U Poglavlju 5.3 je dato proširenje Šemrlove definicije sa $\mathcal{B}(H)$ na $\mathcal{A}$ na sledeći način: $a <^- b$ ako i samo ako postoje idempotenti p i q takvi da je

$${}^\circ p = {}^\circ a, \quad q^\circ = a^\circ \quad \text{i} \quad a = pb = bq.$$

Dokazano je da je $<^-$ relacija parcijalnog uređenja na Rikartovom prstenu. I u ovom slučaju je pokazano da uslov $a <^- b$ određuje dve dekompozicije jedinice prstena $\mathcal{A}$ i na taj način 3×3 matrične reprezentacije elementa a i b slične reprezentacijama (3), pri čemu sada element $a \in e_1 R f_1$ nije (e_1, f_1)-delilac nule, a $b - a \in e_2 R f_2$ nije (e_2, f_2)-delilac nule. Rezultati Poglavlja 5.3 su deo rada [25] koji je trenutno na recenziji.

Nastavljajući pristup opisan u prethodnom poglavlju, u Poglavlju 5.4 je data algebarska definicija zvezda $<^*$, levog-zvezda i desnog-zvezda parcijalnog uređenja. Pored dokaza da su ove relacije parcijalna uređenja na Rikartovom $*$-prstenu, još jednom su dobijene reprezentacije slične onima u (3). Takođe je posmatran uzajamni odnos ovih uređenja sa minus uređenjem, a osobine su posebno ispitane za normalne elemente prstena. Rezultati ovog poglavlja su publikovani u radu [69].

U Poglavlju 5.5 je zaokružena teorija parcijalnih uređenja određenih anulatorima, definisanjem i ispitivanjem oštrog $\prec^{\#}$ i jezgarnog $\prec^{\oplus}$ parcijalnog uređenja. Rezultati ovog poglavlja su publikovani u radu [92]. Korišćenjem rezultata Glave 2, za svako od posmatranih uređenja definisanih anulatorima je dato kratko tumačenje matričnih formi elemenata u slučaju kada je $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$.

Glava 1

Uvod

U ovoj glavi ćemo izložiti osnovne oznake, definicije i rezultate neophodnih za dalji rad.

Relacije i parcijalna uređenja

Definicija 1.0.1. *Binarna relacija* ρ na skupu A je podskup od $A \times A$.

Ako $(x, y) \in \rho$, kažemo da je x u relaciji ρ sa y i to označavamo sa $x\rho y$.

Definicija 1.0.2. Za binarnu relaciju ρ na A kažemo da je

(1) *refleksivna* ako je $x\rho x$, za svako $x \in A$;

(2) *simetrična* ako za sve $x, y \in A$, iz $x\rho y$ sledi $y\rho x$;

(3) *antisimetrčna* ako za sve $x, y \in A$, iz $x\rho y$ i $y\rho x$ sledi $x = y$;

(4) *tranzitivna* ako za sve $x, y, z \in A$, iz $x\rho y$ i $y\rho z$ sledi $x\rho z$.

Definicija 1.0.3. Relacija ρ na A je *relacija ekvivalencije* ako je ona refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Definicija 1.0.4. Relacija ρ na A je *relacija poretka*, odnosno *relacija parcijalnog uređenja*, ako je ona refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

Definicija 1.0.5. Relacija ρ na A se zove *pre-uređenje* ako je ona refleksivna i tranzitivna.

1.1 Matrična parcijalna uređenja određena uopštenim inverzima

Ukoliko nije drugačije naglašeno, pod poljem ćemo podrazumevati polje $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva. Skup svih kompleksnih matrica reda $m \times n$ označavamo sa $M_{m\times n}$. Kada je $m = n$, algebru kvadratnih matrica reda n označavamo sa M_n. Jediničnu matricu reda n označavamo sa I_n. Za $A \in M_{m\times n}$ sa $\operatorname{Im} A$ označavamo prostor kolona matrice A, tj. skup $\{Ax : x \in \mathbb{C}^n\}$. Sa $\operatorname{Ker} A$ označavamo jezgro matrice A, tj. skup $\{x \in \mathbb{C}^n : Ax = 0\}$.

Naravno, $A^* \in M_{n\times m}$ označava konjugovano transponovanu matricu matrice A. *Indeks* matrice $A \in M_n$, u oznaci $\operatorname{ind} A$, je najmanji prirodan broj $k \in \{0,1,2,\dots\}$ za koji važi $\operatorname{rank} A^k = \operatorname{rank} A^{k+1}$. Svaka kvadratna matrica $A \in M_n$ ima indeks i važi $0 \leqslant \operatorname{ind} A \leqslant n$. Imamo, $\operatorname{ind} A \leqslant 1$ ako i samo ako je $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^2$. Skup svih kompleksnih kvadratnih matrica reda n i indeksa manjeg ili jednakog 1 označavamo sa $I_{1,n}$:

$$I_{1,n} = \{A \in M_n : \operatorname{ind} A \leqslant 1\}.$$

Elementarna je stvar da svaku matricu možemo posmatrati kao linearni operator (linearnu transformaciju) između dva vektorska prostora konačnih dimenzija, i obrnuto. To ćemo nadalje činiti bez posebnog naglašavanja.

Uopšteni inverzi matrica

Kao što znamo matrica $A \in M_n$ je regularna ako i samo ako je $\operatorname{rank} A = n$, tj. $\det A \neq 0$. U tom slučaju matrica A ima inverz, tj. postoji jedinstvena matrica A^{-1} takva da je $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Inverzna matrica matrice A zadovoljava, između ostalog, sledeće jednačine:

$$\begin{array}{rl}
(1) & AXA = A,\\
(1^k) & A^kXA = A^k,\\
(2) & XAX = X,\\
(3) & (AX)^* = AX,\\
(4) & (XA)^* = XA,\\
(5) & AX = XA,\\
(6) & XA^2 = A,\\
(7) & AX^2 = X,\\
(8) & A^2X = A,\\
(9) & X^2A = A.
\end{array}$$

Takođe, za $\lambda \neq 0$

$$Ax = \lambda x \iff A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x. \tag{1.1}$$

U želji da proizvoljnoj matrici, čak i pravougaonoj, pridružimo matricu koja će imati neke od ovih osobina običnog inverza, prirodno dolazimo do pojma uopštenog (generalizovanog) inverza matrice $A \in M_{m\times n}$.

Za matricu $A \in M_{m\times n}$, neka $A\{i,j,\dots k\}$ označava skup svih matrica $X \in M_{n\times m}$ koje zadovoljavaju jednačine (i), (j), ..., (k). Matrica $X \in A\{i,j,\dots k\}$ se naziva $\{i,j,\dots,k\}$-inverz od A i takođe se označava sa $A^{(i,j,\dots,k)}$. Istu notaciju koristimo i u slučaju kada je A operator na beskonačno dimenzionalnom prostoru.

Definicija 1.1.1. (Videti [13].) Neka je $A \in M_{m\times n}$. Matrica $X \in M_{n\times m}$ se naziva

1. *unutrašnji* inverz (g-inverz) matrice A ako $X \in A\{1\}$;

2. *spoljašnji* inverz matrice A ako $X \in A\{2\}$;

3. *refleksivni* inverz matrice A ako $X \in A\{1, 2\}$;

4. *Mur-Penrouzov* (eng. *Moore-Penrose*) inverz (skraćeno kažemo MP inverz) matrice A ako $X \in A\{1, 2, 3, 4\}$, i u tom slučaju koristimo oznaku $X = A^\dagger$;

Ako je $n = m$ onda se matrica X naziva

5. *grupni* inverz matrice A ako $X \in A\{1, 2, 5\}$, i u tom slučaju koristimo oznaku $X = A^\#$;

6. *Drejzinov* (eng. *Drazin*) inverz matrice A ako $X \in A\{1^k, 2, 5\}$, i u tom slučaju koristimo oznaku $X = A^D$.

Poznato je da svaka matrica ima jedinstven Mur-Penrouzov inverz. MP inverz je uveo Mur [80] a kasnije su, nezavisno od njega, Bjerhamar [16] i Penrouz [86] na drugi način ponovo došli do istog pojma. Svaka kvadratna matrica A indeksa k ima jedinstven Drejzinov inverz. Matrica $A \in M_n$ ima grupni inverz ako i samo ako je njen indeks manji ili jednak 1, i u tom slučaju je grupni inverz jedinstven.

Ekvivalentne karakterizacije, minimalna svojstva, spektralna svojstva i ostale osobine Mur-Penrouzovog, Drejzinovog i grupnog inverza se mogu naći u [13]. Pored nabrojanih, nedavno su uvedena još dva uopštena inverza kompleksne matrice. To su jezgarni i dualni jezgarni inverz čije definicije ćemo dati u Glavi 4.1.

Neka su sada U i V vektorski prostori proizvoljnih dimenzija. Sa $\mathcal{L}(U, V)$ označavamo skup svih linearnih transformacija (operatora) $A : U \to V$. Za $A \in \mathcal{L}(U, V)$, sa $\operatorname{Im} A$ označavamo sliku operatora A a sa $\operatorname{Ker} A$ označavamo jezgro (nul prostor) od A:

$$\operatorname{Im} A = \{Ax : x \in U\}, \quad \operatorname{Ker} A = \{x \in U : Ax = 0\}.$$

Ukoliko su U i V normirani vektorski prostori tada sa $\mathcal{B}(U, V)$ označavamo skup svih ograničenih linearnih operatora $A : U \to V$. Ako je $U = V$ ona umesto $\mathcal{L}(U, U)$ i $\mathcal{B}(U, U)$ pišemo $\mathcal{L}(U)$ odnosno $\mathcal{B}(U)$. Jedinični operator na prostoru U označavamo sa I_U, tj. sa I kada ne može doći do zabune.

Za operator $A \in \mathcal{L}(U)$ kažemo da ima indeks manji ili jednak jedan, $\operatorname{ind} A \leqslant 1$, ako je $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A^2$ i $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^2$. Skup svih ograničenih linearnih operatora na Banahovom prostoru X čiji je indeks manji ili jednak 1 označavamo sa $I_{1,X}$. Važi da je

$$\begin{aligned} I_{1,X} &:= \{A \in \mathcal{B}(X) : \operatorname{ind} A \leqslant 1\} \\ &= \{A \in \mathcal{B}(X) : \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A = X\}. \end{aligned}$$

Na osnovu Katoove teoreme (Teorema 4.7.5 u [98]) sledi da ako $A \in I_{1,X}$ onda je $\operatorname{Im} A$ zatvoren potprostor.

Na potpuno isti način kao za matrice, definišu se različiti uopšteni inverzi operatora na Banahovim odnosno Hilbertovim prostorima. Takođe zadržavamo odgovarajuću notaciju.

Matrična parcijalna uređenja

Cilj ovog poglavlja je prikaz najbitnijih poznatih rezultata matričnih parcijalnih uređenja baziranih na uopštenim inverzima. Mnogo više se može naći u monografiji [77] i tamo navedenim referencama.

Prostorno pre-uređenje

Osnovna matrična relacija uređenja je prostorno pre-uređenje.

Definicija 1.1.2. (Videti [77].) Neka su $A, B \in M_{m\times n}$. Kažemo da je A manja od B u odnosu na *prostorno pre-uređenje*, i to označavamo sa $A <^s B$, ako je

$$\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} B \text{ i } \operatorname{Im} A^* \subseteq \operatorname{Im} B^*.$$

Pokazuje se da je relacija $<^s$ refleksivna i tranzitivna, tj. $<^s$ je pre-urednjenje na $M_{m\times n}$. Takođe, $A <^s B$ ako i samo ako je $A = BMB$ za neku matricu $M \in M_{n\times m}$. Dakle, ako je $A <^s B$ onda je $\operatorname{rank}(A) \leqslant \operatorname{rank}(B)$.

Minus parcijalno uređenje

Na matricama se ovo uređenje najčešće definiše na sledeći način.

Definicija 1.1.3. (Videti [77].) Neka su $A, B \in M_{m\times n}$. Kažemo da je A manja od B u odnosu na *minus parcijalno uređenje*, i to označavamo sa $A <^- B$, ako postoji g-inverz $A^{(1)} \in A\{1\}$ takav da je

$$AA^{(1)} = BA^{(1)} \text{ i } A^{(1)}A = A^{(1)}B.$$

U sledećoj teoremi su date neke od ekvivalentnih karakterizacija minus uređenja. Videćemo, da su teoreme alanologne ovoj, karakteristične i za ostala matrična uređenja koja ćemo definisati.

Teorema 1.1.4. *(Vedeti [77].) Neka su $A, B \in M_{m\times n}$ nenula matrice i neka je* $\operatorname{rank}(A) = a$ *i* $\operatorname{rank}(B) = b$. *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $A <^- B$;

(ii) *Postoje regularne matrice $R \in M_m$ i $S \in M_n$ takve da je*

$$A = R\begin{bmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} S \text{ i } B = R\begin{bmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_{b-a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} S; \tag{1.2}$$

(iii) $B\{1\} \subseteq A\{1\}$;

(iv) $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B - A)$;

(v) *Postoje idempotenti $P \in M_m$ i $Q \in M_n$ takvi da je*

$$A = PB = BQ.$$

Minus uređenje je relacija parcijalnog uređenja na $M_{m\times n}$.

Pokazuje se da je simultana dijagonalizacija 1.2 ključna u dokazivanju mnogih osobina minus uređenja. Na primer, ako je $A <^- B$ onda se mogu okarakterisani sledeći skupovi (videti [76], [77]):

$$\begin{aligned} A\{1\}_B &:= \{A^{(1)} \in A\{1\} : AA^{(1)} = BA^{(1)},\ A^{(1)}A = A^{(1)}B\} \\ &= \{B^{(1)} - B^{(1)}(B-A)B^{(1)} : B^{(1)} \in B\{1\}\} \\ &= \{S^{-1} \begin{bmatrix} I_a & 0 & D_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & 0 & D_{33} \end{bmatrix} R^{-1} : D_{13}, D_{31}, D_{33} \text{ proizvoljne}\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{P \in M_m : A = PB\} = \{R \begin{bmatrix} I_a & 0 & V(I-T_{33}) \\ 0 & 0 & UT_{33} \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix} R^{-1} : \\ T_{13} \in M_{m-b} \text{ je idmepotent, a } U \in M_{(b-a)\times(m-b)},\ V \in M_{a\times(m-b)} \text{ su proizvoljne}\}. \end{aligned}$$

Oštro parcijalno uređenje

Prvobitnu definiciju oštrog (eng. *sharp*) matričnog uređenja je dao Mitra u radu [74].

Definicija 1.1.5. (Videti [74, 77].) Neka su $A, B \in I_{1,n}$. Kažemo da je A manja od B u odnosu na *oštro parcijalno uređenje*, i to označavamo sa $A <^\# B$, ako važi

$$AA^\# = BA^\# \text{ i } A^\# A = A^\# B.$$

Primetimo da u prethodnoj definiciji nije neophodno zahtevati da je $\operatorname{ind} B \leqslant 1$. Ipak, taj uslov je presudan za izvođenje mnogih osobina oštrog uređenja.

Teorema 1.1.6. *(Videti [77].) Za matrice $A, B \in I_{1,n}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $A <^\# B$;

(ii) $A^2 = AB = BA$;

(iii) *Neka je* $\operatorname{rank}(A) = a$ *i* $\operatorname{rank}(B) = b$. *Postoji regularna matrica $R \in M_n$ takva da je*

$$A = R \begin{bmatrix} D_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R^{-1} \text{ i } B = R \begin{bmatrix} D_a & 0 & 0 \\ 0 & D_{b-a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R^{-1}, \tag{1.3}$$

gde su $D_a \in M_a$ i $D_{b-a} \in M_{b-a}$ regularne matrice.

(iv) $B\{1,5\} \subseteq A\{1,5\}$;

(v) *Postoji idempotent $P \in M_n$ takav da je*

$$A = PB = BP.$$

Oštro uređenje je relacija parcijalnog uređenja na $I_{1,n}$.

Zvezda parcijalno uređenje

Definicija 1.1.7. Neka su $A, B \in M_{m\times n}$. Kažemo da je matrica A manja od matrice B u odnosu na *zvezda parcijalno uređenje*, i to označavamo sa $A <^* B$, ako važi

$$AA^* = BA^* \text{ i } A^*A = A^*B.$$

Teorema 1.1.8. *(Videti [77].) Za matrice* $A, B \in M_{m\times n}$ *sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $A <^* B$;

(ii) $AA^\dagger = BA^\dagger$ *i* $A^\dagger A = A^\dagger B$;

(iii) *Neka je* $\operatorname{rank}(A) = a$ *i* $\operatorname{rank}(B) = b$. *Postoje unitarne matrice* $U \in M_m$ *i* $V \in M_n$, *i pozitivno definitne dijagonalne matrice* $D_a \in M_a$ *i* $D_{b-a} \in M_{b-a}$ *takve da je*

$$A = U \begin{bmatrix} D_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \text{ i } B = U \begin{bmatrix} D_a & 0 & 0 \\ 0 & D_{b-a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} V^*; \tag{1.4}$$

(iv) $B\{1,3,4\} \subseteq A\{1,3,4\}$;

(v) *Postoje ortogonalni idempotenti* $P \in M_m$ *i* $Q \in M_n$ *takvi da je*

$$A = PB = BQ.$$

Zvezda uređenje je relacija parcijalnog uređenja na $M_{m\times n}$.

Pored nabrojanih, nedavno su uvedena dva nova matrična parcijalna uređenje. To su jezgarno i dulno jezgarno parcijalno uređenje. Njihove definicije ćemo dati u Glavi 4.2.

1.2 Parcijalna uređenja na polugrupama i prstenima

Neka je $(R, +, \cdot)$ prsten sa jedinicom 1. Za $x, y \in R$, umesto $x \cdot y$, skraćeno pišemo xy.

Za date podskupove A i B od R, proizvod AB je skup

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}.$$

Skraćeno pišemo aA i Aa umesto $\{a\}A$ i $A\{a\}$.

Definicija 1.2.1. $A \subseteq R$ je *desni (levi) ideal* od R ako je $AR \subseteq A$ ($RA \subseteq A$). Ako je A i levi i desni ideal onda se A zove *(dvostrani) ideal.*

Jasno je da je aR desni ideal i on se naziva glavni desni ideal generisan sa a. Slično, Ra je glavni levi ideal generisan sa a.

Definicija 1.2.2. Prsten R je *prsten sa involucijom* (drugačije kažemo $*$-*prsten*) ako je definisano preslikavanje $a \to a^*$ iz R u R sa osobinama

$$(a^*)^* = a, \quad (a+b)^* = a^* + b^*, \quad (ab)^* = b^* a^*, \qquad \text{za sve } a, b \in R.$$

Preslikavanje $*$ se naziva involucija na R.

Definicija 1.2.3. (Videti [33].) Involucija $*$ na prstenu R je *pravilna* ako iz $a^* a = 0$ sledi $a = 0$.

Definicija 1.2.4. Neka je R $*$-prsten. Element $a \in R$ je *samo-adjungovan* ako je $a^* = a$.

Definicija 1.2.5. Element e prstena R je *idempotent* ako je $e^2 = e$. Sa $E(R)$ označavamo skup svih idempotenata iz R. Skup svih samo-adjungovanih idempotenata iz R označavamo sa $\widetilde{E}(R)$.

Različite vrste uopštenih inverza elementa $a \in R$ definišemo odgovarajućim jednačinama na isti način kao i u slučaju matrica. Poznato je da su Mur-Penrouzov i grupni inverz od a jedinstveni kada postoje. Ako element a ima Mur-Penrouzov inverz onda za njega kažemo da je $*$-*regularan* ili MP-invertibilan. Za g-invertibilni element kažemo da je *(fon Nojman) regularan* . Prsten R je *fon Nojman regularan* (*regularan*, skraćeno) ako je svaki elemenat $a \in R$ regularan.

Definicija 1.2.6. Element a $*$-prstena R je *EP* element ako postoje $a^\dagger$ i $a^\#$ i ako je $a^\dagger = a^\#$.

Parcijalno uređenje na prstenu R se naziva prirodno ako je definisano posredstvom operacije $\cdot$.

Neka je sada $(S, \cdot)$ polugrupa. Odgovarajući pojmovi definisani na prstenu posredstvom operacije $\cdot$ se prenose na S. Sa S^1 označavamo monoid generisan sa S.

Preslikavanje $a \to a^*$ iz S u S se naziva *involucija* ako je $(a^*)^* = a$ i $(ab)^* = b^* a^*$. Involucija $*$ na S je *pravilna* ako iz $a^* a = a^* b = b^* b$ sledi $a = b$, [33]. Ako polugrupa ima nulu tada je involucija pravilna ako i samo ako iz $a^* a = 0$ sledi $a = 0$. Polugrupa S je $*$-*regularna* ako su svi njeni elementi $*$-regularni.

Definicija 1.2.7. Na skupu idempotenata $E(S)$ polugrupe S *prirodno* uređenje $\leqslant$ je definisano sa

$$e \leqslant f \iff e = ef = fe. \tag{1.5}$$

Lako se dokazuje da je relacija $\leqslant$ definisana sa (1.5) relacija parcijalnog uređenja na $E(S)$, [21].

Treba reći da su relacije minus i zvezda uređnja prvobitno definisane na polugrupi odnosno $*$-polugrupi, a zatim na matricama.

Minus uređenje na polugrupi su nezavisno jedan od drugog uveli Hartvig i Namburipad. Definicija se može iskazati na nekoliko ekvivalentnih načina.

Teorema 1.2.8. *(Videti [79].) Neka je S regularna polugrupa. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a <^- b$, *tj. postoji* $a^{(1)} \in a\{1\}$ *tako da je* $a^{(1)}a = a^{(1)}b$ *i* $aa^{(1)} = ba^{(1)}$;

(ii) $a^+a = a^+b$ *i* $aa^+ = ba^+$ *za neko* $a^+ \in a\{1,2\}$;

(iii) $a = eb$ *za neki idempotent* $e \in aS$ *i* $aS \subseteq bS$;

(iv) $a = xb = by$, $xa = a$ *za neke* $x, y \in S$;

(v) $a = aa^+b = ba^+a$ *za neko* $a^+ \in a\{1,2\}$;

(vi) $a = ab^+b = bb^+a$, $a = ab^+a$ *za neko* $b^+ \in b\{1,2\}$;

(vii) *Postoje* $e, f \in E(S)$ *tako da je* $a = eb = bf$;

Relacija $<^-$ *je relacija parcijalnog uređenja na* S.

U prethodnoj teoremi uslov (ii) je Hartvigova definicija [46], uslov (iii) je definicija Namburipada [83], uslov (iv) je difinicija Miča [79], uslov (v) je Gomezov [39], uslov (vi) je Hikijev [50], dok se uslov (vii) često uzima za definiciju.

Teorema 1.2.9. *(Videti [79].) Neka je* S *polugrupa. Relacija* $\leqslant$ *definisana sa*

$$a \leqslant b \iff a = xb = by, \; xa = a, \; \text{za neke } x, y \in S^1 \tag{1.6}$$

je parcijalno uređenje na S.

Zvezda parcijalno uređenje na $*$-polugrupi, koje je uveo Drejzin [33], se definiše na isti način kao u slučaju matrica.

Teorema 1.2.10. *(Videti [33].) Ako je* S *polugrupa sa pravilnom involucijom onda je relacija* $<^*$ *parcijalno uređenje na* S.

Glava 2

Direktna suma potprostora i dekompozicija jedinice

U ovoj glavi želimo da ukažemo na određena pitanja (i damo adekvatna objašnjenja) koji su u vezi sa sledećom situacijom koja se često sreće u literaturi. Treba napomenuti da se, zbog kompletnosti, u ovoj glavi nalaze i delovi koji spadaju u poznate stvari. Neka je dato linearno preslikavanje $A : X \to X$, gde je X Banahov prostor, i neka je $X = Y \oplus Z$, gde su Y i Z zatvoreni potprostori u X (samim tim Banahovi). Ako je $x \in X$ tada postoje jedinstveni $y \in Y$ i $z \in Z$ takvi da je $x = y + z$ (i svaka dva elementa $y \in Y$ i $z \in Z$ definišu neko $x = y + z \in X$). Imamo da je $Ax = Ay + Az$. Vektor Ay se na jedinstven način može napisati kao suma $Ay = w_1 + w_2$ gde je $w_1 \in Y$ i $w_2 \in Z$. Takođe, $Az = w_3 + w_4$, gde su $w_3 \in Y$ i $w_4 \in Z$ jedinstveni. Možemo definisati preslikavanja $A_1 : Y \to Y$, $A_1 y = w_1$, $A_2 : Z \to Y$, $A_2 z = w_3$, $A_3 : Y \to Z$, $A_3 y = w_2$, i $A_4 : Z \to Z$, $A_4 z = w_4$. Operator A je u potpunosti određen preslikavanjima A_i, $i = 1, \dots, 4$ i možemo pisati

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Može se pokazati da $A \in \mathcal{B}(X)$ ako i samo ako $A_1 \in \mathcal{B}(Y)$, $A_2 \in \mathcal{B}(Z, Y)$, $A_3 \in \mathcal{B}(Y, Z)$ i $A_4 \in \mathcal{B}(Z)$. Treba napomenuti da je pretpostavka da je X Banahov prostor neophodna.

Takođe, imamo situaciju koja uopštava gornje rezonovanje. Naime, pretpostavimo da je $Z = X_2 \oplus X_3$, gde su X_2 i X_3 zatvoreni. Radi jednostavnosti, umesto Y ćemo pisati X_1. Dakle, imamo da je $X = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$, gde su X_1, X_2, X_3 i $X_2 \oplus X_3$ zatvoreni. Neka je $A \in B(X)$. U odnosu na ovu dekompoziciju prostora X, operator A ima reprezentaciju

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

gde je $A_{ij} : X_j \to X_i$. I u ovoj situaciji se koristi tvrđenje da $A \in \mathcal{B}(X)$ ako i samo ako $A_{ij} \in \mathcal{B}(X_j, X_i)$.

U ovoj glavi želimo da ukažemo na sledeća pitanja u vezi ove problematike:

1. Šta zapravo predstavlja direktna suma $X = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$, kada je X Banahov prostor? Da li je dovoljno zahtevati jedinstvenost predstavljanja proizvoljnog $x \in X$

u obliku $x = x_1 + x_2 + x_3$ gde $x_i \in X_i$? Ili je potrebno zahtevati da su X_i zatvoreni potprostori? Možda treba i $X_2 \oplus X_3$ da bude zatvoren potprostor? Ili suma svaka dva potprostora treba da bude zatvorena?

2. U vezi sa prethodnim pitanjem možemo se zapitati kako definisati direktnu sumu u slučaju kada je X samo normiran prostor.

3. Ako $A \in \mathcal{B}(X)$ zbog čega onda i $A_{ij} \in \mathcal{B}(X_j X_i)$? Šta je, na primer, sa operatorom

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix},$$

koji se dobija iz reprezentacije (2.2)? Da li je on ograničen? Ali pre toga, da li je potprostor $X_1 \oplus X_2$ zatvoren, tj. da li je operator B definisan na Banahovom prostoru? (Eventualna pretpostavka je da je samo $X_2 \oplus X_3$ zatvoren.)

4. Da li iz $A_{ij} \in \mathcal{B}(X_j, X_i)$ sledi $A \in \mathcal{B}(X)$?

5. Šta ako prostor X nije Banahov već samo normiran? Koje dodatne uslove treba pretpostaviti u tom slučaju? Dalje, neka je X Hilbertov prostor i neka je X suma ortogonalnih potprostora. Da li je u tom slučaju neophodno pretpostaviti da su X_i zatvoreni ili to možda direktno sledi? Konačno, šta ako je X samo unitaran prostor.

6. Koje uslove treba pretpostaviti u slučaju kada je X suma n potprostora,

$$X = X_1 \oplus + \cdots + \oplus X_n?$$

Da li treba pretpostaviti da je suma bilo kojih k, $1 \leqslant k \leqslant n$, od ovih n potprostora zatvorena? Možda u slučaju kada je X Banahov, iz zatvorenosti prostora X_i sledi zatvorenost sume bilo kojih k potprostora? Opet, šta ako je X samo normiran, i tako dalje.

7. Kako definisati direktnu sumu $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ u slučaju kada je $X_1 + \cdots + X_n \neq X$?

U ovoj glavi ćemo detaljno proučiti ovu problematiku i dati odgovore na gornja i slična pitanja. Posmatraćemo slučaj kada umesto tri imamo n potprostora i precizno ćemo definisati pojam direktne sume u Poglavlju 2.1. U Poglavlju 2.2 ćemo generalizovati pojam takozvane dvostrane Parsove dekompozicije jedinice prstena i objasniti blisku povezanost te dekompozicije sa direktnom sumom potprostora (Poglavlje 2.3). Na osnovu toga ćemo u Poglavlju 2.4 dokazati neke osobine matrične reprezentacije operatora definisanog na direktnoj sumi potprostora.

Kao što ćemo videti, u ovoj glavi ćemo uspostaviti vezu između čisto algebarskih i analitičko topoloških pojmova. Stim u vezi, koristeći rezultate ove glave, određeni “tip” tvrđenja vezan za prstene, uz određenu interpretaciju, može da se preformuliše na slučaj ograničenih operatora. To je jedan od glavnih ciljeva ove glave.

2.1 Spoljašnja i unutrašnja direktna suma

Direktna suma (ili direktan proizvod, prema nekim autorima) se definiše za različite vrste matematičkih objekata među kojima su vektorski prostori, matrice, grupe, ideali, moduli itd. Pre svega, treba praviti razliku između spoljašnje i unutrašnje direktne sume (direktnog proizvoda). Ta dva pojma su blisko povezana ali različita.

Spoljašnja direktna suma struktura $S_1, \dots, S_n$ je Dekartov proizvod

$$S_s = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$$

zajedno sa odgovarajućim operacijama koje se definišu koordinatno. Jasno je da su ovom definicijom obuhvaćeni slučajevi kada su posmatrane strukture grupe, prsteni i vektorski prostori.

U slučaju kada su na strukturama definisane dodatne strukture, kao što su norma, skalarni proizvod itd., onda se te dodatne strukture, najčešće definišu i na odgovarajućoj direktnoj sumi.

Spoljašnja direktna suma $S_s = X_1 \times \cdots \times X_n$ normiranih prostora $(X_1, \|\cdot\|_1), \dots,$ $(X_n, \|\cdot\|_n)$ je spoljašnja direktna suma prostora $X_1, \dots, X_n$ kada se oni posmatraju kao vektorski prostori. Norma na S_s se može definisati na više načina. Sledeća teorema je dobro poznata.

Teorema 2.1.1. *Neka su $(X_1, \|\cdot\|_1), \dots, (X_n, \|\cdot\|_n)$ normirani vektorski prostori i neka je $S_s = X_1 \times \cdots \times X_n$. Neka je*

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = (\|x_1\|_1^p + \cdots + \|x_n\|_n^p)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{gde je } p \geqslant 1 \text{ realan broj i neka je}$$
$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max\{\|x_1\|_1, \dots, \|x_n\|_n\}.$$

Tada su $\|\cdot\|_p$, $p \in \mathbb{R}$, $p \geqslant 1$ i $\|\cdot\|_\infty$ norme na S_s i one su međusobno ekvivalentne, tj. one definišu istu topologiju na S_s. Prostor S_s, zajedno sa jednom od gore definisanih normi, je Banahov prostor ako i samo ako je X_i Banahov prostor za svako $i = 1, 2, \dots, n$.

Dokaz. Videti, na primer, Problem 3.9 (str. 168.), Problem 3.33 (str. 178.) i Primer 4. D (str. 208.) u [61]. □

Ukoliko imamo n unitarnih prostora $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1), \dots, (H_n, \langle\cdot,\cdot\rangle_n)$ tada se njihova spoljašnja direktna suma $S_s = H_1 \times \cdots \times H_n$ definiše kao spoljašnja direktna suma ovih prostora kada se oni posmatraju kao vektorski prostori. Skalarni proizvod na S_s se definiše sa

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle_1 + \cdots + \langle x_n, y_n \rangle_n.$$

Primetimo da je u slučaju unitarnih prostora, norma na S_s ustvari $\|\cdot\|_2$ norma. Ovako definisana direktna suma S_s je Hilbertov prostor ako i samo ako je H_i Hilbertov prostor za svako $i = 1, 2, \dots, n$ (Teorema 2.1.1).

Neka su $S_1, \dots, S_n$ podstrukture strukture S na kojoj je definisana operacija $+$. U najopštijem smislu kažemo da je suma $S_u = S_1 + \cdots + S_n$ unutrašnja direktna suma ukoliko je preslikavanje $\varphi : S_1 \times \cdots \times S_n \to S_u$ definisano sa $\varphi(s_1, \dots, s_n) = s_1 + \cdots + s_n$ izomorfizam.

Definicija 2.1.2. Neka su $S_1, \dots, S_n$ potprostori vektorskog prostora S. Kažemo da je suma $S_u = S_1 + \cdots + S_n$ *algebarska (unutrašnja) direktna suma* ako je preslikavanje

$$\varphi : S_s \to S_u, \quad \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \tag{2.3}$$

izomorfizam vektorskih prostora.

Suma $S_u = S_1 + \cdots + S_n$ je algebarska direktna suma ako i samo ako iz $x_1 + \cdots + x_n = 0$, $x_i \in S_i$, $i = 1, \dots, n$ sledi $x_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Ostale poznate karakterterizacije algebarskih direktnih suma se mogu naći, recimo, u [56].

Kada je na vektorskom prostoru S definisana norma tada ona određuje topologiju na S.

Definicija 2.1.3. Neka su $(S_1, \|\cdot\|_1)$ i $(S_2, \|\cdot\|_2)$ dva normirana vektorska prostora. Preslikavanje $\varphi : S_1 \to S_2$ je *topološki izomorfizam* ako je φ izomorfizam vektorskih prostora i ako su φ i φ^{-1} neprekidne funkcije. Drugim rečima, φ je topološki izomorfizam ako je linearni homeomorfizam.

Napomena 2.1.4. Iz Definicije 2.1.3 sledi da se topološkim izomorfizmom otvoreni skupovi u S_1 slikaju u otvorene skupove u S_2 i obrnuto. Dakle, ne zahteva se da topološki izomorfizam "čuva" normu, u smislu da je

$$\|\varphi(x)\|_2 = \|x\|_1, \ \forall x \in S_1. \tag{2.4}$$

Linearno preslikavanje koje zadovoljava uslov (2.4), tj. preslikavanje koje "čuva" rastojanja, se naziva *izometrija*. Izomorfizam koji je ujedno i izometrija se naziva *izometrički izomorfizam*. Jasno, ako je φ izometrički izomorfizam tada je $\|\varphi\| = 1$ i $\|\varphi^{-1}\| = 1$ pa je φ i topološki izomorfizam. Obrnuto u opštem slučaju ne važi.

Definicija 2.1.5. Neka su $S_1, \dots, S_n$ potprostori normiranog vektorskog prostora $(S, \|\cdot\|)$. Neka je na skupu $S_s = S_1 \times \cdots \times S_n$ definisana jedna od normi $\|\cdot\|_p$, $p \geqslant 1$, $p \in \mathbb{R}$ ili $\|\cdot\|_\infty$. Kažemo da je suma $S_u = S_1 + \cdots + S_n$ *topološka (unutrašnja) direktna* suma potprostora ako je preslikavanje $\varphi : S_s \to S_u$ definisano sa (2.3) topološki izomorfizam normiranih vektorskih prostora. Iz Teoreme 2.1.1 sledi da je sve jedno koja od normi $\|\cdot\|_p$, $p \geqslant 1$ ili $\|\cdot\|_\infty$ je definisana na S_s, što opravdava ovakvu formulaciju ove definicije.

Karakterizaciju topoloških direktnih suma možemo dati koristeći idempotentske operatore.

Teorema 2.1.6. *(Videti takođe [107].) Neka su X_1, X_2, ..., X_n potprostori normiranog vektorskog prostora X takvi da je suma $S_u = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ algebarska direktna suma. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(i) *S_u je topološka direktna suma.*

(ii) *Preslikavanje $E_i : S_u \to S_u$ definisano sa*

$$E_i(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = x_i, \ x_j \in X_j, \ j = 1, 2, \dots, n$$

je neprekidno za svako $i = 1, 2, \dots, n$.

Dokaz. Primetimo najpre da je E_i (linearan) idempotent i $\operatorname{Im} E_i = X_i$, za svako $i = 1, 2, \dots, n$. Neka je $S_s = X_1 \times \cdots \times X_n$. Iz Teoreme 2.1.1 sledi da je $(S_s, \|\cdot\|_1)$ normiran prostor. Definišimo preslikavanje

$$\varphi : S_s \to S_u, \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n.$$

Dakle, $\varphi(x_1, \dots, x_n) = E_1 x + \cdots + E_n x$, $x = x_1 + \cdots + x_n$. Lako se pokazuje da je φ linearno i sirjektivno preslikavanje. Iz uslova da je S_u algebarska direktna suma sledi da je φ bijekcija. Šta više

$$\varphi^{-1}(x_1 + \cdots + x_n) = (E_1(x_1 + \cdots + x_n), \dots, E_n(x_1 + \cdots + x_n)).$$

Takođe,

$$\|\varphi(x_1, \dots, x_n)\| = \|x_1 + \cdots + x_n\| \leqslant \|x_1\| + \cdots \|x_n\| = \|(x_1, \dots, x_n)\|_1.$$

Odavde sledi da je φ ograničen operator, pa samim tim i neprekidan. Zbog toga, iz Definicije 2.1.5 sledi da je S_u topološka direktna suma ako i samo ako je φ^{-1} neprekidna funkcija.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Pretpostavimo da je S_u topološka direktna suma, tj. da je φ^{-1} ograničen operator. Sledi

$$\begin{aligned}
\|E_i(x_1 + \cdots + x_n)\| &\leqslant \|E_1(x_1 + \cdots + x_n)\| + \cdots + \|E_n(x_1 + \cdots + x_n)\| \\
&= \|(E_1(x_1 + \cdots + x_n), \dots, E_n(x_1 + \cdots + x_n))\|_1 \\
&= \|\varphi^{-1}(x_1 + \cdots + x_n)\|_1 \leqslant \|\varphi^{-1}\| \cdot \|x_1 + \cdots + x_n\|.
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je E_i neprekidan operator za svako $i = 1, 2, \dots, n$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Pretpostavimo sada da je E_i neprekidan operator za svako $i = 1, 2, \dots, n$. Sledi

$$\begin{aligned}
\|\varphi^{-1}(x_1 + \cdots + x_n)\|_1 &= \|(E_1(x_1 + \cdots + x_n), \dots, E_n(x_1 + \cdots + x_n))\|_1 \\
&= \|E_1(x_1 + \cdots + x_n)\| + \cdots + \|E_n(x_1 + \cdots + x_n)\| \\
&\leqslant \|E_1\| \cdot \|x_1 + \cdots + x_n\| + \cdots + \|E_n\| \cdot \|x_1 + \cdots + x_n\| \\
&= (\|E_1\| + \cdots + \|E_n\|)\|x_1 + \cdots + x_n\|,
\end{aligned}$$

pa zaključujemo da je φ^{-1} ograničen operator. $\square$

U poglavlju 2.3 u Teoremama 2.3.2 i 2.3.5 ćemo dati još dve karakterizacije topoloških direktnih suma. Za nas će od najvećeg interesa biti topološke direktne sume Banahovih i Hilbertovih potprostora.

U slučaju unitarnih prostora S_1 i S_2 možemo zahtevati da izomorfizam "čuva" skalarni proizvod. Ispostavlja se da je dovoljno da izomorfizam "čuva" normu definisanu tim skalarnim proizvodom.

Lema 2.1.7. *Neka su $(S_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ i $(S_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ unitarni prostori i neka je $\varphi : S_1 \to S_2$ izomorfizam vektorskih prostora. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $\|\varphi(x)\|_2 = \|x\|_1$, *za svako* $x \in S_1$;

(ii) $\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle_2 = \langle x,y\rangle_1$, *za sve* $x,y\in S_1$.

Dokaz. Jasno je da iz (ii) sledi (i). Koristeći poznatu polarizacionu jednakost

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$$

lako se pokazuje da iz (i) sledi (ii). □

Definicija 2.1.8. Neka su $S_1,\dots,S_n$ potprostori unitarnog vektorskog prostora $(S,\langle\cdot,\cdot\rangle)$. Neka je na vektorskom prostoru $S_s = S_1\times\cdots\times S_n$ definisan skalarni proizvod

$$\langle(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\rangle = \langle x_1,y_1\rangle + \cdots + \langle x_n,y_n\rangle. \tag{2.5}$$

Kažemo da je suma $S_u = S_1+\cdots+S_n$ *ortogonalna* (unutrašnja) direktna suma ako je preslikavanje $\varphi: S_s\to S_u$ definisano sa (2.3) izometrički izomorfizam. Ortogonalnu direktnu sumu označavamo sa

$$S_1\oplus\cdots\oplus S_n,\quad \text{tj. sa}\quad \bigoplus_{i=1}^{n} S_i.$$

Jasno je da skalarni proizvod (2.5) indukuje sledeću normu na S_s:

$$\|(x_1,\dots,x_n)\| = (\|x_1\|^2+\cdots+\|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Takođe je jasno da je svaka ortogonalna direktna suma ujedno i topološka direktna suma. Karakterizaciju ortogonalnih suma ćemo dati u Teoremama 2.3.6 i 2.3.11.

2.2 Dekompozicija jedinice u prstenu

Neka je R prsten sa jedinicom 1. U ovom poglavlju ćemo dati uopštenje takozvane dvostrane Parsove dekompozicije prstena R. Inače, matematičar Bendžamin Pars je prvi uveo pojmove idempotentnog i nilpotentnog elementa, [14].

Definicija 2.2.1. Za idempotente $e,f\in R$ kažemo da su *ortogonalni* ako je $ef=fe=0$. Idempotenti $e_1,e_2,\dots,e_n\in R$ su ortogonalni ako su oni ortogonalni u parovima. Jednakost

$$1 = e_1+e_2+\cdots+e_n,$$

gde su $e_1,e_2,\dots,e_n\in R$ međusobno ortogonalni idempotenti, se zove *dekompozicija jedinice prstena* R.

Treba praviti razliku između pojma ortogonalnih idempotenata e i f datog Definicijom 2.2.1 i pojma ortogonalnog idempotenta e involutivnog prstena R (to je element za koji važi $e=e^2=e^*$).

Neka su $1=e_1+\cdots+e_m$ i $1=f_1+\cdots+f_n$ dve dekompozicije jedinice prstena R. Proizvoljni element $x\in R$ se može napisati u sledećem obliku

$$x = 1\cdot x\cdot 1 = (e_1+\cdots+e_m)\cdot x\cdot(f_1+\cdots+f_n) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} e_i x f_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \tag{2.6}$$

gde je $x_{ij} = e_i x f_j \in e_i R f_j$. Primetimo da su za svako $i = 1, 2, \ldots, n$ i $j = 1, 2, \ldots, m$ skupovi $e_i R e_i$ i $f_j R f_j$ prsteni, dok je $e_i R f_j$ istovremeno levi $e_i R e_i$-modul i desni $f_j R f_j$-modul. Osim toga za svako $r \in e_i R e_i$, $s \in f_j R f_j$ i $x \in e_i R f_j$, naravno važi da je $(rx)s = r(xs)$. Sledi da $e_i R f_j$ predstavlja jedan $e_i R e_i$-$f_j R f_j$-bimodul, [23]. Nije teško proveriti da suma (2.6) definiše dekompoziciju prstena R u direktnu sumu ovih bimodula:

$$R = \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n} e_i R f_j. \tag{2.7}$$

Pogodno je pisati x u matričnom obliku

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}_{e \times f}. \tag{2.8}$$

Važno je naglasiti da svaki element $x \in R$ ima jedinstvenu matričnu reprezentaciju u odnosu na dekompozicije $1 = e_1 + \cdots e_m$ i $1 = f_1 + \cdots + f_n$.
Ako je $y = [y_{ij}]_{e \times f}$ onda je jasno da je $x + y = [x_{ij} + y_{ij}]_{e \times f}$. Neka je $1 = g_1 + \cdots + g_k$ još jedna dekompozicija jedinice prstena R. Slično kao malopre važi

$$R = \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{k} f_i R g_j,$$

i za svako $z \in R$ postoji jedinstvena matrična reprezentacija (forma)

$$z = [z_{ij}]_{f \times g},$$

gde je $z_{ij} = f_i z g_j \in f_i R g_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Zbog međusobne ortogonalnosti uključenih idempotenata, lako se pokazuje da se za množenje elemenata x i z može koristiti uobičajeno pravilo množenja matrica:

$$xz = [w_{ij}]_{e \times g}, \quad \text{gde je} \quad w_{ij} = \sum_{l=1}^{n} x_{il} z_{lj}.$$

Kada je $m = n$ i $e_i = f_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, dekompozicija (2.7) je poznata kao dvostrana *Parsova dekompozicija* prstena R, [52].

Pretpostavimo sada da je na prstenu R definisana involucija $*$. Iz (2.6) sledi

$$x^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^* = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} f_j^* x^* e_i^*,$$

tj.

$$x^* = \begin{bmatrix} x_{11}^* & \cdots & x_{m1}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n}^* & \cdots & x_{mn}^* \end{bmatrix}_{f^* \times e^*}, \tag{2.9}$$

gde je gornja reprezentacija data u odnosu na dekompozicije $1 = f_1^* + \cdots + f_n^*$ i $1 = e_1^* + \cdots + e_m^*$.

Dekompozicija jedinice $1 = e_1 + \cdots + e_n$ je *ortogonalna* ako su e_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ samo-adjungovani idempotenti.

Kada imamo dva idempotenta $e, f \in R$ tada oni određuju dekompoziciju jedinice, $1 = e + (1 - e)$ odnosno $1 = f + (1 - f)$. Tada ćemo matričnu reprezentaciju elementa $x \in R$ pisati na sledeći način

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}_{e \times f}.$$

2.3 Ekvivalentnost direktne sume i dekompozicije jedinice

Ako je X normiran vektorski prostor tada skup $\mathcal{B}(X)$ možemo posmatrati kao prsten sa jedinicom $I = I_X \in \mathcal{B}(X)$. Zbog toga pojam dekompozicije jedinice I prstena $\mathcal{B}(X)$ ima smisla. Sledeća teorema povezuje pojam dekompozicije jedinice prstena $\mathcal{B}(X)$ sa pojmom topološke direktne sume.

Lema 2.3.1. *Ako su $E_1, E_2 \in \mathcal{B}(X)$ dva idempotenta takva da je $E_1E_2 = E_2E_1 = 0$ onda je $E_1 + E_2$ idempotent i važi da je*

$$\operatorname{Im}(E_1 + E_2) = \operatorname{Im} E_1 \oplus \operatorname{Im} E_2,$$

pri čemu je gornja suma topološka direktna suma potprostora.

Dokaz. Jasno je da je $E_1 + E_2$ idempotent i da je $\operatorname{Im}(E_1 + E_2) \subseteq \operatorname{Im} E_1 + \operatorname{Im} E_2$. Ako $x \in \operatorname{Im} E_1$ onda je $0 = E_2E_1x = E_2x$, pa je $x = (E_1 + E_2)x \in \operatorname{Im}(E_1 + E_2)$. Slično, $\operatorname{Im} E_2 \subseteq \operatorname{Im}(E_1 + E_2)$. Ako $x \in \operatorname{Im} E_1 \cap \operatorname{Im} E_2$ onda je $x = E_1x = E_2x$, pa je $x = E_1^2x = E_1E_2x = 0$. Iz Teoreme 2.1.6 se lako dokazuje da je suma topološka. □

Teorema 2.3.2. *(Videti takođe [42].)*

(i) *Neka su X_1, X_2 …, X_n potprostori normiranog vektorskog prostora X i neka je*

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n,$$

pri čemu je gornja suma topološka direktna suma potprostora. Tada postoje idempotenti $E_i \in \mathcal{B}(X)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, takvi da je

$$I = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$$

dekompozicija jedinice I prstena $\mathcal{B}(X)$ i $\operatorname{Im} E_i = X_i$ za svako $i = 1, 2, \ldots, n$.

(ii) *Neka je*

$$I = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$$

dekompozicija jedinice prstena $\mathcal{B}(X)$. Tada je

$$X = \operatorname{Im} E_1 \oplus \operatorname{Im} E_2 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im} E_n, \tag{2.10}$$

pri čemu je prethodna suma topološka direktna suma. Šta više, ako je $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ *onda je* $\sum_{i \in J} E_i \in \mathcal{B}(X)$ *idempotent i važi*

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{i \in J} E_i\right) = \bigoplus_{i \in J} \operatorname{Im} E_i, \tag{2.11}$$

pri čemu je prethodna suma topološka direktna suma.

Dokaz. (i): Neka je za svako $i = 1, 2, \ldots, n$ definisano preslikavanje $E_i : X \to X$ sa

$$E_i(x_1 + \cdots + x_n) = x_i,\ x_j \in X_j,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Kako je $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$ topološka direktna suma, na osnovu Teoreme 2.1.6 i njenog dokaza sledi da je E_i ograničen idempotent i $\operatorname{Im} E_i = X_i$ za svako $i = 1, 2, \ldots, n$. Jasno je da je

$$(E_1 + \cdots + E_n)(x_1 + \cdots + x_n) = x_1 + \cdots + x_n,$$

pa je $E_1 + \cdots + E_n = I$. Takođe, za $i \neq j$ važi

$$E_i(E_j(x_1 + \cdots + x_n)) = E_i(x_j) = 0,$$

pa je $E_i E_j = 0$. Sledi da je $I = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$ dekompozicija jedinice prstena $\mathcal{B}(X)$.

(ii): Pretpostavimo da je $I = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$ dekompozicija jedinice prstena $\mathcal{B}(X)$. Bez gubljenja opštosti pretpostavimo da je $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Korišćenjem Leme 2.3.1, indukcijom po k se može dokazati da je $\sum_{i=1}^k E_i$ ograničen idempotent, da je

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{i=1}^k E_i\right) = \sum_{i=1}^k \operatorname{Im} E_i,$$

i da je suma $S_J = \sum_{i=1}^k \operatorname{Im} E_i$ algebarska direktna suma. Da bi dokazali da je suma S_J topološka direktna suma, na osnovu Teoreme 2.1.6, dovoljno je dokazati da je preslikavanje $P_i : S_J \to S_J$, $i = 1, 2, \ldots, k$ definisano sa $P_i(x_1 + \cdots + x_k) = x_i$, $x_j \in \operatorname{Im} E_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, neprekidno za svako $i = 1, 2, \ldots, k$. Kako $x_j \in \operatorname{Im} E_j$, to je $x_j = E_j x_j$ pa zbog $E_i E_j = 0$ za $i \neq j$, sledi da je

$$E_i(x_1 + \cdots + x_k) = x_i = P_i(x_1 + \cdots + x_k).$$

Zbog toga je $\|P_i x\| = \|E_i x\| \leqslant \|E_i\| \|x\|$ pa je P_i ograničen operator. Jednakost (2.10) dobijamo u specijalnom slučaju kada je $J = \{1, 2, \ldots, n\}$. Ovim je dokaz završen. Primetimo takođe da je

$$\operatorname{Ker} E_j = \bigoplus_{i=1, i \neq j}^{n} \operatorname{Im} E_i. \tag{2.12}$$

□

Posledica 2.3.3. *Neka su* X_1, X_2 $\ldots$, X_n *potprostori normiranog vektorskog prostora* X *i neka je*

$$S_u = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n,$$

topološka direktna suma potprostora. Neka je $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Tada je suma

$$S_J = \bigoplus_{i \in J} X_i$$

topološka direktna suma i S_J je zatvoren potprostor u S_u. Sledi, ako je S_u zatvoren u X onda je i S_J zatvoren u X.

Dokaz. Kako je $S_u = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ topološka direktna suma, na osnovu Teoreme 2.3.2 (i) sledi da postoji dekompozicija jedinice prstena $\mathcal{B}(S_u)$, $I = E_1 + \cdots + E_n$ pri čemu je $\operatorname{Im} E_i = X_i$. Sada na osnovu dela (ii) Teoreme 2.3.2 sledi da je

$$S_J = \bigoplus_{i \in J} X_i = \bigoplus_{i \in J} \operatorname{Im} E_i = \operatorname{Im} \left(\sum_{i \in J} E_i \right)$$

topološka direktna suma. Kako je $\sum_{i \in J} E_i$ ograničen idempotent na S_u, sledi da je S_J zatvoren potprostor u S_u. $\square$

U slučaju kada je X Banahov prostor, topološku direktnu sumu potprostora možemo okarakterisati na znatno jednostavniji način nego što je to slučaj kada je X samo normiran prostor. Podsetimo se sledeće poznate teoreme o ograničenom inverzu.

Teorema 2.3.4. *(Videti [98].) Neka su X i Y Banahovi prostori i $A \in \mathcal{B}(X, Y)$. Ako je preslikavanje A "1-1" i "na" tada postoji A^{-1} i $A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$.*

Kao posledicu prethodne teoreme dobijamo sledeći važan rezultat.

Teorema 2.3.5. *(Videti takođe [107].) Neka je X Banahov prostor i neka su X_1, X_2, $\ldots$, X_n potprostori od X takvi da je suma $S_u = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ algebarska direktna suma. Ako su potprostori X_1, X_2, $\ldots$, X_n i S_u zatvoreni u X onda je S_u topološka direktna suma i skup $\sum_{i \in J} X_i$ je zatvoren potprostor u X za svako $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Dokaz. Neka je $S_s = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ i neka je na S_s definisana $\|\cdot\|_1$ norma. Neka je $\varphi : S_s \to S_u$ preslikavanje definisano sa $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$. U dokazu Teoreme 2.1.6 smo dokazali da je φ ograničen bijektivan linearan operator. Potprostori X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ i S_u su zatvoreni potprostori Banahovog prostora X pa su oni Banahovi prostori. Na osnovu Teoreme 2.1.1 sledi da je i prostor S_s Banahov. Zbog toga, iz Teoreme 2.3.4 sledi da je $\varphi^{-1} : S_u \to S_s$ ograničen operator. Dakle, φ je topološki izomorfizam, pa na osnovu Definicije 2.1.5 sledi da je S_u topološka direktna suma. Da je skup $\sum_{i \in J} X_i$ zatvoren potprostor prostora X direktno sledi iz Posledice 2.3.3 $\square$

Kada su u pitanju ortogonalne direktne sume na unitarnim prostorima (čak i na onima koji nisu Hilbertovi) stvar je jednostavnija.

Teorema 2.3.6. *Neka su X_1, $\ldots$, X_n potprostori unitarnog prostora X i neka je*

$$S_u = X_1 + \cdots + X_n.$$

Sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) *S_u je ortogonalna direktna suma.*

(ii) *$X_i \perp X_j$ za sve $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$.*

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Pretpostavimo da je S_u ortogonalna direktna suma. Iz Definicije 2.1.8 sledi da je preslikavanje $\varphi : (x_1, \ldots, x_n) \to x_1 + \cdots + x_n$ izometrički izomorfizam iz $S_s = X_1 \times \cdots \times X_n$ na S_u. Po Lemi 2.1.7 onda imamo da je

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle_X = \langle x, y \rangle_{S_s},$$

za sve $x, y \in S_s$. Neka su $x_1 \in X_1$ i $y_2 \in X_2$ proizvoljni. Stavljajući $x = (x_1, 0, \ldots, 0)$, $y = (0, y_2, 0, \ldots, 0)$ lako dobijamo da je $\langle x_1, y_2 \rangle_X = 0$. Sledi $X_1 \perp X_2$. Slično dobijamo da je $X_i \perp X_j$ za sve $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Pretpostavimo da je $X_i \perp X_j$ za $i \neq j$. Dokažimo najpre da je S_u algebarska direktna suma. Neka je $x_1 + \cdots + x_n = 0$, $x_i \in X_i$. Imamo

$$\begin{aligned} \|x_1\|^2 &= \langle x_1, x_1 \rangle = \langle x_1, x_1 \rangle + \langle x_1, x_2 \rangle + \cdots + \langle x_1, x_n \rangle \\ &= \langle x_1, x_1 + x_2 + \cdots + x_n \rangle = \langle x_1, 0 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Slično, $x_i = 0$ za svako $i = 1, 2, \ldots, n$. Da bi dokazali da je S_u ortogonalna direktna suma, treba još dokazati da je $\|\varphi(x)\| = \|x\|$, za svako $x \in S_s$. Zbog ortogonalnosti imamo da je

$$\|\varphi(x_1, \ldots, x_n)\|^2 = \|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2 = \|(x_1, \ldots, x_n)\|^2.$$

□

Posledica 2.3.7. *Neka su $X_1, \ldots, X_n$ potprostori (ne obavezno zatvoreni) unitarnog prostora X takvi da je $X_i \perp X_j$ za $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Neka je $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Ako je suma (ortogonalna po Teoremi 2.3.6) $S_u = X_1 + \cdots + X_n$ zatvoren potprostor u X onda je suma*

$$S_J = \sum_{i \in J} X_i$$

zatvoren potprostor u X.

Dokaz. Dokaz sledi iz Teoreme 2.3.6 i Posledice 2.3.3. □

Napomena 2.3.8. Neka su X_1 i X_2 zatvoreni potprostori unitarnog prostora X takvi da je $X_1 \perp X_2$. Tada suma $X_1 \oplus X_2$ ne mora biti zatvoren prostor u X. Međutim ako je X Hilbertov prostor tada je ova suma ztvoren potprostor u X, videti na primer [106]. Naravno, ako su X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ međusobno ortogonalni potprostori Hilbertovog prostora X, onda, indukcijom po n, lako možemo dokazati da je suma $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ zatvoren potprostor u X.

Definicija 2.3.9. Neka je X unitaran prostor. Ograničen idempotent $P : X \to X$ je *ortogonalan (samo-adjungovan)* ako je $X = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P$.

Napomena 2.3.10. Neka je $P \in \mathcal{B}(X)$ ograničen idempotent na unitarnom prostoru X. Poznata je sledeća karakterizacija:

$$P \text{ je ortogonalan} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im} P \perp \operatorname{Ker} P \quad \Leftrightarrow \quad \|P\| = 1. \tag{2.13}$$

Ako je X Hilbertov prostor onda je idempotent $P \in \mathcal{B}(X)$ ortogonalan ako i samo ako je $P = P^*$.

Teorema 2.3.11. *Neka su $X_1, X_2, \dots, X_n$ potprostori unitarnog vektorskog prostora X takvi da je suma $S_u = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ algebarska direktna suma. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(i) *S_u je ortogonalna direktna suma.*

(ii) *Preslikavanje $E_i : S_u \to S_u$ definisano sa*

$$E_i(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = x_i,\ x_j \in X_j,\ j = 1, 2, \dots, n$$

je ortogonalan ograničen idempotent za svako $i = 1, 2, \dots, n$.

Dokaz. Dokaz sledi iz Teoreme 2.1.6, njenog dokaza, Teoreme 2.3.6 i osobine (2.13). □

Neka je X unitaran vektorski prostor. Dekompozicija jedinice prstena $\mathcal{B}(X)$, $I = E_1 + \cdots + E_n$ je ortogonalna ako su E_i, $i = 1, \dots, n$ ortogonalni idempotenti. Kada je X Hilbertov prostor tada se ova definicija slaže sa ranije uvedenom definicijom ortogonalne dekompozicije jedinice prstena R.

Teorema 2.3.12. (i) *Neka su $X_1, X_2, \dots, X_n$ potprostori unitarnog vektorskog prostora X i neka je*

$$X = X_1 \ominus X_2 \ominus \cdots \ominus X_n.$$

Tada postoje ortogonalni idempotenti $E_i \in \mathcal{B}(X)$, $i = 1, 2, \dots, n$, takvi da je

$$I = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$$

ortogonalna dekompozicija jedinice prstena $\mathcal{B}(X)$ i $\operatorname{Im} E_i = X_i$ za svako $i = 1, 2, \dots, n$.

(ii) *Neka je*

$$I = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$$

ortogonalna dekompozicija jedinice prstena $\mathcal{B}(X)$. Tada je

$$X = \operatorname{Im} E_1 \ominus \operatorname{Im} E_2 \ominus \cdots \ominus \operatorname{Im} E_n. \tag{2.14}$$

Šta više, ako je $J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ tada je $\sum_{i \in J} E_i \in \mathcal{B}(X)$ ortogonalan idempotent i važi

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{i \in J} E_i\right) = \bigominus_{i \in J} \operatorname{Im}(E_i). \tag{2.15}$$

Dokaz. Dokaz sledi iz Teoreme 2.3.2, njenog dokaza, jednakosti (2.12), Teoreme 2.3.6 i osobine (2.13). □

Napomena 2.3.13. Neka je X normiran prostor i neka su X_1 i X_2 zatvoreni potprostori takvi da je $X_1 \cap X_2 = \{0\}$, tj. $X = X_1 \oplus X_2$ je algebarska direktna suma. Tada je preslikavanje $P : X \to X$ definisano sa $P(x_1 + x_2) = x_1$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ linearno i važi $P^2 = P$. Međutim P nije obavezno ograničen operator. Tek kada je X Banahov prostor onda je P ograničen, što se može dokazati primenom teoreme o zatvorenom grafiku. Dakle, ako je X samo normiran prostor tada zatvorenost potprostora X_1 i X_2 nije dovoljan uslov da algebarska direktna suma $X_1 \oplus X_2$ bude i topološka. Treba voditi računa jer pojedini autori topološku direktnu sumu definišu kao algebarsku direktnu sumu $X = X_1 \oplus X_2$ kod koje su X_1 i X_2 zatvoreni potprostori u X. Zbog toga uvodimo sledeću definiciju.

Definicija 2.3.14. Potprostor Z normiranog prostora X je *topološki komplementaran* (skraćeno samo komplementaran) u X ako postoji potprostor $Z_1 \subseteq X$ takav da je $X = Z \oplus Z_1$ pri čemu je ova suma topološka direktna suma.

Lema 2.3.15. *Neka je Z potprostor normiranog prostora X.*

(i) *Z je komplementaran u X ako i samo ako postoji ograničen idempotent $P \in \mathcal{B}(X)$ takav da je $Z = \operatorname{Im} P$.*

(ii) *Ako je X Banahov prostor onda je Z komplementaran u X ako i samo ako je Z zatvoren u X i postoji zatvoren potprostor $Z_1 \subseteq X$ takav da je $X = Z + Z_1$ i $Z \cap Z_1 = \{0\}$.*

(iii) *Ako je X Hilbertov prostor onda je Z komplementaran u X ako i samo ako je Z zatvoren u X.*

Dokaz. Tvrđenje (i) sledi iz Teoreme 2.1.6, a tvrđenje (ii) iz Teoreme 2.3.5. Tvrđenje (iii) sledi iz poznate osobine po kojoj za svaki zatvoren potprostor Z Hilbertovog prostora X važi $X = Z \oplus Z^{\perp}$. □

2.4 Matrica operatora određena direktnom sumom

Neka su X i Y normirani vektorski prostori. U Poglavlju 2.2 smo videli da kada imamo dve dekompozicije jedinice prstena onda proizvojan element x možemo predstaviti u odgovarajućoj matričnoj formi (2.8). U ovom poglavlju ćemo videti na šta se svodi ovakav zapis u slučaju kada je posmatrani prsten $\mathcal{B}(X)$. Šta više, ispostavlja se da analogija u potpunosti važi i na skupu $\mathcal{B}(X,Y)$, koji nije prsten.

Neka su $I_X = F_1 + \cdots + F_n$ i $I_Y = E_1 + \cdots + E_m$ dekompozicije jedinice prstena $\mathcal{B}(X)$ odnosno $\mathcal{B}(Y)$. Pretpostavimo da je $A \in \mathcal{B}(X,Y)$. Tada, naravno, važi

$$A = I_Y \cdot A \cdot I_X = (E_1 + \cdots + E_m)A(F_1 + \cdots + F_n) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} E_iAF_j, \tag{2.16}$$

i zbog toga, za $x = x_1 + \cdots + x_n \in \operatorname{Im} F_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im} F_n = X$, imamo

$$Ax = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j, \tag{2.17}$$

gde je operator $A_{ij} : \operatorname{Im} F_j \to \operatorname{Im} E_i$ definisan sa $A_{ij}x_j := E_iAF_jx_j = E_iAF_jx$. Odavde sledi $\|A_{ij}x_j\| \leqslant \|E_iAF_j\|\|x_j\|$ pa $A_{ij} \in \mathcal{B}(\operatorname{Im} F_j, \operatorname{Im} E_i)$.

Pretpostavimo sada da $A_{ij} \in \mathcal{B}(\operatorname{Im} F_j, \operatorname{Im} E_i)$ i neka je operator $A : X \to Y$ definisan sa (2.17). Sledi da je

$$\begin{aligned}\|Ax\| &\leqslant mM(\|x_1\| + \cdots + \|x_n\|) = mM(\|F_1x\| + \cdots + \|F_nx\|)\\ &\leqslant mM(\|F_1\| + \cdots + \|F_n\|)\|x\|,\end{aligned}$$

gde je $M = \max\{\|A_{ij}\| : i = 1,2,\dots,m, j = 1,2,\dots,n\}$. Odavde sledi da $A \in \mathcal{B}(X,Y)$. Dakle, $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ ako i samo ako $A_{ij} \in \mathcal{B}(\operatorname{Im} F_j, \operatorname{Im} E_i)$. U tom slučaju se (2.17) tj. (2.16) može napisati u sledećoj matričnoj formi

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} F_1 \\ \vdots \\ \operatorname{Im} F_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} E_1 \\ \vdots \\ \operatorname{Im} E_m \end{bmatrix},$$

koja je analogna sa reprezentacijom (2.8) elementa $x \in R$.

Kao i u slučaju prstena, sabiranje i množenje operatora zapisanih u matričnoj formi se obavlja primenom poznatih pravila za sabiranje i množenje matrica. Preciznije, ako u odnosu na dekompozicije $I_X = F_1 + \dots + F_n$ i $I_Y = E_1 + \dots + E_m$ operator $B \in \mathcal{B}(X,Y)$ ima matričnu formu $[B_{ij}]_{m\times n}$, tada je matrična forma operatora $A+B$ jednaka $[A_{ij}+B_{ij}]_{m\times n}$. Dalje, neka je data dekompozicija jedinice prstena $\mathcal{B}(Z)$, $I_Z = G_1 + \dots + G_k$, gde je Z normiran prostor. Neka je $[C_{ij}]_{n\times k}$ matrična forma operatora $C \in \mathcal{B}(Z,X)$. Tada operator $AC \in \mathcal{B}(Z,Y)$ ima matričnu formu $[D_{ij}]_{m\times k}$, gde je $D_{ij} = \sum_{l=1}^{n} A_{il}C_{lj}$. Dokazi ovih osobina su jednostavni.

Za nas će biti najvažniji slučaj kada su X i Y kompletni vektorski prostori. Zbog toga ćemo u sledećoj teoremi sumirati prethodna razmatranja za slučaj Banahovih prostora.

Teorema 2.4.1. *Neka su $X_1, \dots, X_n$ zatvoreni potprostori Banahovog prostora X i neka su $Y_1, \dots, Y_m$ zatvoreni potprostori Banahovog prostora Y. Neka je*

$$X = X_1 \oplus \dots \oplus X_n \quad i \quad Y = Y_1 \oplus \dots \oplus Y_m,$$

pri čemu su prethodne sume algebarske direktne sume. Tada su ove sume topološke direktne sume i one indukuju dekompoziciju jedinice prstena $\mathcal{B}(X)$,

$$I_X = F_1 + \dots + F_n,$$

gde je $\operatorname{Im} F_j = X_j$, $j = 1,2,\dots,n$ i dekompoziciju jedinice prstena $\mathcal{B}(Y)$,

$$I_Y = E_1 + \dots + E_m,$$

gde je $\operatorname{Im} E_i = Y_i$, $i = 1,2,\dots,m$. Šta više, za $J \subseteq \{1,2,\dots,n\}$ i $I \subseteq \{1,2,\dots,m\}$, sume

$$\bigoplus_{j\in J} X_j \quad i \quad \bigoplus_{i\in I} Y_i$$

su zatvoreni potprostori u X odnosno u Y. Dalje, neka je $A : X \to Y$ linearan operator. Tada se A može predstaviti u matričnoj formi

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix}, \tag{2.18}$$

gde su $A_{ij} : X_j \to Y_i$ linearni operatori definisani sa $A_{ij}x_j = E_iAF_jx_j$. Ako je operator A ograničen onda su operatori A_{ij} ograničeni. Obrnuto, neka su $A_{ij} : X_j \to Y_i$ linearni operatori i neka je operator $A : X \to Y$ definisan sa $Ax = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j$, gde je $x = x_1 + \dots + x_n$, $x_i \in X_i$. Ako su operatori A_{ij} ograničeni onda je i operator A ograničen. U tom slučaju svaka podmatrica matrice (2.18) definiše odgovarajući ograničen operator.

Pretpostavimo sada da su X i Y Hilbertovi prostori. Za operator $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ možemo posmatrati Hilbert adjungovani operator $A^* \in \mathcal{B}(Y,X)$ operatora A. Neka je

$$X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \;\text{ i }\; Y = Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_m.$$

Tada su odgovarajuće dekompozicije jedinice prstena $\mathcal{B}(X)$ odnosno $\mathcal{B}(Y)$ ortogonalne. Koristeći reprezentaciju (2.9) lako možemo pokazati da A^* ima sledeću matričnu reprezentaciju:

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11}^* & \dots & A_{m1}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}^* & \dots & A_{mn}^* \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}.$$

Naravno, gornja reprezentacija ne važi u slučaju kada posmatrane sume nisu ortogonalne.

Glava 3

Minus parcijalno uređenje

3.1 Minus parcijalno uređenje na prstenima

Neka je R prsten sa jedinicom 1. Sa $R^{(1)}$ označimo skup svih regularnih (tj. g-invertibilnih) elemenata prstena R. Među ekvivalentnim definicijama minus uređenja, sledeća se najčešće koristi u slučaju matrica i prstena.

Definicija 3.1.1. Neka su $a, b \in R$. Kažemo da je a manje od b u odnosu na *minus parcijalno uređenje*, i to označavamo sa $a <^{-} b$, ako je $a \in R^{(1)}$ i

$$ax = bx, \quad xa = xb, \tag{3.1}$$

za neko $x \in a\{1\}$.

Iako je minus uređenje prvobitno definisano i ispitivano na polugrupama, skoro sva dalja istraživanja su bila usmerena na slučaj pravougaonih kompleksnih matrica.

U ovoj glavi ćemo pokazati da mnoge osobine minus uređenja na skupu matrica važe i kada se uređenje posmatra na proizvoljnom prstenu. Rezultati ovog poglavlja su publikovani u radu [91].

Naš cilj je da nađemo ekvivalent definicije 3.1.1, kojim ćemo dobiti neke osobine minus parcijalnog uređenja. Za tu svrhu, pogledajmo kako je taj problem rešen za realne i kompleksne matrice.

Simultanom dijagonalizacijom (1.2) u Teoremi 1.1.4 smo dali poznatu karakterizaciju minus parcijalnog uređenja u slučaju kompleksnih matrica. Pokazuje se da je ova karakterizacija veoma korisna za dobijanje mnogih osobina minus parcijalnog uređenja. Za više detalja u vezi minus uređenja videti monografiju [77] i reference date u njoj. Dokazi u [77] su bazirani pre svega na konačno dimenzionalnim metodama linearne algebre. Naravno, ove tehnike se ne mogu koristiti kada su a i b elementi proizvoljnog prstena.

Naš cilj je naći matrične forme za $a, b \in R$, kada je $a <^{-} b$, koje su analogne onima datim u (1.2).

Napomena 3.1.2. Prilikom uopštavanja matričnih rezultata prirodno je problem najpre posmatrati u beskonačno dimenzionalnom, operatorskom slučaju, a tek nakon toga u kontekstu prstena. Takav pristup je primenjen i u ovom istraživanju. Iz praktičnih razloga, u disertaciji su parcijalna uređenja prvo obrađena u kontekstu prstena, a zatim je dat osvrt na operatorski slučaj.

3.1.1 Prostorno pre-uređenje

Pre nego što pređemo na minus parcijalno uređenje, posmatraćemo jedno drugo uređenje koje je blisko povezano sa prethodnim.

Definicija 3.1.3. Za $a, b \in R$ kažemo da je a manje od b u odnosu na *prostorno pre-uređenje*, i to označavamo sa $a <^s b$, ako je

$$aR \subseteq bR \text{ i } Ra \subseteq Rb.$$

Ova definicija je analogna definiciji prostornog pre-uređenja na kompleksnim matricama, videti Definiciju 1.1.2. Lako se pokazuje da je relacija $<^s$ pre-uređenje i da iz $a <^- b$ sledi $a <^s b$.

Sledeći rezultat je poznat u matričnom slučaju, [6].

Teorema 3.1.4. *Neka je R regularan prsten i $a, b \in R$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a <^s b$;

(ii) $a = bb^{(1)}a = ab^{(1)}b$, *za sve* $b^{(1)} \in b\{1\}$;

(iii) $a = bb^{(1)}ab^{(1)}b$, *za sve* $b^{(1)} \in b\{1\}$;

(iv) $ab^{(1)}a$ *je invarijantan u odosu na izbor* $b^{(1)} \in b\{1\}$.

Dokaz. Ako je $a = 0$ ili $b = 0$ tada teorema važi. Pretpostavimo da je $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Kako je $a <^s b$ imamo $aR \subseteq bR$, pa postoji $x \in R$ takav da je $a = bx$. Dakle, $a = bb^{(1)}bx = bb^{(1)}a$ za svako $b^{(1)} \in b\{1\}$. Slično, $a = ab^{(1)}b$, za svako $b^{(1)} \in b\{1\}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) je trivijalno.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): Fiksirajmo $h \in b\{1\}$. Za svako $b^{(1)} \in b\{1\}$ je

$$ab^{(1)}a = (bhahb)b^{(1)}(bhahb) = bhahbhahb,$$

a ovaj izraz ne zavisi od $b^{(1)}$.

(iv) $\Longrightarrow$ (i): Fiksirajmo $h \in b\{1\}$ i neka je

$$e_1 = bh, \quad e_2 = 1 - bh,$$
$$f_1 = hb, \quad f_2 = 1 - hb.$$

Tada su

$$1 = e_1 + e_2 \text{ i } 1 = f_1 + f_2$$

dve dekompozicije jedinice prstena R. Ako je $b^{(1)} \in b\{1\}$ tada je $f_1 b^{(1)} e_1 = hbb^{(1)}bh = hbh$ $(= f_1 h e_1)$. Sa druge strane, ako je $f_1 b^{(1)} e_1 = hbh$ tada je

$$bb^{(1)}b = (bf_1)b^{(1)}(e_1 b) = b(hbh)b = b.$$

Dakle, $b^{(1)} \in b\{1\}$ ako i samo ako

$$b^{(1)} = \begin{bmatrix} hbh & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}_{f \times e}, \tag{3.2}$$

gde su $x_{ij} \in f_i R e_j$ proizvoljni. Sada,

$$\begin{aligned} ab^{(1)}a &= [af_1 \quad af_2]_{1\times f} \begin{bmatrix} hbh & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}_{f\times e} \begin{bmatrix} e_1 a \\ e_2 a \end{bmatrix}_{e\times 1} \\ &= ahbha + ax_{21}a + ax_{12}a + ax_{22}a \end{aligned}$$

ne zavisi od x_{21}, x_{12}, x_{22}. Stavljajući $x_{12} = x_{22} = 0$ dobijamo da je $ax_{21}a = 0$ za svako $x_{21} \in f_2 R e_1$, što znači da je $af_2 x e_1 a = 0$ za svako $x \in R$. Množeći ovu jednakost sa e_1 sa leve strane i sa f_2 sa desne strane dobijamo

$$(e_1 a f_2) x (e_1 a f_2) = 0.$$

Kako je R regularan, možemo izabrati da je $x = (e_1 a f_2)^{(1)} \in (e_1 a f_2)\{1\}$. Sledi $e_1 a f_2 = 0$. Slično, $e_2 a f_1 = 0$ i $e_2 a f_2 = 0$ pa zaključujemo da je $a = e_1 a f_1 = bhahb$. Odavde sledi da je $a <^s b$. □

Primetimo da je regularnost prstena R korišćena jedino u delu (iv) ⇒ (i).

Lema 3.1.5. *Neka je $b \in R^{(1)}$ (R nije obavezno regularan). Zadržavajući oznake iz dokaza Teoreme 3.1.4, skup svih unutrašnjih inverza elementa b je dat sa (3.2), dok je skup svih refleksivnih uopštenih inverza od b dat sa*

$$b^{(1,2)} = \begin{bmatrix} hbh & x_{12} \\ x_{21} & x_{21} b x_{12} \end{bmatrix}_{f\times e}, \tag{3.3}$$

gde su $x_{12} \in f_1 R e_2$ i $x_{21} \in f_2 R e_1$ proizvoljni.

Dokaz. Karakterizaciju elemenata $b^{(1)}$ smo dokazali u dokazu Teoreme 3.1.4. Element $b^{(1,2)}$ mora imati formu (3.2). Imamo da je $x_{22} = x_{21} b x_{12}$, jer

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} hbh & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}_{f\times e} &= b^{(1,2)} = b^{(1,2)} b b^{(1,2)} = \begin{bmatrix} hbh & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}_{f\times e} \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{e\times f} b^{(1,2)} \\ &= \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ x_{21} b & 0 \end{bmatrix}_{f\times f} \begin{bmatrix} hbh & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}_{f\times e} = \begin{bmatrix} hbh & x_{12} \\ x_{21} & x_{21} b x_{12} \end{bmatrix}_{f\times e}. \end{aligned}$$

Ako je $b^{(1,2)}$ dato sa (3.3) tada se lako proverava da $b^{(1,2)} \in b\{1,2\}$. □

Sledeći jednostavan rezultat je inspirisan Teoremom 21 u [67].

Teorema 3.1.6. *Neka su $a, b \in R$. Ako je $a <^s b$ i $a\{2\} \cap b\{1\} \neq \emptyset$ onda je $a = b$.*

Dokaz. Neka je $g \in a\{2\} \cap b\{1\}$. Kako je $a <^s b$, iz Teoreme 3.1.4 sledi $a = agb = bga$. Sledi

$$b = bgb = bgagb = agb = a.$$

□

3.1.2 Minus parcijalno uređenje

Dekompozicija prstena indukovana minus parcijalnim uređenjem

Ideja dekompozicije jedinice prstena posredstvom uslova $a <^- b$ je, kako ćemo videti u ovoj i narednim glavama, univerzalna i može se primeniti na svim uređenjima baziranim na uopštenim inverzima ili anulatorima.

Primetimo da je $0 <^- b$, za svako b iz R i da je $a <^- 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Lema 3.1.7. *Neka je $a, b \in R^{(1)}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a <^- b$;

(ii) $a = ab^{(1)}a = ab^{(1)}b = bb^{(1)}a$ *za svako* $b^{(1)} \in b\{1\}$;

(iii) $b - a = (b-a)b^{(1)}(b-a) = (b-a)b^{(1)}b = bb^{(1)}(b-a)$ *za svako* $b^{(1)} \in b\{1\}$;

(iv) $b - a <^- b$.

Dokaz. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Činjenica da iz $a <^- b$ sledi $ab^{(1)}a = a$ je poznata. Dokazaćemo je zbog kompletnosti. Neka je $a <^- b$. Tada postoji $a^{(1)} \in a\{1\}$ tako da je $aa^{(1)} = ba^{(1)}$ i $a^{(1)}a = a^{(1)}b$. Za proizvoljno $b^{(1)} \in b\{1\}$ imamo

$$ab^{(1)}a = aa^{(1)}ab^{(1)}aa^{(1)}a = aa^{(1)}bb^{(1)}ba^{(1)}a = aa^{(1)}ba^{(1)}a = a.$$

Slično se pokazuje da je i $a = ab^{(1)}b = bb^{(1)}a$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Neka je $x = b^{(1)}ab^{(1)}$. Tada $x \in a\{1\}$ i

$$ax = ab^{(1)}ab^{(1)} = ab^{(1)} = bb^{(1)}ab^{(1)} = bx.$$

Slično, $xa = xb$, i zbog toga $a <^- b$.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) se pokazuje direktnom proverom.

(iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) sledi iz ekvivalencije uslova (i) i (ii). $\square$

Primetimo da se u uslovima (ii) i (iii) Leme 3.1.7, reč “svako” može zameniti rečju “neko”.

Iz Leme 3.1.7 vidimo da je uslov $a <^- b$ simetričan po a i $b - a$.

Dalje, ako su A i B kompleksne matrice tada je (videti [46])

$$A <^- B \Longleftrightarrow \operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B - A), \tag{3.4}$$

i poslednji uslov je simetričan po A i $B - A$.

Element $x \in a\{1\}$ koji se javlja u Definiciji 3.1.1 ne svedoči o ovoj simetriji jer je $(b-a)x = 0 \neq bx$. Ali iz Leme 3.1.7 vidimo da elementi skupa $b\{1\}$ ukazuju na simetriju. Iz tog razloga, u cilju dobijanja dekompozicije prstena R indukovane uslovom $a <^- b$, poćićemo od proizvoljnog ali fiksiranog elementa $h \in b\{1\}$.

Ideja sledeće teoreme se u potpunosti može primeniti na sva parcijalna uređenja na prstenima zasnovana na uopštenim inverzima. Ona je, naravno, bazirana na algebarskoj tehnici i razlikuje se od svih tehnika koje su do sada primenjivane u ispitivanju matričnih parcijalnih uređenja. U tom smislu ova ideja predstavlja glavni rezultat i doprinos ovog dela disertacije.

Teorema 3.1.8. *Neka su $a, b \in R^{(1)}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a <^- b$;

(ii) *Postoje dekompozicije jedinice prstena R,*

$$1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad 1 = f_1 + f_2 + f_3 \tag{3.5}$$

u odnosu na koje a i b imaju sledeće matrične forme:

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e\times f}, \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e\times f}. \tag{3.6}$$

Dokaz. Slučajevi $a = 0$ ili $b = 0$ su trivijalni.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Fiksirajmo $h \in b\{1\}$ i stavimo da je

$$\begin{aligned} e_1 &= ah, \quad e_2 = (b-a)h, \quad e_3 = 1 - bh, \\ f_1 &= ha, \quad f_2 = h(b-a), \quad f_3 = 1 - hb. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Kako je $a <^- b$, Lema 3.1.7 daje

$$(ah)(ah) = (ah)(bh) = (bh)(ah) = ah, \quad (bh)(bh) = bh$$

i

$$(ha)(ha) = (ha)(hb) = (hb)(ha) = ha, \quad (hb)(hb) = hb.$$

Sledi da su

$$1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad 1 = f_1 + f_2 + f_3$$

dve dekompozicije jedinice prstena R.

Važi

$$e_1 a f_1 = ahaha = a$$

i

$$e_2(b-a)f_2 = (b-a)h(b-a)h(b-a) = b - a.$$

Element a (kao i bilo koji drugi element iz R) ima jedinstvenu matričnu reprezentaciju u odnosu na dekompozicije jedinice, $1 = e_1 + e_2 + e_3$ i $1 = f_1 + f_2 + f_3$. Kako je $a = e_1 a f_1$ sledi da je gornje levo polje matrične forme za a jednako a a da su sva ostala polja jednaka nuli. To dokazuje reprezentaciju elementa a u (3.6). Slično, matrična forma za b sledi iz jednakosti

$$b = a + (b-a) = e_1 a f_1 + e_2(b-a)f_2.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Fiksirajmo $a^{(1)} \in a\{1\}$ i stavimo da je $x = f_1 a^{(1)} e_1$. Lako je videti da $x \in a\{1\}$ i da je $ax = bx$ i $xa = xb$. □

Kada je slučaj kao u Teoremi 3.1.8, kažemo da su dekompozicije (3.5), gde su idempotenti definisani sa (3.7), *standardne dekompozicije.* Primetimo da su matrčne reprezentacije (3.6) analogne matričnim dekompozicijama (1.2).

Teorema 3.1.9. *Neka su $a, b \in R^{(1)}$ takvi da je $a \neq 0$, $b \neq 0$ i $a <^- b$. Neka su e_i, f_i, $i = 1, 2, 3$, definisani sa (3.7). Tada postoje jedinstveni elementi $x_a \in f_1 R e_1$ i $x_{b-a} \in f_2 R e_2$ takvi da je*

$$\begin{aligned} a x_a &= e_1, & x_a a &= f_1, \\ (b-a) x_{b-a} &= e_2, & x_{b-a}(b-a) &= f_2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Dalje, u odnosu na standardne dekompozicije, skup $a\{1\}$ je dat sa

$$a^{(1)} = [x_{ij}]_{f \times e}, \tag{3.9}$$

gde je $x_{11} = x_a$, a $x_{ij} \in f_i R e_j$, $(i, j) \neq (1, 1)$ su proizvoljni.

Skup $b\{1\}$ je dat sa

$$b^{(1)} = \begin{bmatrix} x_a & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{b-a} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}_{f \times e}, \tag{3.10}$$

gde su $x_{ij} \in f_i R e_j$ proizvoljni.

Dokaz. Neka je

$$\begin{aligned} x_a &:= f_1 h e_1 = hah, \\ x_{b-a} &:= f_2 h e_2 = h(b-a)h. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Može se proveriti da ovi elementi zadovoljavaju (3.8). Dokaz jedinstvenosti je trivijalan.

Neka je $b^{(1)} = [f_i b^{(1)} e_j]_{f \times e} \in b\{1\}$ proizvoljan. Iz

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times f} = b = b b^{(1)} b = \begin{bmatrix} ab^{(1)}a & ab^{(1)}(b-a) & 0 \\ (b-a)b^{(1)}a & (b-a)b^{(1)}(b-a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times f}$$

sledi da je $ab^{(1)}a = a$. Množeći ovu jednakost sa x_a sa obe strane dobijamo $f_1 b^{(1)} e_1 = x_a$. Takođe, množeći $f_1 b^{(1)} e_1 = x_a$ sa a sa obe strane dobijamo $ab^{(1)}a = a$. Slično, $ab^{(1)}(b-a) = 0 \Leftrightarrow f_1 b^{(1)} e_2 = 0$, $(b-a)b^{(1)}a = 0 \Leftrightarrow f_2 b^{(1)} e_1 = 0$ i $(b-a)b^{(1)}(b-a) = b-a \Leftrightarrow f_2 b^{(1)} e_2 = x_{b-a}$. Dakle, skup $b\{1\}$ je dat sa (3.10). Karakterizacija skupa $a\{1\}$ se može dokazati analogno. $\square$

Do kraja ovog poglavlja, pratićemo notaciju iz Teorema 3.1.8 i 3.1.9.

Neka su e i f, $e \neq f$ idempotenti prstena R sa jedinicom 1. Tada je skup eRe prsten sa jedinicom e pa ima smisla govoriti o invertibilnosti njegovih elemenata. Skup eRf nema jedinicu pa o invertibilnosti njegovih elemenata možemo govoriti jedino u sledećem smislu.

Definicija 3.1.10. Neka su $p, q \in E(R)$. Za element $a \in R$ kažemo da je (p, q)-*invertibilan* ako postoji $a' \in qRp$ tako da važe sledeći uslovi

(1) $a \in pRq$;

(2) $aa' = p$;

(3) $a'a = q$.

U tom slučaju kažemo da je a', (p,q)-*inverz* elementa a.

Sledeća teorema je očigledna.

Lema 3.1.11. *Za element $a \in R$ postoje $p,q \in E(R)$ tako da je a, (p,q)-invertibilan ako i samo ako je a, g-invertibilan. Kada postoji, (p,q)-inverz elementa a je jedinstven. Element a' je (p,q)-inverz od a ako i samo ako je a (q,p)-inverz od a'.*

Napomena 3.1.12. Neka su $p,q \in E(R)$, $b \in pR$ i neka je $a \in R$, (p,q)-invertibilan pri čemu je $a' \in qRp$ njegov (p,q)-inverz. Neka je data jednačina $ax = b$, pri čemu jednačinu rešavamo u skupu qR. Množeći obe strane jednačine sa a' sa leve strane dobijamo $qx = a'b$. Kako $x \in qR$, to je $x = a'b$. Obrnuto, iz $x = a'b$, množeći jednačinu sa a sa leve strane, dobijamo $ax = pb = b$. Dakle, jednačina ima jedinstveno rešenje u skupu qR:

$$ax = b \;\Leftrightarrow\; x = a'b.$$

Slično, ako je $b \in Rq$ i $x \in Rp$ onda je

$$xa = b \;\Leftrightarrow\; x = ba'.$$

U kombinaciji sa matričnim reprezentacijama elemenata u odnosu na odgovarajuće dekompozicije jedinice prstena, prethodno zapažanje se pokazuje vrlo korisnim ukoliko u matričnoj formi elementa imamo (p,q)-invertibilne elemente.

U smislu Definicije 3.1.10, jednakosti (3.8) u Teoremi 3.1.9 zapravo kažu da je element $a \in e_1Rf_1$, (e_1,f_1)-invertibilan, a element $b-a \in e_2Rf_2$, (e_2,f_2)-invertibilan. U sledećoj glavi ćemo videti da se (p,q)-invertibilnost svodi na klasičnu invertibilnost kada su elementi a i b operatori.

Napomena 3.1.13. Neka su $a,b \in R^{(1)}$ i $a <^- b$. Pretpostavimo da je $h \in b\{1\}$ regularan. Fiksirajmo $r_1 \in h\{1\}$ i stavimo da je $r = b + e_3r_1f_3$. Tada se lako pokazuje da $r \in h\{1\}$. Neka je

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1, \quad e_2' = e_2, \quad e_3' = (r-b)h, \quad e_4' = 1 - rh,\\ f_1' &= f_1, \quad f_2' = f_2, \quad f_3' = h(r-b), \quad f_4' = 1 - hr. \end{aligned}$$

Nije teško pokazati da su

$$1 = e_1' + \cdots + e_4', \quad 1 = f_1' + \cdots + f_4'$$

dve dekompozicije jedinice prstena R. Takođe $f_3'(h-hbh)e_3' = h-hbh$. Možemo zaključiti da a, b i h imaju sledeće matrične forme u odnosu na ove dekompozicije:

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e'\times f'}, b = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0\\ 0 & b-a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e'\times f'}, h = \begin{bmatrix} x_a & 0 & 0 & 0\\ 0 & x_{b-a} & 0 & 0\\ 0 & 0 & h-hbh & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{f'\times e'}.$$

Šta više, postoji jedinstven $x \in e_3'Rf_3'$, naime $x = e_3'rf_3' = rhr - b$, tako da je $(h-hbh)x = f_3'$ i $x(h-hbh) = e_3'$. Dakle, u svim poljima matrične forme elementa h se nalaze (p,q)-invertibilni elementi.

Osobine minus parcijalnog uređenja

U radu [73] je navedeno da je, pod pretpostavkom da je prsten R regularan i da je $a \in bRb$, uslov $a <^- b$ ekvivalentan uslovu $b\{1\} \subseteq a\{1\}$. Koristeći tzv. poredak direktne sume kao međukorak, u radu [17] je pokazano da ekvivalencija važi i bez pretpostavke $a \in bRb$. U sledećoj teoremi ćemo dokazati da u stvari važi jači rezultat.

Teorema 3.1.14. *Neka je R regularan prsten i neka su $a, b \in R$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a <^- b$;

(ii) $b\{1\} \subseteq a\{1\}$;

(iii) $b\{1,2\} \subseteq a\{1\}$.

Dokaz. (i) $\Longrightarrow$ (ii) sledi iz tvrđenja (i) $\Rightarrow$ (ii) Leme 3.1.7.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) je trivijalno.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Zadržimo oznake iz dokaza (iv) $\Rightarrow$ (i) Leme 3.1.4. Iz Leme 3.1.5 sledi da je

$$a = ab^{(1,2)}a = ahbha + ax_{21}a + ax_{12}a + ax_{21}bx_{12}a,$$

za svako $x_{12} \in f_1Re_2$ i $x_{21} \in f_2Re_1$. Kao u dokazu (iv) $\Rightarrow$ (i) Teoreme 3.1.4 možemo pokazati da je

$$e_1af_2 = e_2af_1 = 0 \text{ i } a = ahbha = af_1he_1a. \tag{3.12}$$

Iz (3.12) sledi

$$a = (e_1 + e_2)(af_1he_1a)(f_1 + f_2) = e_1(af_1he_1a)f_1 = e_1af_1 = e_1a = af_1.$$

Neka je $x = f_1hahe_1$. Tada je

$$x = he_1af_1h = he_1ah = haf_1h = hah$$

i

$$he_1 = f_1h = hbh \in b\{1,2\} \subseteq a\{1\},$$

pa je

$$axa = a$$

i

$$ax = ahe_1ah = ah = e_1ah = bhah = bx,$$
$$xa = haf_1ha = ha = haf_1 = hahb = xb.$$

Po definiciji je $a <^- b$. $\square$

Poznato je da je relacija $<^-$ parcijalno uređenje na regularnoj polugrupi, videti [79]. Zbog kompletnosti ćemo dati dokaz u slučaju regularnog prstena.

Teorema 3.1.15. *(Videti [79].) Neka je R regularan prsten. Relacija $<^-$ je relacija parcijalnog uređenja na R.*

Dokaz. Refleksivnosti i tranzitivnost slede iz Teoreme 3.1.14. Ako je $a <^- b$ i $b <^- a$ tada je $a\{1\} \subseteq b\{1\}$ i postoji $a^{(1)} \in a\{1\}$ tako da je $aa^{(1)} = ba^{(1)}$ i $a^{(1)}a = a^{(1)}b$. Sledi $a = aa^{(1)}a = ba^{(1)}b = b$ pa je $<^-$ parcijalno uređenje. □

Kao direktnu posledicu dobijamo sledeće zanimljivo tvrđenje.

Posledica 3.1.16. *Neka je R regularan prsten i $a, b \in R$. Ako je $a\{1\} = b\{1\} \neq \emptyset$ onda je $a = b$.*

Dokaz. Iz Teoreme 3.1.14, (i) $\Leftrightarrow$ (ii) sledi da je $a <^- b$ i $b <^- a$. Odavde je $a = b$. □

Sada ćemo dati pregled poznatih karakterizacija minus parcijalnog uređenja. Neka su $a, b \in R^{(1)}$ takvi da je

$$a <^- b. \tag{3.13}$$

Ako je $p_1 = e_1$, $p_2 = 1 - e_1$, $q_1 = f_1$, $q_2 = 1 - f_1$ tada su $1 = p_1 + p_2$ i $1 = q_1 + q_2$ dve dekompozicije jedinice prstena R i po Teoremi 3.1.8 sledi

$$b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b-a \end{bmatrix}_{p \times q}. \tag{3.14}$$

Ovo je ekvivalentno sa $a = p_1 b q_1$ i $b - a = p_2 b q_2$. Množeći drugu od ovih jednakosti sa p_1 sa leve strane dobijamo $p_1(b - a) = 0$, pa je $a = p_1 b$. Slično, $a = bq_1$. Sa druge strane, pretpostavimo da postoje idempotenti p_1 i q_1 takvi da je

$$a = p_1 b = b q_1.$$

Neka je $x = q_1 a^{(1)} p_1$, gde je $a^{(1)} \in a\{1\}$. Imamo $a <^- b$, jer je $axa = aq_1 a^{(1)} p_1 a = aa^{(1)} a = a$, $ax = bq_1 x = bx$ i $xa = xp_1 b = xb$.

Teorema 3.1.17. *Neka su $a, b \in R^{(1)}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a <^- b$.

(ii) *Postoje $p, q \in E(R)$ u odnosu na koje b ima sledeću matričnu reprezentaciju*

$$b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b-a \end{bmatrix}_{p \times q}.$$

(iii) *Postoje $p, q \in E(R)$ takvi da je*

$$a = pb = bq.$$

(iv) $bR = aR \oplus (b - a)R$.

(v) $Rb = Ra \oplus R(b - a)$.

(vi) $aR \cap (b - a)R = \{0\} = Ra \cap R(b - a)$.

Dokaz. Ekvivalentnost uslova (i)–(iii) smo maločas dokazali. Ekvivalentnost (i) i (iv) je dokazana u Lemi 3 u [17], a ekvivalentnost uslova (iv)–(vi) je dokazana u Teoremi 1 u [53]. □

Napominjemo da se uslov (iv) koristi kao definicija parcijalnog uređenja zvanog direktna suma. U [79] se mogu naći još neke karakterizacije minus parcijalnog uređenja na regularnim polugrupama.

Neka je

$$a\{1\}_b = \{x \in a\{1\} : ax = bx, xa = xb\} \text{ i}$$
$$a\{1,2\}_b = \{x \in a\{1,2\} : ax = bx, xa = xb\}.$$

U sledećoj teoremi ćemo dati eksplicitne reprezentacije skupova $a\{1\}_b$ and $a\{1,2\}_b$. Za slučaj kada su a i b kompleksne matrice videti [75] i [76].

Teorema 3.1.18. *Neka su $a, b \in R^{(1)}$ i neka je $a <^- b$. Tada je*

(i) $a\{1\}_b = \{b^{(1)} - b^{(1)}(b-a)b^{(1)} : b^{(1)} \in b\{1\}\}$;

(ii) $a\{1,2\}_b = \{b^{(1)}ab^{(1)} : b^{(1)} \in b\{1\}\} = \{b^{(1,2)}ab^{(1,2)} : b^{(1,2)} \in b\{1,2\}\}$.

Dokaz. (i): Označimo sa S desnu stranu jednakosti (i). Kako je $a <^- b$, sledi da, u odnosu na standardne dekompozicije, a, b i $b^{(1)}$ imaju reprezentacije date sa (3.6) odnosno (3.10). Odavde sledi da $x \in S$ ako i samo ako je

$$x = b^{(1)} - b^{(1)}(b-a)b^{(1)} = \begin{bmatrix} x_a & 0 & x_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & 0 & x'_{33} \end{bmatrix}_{f \times e}, \tag{3.15}$$

za određene elemente $x_{13} \in f_1Re_3$, $x_{31} \in f_3Re_1$ i $x'_{33} \in f_3Re_3$ ($x'_{33} = x_{33} - x_{32}(b-a)x_{23}$). Direktnom proverom se pokazuje da je $axa = a$, $ax = bx$ i $xa = xb$, tj. $x \in a\{1\}_b$.

Pretpostavimo sada da $x \in a\{1\}_b$. Tada $x \in a\{1\}$ i zbog toga je $x = [x_{ij}]_{f\times e}$, gde je $x_{11} = x_a$. Iz $ax = bx$ i $xa = xb$ dobijamo da je $x_{12} = x_{21} = x_{22} = x_{23} = x_{32} = 0$. Može se proveriti da je $x = b^{(1)} - b^{(1)}(b-a)b^{(1)} \in S$ gde je

$$b^{(1)} = \begin{bmatrix} x_a & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{b-a} & 0 \\ x_{31} & 0 & x_{33} \end{bmatrix}_{f \times e}.$$

(ii): Dokaz jednakosti (ii) je sličan. Dobijamo da je element $x \in a\{1,2\}_b$ dat sa

$$x = \begin{bmatrix} x_a & 0 & x_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & 0 & x_{31}ax_{13} \end{bmatrix}_{f \times e},$$

gde su x_{13}, x_{31} proizvoljni. □

Sledeća teorema je generalizacija Teoreme 3.5.6. in [77] gde su a, b kompleksne matrice.

Teorema 3.1.19. *Neka su $a, b \in R^{(1)}$ i neka je $a <^- b$.*

(i) *Za svako $a^{(1)} \in a\{1\}_b$ postoji $b^{(1)} \in b\{1\}$ tako da je*

$$b^{(1)}a = a^{(1)}a, \quad ab^{(1)} = aa^{(1)}; \tag{3.16}$$

(ii) *Za svako $b^{(1)} \in b\{1\}$ postoji $a^{(1)} \in a\{1\}_b$ tako da (3.16) važi.*

Dokaz. (i): Iz dokaza Teoreme 3.1.18 sledi da $a^{(1)} \in a\{1\}_b$ ima matričnu reprezentaciju datu sa (3.15). Tada (3.16) važi za

$$b^{(1)} = \begin{bmatrix} x_a & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{b-a} & x'_{23} \\ x_{31} & x'_{32} & x'_{33} \end{bmatrix}_{f \times e},$$

gde su $x'_{23} \in f_2Re_3$, $x'_{32} \in f_3Re_2$, $x'_{33} \in f_3Re_3$ proizvoljni.

(ii): Svako $b^{(1)} \in b\{1\}$ ima reprezentaciju (3.10). Element

$$a^{(1)} = \begin{bmatrix} x_a & 0 & x_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & 0 & x'_{33} \end{bmatrix}_{f \times e},$$

gde je $x'_{33} \in f_3Re_3$ proizvoljan, ima tražene osobine. □

Kao što je navedeno u Teoremi 3.1.17, ako su $a, b \in R^{(1)}$ tada je uslov $a <^- b$ ekvivalentan sa $a = pb = bq$ gde su $p, q \in R$ određeni idempotenti. Cilj nam je da okarakterišemo klasu svih takvih idempotenata. Sledeći rezultati su analogni Teoremama 3.5.13 – 3.5.18 u [77] u kojima je posmatran slučaj kada su a i b kompleksne matrice. Svi oni se mogu dokazati koristeći matrične forme (3.6) i identitete (3.8).

Teorema 3.1.20. *Neka su $a, b \in R^{(1)}$ i neka je $a <^- b$. Klasa svih idempotenata $p \in R$ takvih da je $a = pb$ je data sa*

$$p = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & x_{13}(e_3 - p_{33}) \\ 0 & 0 & x_{23}p_{33} \\ 0 & 0 & p_{33} \end{bmatrix}_{e \times e}, \tag{3.17}$$

gde je $p_{33} \in e_3Re_3$ proizvoljan idempotent, a $x_{13} \in e_1Re_3$, $x_{23} \in e_2Re_3$ su proizvoljni elementi.

Dokaz. Ako p ima oblik kao u (3.17) tada je p idempotent i $a = pb$. Neka je p idempotent takav da je $a = pb$. Pretpostavimo da je $p = [p_{ij}]_{e \times e}$, $i, j = 1, 2, 3$, u odnosu na standardnu dekompoziciju $1 = e_1 + e_2 + e_3$. Iz $a = pb$, koristeći (3.6) i (3.8), dobijamo da je $p_{11} = e_1$, i $p_{12} = p_{21} = p_{22} = p_{31} = p_{32} = 0$. Iz uslova $p = p^2$ sledi $p_{23} = p_{23}p_{33}$, $p_{13} = p_{13} + p_{13}p_{33}$ i $p_{33} = p_{33}^2$. Stoga, $p_{13} = x_{13}(e_3 - p_{33})$ i $p_{23} = x_{23}p_{33}$, gde su $x_{13} \in e_1Re_3$, $x_{23} \in e_2Re_3$ proizvoljni. □

Na isti način dobijamo i sledeću teoremu.

Teorema 3.1.21. *Neka su $a, b \in R^{(1)}$ i neka je $a <^- b$. Klasa svih idempotenata $q \in R$ takvih da je $a = bq$ je data sa*

$$q = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ (f_3 - q_{33})x_{31} & q_{33}x_{32} & q_{33} \end{bmatrix}_{f \times f},$$

gde je $q_{33} \in f_3Rf_3$ proizvoljan idempotent, a $x_{31} \in f_3Rf_1$, $x_{32} \in f_3Rf_2$ su proizvoljni elementi.

Napomena 3.1.22. Neka je

$$e_1' = e_1, \quad e_2' = e_2, \quad e_3' = p_{33}, \quad e_4' = e_3 - p_{33},$$
$$f_1' = f_1, \quad f_2' = f_2, \quad f_3' = q_{33}, \quad f_4' = f_3 - q_{33},$$

gde su p_{33} i q_{33} idempotenti iz Teorema 3.1.20 i 3.1.21. Tada su

$$1 = e_1' + \cdots + e_4', \quad 1 = f_1' + \cdots + f_4'$$

dekompozicije jedinice prstena R. Jasno je da je

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e'\times f}, \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e'\times f}, \quad p = \begin{bmatrix} e_1' & 0 & 0 & x_{14} \\ 0 & 0 & x_{23} & 0 \\ 0 & 0 & e_3' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e'\times e'},$$

i

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e\times f'}, \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e\times f'}, \quad q = \begin{bmatrix} f_1' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{32} & f_3' & 0 \\ x_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{f'\times f'},$$

za neke $x_{14} \in e_1'Re_4'$, $x_{23} \in e_2'Re_3'$, $x_{32} \in f_3'Rf_2'$ i $x_{41} \in f_4'Rf_1'$.

Posledica 3.1.23. *Neka su $a, b \in R^{(1)}$ i neka je $a <^- b$. Tada je klasa svih idempotenata p takvih da je $a = pb$ i $pR = aR$ data sa $\{aa^{(1)} : a^{(1)} \in a\{1\}_b\}$. Klasa svih idempotenata q takvih da je $a = bq$ i $Rq = Ra$ je data sa $\{a^{(1)}a : a^{(1)} \in a\{1\}_b\}$.*

Dokaz. Kako je $a = e_1 a$ i $e_1 = ax_a$, imamo da je $aR = e_1R$. Iz (3.17) vidimo da je p idempotent takav da je $a = pb$ i $pR = aR = e_1R$ ako i samo ako je $p_{33} = 0$ ako i samo ako je

$$p = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & x_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e\times e},$$

gde je $x_{13} \in e_1Re_3$ proizvoljan. Iz (3.15) vidimo da $aa^{(1)}$, gde je $a^{(1)} \in a\{1\}_b$ ima gornji oblik. Druga karakterizacija se može dobiti na isti način. □

Posledica 3.1.24. *Neka su $a, b \in R^{(1)}$ takvi da je $a <^- b$. Svaki idempotent p koji zadovoljava $a = pb$, se može napisati kao $p = p_1 + p_2$, gde je p_1 idempotent takav da je $a = p_1 b$, $p_1R = aR$, a p_2 idempotent takav da je $p_1p_2 = p_2p_1 = p_2a = p_2b = 0$. Svaki idempotent q koji zadovoljava $a = bq$, se može napisati kao $q = q_1 + q_2$, gde je q_1 idempotent takav da je $a = bq_1$, $Rq_1 = Ra$, a q_2 idempotent takav da je $q_1q_2 = q_2q_1 = aq_2 = bq_2 = 0$.*

Dokaz. Prema Teoremama 3.1.20, 3.1.21 i Posledici 3.1.23 možemo uzeti

$$p_1 = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & x_{13}(e_3 - p_{33}) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e\times e}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{23}p_{33} \\ 0 & 0 & p_{33} \end{bmatrix}_{e\times e}, \quad \text{i}$$

$$q_1 = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ (f_3 - q_{33})x_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{f\times f}, \quad q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{33}x_{32} & q_{33} \end{bmatrix}_{f\times f}.$$

□

Pretpostavimo sada da je $\mathcal{A}$ algebra sa jedinicom 1 nad poljem K. Jasno, algebra $\mathcal{A}$ je prsten $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ i srodni koncepti i rezultati ostaju na snazi pri prelasku sa R na $\mathcal{A}$.

Neka je $A <^- B$, gde su $A, B \in M_n$ kompleksne matrice, rangova a odnosno b, i neka su $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $c_2 \neq 0$, $c_1 + c_2 \neq 0$. U radu [110] je dokazano da je $c_1A + c_2B$ invertibilna ako i samo ako je B invertibilna i u tom slučaju važi

$$(c_1A + c_2B)^{-1} = (c_1 + c_2)^{-1}B^{-1} + (c_2^{-1} - (c_1 + c_2)^{-1})[(0 \oplus I_{n-a})B(0 \oplus I_{n-a})]^{\dagger}.$$

Sledeća teorema pokazuje da isti rezultat važi kada su $a, b \in \mathcal{A}^{(1)}$. Primetimo da je u našoj formuli izbegnuto korišćenje Mur-Penrouzovog inverza.

Teorema 3.1.25. *Neka su $a, b \in \mathcal{A}^{(1)}$ i neka je $a <^- b$. Neka su $c_1, c_2 \in K$, $c_2 \neq 0$, $c_1 + c_2 \neq 0$. Tada je $c_1a + c_2b$ invertibilan element ako i samo ako je b invertibilan. Dalje,*

$$\begin{aligned}(c_1a + c_2b)^{-1} &= c_2^{-1}b^{-1} + ((c_1 + c_2)^{-1} - c_2^{-1})b^{-1}ab^{-1} \qquad (3.18)\\ &= c_2^{-1}b^{-1} + ((c_1 + c_2)^{-1} - c_2^{-1})a^{(1)},\end{aligned}$$

gde je $a^{(1)} \in a\{1\}_b$.

Dokaz. Kako je $a <^- b$, po Teoremi 3.1.8, imamo sledeće matrične reprezentacije u odnosu na standardne dekompozicije:

$$b = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times f}, \quad c_1a + c_2b = \begin{bmatrix} (c_1 + c_2)a & 0 & 0 \\ 0 & c_2(b-a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times f}.$$

Kako je $c_2 \neq 0$, $c_1 + c_2 \neq 0$, sledi da je b invertibilan ako i samo ako je $c_1a + c_2b$ invertibilan ako i samo ako je $e_3 = f_3 = 0$. U tom slučaju su

$$1 = e_1 + e_2, \quad 1 = f_1 + f_2$$

dve dekompozicije jedinice za $\mathcal{A}$ i u odnosu na njih imamo da je

$$b^{-1} = \begin{bmatrix} x_a & 0 \\ 0 & x_{b-a} \end{bmatrix}_{f \times e}, \quad (c_1a + c_2b)^{-1} = \begin{bmatrix} (c_1 + c_2)^{-1}x_a & 0 \\ 0 & c_2^{-1}x_{b-a} \end{bmatrix}_{f \times e},$$

pa formula (3.18) se može lako proveriti.

Kako je b invertibilan i $a <^- b$ iz Teoreme 3.1.18 sledi $a\{1\}_b = \{b^{-1}ab^{-1}\}$. □

Minus parcijalno uređenje na matricama nad prstenom

Do kraja poglavlja ćemo posmatrati minus parcijalno uređenje na matricama nad prstenom R. Skup svih $m \times n$ matrica čiji su članovi elementi prstena R označavamo sa $M_{m \times n}(R)$. U nastavku ćemo ukazati kako se koncepti i rezultati iz prethodnog dela mogu proširiti na skup $M_{m \times n}(R)$.

Za proizvoljno $A \in M_{m \times n}(R)$, označimo sa $CS(A) := \{A\xi : \xi \in M_{n \times 1}(R)\}$ i $RS(A) := \{\xi A : \xi \in M_{1 \times m}(R)\}$ prostor kolona odnosno prostor vrsta matrice A. Označimo sa $M_{m \times n}^{(1)}(R)$ skup svih regularnih matrica iz $M_{m \times n}(R)$.

U Teoremi 3.5 u [102], koja se prepisuje fon Nojmanu, je, na vrlo elegantan način, dokazano sledeće tvrđenje.

Teorema 3.1.26. *(Videti [102].) Ako je R regularan prsten tada je i prsten $M_{n\times n}(R)$ regularan. Šta više, svaka matrica $A \in M_{m\times n}(R)$ nad regularnim prstenom R je regularna.*

Za $A, B \in M_{m\times n}(R)$, minus parcijalno uređenje se definiše kao i u slučaju prstena, dok se prostorno pre-uređenje definiše na sledeći način:

$$A <^s B \iff CS(A) \subseteq CS(B) \text{ i } RS(A) \subseteq RS(B). \tag{3.19}$$

Ideja iz Poglavlja 2.2 se može primeniti na $M_{m\times n}(R)$. Neka su

$$I_m = E_1 + \cdots + E_r \ \text{ i } \ I_n = F_1 + \cdots + F_s$$

dve dekompozicije jedinice prstena $M_{m\times m}(R)$ odnosno prstena $M_{n\times n}(R)$, gde su $I_m \in M_{m\times m}(R)$ i $I_n \in M_{n\times n}(R)$ jedinične matrice. Za svako $X \in M_{m\times n}(R)$ imamo da je

$$X = I_m X I_n = (E_1 + \cdots + E_r)X(F_1 + \cdots + F_s) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} E_i X F_j.$$

Da bi izbegli ponavljanje, samo ćemo naglasiti da zaključci analogni onima iz Poglavlja 2.2 važe i u ovom slučaju.

Svi rezultati iz prethodnih poglavlja, izuzev Teoreme 3.1.25, ostaju tačni i u ovom slučaju kada $A, B \in M_{m\times n}(R)$. Pojedini komentari su ipak neophodni. U odnosu na slučaj kada su $a, b \in R$, koji smo ispitivali u prethodnim poglavljima, u novom slučaju je potrebno napraviti nekoliko tehničkih promena. U zavisnosti od konteksta, prsten R treba zameniti sa $M_{m\times n}(R)$, $M_{m\times m}(R)$, $M_{n\times m}(R)$ ili $M_{n\times n}(R)$. Takođe, skup $R^{(1)}$ treba zameniti sa $M^{(1)}_{m\times n}(R)$ ili $M^{(1)}_{n\times m}(R)$, ali u tvrđenjima u kojima je pretpostavljena regularnost prstena R tu pretpostavku treba zadržati (prema Teoremi 3.1.26). Uslove $xR\rho yR$ i $Rx\rho Ry$ gde je $\rho \in \{\subseteq, =\}$ treba zameniti sa $CS(X)\rho CS(Y)$ odnosno sa $RS(X)\rho RS(Y)$. Kako R ima jedinicu, za $X, Y \in M_{m\times n}(R)$, uslov $CS(X) \subseteq CS(Y)$ je ekvivalentan sa $X = YZ$ za neko $Z \in M_{n\times n}(R)$. Takođe, $RS(X) \subseteq RS(Y)$ je ekvivalentan sa $X = ZY$ za neko $Z \in M_{m\times m}(R)$.

Pod sadašnjim pretpostavkama, dokazi svih tvrđenja izuzev Teoreme 3.1.25, se izvode duž linija dokaza odgovarajućih tvrđenja prethodnog slučaja.

Lema 3.1.5 u sadašnjem kontekstu je prvobitno dokazana u [49]. U istom radu je dokazano, pod pretpostavkom da je R regularan prost prsten i $A, B, C \in M_{m\times n}(R)$, da je $CS(C) \subseteq CS(B)$ i $RS(A) \subseteq RS(B)$ ako i samo ako je izraz $AB^{(1,2)}C$ invarijantan u odnosu na izbor $B^{(1,2)} \in B\{1,2\}$. U Teoremi 3.1.4, u sadašnjem slučaju, jedina pretpostavka je regularnost prstena R ali se posmatra samo invarijantnost izraza $AB^{(1)}A$.

3.2 Minus parcijalno uređenje za operatore na Banahovim prostorima

Svi vektorski prostori u ovom poglavlju su Banahovi, a svi operatori su linearni i ograničeni. Neka je

$$\mathcal{B}^{(1)}(X, Y) = \{A \in \mathcal{B}(X, Y) : \ A \text{ je unutrašnje regualraran}\}.$$

U ovom poglavlju ćemo ispitati osobine prostornog pre-uređenja i minus parcijalnog uređenja na skupu $\mathcal{B}^{(1)}(X,Y)$.

U Glavi 2 smo detaljno ispitali pojmove dekompozicije jedinice prstena i topološke direktne sume potprostora. Najbitnije, objasnili smo njihovu povezanost (ekvivalentnost) i njome ukazali na analognost određenih rezultata u prstenima i na operatorima.

Videćemo kako se rezultati iz Poglavlja 3.1 mogu "preneti" na $\mathcal{B}(X,Y)$, iako on nije prsten. Dokazaćemo da čak i oni rezultati iz Glave 3.1, koji zahtevaju regularnost prstena R, važe na $\mathcal{B}(X,Y)$. U ovoj, ali i u svim narednim glavama, pod direktnom sumom potprostora podrazumevamo topološku direktnu sumu. Najpre ćemo dokazati neke rezultate u vezi regularnih operatora, koji će nam biti potrebni u ovoj i narednim glavama. Rezultati ovog poglavlja su objavljeni u radu [96].

Regularni operatori na Banahovim prostorima

Neka su X i Y Banahovi prostori. Sledeća poznata teorema je osnovni rezultat teorije uopštenih inverza operatora na Banahovim prostorima.

Teorema 3.2.1. *(Videti [26].) Operator $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ je unutrašnje regularan ako i samo ako su* $\operatorname{Ker} A$ *i* $\operatorname{Im} A$ *komplementarni (zbog toga i zatvoreni) u X odnosno u Y. U tom slučaju je*

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Im}(AA^{(1)}) \text{ i } \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}(A^{(1)}A), \tag{3.20}$$

gde je $A^{(1)} \in \mathcal{B}(Y,X)$ proizvoljan g-inverz od A.

Sledi, ako su H i K Hilbertovi prostori onda je operator $A \in \mathcal{B}(H,K)$ unutrašnje regularan ako i samo ako je $\operatorname{Im} A$ *zatvoren.*

Dokaz. Dokaz dajemo zbog kompletnosti ali i zbog toga što ćemo se pozivati na njega. Ako je A unutrašnje regularan onda postoji $A^{(1)} \in \mathcal{B}(Y,X)$ tako da je $AA^{(1)}A = A$. Tada su operatori $P = AA^{(1)}$ i $Q = A^{(1)}A$ idempotenti. Važi

$$\operatorname{Im} P \subseteq \operatorname{Im} A = \operatorname{Im}(AA^{(1)}A) \subseteq \operatorname{Im} P,$$

odakle, na osnovu Leme 2.3.15 , sledi da je $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} P$ komplementaran u Y. Slično je $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im}(I-Q)$ pa je $\operatorname{Ker} A$ komplementaran u X. Obrnuto, ako su $\operatorname{Im} A$ i $\operatorname{Ker} A$ komplementarni potprostori u Y odnosno u X onda, na osnovu Leme 2.3.15 postoje zatvoreni potprostori $X_1 \subseteq X$ i $Y_1 \subseteq Y$ takvi da su sume $X = X_1 \oplus \operatorname{Ker} A$ i $Y = \operatorname{Im} A \oplus Y_1$ topološke direktne sume. Lako se pokazuje da je, u odnosu na ove sume, matrica operatora A oblika

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gde je $A_1 \in \mathcal{B}(X_1, \operatorname{Im} A)$ invertibilan. Direktnom proverom se pokazuje da je operator

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ Y_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} X_1 \\ \operatorname{Ker} A \end{bmatrix}$$

uopšteni inverz od A, gde su operatori $B_2 \in \mathcal{B}(Y_1, X_1)$, $B_3 \in \mathcal{B}(\operatorname{Im} A, \operatorname{Ker} A)$, $B_4 \in \mathcal{B}(Y_1, \operatorname{Ker} A)$ proizvoljni. $\square$

Kao posledicu dobijamo sledeći poznat rezultat.

Lema 3.2.2. *(Videti [98].) Operator $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ je levo invertibilan ako i samo ako je A "1-1" i $\operatorname{Im} A$ komplementaran u Y. A je desno invertibilan ako i samo ako je A "na" i $\operatorname{Ker} A$ komplementaran u X.*

Lema 3.2.3. *(Videti takođe [27].) Za $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ sledeća dva uslova su ekvivalentna:*

(i) *A je unutrašnje regualran.*

(ii) *Postoji Banahov prostor Z i operatori $P \in \mathcal{B}(Z,Y)$ i $Q \in \mathcal{B}(X,Z)$ takvi da je P levo invertibilan, Q desno invertibilan i $A = PQ$.*

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Pretpostavimo da je A unutrašnje regularan. Neka je $Z = \operatorname{Im} A$. Imajući u vidu dokaz Teoreme 3.2.1, neka je

$$P = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} : Z \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ Y_1 \end{bmatrix}, \quad \text{i} \quad Q = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X_1 \\ \operatorname{Ker} A \end{bmatrix} \to Z.$$

Iz Leme 3.2.2 sledi da je P levo, a Q desno invertibilan. Takođe, lako se proverava da je $A = PQ$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Pretpostavimo sada da je $A = PQ$ gde je P levo, a Q desno invertibilan. Sledi $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} P$ i $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} Q$. Po Lemi 3.2.2 sledi da su $\operatorname{Im} A$ i $\operatorname{Ker} A$ komplementarni u Y odnosno u X. Sada, iz Teoreme 3.2.1 sledi da je A unutrašnje regualran. $\square$

Kada je slučaj kao u Lemi 3.2.3 (ii), kažemo da je (P,Q) *dekompozicija punog ranga* ("*full-rank decomposition*") operatora A, aludirajući na poznatu matričnu dekompoziciju. Dekompozicija punog ranga regularnog operatora A je takođe poznata kao kanonska faktorizacija od A.

Lema 3.2.4. *(Videti takođe [31], [11].) Neka su X, Y, Z i W Banahovi prostori, $A \in \mathcal{B}(X,Y)$, $B \in \mathcal{B}^{(1)}(Z,Y)$ i $C \in \mathcal{B}(Z,W)$. Tada važi*

(i) $\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} B \iff A = BB^{(1)}A$, *za svako* $B^{(1)} \in B\{1\}$;

(ii) $\operatorname{Ker} B \subseteq \operatorname{Ker} C \iff C = CB^{(1)}B$, *za svako* $B^{(1)} \in B\{1\}$.

Dokaz. (i): Pretpostavimo da je $\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} B$. Neka je $B^{(1)} \in B\{1\}$ proizvoljno. Iz (3.20) sledi

$$\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} B = \operatorname{Im}(BB^{(1)}) = \operatorname{Ker}(I - BB^{(1)})$$

pa je $(I - BB^{(1)})A = 0$, tj. $A = BB^{(1)}A$. Jasno je da iz $A = BB^{(1)}A$ sledi $\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} A$.

(ii): Pretpostavimo da je $\operatorname{Ker} B \subseteq \operatorname{Ker} C$. Iz (3.20) sledi

$$\operatorname{Ker} C \supseteq \operatorname{Ker} B = \operatorname{Ker}(B^{(1)}B) = \operatorname{Im}(I - B^{(1)}B),$$

pa je $C(I - B^{(1)}B) = 0$, tj. $C = CB^{(1)}B$. Jasno, iz $C = CB^{(1)}B$ sledi $\operatorname{Ker} B \subseteq \operatorname{Ker} C$. $\square$

Lema 3.2.5. *Neka je $A, B \in \mathcal{B}(X)$, pri čemu je B regularan operator. Tada važi*

$$\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} B \;\Leftrightarrow\; A\mathcal{B}(X) \subseteq B\mathcal{B}(X) \quad i \quad \operatorname{Ker} B \subseteq \operatorname{Ker} A \;\Leftrightarrow\; \mathcal{B}(X)A \subseteq \mathcal{B}(X)B.$$

Dokaz. U dokazu koristimo Lemu 3.2.4 (i). Jasno je da iz $A = BB^{(1)}A$ sledi $A\mathcal{B}(X) \subseteq B\mathcal{B}(X)$. Važi i obrnuto, jer ako je $A = BZ$, za neko $Z \in \mathcal{B}(X)$, onda je $A = BB^{(1)}BZ = BB^{(1)}A$. Time smo dokazali prvu ekvivalenciju dok se druga dokazuje na sličan način. □

Napomena 3.2.6. Treba naglasiti da je uslov $B \in \mathcal{B}^{(1)}(Z, Y)$ u Lemi 3.2.4 neophodan. Naime, u opštem slučaju, iz $\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} B$ ne sledi da je $A = BG$ za neki ograničen operator G. Iz Leme 3.2.5 sledi da su definicija prostornog pre-uređenja na prstenu (Definicija 3.1.3 na strani 25), definicija ovog uređenja na skupu matrica (Definicija 1.1.2 na strani 4) i Definicija 3.2.7 saglasne.

Prostorno pre-uređenje za operatore na Banahovim prostorima

Primetimo da je za matrice $A, B \in M_{m\times n}$, uslov $\operatorname{Im} A^* \subseteq \operatorname{Im} B^*$, koji se javlja u Definiciji 1.1.2 prostornog pre-uređenja za matrice, ekvivalentan uslovu $\operatorname{Ker} B \subseteq \operatorname{Ker} A$. Sada je jasno kako ćemo ovu relaciju definisati za operatore.

Definicija 3.2.7. (Videti [77].) Neka su $A, B \in \mathcal{B}(X, Y)$. Kažemo da je operator A manji od B u odnosu na *prostorno pre-uređenje*, i to označavamo sa $A <^s B$, ako je

$$\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} B \text{ i } \operatorname{Ker} B \subseteq \operatorname{Ker} A.$$

Setimo se da je u Teoremi 3.1.4, koja predstavlja glavni rezultat za prostorno pre-uređenje na prstenima, korišćena pretpostavka o regularnosti prstena R. Taj uslov ne možemo zahtevati u operatorskom slučaju, jer postoje operatori iz $\mathcal{B}(X, Y)$ koji nisu regularni. Međutim, u Teoremi 3.2.10 ćemo pokazati da iste karakterizacije prostornog pre-uređenja važe i za operatore. Za dokaz te teoreme će nam biti potrebno nekoliko pomoćnih tvrđenja.

Lema 3.2.8. *Neka je $0 \neq x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, gde su X i Y normirani prostori. Tada postoji $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ tako da je $Tx_0 = y_0$.*

Dokaz. Po posledici Han-Banahove teoreme sledi da postoji ograničen funkcional $f \in X' \equiv \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ takav da je $f(x_0) = 1$. Definišimo operator T sa $Tx = f(x)y_0$. Tada $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ i $Tx_0 = y_0$. □

Posledica 3.2.9. *Neka su $0 \neq B \in \mathcal{B}(X, Y)$ i $A \in \mathcal{B}(Z, W)$, gde su X, Y, Z i W normirani prostori. Ako je $ATB = 0$ za svako $T \in \mathcal{B}(Y, Z)$ tada je $A = 0$.*

Dokaz. Kako je $B \neq 0$, postoji $x_0 \in X$ tako da je $Bx_0 = y_0 \neq 0$. Pretpostavimo suprotno, da postoji element $z_0 \in Z$ takav da je $Az_0 = w_0 \neq 0$. Iz Leme 3.2.8 sledi da možemo naći operator $T \in \mathcal{B}(Y, Z)$ takav da je $Ty_0 = z_0$. Sledi, $ATBx_0 = ATy_0 = Az_0 \neq 0$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom. □

Neka su A i C matrice različite od nule. Poznato je da je proizvod $AB^{(1)}C$ invarijantan u odnosu na izbor $B^{(1)} \in B\{1\}$ ako i samo ako je $\operatorname{Im} C \subseteq \operatorname{Im} B$ i $\operatorname{Im} A^* \subseteq \operatorname{Im} B^*$. Ovo je dokazano u [101] za kompleksne matrice i u [78] za matrice nad proizvoljnim poljem. U sledećoj teoremi ćemo pokazati da ovaj rezultat važi i za operatore na Banahovim prostorima.

Teorema 3.2.10. *Neka su $A, B, C \in \mathcal{B}(X, Y)$ nenula operatori i neka je B regularan. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $AB^{(1)}C$ *je invarijantan u odnosu na izbor* $B^{(1)} \in B\{1\}$.

(ii) $AB^{(1,2)}C$ *je invarijantan u odnosu na izbor* $B^{(1,2)} \in B\{1, 2\}$.

(iii) $\operatorname{Im} C \subseteq \operatorname{Im} B$ *i* $\operatorname{Ker} B \subseteq \operatorname{Ker} A$.

Dokaz. Kako je B regularan, postoje zatvoreni potprostori $X_1 \subseteq X$ i $Y_1 \subseteq Y$ takvi da je $X = X_1 \oplus \operatorname{Ker} B$ i $Y = \operatorname{Im} B \oplus Y_1$ i u odnosu na ove dekompozicije B i $B^{(1)} \in B\{1\}$ imaju sledeće reprezentacije (videti dokaz Teoreme 3.2.1):

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X_1 \\ \operatorname{Ker} B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} B \\ Y_1 \end{bmatrix}, \quad B^{(1)} = \begin{bmatrix} B_1^{-1} & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} B \\ Y_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} X_1 \\ \operatorname{Ker} B \end{bmatrix},$$

gde je B_1 invertibilan operator, a K_2, K_3 i K_4 ograničeni operatori. Nije teško pokazati da operator $B^{(1,2)}$ pripada skupu $\in B\{1, 2\}$ ako i samo ako je njegova reprezentacija

$$B^{(1,2)} = \begin{bmatrix} B_1^{(-1)} & M_2 \\ M_3 & M_3 B_1 M_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} B \\ Y_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} X_1 \\ \operatorname{Ker} B \end{bmatrix},$$

za neke ograničene operatore M_2 i M_3.

(i) $\Rightarrow$ (ii) je trivijalno.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Pretpostavimo da je proizvod $AB^{(1,2)}C$ invarijantan u odnosu na izbor elementa $B^{(1,2)} \in B\{1, 2\}$. Neka operatori A i C imaju sledeće matrične forme

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X_1 \\ \operatorname{Ker} B \end{bmatrix} \to Y \;\text{ i }\; C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} : X \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} B \\ Y_1 \end{bmatrix},$$

za neke ograničene operatore A_1, A_2, C_1 i C_2. Po pretpostavci imamo da

$$AB^{(1,2)}C = A_1 B_1^{-1} C_1 + A_1 M_2 C_2 + A_2 M_3 C_1 + A_2 M_3 B_1 M_2 C_2$$

ne zavisi od M_2 i M_3. Uzimajući $M_2 = M_3 = 0$ dobijamo $AB^{(1,2)}C = A_1 B_1^{-1} C_1$. Ako uzmemo da je $M_2 = 0$ dobijamo da je $A_2 M_3 C_1 = 0$, za svako M_3. Slično, $A_1 M_2 C_2 = 0$, za svako M_2 pa je i $A_2 M_3 B_1 M_2 C_2 = 0$, za svako M_2 i M_3. Dokažimo da je $C_2 = 0$. Ako pretpostavimo da je $C_2 \neq 0$ onda iz Posledice 3.2.9 sledi da je $A_1 = 0$ i $A_2 M_3 B_1 = 0$, za svako M_3. Kako je $B_1 \neq 0$, iz istog razloga sledi da je i $A_2 = 0$. Dobijamo da je $A = 0$ što je kontradikcija. Dakle $C_2 = 0$, pa zbog $C \neq 0$ sledi $C_1 \neq 0$. Zbog toga, koristeći opet Posledicu 3.2.9, dobijamo da je $A_2 = 0$. Upravo smo dokazali da je $\operatorname{Im} C \subseteq \operatorname{Im} B$ i $\operatorname{Ker} B \subseteq \operatorname{Ker} A$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Pretpostavimo sada da je $\operatorname{Im} C \subseteq \operatorname{Im} B$ i da je $\operatorname{Ker} B \subseteq \operatorname{Ker} A$. Sledi da A i C imaju sledeće matrične forme:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X_1 \\ \operatorname{Ker} B \end{bmatrix} \to Y \;\text{ i }\; C = \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix} : X \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} B \\ Y_1 \end{bmatrix},$$

za neke A_1 i C_1. Imamo da je

$$AB^{(1)}C = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1^{-1} & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix} = A_1 B_1^{-1} C_1,$$

što ne zavisi od K_2, K_3 i K_4. □

Sada smo u poziciji da dokažemo nekoliko karakterizacija prostornog pre-uređenja.

Teorema 3.2.11. *Neka je $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ i $0 \neq B \in \mathcal{B}^{(1)}(X,Y)$ i neka je (P,Q), dekompozicija punog ranga operatora B. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $A <^s B$.

(ii) $AB^{(1)}A$ *je invarijantan u odnosu na izbor* $B^{(1)} \in B\{1\}$.

(iii) $AB^{(1,2)}A$ *je invarijantan u odnosu na izbor* $B^{(1,2)} \in B\{1,2\}$.

(iv) $A = BB^{(1)}A = AB^{(1)}B$, *za svako* $B^{(1)} \in B\{1\}$.

(v) $A = BMB$, *za neko* $M \in \mathcal{B}(Y,X)$;

(vi) $A = PTQ$, *za neki ograničen operator* T.

Dokaz. Ako je $A = 0$ tada je svih šest uslova zadovoljeno. Pretpostavimo da je $A \neq 0$. Tada ekvivalentnost uslova (i), (ii) i (iii) sledi iz Teoreme 3.2.10, a ekvivalentnost uslova (i), (iv) i (v) sledi iz Leme 3.2.4.

(i) $\Rightarrow$ (vi): Kako je $\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} B = \operatorname{Im} P$ i $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Ker} B \subseteq \operatorname{Ker} A$, po Lemi 3.2.4 sledi da je

$$A = PP_l^{-1}A = AQ_r^{-1}Q = PP_l^{-1}AQ_r^{-1}Q = PTQ,$$

gde je $T = P_l^{-1}AQ_r^{-1}$ ograničen linearan operator.

(vi) $\Rightarrow$ (i): Ako je $A = PTQ$ onda je $\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} P = \operatorname{Im} B$ i $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Ker} Q \subseteq \operatorname{Ker} A$, tj. $A <^s B$. □

Napomena 3.2.12. Ako je B regularan tada je jasno da je $A <^s B$ ako i samo ako je

$$A = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X_1 \\ \operatorname{Ker} B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} B \\ Y_1 \end{bmatrix} \text{ za neko } T \in \mathcal{B}(X_1, \operatorname{Im} B).$$

Takođe, $0 <^s A$ za svako A i $A <^s 0$ ako i samo ako je $A = 0$.

Minus parcijalno uređenje za operatore na Banahovim prostorima

Već smo naglasili da se koristeći ekvivalentnost dekompozicije jedinice prstena i direktne sume potprostora, mnogi rezultati iz prstena mogu preneti na operatorski slučaj.

Definicija 3.2.13. Neka su $A, B \in \mathcal{B}^{(1)}(X,Y)$. Kažemo da je $A <^- B$ ako postoji $A^{(1)} \in A\{1\}$ tako da je $AA^{(1)} = BA^{(1)}$ i $A^{(1)}A = A^{(1)}B$.

Primetimo da u Definiciji 3.2.13 nismo morali da zahtevamo da i operator B bude regularan. Ipak uzimamo da su i A i B regularni jer je to presudno za dokazivanje mnogih osobina minus parcijalnog uređenja. Na primer, da bi dokazali tranzitivnost relacije $<^-$ moramo da posmatramo uslove $A <^- B$ i $B <^- C$, pa moramo pretpostaviti da je B regualran.

Pretpostavimo da su $A, B \in \mathcal{B}^{(1)}(X, Y)$ i da je $A <^- B$. Podsetimo se Teoreme 3.1.8 i njenog dokaza na strani 28. Neka su E_i i F_i, $i = 1, 2, 3$ definisani kao u dokazu te teoreme. Dakle,

$$E_1 = AH,\ E_2 = (B - A)H,\ E_3 = I - BH,\ F_1 = HA,\ F_2 = H(B - A),\ F_3 = I - HB,$$

gde je $H \in B\{1\}$ proizvoljan fiksiran g-inverz od B. Primetimo da je zbog $A <^- B$, $A = BB^{(1)}A = AB^{(1)}B = AB^{(1)}A$ za svako $B^{(1)} \in B\{1\}$ pa je $(B - A)H(B - A) = B - A$, tj. H je g-inverz od $B - A$. Po Teoremi 3.2.1 i Teoremi 2.3.2 (ii) (strana 16) imamo da je

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Im} E_1 = \operatorname{Im} A, \quad \operatorname{Im} E_2 = \operatorname{Im}(B - A), \quad \operatorname{Im} F_3 = \operatorname{Ker}(HB) = \operatorname{Ker} B,\\
&\operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(B - A) = \operatorname{Im}(E_1) \oplus \operatorname{Im} E_2 = \operatorname{Im}(E_1 + E_2) = \operatorname{Im}(BH) = \operatorname{Im} B,\\
&\operatorname{Im} F_2 \oplus \operatorname{Im} F_3 = \operatorname{Im}(F_2 + F_3) = \operatorname{Im}(I - HA) = \operatorname{Ker}(HA) = \operatorname{Ker} A.
\end{aligned}$$

Dekompozicija jedinice prstena $\mathcal{B}(Y)$, $I_Y = E_1 + E_2 + E_3$ indukuje direktnu sumu $Y = \operatorname{Im} E_1 \oplus \operatorname{Im} E_2 \oplus \operatorname{Im} E_3$, tj.

$$Y = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(B - A) \oplus Y_1,$$

gde je $Y_1 = \operatorname{Im} E_3$. Slično, dekompozicija jedinice prstena $\mathcal{B}(X)$, $I_X = F_1 + F_2 + F_3$ indukuje direktnu sumu

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \operatorname{Ker} B,$$

gde je $X_1 = \operatorname{Im} F_1$, $X_2 = \operatorname{Im} F_2$. Sledi da u odnosu na ove dekompozicije prostora X i Y, operatori A i B imaju sledeće matrične forme

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} C_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \operatorname{Ker} B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Im}(B - A) \\ Y_1 \end{bmatrix},\\
B &= \begin{bmatrix} C_A & 0 & 0 \\ 0 & C_{B-A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \operatorname{Ker} B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Im}(B - A) \\ Y_1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Zbog $\operatorname{Im} C_A = \operatorname{Im} A$ i $\operatorname{Ker} C_A = \operatorname{Ker} A = X_2 \oplus \operatorname{Ker} B$ zaključujemo da je $C_A \in \mathcal{B}(X_1, \operatorname{Im} A)$ invertibilan operator. Slično dobijamo da je i $C_{B-A} \in \mathcal{B}(X_2, \operatorname{Im}(B - A))$ invertibilan. Primetimo takođe da ovi zaključci slede i iz Teoreme 3.1.9 na strani 29 gde smo dokazali (p, q)-invertibilnost elemenata $a \in e_1 R f_1$ i $b - a \in e_2 R f_2$.

Setimo se da za elemente a i b regularnog prstena R važi ekvivalencija $a <^- b \Leftrightarrow b\{1\} \subseteq a\{1\} \Leftrightarrow b\{1, 2\} \subseteq a\{1\}$, Teorema 3.1.14 na strani 31. Iako skup $\mathcal{B}(X, Y)$ sadrži i operatore koji nisu regularni, ova karakterizacija minus uređenja važi i na skupu operatora, što ćemo videti iz naredne teoreme. Pre toga, podsetimo se sledeće poznate teoreme.

Teorema 3.2.14. *(Videti [98].) Neka su X, Y Banahovi prostori, i neka je $A \in \mathcal{B}(X, Y)$. Ako je Z zatvoren potprostor od Y, takav da je $\operatorname{Im} A \oplus Z$ zatvoren u Y, onda je $\operatorname{Im} A$ zatvoren u Y.*

Teorema 3.2.15. *Neka su $A, B \in \mathcal{B}^{(1)}(X, Y)$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $A <^- B$.

(ii) *Postoje dekompozicije (topološke direktne sume)*

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \operatorname{Ker} B \quad i \quad Y = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(B - A) \oplus Y_1$$

i postoje invertibilni operatori $C_A \in \mathcal{B}(X_1, \operatorname{Im} A)$ *i* $C_{B-A} \in \mathcal{B}(X_2, \operatorname{Im}(B - A))$ *tako da A i B imaju matrične forme (3.21).*

(iii) $\operatorname{Im} B = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(B - A)$.

(iv) $B\{1\} \subseteq A\{1\}$.

(v) $B\{1, 2\} \subseteq A\{1\}$.

Dokaz. (i) $\Longrightarrow$ (ii) smo malopre dokazali. Međutim, daćemo i autorov prvobitni dokaz ovog tvrđenja koji se može naći u radu [96]. Zanimljivo je da je dokaz Teoreme 3.1.8 dosta lakši i lepši od ovog, iako se u njemu dokazuje tvrđenje u opštijem slučaju.

Kako je B regularan, iz Leme 3.2.3 sledi da je $B = PQ$ gde je $P \in \mathcal{B}(\operatorname{Im} B, Y)$ levo invertibilan, $Py = y$ za svako $y \in \operatorname{Im} B$ i $Q \in \mathcal{B}(X, \operatorname{Im} B)$ desno invertibilan, $Qx = Bx$ za svako $x \in X$. Kako iz $A <^- B$ očigledno sledi da je $A <^s B$, iz Teoreme 3.2.11 dobijamo da je $A = PTQ$ za neko $T \in \mathcal{B}(\operatorname{Im} B)$. Iz definicije minus uređenja sledi da postoji $A^{(1)} \in A\{1\}$ tako da je $AA^{(1)} = BA^{(1)}$ i $A^{(1)}A = A^{(1)}B$. Neka je $G = A^{(1)}AA^{(1)}$. Tada je $G \in A\{1, 2\}$, $AG = BG$ i $GA = GB$. Sledi da je $PTQG = PQG$ pa je $TQG = QG$ jer je P levo invertibilan. Dalje, $AGA = A$, tj. $PTQGPTQ = PTQ$. Dakle, $TQGPT = T$ i zbog toga je $QGPT = T$. Sada iz $GAG = G$ dobijamo da je $T^2 = (QGPT)(QGPT) = QGAGPT = QGPT = T$. Dakle, $A = PTQ$, gde je $T \in \mathcal{B}(\operatorname{Im} B)$ idempotent. Sledi da je $\operatorname{Im} B = \operatorname{Im} T \oplus \operatorname{Ker} T$. Kako je Q desno invertibilan i $Py = y$, za svako $y \in \operatorname{Im} B$, sledi da je $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im}(PTQ) = \operatorname{Im}(PT) = \operatorname{Im} T$. Slično je $\operatorname{Im}(B - A) = \operatorname{Im}(PQ - PTQ) = \operatorname{Im}(P(I - T)Q) = \operatorname{Im}(P(I - T)) = \operatorname{Im}(I - T) = \operatorname{Ker} T$. Time smo dokazali da je $\operatorname{Im} B = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(B - A)$.
Kako su $\operatorname{Ker} B$ i $\operatorname{Im} B$ zatvoreni i komplementarni u X odnosno u Y sledi da postoje zatvoreni potprostori $X_3 \subseteq X$ i $Y_1 \subseteq Y$ takvi da je $X = X_3 \oplus \operatorname{Ker} B$ i $Y = \operatorname{Im} B \oplus Y_1$. Tada operator B ima sledeću matričnu formu

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X_3 \\ \operatorname{Ker} B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} B \\ Y_1 \end{bmatrix},$$

gde je B_1 invertibilan. Neka je $X_1 = B_1^{-1}(\operatorname{Im} A)$ i $X_2 = B_1^{-1}(\operatorname{Im}(B - A))$. Kako je $\operatorname{Im} B = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(B - A)$ i kako su $\operatorname{Im} A$ i $\operatorname{Im} B$ zatvoreni, iz Teoreme 3.2.14 zaključujemo da je $\operatorname{Im}(B - A)$ takođe zatvoren. Kako je B_1 neprekidan sledi da su X_1 i X_2 zatvoreni. Operator B_1 je invertibilan odakle sledi da je $X_3 = X_1 \oplus X_2$. Pretpostavimo dalje da je $x \in \operatorname{Ker} B$. Kako je $0 = Bx = Ax + (B - A)x \in \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(B - A)$ sledi da je $Ax = 0 = (B - A)x$, pa je $\operatorname{Ker} B \subseteq \operatorname{Ker} A$.

Iz prethodnog razmatranja sledi da operatori A i B imaju sledće matrične forme:

$$A = \begin{bmatrix} K & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \operatorname{Ker} B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Im}(B-A) \\ Y_1 \end{bmatrix} \text{ and}$$
$$B = \begin{bmatrix} C_A & 0 & 0 \\ 0 & C_{B-A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \operatorname{Ker} B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Im}(B-A) \\ Y_1 \end{bmatrix},$$

za neke ograničene operatore K, L i invertibilne operatore C_A, C_{B-A} definisane na odgovarajućim potprostorima. Dokažimo da je $K = C_A$ i $L = 0$. Neka je $x \in X_1$ proizvoljno. Imamo da je $Bx = C_A x + 0 \in \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(B-A)$. Sa druge strane je $Bx = Ax + (B-A)x = Kx + (B-A)x \in \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(B-A)$. Zaključujemo da je $Kx = C_A x$ za svako $x \in X_1$, pa je $K = C_A$. Slično, za proizvoljno $x \in X_2$, imamo da je $Bx = 0 + C_{B-A}x \in \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(B-A)$. Sa druge strane je $Bx = Ax + (B-A)x = Lx + (B-A)x \in \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(B-A)$, pa je $Lx = 0$. Sledi $L = 0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) sledi iz 3.21 i invertibilnosti operatora C_A i C_{B-A}.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): Pretpostavimo da je $\operatorname{Im} B = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(B-A)$ i neka je $\mathcal{B} \in B\{1\}$ proizvoljan. Tada je $\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} B$ pa na osnovu Leme 3.2.4 sledi $A = BB^{(1)}A$ i zbog toga je

$$A(I - B^{(1)}A) = A - AB^{(1)}A = BB^{(1)}A - AB^{(1)}A = (B-A)B^{(1)}A \in \operatorname{Im} A \cap \operatorname{Im}(B-A).$$

Međutim $\operatorname{Im} A \cap \operatorname{Im}(B-A) = \{0\}$, pa je $A = AB^{(1)}A$, tj. $B^{(1)} \in A\{1\}$.

(iv) $\Longrightarrow$ (v) je trivijalno.

(v) $\Longrightarrow$ (i): Kako je $AB^{(1,2)}A = A$ za svako $B^{(1,2)} \in B\{1,2\}$, iz Teoreme 3.2.11 (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) sledi $A = BB^{(1)}A = AB^{(1)}B$, za svako $B^{(1)} \in B\{1\}$. Fiksirajmo $H \in B\{1\}$ i neka je $G = HBH$. Tada $G \in B\{1,2\}$ pa je $A = AGA = BGA = AGB$. Neka je $F = GAG$. Tada je $AFA = AGAGA = A$, tj. $F \in A\{1\}$. Takođe,

$$AF = AGAG = AG = BGAG = BF \ \text{ i } \ FA = GAGA = GA = GAGB = FB.$$

Sledi, $A <^- B$. $\square$

Posledica 3.2.16. *Neka su $A, B \in \mathcal{B}(X,Y)$. Ako je $A\{1\} = B\{1\} \neq \varnothing$ tada je $A = B$.*

Teorema 3.2.17. *Relacija $<^-$ je relacija parcijalnog uređenja na $\mathcal{B}^{(1)}(X,Y)$.*

Dokaz. Refleksivnosti i tranzitivnost slede iz Teoreme 3.2.15 (i) $\Leftrightarrow$ (iv). Ako je $A <^- B$ i $B <^- A$, gde su $A, B \in \mathcal{B}^{(1)}(X,Y)$ onda, na osnovu Teoreme 3.2.15 (i) $\Leftrightarrow$ (ii), sledi $\operatorname{Im} B = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(B-A)$ i $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} B \oplus \operatorname{Im}(A-B)$. Stoga, $\operatorname{Im}(B-A) = \{0\}$ tj. $A = B$. Dakle, $<^-$ je relacija parcijalnog uređenja na $\mathcal{B}^{(1)}(X,Y)$. $\square$

Posledica 3.2.18. *Neka operator $B \in \mathcal{B}^{(1)}(X,Y)$ ima dekompoziciju punog ranga $B = PQ$. Tada je klasa svih operatora $A \in \mathcal{B}^{(1)}(X,Y)$ takvih da je $A <^- B$ data sa*

$$\{PTQ : T \textit{ je ograničen idempotent}\}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $A <^- B$. Postoji $A^{(1)} \in A\{1\}$ tako da je $AA^{(1)} = BA^{(1)}$ i $A^{(1)}A = A^{(1)}B$. Nije teško pokazati da za operator $G = A^{(1)}AA^{(1)}$ važi $G \in A\{1,2\}$, $AG = BG$ i $GA = GB$. Imamo

$$A = AGA = BGB = PQGPQ = PTQ,$$

gde je $T = QGP$. Primetimo da je

$$T^2 = QGPQGP = QGBGP = QGAGP = QGP = T.$$

Obrnuto, pretpostavimmo da je $A = PTQ$ gde je T idempotent. Za $F = Q_r^{-1}TP_l^{-1}$ imamo da je $AFA = A$, $AF = PTP_l^{-1} = BF$ i $FA = Q_r^{-1}TQ = FB$, pa je $A <^- B$. $\square$

Napomena 3.2.19. Neka su $A, B \in \mathcal{B}^{(1)}(X,Y)$ i $A <^- B$. Tada je linearna kombinacija $c_1A + c_2B$, gde je $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, regularan operator. Specijalno, $B - A$ regularan.

Napomena 3.2.20. Neka su T i S invertibilni operatori i $A, B \in \mathcal{B}^{(1)}(X,Y)$. Kako je $(TXS)\{1\} = S^{-1}X\{1\}T^{-1}$, iz Teoreme 3.2.15 (i) $\Leftrightarrow$ (iv), sledi je $A <^- B$ ako i samo ako je $TAS <^- TBS$..

Ako su $A, B \in \mathcal{B}^{(1)}(X,Y)$, gde je A levo ili desno invertibilan, i ako je $A <^- B$ tada je $A = B$. Ako je A_r^{-1} desni inverz od A tada imamo sledeći niz implikacija: $A <^- B \Rightarrow A = AB^-A = BB^-A = AB^-B \Rightarrow I = AA_r^{-1} = AB^-AA_r^{-1} = AB^- \Rightarrow A = AB^-B = IB = B$. Slučaj kada je A levo invertibilan se dokazuje slično.

Podsetimo se da su osobine minus uređenja na prstenima date Teoremama 3.1.18, 3.1.19, 3.1.20, 3.1.21, 3.1.25, Napomenom 3.1.22 i Posledicama 3.1.23 i 3.1.24, dokazane korišćenjem matričnih reprezentacija elemenata a i b iz Teoreme 3.1.8 na strani 28. Sada je jasno da, koristeći matrične reprezentacije (3.21) iz Teoreme 3.2.15, koje su analogne reprezentacijama u slučaju prstena, nabrojane rezultate možemo dokazati i u slučaju operatora.

Neka je

$$A\{1\}_B = \{G \in A\{1\} : AG = BG, GA = GB\} \text{ i}$$
$$A\{1,2\}_B = \{G \in A\{1,2\} : AG = BG, GA = GB\}.$$

Teorema 3.2.21. *Neka su $A, B \in \mathcal{B}^{(1)}(X,Y)$ i neka je $A <^- B$. Tada*

(i) $A\{1\}_B = \{B^{(1)} - B^{(1)}(B - A)B^{(1)} : B^{(1)} \in B\{1\}\}$;

(ii) $A\{1,2\}_B = \{B^{(1)}AB^{(1)} : B^{(1)} \in B\{1\}\} = \{B^{(1,2)}AB^{(1,2)} : B^{(1,2)} \in B\{1,2\}\}$.

Teorema 3.2.22. *Neka su $A, B \in \mathcal{B}^{(1)}(X,Y)$ i neka je $A <^- B$.*

(i) *Za svako $A^{(1)} \in A\{1\}_B$ postoji $B^{(1)} \in B\{1\}$ tako da je*

$$B^{(1)}A = A^{(1)}A, \quad AB^{(1)} = AA^{(1)}; \tag{3.22}$$

(ii) *Za svako $B^{(1)} \in B\{1\}$ postoji $A^{(1)} \in A\{1\}_B$ tako da (3.22) važi.*

Teorema 3.2.23. *Neka su $A, B \in \mathcal{B}^{(1)}(X,Y)$ i neka je $A <^- B$. Klasa svih idempotenata $P \in \mathcal{B}(Y)$ takvih da je $A = PB$ je data sa*

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 & V(I-P_{33}) \\ 0 & 0 & UP_{33} \\ 0 & 0 & P_{33} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Im}(B-A) \\ Y_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Im}(B-A) \\ Y_1 \end{bmatrix}, \tag{3.23}$$

gde je $P_{33} \in \mathcal{B}(Y_1)$ proizvoljan idempotent, a $U \in \mathcal{B}(Y_1, \operatorname{Im}(B-A))$, $V \in \mathcal{B}(Y_1, \operatorname{Im} A)$ proizvoljni operatori.

Teorema 3.2.24. *Neka su $A, B \in \mathcal{B}^{(1)}(X,Y)$ i neka je $A <^- B$. Klasa svih idempotenata $Q \in \mathcal{B}(X)$ takvih da je $A = BQ$ je data sa*

$$Q = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ (I-Q_{33})V & Q_{33}U & Q_{33} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \operatorname{Ker} B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \operatorname{Ker} B \end{bmatrix}, \tag{3.24}$$

gde je $Q_{33} \in \mathcal{B}(\operatorname{Ker} B)$ proizvoljan idempotent, a $U \in \mathcal{B}(X_2, \operatorname{Ker} B)$, $V \in \mathcal{B}(X_1, \operatorname{Ker} B)$ proizvoljni operatori.

Napomena 3.2.25. Iz Teoreme 3.2.23 sledi da je $Y = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(B-A) \oplus \operatorname{Im} P_{33} \oplus \operatorname{Ker} P_{33}$. Naravno, X ima standardnu dekompoziciju $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \operatorname{Ker} B$. U odnosu na ove dekompozicije, A, B i P imaju sledeće forme:

$$A = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & V \\ 0 & 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

za neke operatore U i V.

Slično, Teorema 3.2.24 daje $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \operatorname{Im} Q_{33} \oplus \operatorname{Ker} Q_{33}$. U odnosu na ovu dekompoziciju, A, B i Q imaju sledeće forme:

$$A = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & I & 0 \\ M & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

za neke operatore L i M.

Teorema 3.2.26. *Neka su $A, B \in \mathcal{B}^{(1)}(X,Y)$ i neka je $A <^- B$. Tada je klasa svih idempotenata P takvih da je $A = PB$ i $\operatorname{Im} P = \operatorname{Im} A$ data sa $\{AA^{(1)} : A^{(1)} \in A\{1\}_B\}$. Klasa svih idempotenata Q takvih da je $A = BQ$ i $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Ker} A$ je data sa $\{A^{(1)}A : A^{(1)} \in A\{1\}_B\}$.*

Teorema 3.2.27. *Neka su $A, B \in \mathcal{B}^{(1)}(X,Y)$ i neka je $A <^- B$. Svaki idempotent P koji zadovoljava $A = PB$, se može napisati kao $P = P_1 + P_2$, gde je P_1 idempotent takav da je $A = P_1 B$, $\operatorname{Im} P_1 = \operatorname{Im} A$, a P_2 idempotent takav da je $P_1P_2 = P_2P_1 = P_2A = P_2B = 0$. Svaki idempotent Q koji zadovoljava $A = BQ$, se može napisati kao $Q = Q_1 + Q_2$, gde je Q_1 idempotent takav da je $A = BQ_1$, $\operatorname{Ker} Q_1 = \operatorname{Ker} A$, a Q_2 idempotent takav da je $Q_1Q_2 = Q_2Q_1 = AQ_2 = BQ_2 = 0$.*

Teorema 3.2.28. *Neka su $A, B \in \mathcal{B}^{(1)}(X,Y)$ i neka je $A <^{-} B$. Neka su $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $c_2 \neq 0$, $c_1 + c_2 \neq 0$. Tada je $c_1A + c_2B$ invertibilan ako i samo ako je B invertibilan. Dalje,*

$$\begin{aligned}(c_1A + c_2B)^{-1} &= c_2^{-1}B^{-1} + ((c_1 + c_2)^{-1} - c_2^{-1})B^{-1}AB^{-1} \\ &= c_2^{-1}B^{-1} + ((c_1 + c_2)^{-1} - c_2^{-1})A^{(1)},\end{aligned}$$

gde je $A^{(1)} \in A\{1\}_B$.

Napomenimo na kraju da rezultati iz Teoreme 1.2.8 važe i na $\mathcal{B}^{(1)}(X,Y)$. Dokaz tog tvrđenja kao i još mnoštvo drugih karakterizacija je dokazano u radu [96].

Glava 4

Zvezda, oštro, jezgarno i dualno jezgarno parcijalno uređenje

4.1 Grupni, Mur-Penrouzov, jezgarni i dualni jezgarni inverz u prstenima sa involucijom

Definicije Mur-Penrouzovog i grupnog matričnog inverza smo dali u Uvodu. Za matricu $A \in M_n$, $\operatorname{ind} A \leqslant 1$, Rao i Mitra su definisali jedinstven uopšten inverz $A^-_{\rho^*\chi}$, koji je jednak $A^\# AA^\dagger$, videti poglavlje 4.10 u [99]. Nedavno, u radu [9], Baksalari i Trenkler su sledećom definicijom uveli takozvani jezgarni inverz za koji se dokazuje da je identičan sa $A^-_{\rho^*\chi}$.

Definicija 4.1.1. (Videti [9].) Neka je $A \in M_n$. Matrica $A^{\oplus} \in M_n$ se naziva *jezgarni* (eng. *core*) inverz matrice A ako zadovoljava

$$AA^{\oplus} = P_A \text{ i } \operatorname{Im} A^{\oplus} \subseteq \operatorname{Im} A,$$

gde je sa P_A označena ortogonalna idempotentska matrica za koju je $\operatorname{Im} P_A = \operatorname{Im} A$.

Dualni jezgarni inverz se definiše analogno.

Definicija 4.1.2. (Videti [9].) Neka je $A \in M_n$. Matrica $A_{\oplus} \in M_n$ se naziva *dualni jezgarni* inverz matrice A ako zadovoljava

$$A_{\oplus}A = P_{A^*} \text{ i } \operatorname{Im} A^{\oplus} \subseteq \operatorname{Im} A^*.$$

Teorema 4.1.3. *(Videti [47].) Neka je $A \in M_n$ matrica ranga r. Tada se A može napisati u obliku*

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \tag{4.1}$$

gde je $U \in M_n$ unitarna, $\Sigma = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ je dijagonalna matrica sa singularnim vrednostima od A zajedno sa njihovom višestrukošću, $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$, a matrice $K \in M_r$ i $L \in M_{r\times n-r}$ zadovoljavaju $KK^* + LL^* = I_r$.

Teorema 4.1.4. *(Videti [9].) Neka je $A \in M_n$ i neka ona ima dekompoziciju (4.1). Matrica A ima jezgarni inverz ako i samo ako je* $\operatorname{ind} A \leqslant 1$*. U tom slučaju je K invertibilna i*

$$A^{\oplus} = U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \tag{4.2}$$

Takođe, u [9] je dokazano da se jezgarni inverz poklapa sa Bot-Dafinovim inverzom

$$P_A[(A-I)P_A + I]^{-1}.$$

Da ne bi došlo do zabune, treba reći da su jezgarni i dualni jezgarni inverz specijalni slučajevi jezgarnog-EP inverza, kojeg su ispitivali Manjunatha Prasad i Mohana u [87]. Oni su preimenovali termin "jezgarni inverz" u "jezgarni-EP uopšteni inverz". Takođe, koriste termin *jezgarni-EP uopšteni inverz umesto dualni jezgarni inverz, naglašavajući da je ta terminologija ispravnija. O ovome će biti više reči u zadnjem delu ovog poglavlja. Mi ćemo zadržati naše oznake i terminologiju.

U ovoj glavi R označava prsten sa involucijom i jedinicom 1; skraćeno kažemo $*$-prsten. Cilj je da definicije gore pomenutih inverza proširimo sa M_n na R. Pokazaćemo da se sva četiri tipa inverza mogu ispitivati na sličan, analogan način. MP i grupni inverz elementa $a \in R$ se definišu na isti način kao u matričnom slučaju; i kada postoje oni su jedinstveni. Određene karakterizacije MP invertibilnosti u prstenu se mogu naći u [57].

Rezultati ovog poglavlja su publikovani u radu [94].

Definicija jezgarnog i dualnog jezgarnog inverza u prstenu

Definicije jezgarnog i dualnog jezgarnog inverza datih u Definicijama 4.1.1 odnosno 4.1.2 nemaju smisla za elemente prstena. Potražimo zbog toga ekvivalentne čisto algebarske definicije ovih inverza.

Ali, najpre ćemo pokazati da sva četiri tipa inverza pripadaju klasi refleksivnih inverza sa unapred definisanom slikom i nul prostorom (jezgrom). Poznato je da je $A^\dagger$ refleksivni inverz matrice A sa slikom $\operatorname{Im} A^\dagger = \operatorname{Im} A^*$ i nul prostorom $\operatorname{Ker} A^\dagger = \operatorname{Ker} A^*$, [13]. To možemo zapisati kao

$$A^\dagger = A^{(1,2)}_{\operatorname{Im} A^*, \operatorname{Ker} A^*}.$$

Takođe (videti [13]), $\operatorname{Im} A^\# = \operatorname{Im} A$ i $\operatorname{Ker} A^\# = \operatorname{Ker} A$, tj.

$$A^\# = A^{(1,2)}_{\operatorname{Im}(A), \operatorname{Ker}(A)}.$$

Da bi našli sličan izraz za jezgarni inverz, podsetimo se da je $A^{\oplus} = A^\# P_A$ (vedeti [9]). To znači da je

$$A^{\oplus} = A^\# A A^\dagger, \tag{4.3}$$

odakle dobijamo

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A^\# = \operatorname{Im}(A^\# A A^\dagger A A^\#) \subseteq \operatorname{Im}(A^\# A A^\dagger) = \operatorname{Im} A^{\oplus} \subseteq \operatorname{Im} A^\# \\ \operatorname{Ker} A^* = \operatorname{Ker} A^\dagger = \operatorname{Ker}(A^\dagger A A^\# A A^\dagger) \supseteq \operatorname{Ker}(A^\# A A^\dagger) = \operatorname{Ker} A^{\oplus} \supseteq \operatorname{Ker} A^\dagger. \end{aligned}$$

Odmah vidimo da je

$$A^{\oplus} = A^{(1,2)}_{\operatorname{Im} A, \operatorname{Ker} A^*}.$$

Na sličan način dobijamo

$$A_{\oplus} = A^{(1,2)}_{\operatorname{Im} A^*, \operatorname{Ker} A}.$$

Potražimo sada algebarsku definiciju jezgarnog inverza.

Lema 4.1.5. *Matrica $X \in M_n$ je jezgarni inverz matrice $A \in M_n$ ako i samo ako je $AXA = A$, $XM_n = AM_n$ i $M_nX = M_nA^*$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je X jezgarni inverz od A. Jasno je da je $XM_n \subseteq AM_n$ jer $\operatorname{Im} X \subseteq \operatorname{Im} A$. Iz (4.3), vidimo da je $AXA = A$ i $XA = A^{\#}A$, pa je $A = XA^2$, i zato $AM_n \subseteq XM_n$. Takođe je $A^* = A^*(AX)^* = A^*AX$, pa je $M_nA^* \subseteq M_nX$. Konačno, $X = A^{\#}AA^{\dagger} = A^{\#}(A^{\dagger})^*A^*$ implicira $M_nX \subseteq M_nA^*$. Obrnuto, pretpostavimo da je $A = AXA$, $XM_n = AM_n$ i $M_nX = M_nA^*$. Sledi $\operatorname{Im} X \subseteq \operatorname{Im} A$ i postoji $V \in M_n$ tako da je $X = VA^*$. Sada je jasno da je $(AX)^2 = AX$, i $X = VA^* = VA^*X^*A^* = XX^*A^*$. Dakle, $AX = AX(AX)^*$, odakle sledi da je AX samo-adjungovan, pa je $AX = P_A$. □

Slično, možemo pokazati da analogni rezultat važi i za dualni jezgarni inverz.

Lema 4.1.6. *Matrica $X \in M_n$ je dualni jezgarni inverz matrice $A \in M_n$ ako i samo ako je $AXA = A$, $XM_n = A^*M_n$ i $M_nX = M_nA$.*

Zahvaljujući Lemama 4.1.5 i 4.1.6, možemo proširiti koncepte jezgarnog i dualnog jezgarnog inverza sa M_n na R.

Definicija 4.1.7. Neka je $a \in R$. Element $a^{\oplus} \in R$ koji zadovoljava uslove

$$aa^{\oplus}a = a, \quad a^{\oplus}R = aR \quad \text{i} \quad Ra^{\oplus} = Ra^*$$

se zove *jezgarni* inverz od a.

Definicija 4.1.8. Neka je $a \in R$. Element $a_{\oplus} \in R$ koji zadovoljava jednačine

$$aa_{\oplus}a = a, \quad a_{\oplus}R = a^*R \quad \text{i} \quad Ra_{\oplus} = Ra$$

se zove *dualni jezgarni* inverz od a.

Skup svih grupno, MP, jezgarno, dualno jezgarno invertibilnih elemenata prstena R označavamo sa $R^{\#}$, odnosno sa $R^{\dagger}$, odnosno sa $R^{\oplus}$, odnosno sa $R_{\oplus}$.

Osobine grupnog, MP, jezgarnog i dualnog jezgarnog inverza

Na sličan način kao za jezgarni i dualni jezgarni inverz, možemo naći karakterizacije grupnog i MP inverza, koje su analogne uslovima u Definiciji 4.1.7 odnosno Definiciji 4.1.8.

Za $a \in R$ neka je ${}^{\circ}a = \{x \in R : xa = 0\}$ i $a^{\circ} = \{x \in R : ax = 0\}$. Potrebne su nam sledeće leme.

Lema 4.1.9. *Neka su $a, b \in R$. Tada:*

(i) *Ako je* $aR \subseteq bR$ *onda je* ${}^\circ b \subseteq {}^\circ a$.

(ii) *Ako je* $b \in R^{(1)}$ *i* ${}^\circ b \subseteq {}^\circ a$ *onda je* $aR \subseteq bR$.

Dokaz. (i): Pretpostavimo da je $aR \subseteq bR$ i $ub = 0$ za neko $u \in R$. Postoji $x \in R$ tako da je $a = bx$ pa je $ua = ubx = 0$.

(ii): Pretpostavimo sada da je ${}^\circ b \subseteq {}^\circ a$ i $b^{(1)} \in b\{1\}$. Kako je $(1 - bb^{(1)})b = 0$ imamo $(1 - bb^{(1)})a = 0$ pa je $a = bb^{(1)}a$. Dakle, $aR \subseteq bR$. □

Lema 4.1.10. *Neka su* $a, b \in R$. *Tada:*

(i) *Ako je* $Ra \subseteq Rb$ *onda je* $b^\circ \subseteq a^\circ$.

(ii) *Ako je* $b \in R^{(1)}$ *i* $b^\circ \subseteq a^\circ$ *onda je* $Ra \subseteq Rb$.

Teorema 4.1.11. *Neka su* $a, x \in R$. *Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(i) *a je grup invertibilan i* $x = a^\#$.

(ii) $axa = a$, $xR = aR$ *i* $Rx = Ra$.

(iii) $axa = a$, ${}^\circ x = {}^\circ a$ *i* $x^\circ = a^\circ$.

(iv) $axa = a$, $xR \subseteq aR$ *i* $Rx \subseteq Ra$.

(v) $axa = a$, ${}^\circ a \subseteq {}^\circ x$ *i* $a^\circ \subseteq x^\circ$.

Dokaz. (i) ⇒ (ii): Imamo $a = axa = aax = xaa$ i $x = xax = xxa = axx$ pa je $xR = aR$ i $Rx = Ra$.

(ii) ⇒ (iii) ⇒ (iv) ⇒ (v) sledi iz Lema 4.1.9 i 4.1.10.

(v) ⇒ (i): Iz $axa = a$ sledi da $ax - 1 \in {}^\circ a \subseteq {}^\circ x$ i $1 - xa \in a^\circ \subseteq x^\circ$ pa je $(ax-1)x = 0$ i $x(1-xa) = 0$. Sledi da je $x = ax^2 = x^2a$, i zbog toga je $ax = ax^2a = xa$ i $xax = x^2a = x$. Zbog jedinstvenosti grupnog inverza je $x = a^\#$. □

Teorema 4.1.12. *Neka su* $a, x \in R$. *Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(i) *a je MP invertibilan i* $x = a^\dagger$.

(ii) $axa = a$, $xR = a^*R$ *i* $Rx = Ra^*$.

(iii) $axa = a$, ${}^\circ x = {}^\circ(a^*)$ *i* $x^\circ = (a^*)^\circ$.

(iv) $axa = a$, $xR \subseteq a^*R$ *i* $Rx \subseteq Ra^*$.

(v) $axa = a$, ${}^\circ(a^*) \subseteq {}^\circ x$ *i* $(a^*)^\circ \subseteq x^\circ$.

Dokaz. (i) ⇒ (ii): Iz osobina MP inverza lako dobijamo jednakosti $a^* = xaa^* = a^*ax$ i $x = a^*x^*x = xx^*a^*$ pa je $xR = a^*R$ i $Rx = Ra^*$.

(ii) ⇒ (iii) ⇒ (iv) ⇒ (v) sledi iz Lema 4.1.9 i 4.1.10.

(v) ⇒ (i): Iz $a^*x^*a^* = a^*$, vidimo da je $(1-x^*a^*) \in (a^*)^\circ \subseteq x^\circ$ i $(1-a^*x^*) \in {}^\circ(a^*) \subseteq {}^\circ x$. Dakle, $x = xx^*a^*$ i $x = a^*x^*x$. Odavde je $ax = ax(ax)^*$ i $xa = (xa)^*xa$ pa su zbog toga ax i xa samo-adjungovani. Konačno, $xax = x(ax)^* = xx^*a^* = x$. Dokazali smo da je $x = a^\dagger$. □

Definicije 4.1.7, 4.1.8 i Teoreme 4.1.11 (ii), 4.1.12 (ii) pokazuju da se grupni, Mur-Penrouzov, jezgarni i dualni jezgarni inverz mogu definisati analogno:

$$\begin{aligned}
&x \in R \text{ je grupni inverz od } a \text{ ako i samo ako je } axa = a,\ xR = aR,\ Rx = Ra,\\
&x \in R \text{ je MP inverz od } a \text{ ako i samo ako je } axa = a,\ xR = a^*R,\ Rx = Ra^*,\\
&x \in R \text{ je jezgarni inverz od } a \text{ ako i samo ako je } axa = a,\ xR = aR,\ Rx = Ra^*\\
&x \in R \text{ je dualni jezgarni inverz od } a \text{ ako i samo ako je } axa = a,\ xR = a^*R,\ Rx = Ra.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Kao što možemo videti, četiri inverza su blisko povezana i može se reći da oni formiraju određenu podklasu klase svih unutrašnjih inverza. Šta više, možemo zaključiti da su jezgarni i dualni jezgarni inverz "između" grupnog i MP inverza.

U nastavku ćemo pokazati da je postojanje posmatranih inverza blisko povezano sa postojanjem određenih idempotenata. Najpre, dajemo nekoliko pomoćnih rezultata.

Lema 4.1.13. *Neka su $q_1, q_2 \in E(R)$. Ako je $Rq_1 \subseteq Rq_2$ i $q_2R \subseteq q_1R$ onda je $q_1 = q_2$.*

Dokaz. Ako je $Rq_1 \subseteq Rq_2$ onda je $q_1 = uq_2$ za neko $u \in R$ pa je $q_1q_2 = uq_2^2 = uq_2 = q_1$. Slično, iz $q_2R \subseteq q_1R$ sledi $q_1q_2 = q_2$. □

Lema 4.1.14. *Neka su $p_1, p_2 \in \widetilde{E}(R)$. Ako je $Rp_1 = Rp_2$ ili $p_1R = p_2R$ onda je $p_1 = p_2$.*

Dokaz. Ako je $Rp_1 = Rp_2$ tada je, kao u prethodnoj lemi, $p_1 = p_1p_2$ i $p_2 = p_2p_1$. Ali, $p_2 = p_2^* = p_1^*p_2^* = p_1p_2 = p_1$. Slično, $p_1R = p_2R$ implicira $p_1 = p_2$. □

Teorema 4.1.15. *Neka je $a \in R$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(i) *a je grupno invertibilan.*

(ii) *Postoji $q \in E(R)$ takav da je $qR = aR$ i $Rq = Ra$.*

(iii) *$a \in R^{(1)}$ i postoji $q \in E(R)$ takav da je ${}^\circ a = {}^\circ q$ i $a^\circ = q^\circ$.*

Ako su prethodna tvrđenja tačna onda tvrđenja (ii) i (iii) uključuju isti jedinstveni idempotent q. Šta više, proizvod $qa^{(1)}q$ je invarijantan u odnosu na izbor elementa $a^{(1)} \in a\{1\}$ i važi

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q \times q}, \quad a^\# = \begin{bmatrix} qa^{(1)}q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q \times q}. \tag{4.5}$$

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Pretpostavimo da je a grupno invertibilan i neka je $q = aa^\# = a^\#a$. Tada je $a = qa = aq$, tj. $qR = aR$, $Rq = Ra$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Iz $qR = aR$ imamo da je $q = ax$ i $a = qz$ za neko $x, z \in R$. Sledi, $qa = q^2z = qz = a$ i $axa = qa = a$, pa $a \in R^{(1)}$. Ostatak dokaza sledi iz Leme 4.1.9 (i) i Leme 4.1.10 (i).

(iii) $\Rightarrow$ (i): Pretpostavimo da $a \in R^{(1)}$ i pretpostavimo da postoji idempotent q takav da je $a^\circ = q^\circ$ i ${}^\circ a = {}^\circ q$. Neka je $a^{(1)} \in a\{1\}$ proizvoljan. Kako je $1 - a^{(1)}a \in a^\circ \subseteq q^\circ$ dobijamo $q = qa^{(1)}a$. Takođe, $1 - q \in q^\circ \subseteq a^\circ$, pa je $a = aq$. Slično, $q = aa^{(1)}q$ i $a = qa$. Stavimo da je $x = qa^{(1)}q$. Tada je $x = a^\#$, jer je

$$\begin{aligned}
&ax = aqa^{(1)}q = aa^{(1)}q = q, \quad xa = qa^{(1)}qa = qa^{(1)}a = q,\\
&axa = qa = a, \quad xax = qx = x.
\end{aligned}$$

Odavde sledi invarijantnost proizvoda $qa^{(1)}q$ u odnosu na izbor inverza $a^{(1)} \in a\{1\}$. Podsetimo se da svaki element iz R ima jedinstvenu matričnu reprezentaciju u odnosu na idempotent q. Zbog toga, iz $a = qaq$ i $a^{\#} = qa^{(1)}q$ sledi dokaz reprezentacija (4.5). Jedinstvenost za q sledi iz Leme 4.1.13. □

Teorema 4.1.16. *Neka je $a \in R$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(i) *a je MP invertibilan.*

(ii) *Postoje $p, r \in \widetilde{E}(R)$ takvi da je $pR = aR$ i $Rr = Ra$.*

(iii) *$a \in R^{(1)}$ i postoje $p, r \in \widetilde{E}(R)$ takvi da je ${}^{\circ}a = {}^{\circ}p$ i $a^{\circ} = r^{\circ}$.*

Ako su prethodna tvrđenja tačna onda tvrđenja (ii) i (iii) uključuju isti par jedinstvenih samo-adjungovanih idempotenta p i r. Šta više, proizvod $ra^{(1)}p$ je invarijantan u odnosu na izbor elementa $a^{(1)} \in a\{1\}$ i važi

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times r}, \quad a^{\dagger} = \begin{bmatrix} ra^{(1)}p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{r\times p}. \tag{4.6}$$

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Pretpostavimo da je a MP invertibilan i stavimo da je $p = aa^{\dagger}$ i $r = a^{\dagger}a$. Jasno je da su p i r samo-adjungovani idempotenti. Iz $a = pa = ar$ zaključujemo da je $pR = aR$ i $Rr = Ra$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Ako koristimo p, a zatim i r, umesto q onda se dokaz izvodi duž linija dokaza Teoreme 4.1.15 (ii) $\Rightarrow$ (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i): Kao u dokazu Teoreme 4.1.15, možemo pokazati da je $a = pa = ar$, $p = aa^{(1)}p$ i $r = ra^{(1)}a$. Stavimo $x = ra^{(1)}p$. Jednakost $x = a^{\dagger}$ sledi iz jednačina

$$\begin{aligned} ax &= ara^{(1)}p = aa^{(1)}p = p = p^* \\ xa &= ra^{(1)}pa = ra^{(1)}a = r = r^* \\ axa &= pa = a \\ xax &= rx = x. \end{aligned}$$

Sada, invarijantnost proizvoda $ra^{(1)}p$ u odnosu na izbor $a^{(1)} \in a\{1\}$ sledi iz poznate činjenice da je MP inverz jedinstven kada postoji. Kako je $a = par$ i $a^{\dagger} = x = ra^{(1)}p$, zbog jedinstvenosti predstavljanja, sledi dokaz reprezentacija (4.6). Jedinstvenost za p i r sledi iz Leme 4.1.14. □

$*$-prsten R je Rikartov $*$-prsten ako za svako $a \in R$ postoji samo-adjungovani idempotent p takav da je ${}^{\circ}a = Rp$, videti [15]. Analogna osobina za desni anulator je automatski zadovoljena u tom slučaju. Primetimo da je $Rp = {}^{\circ}(1-p)$.

Posledica 4.1.17. *Neka je $a \in R$ gde je R Rikartov $*$-prsten. Tada je a MP invertibilan ako i samo ako je a regularan.*

Analogne karakterizacije jezgarnog i dualnog jezgarnog inverza posredstvom idempotenata i anulatora su date sledećim dvema teoremama. Pored toga, ove inverze ćemo okarakterisati skupom jednačina. Matrične reprezentacije elemenata a i b u sledećoj teoremi uporediti sa odgovarajućim matričnim dekompozicijama navedenim u Teoremama 4.1.3 i 4.1.4.

Teorema 4.1.18. *Neka je $a \in R$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(i) *a je jezgarno invertibilan.*

(ii) *Postoji $x \in R$ tako da je $axa = a$, ${}^{\circ}x = {}^{\circ}a$ i $x^{\circ} = (a^*)^{\circ}$.*

(iii) *Postoji $x \in R$ tako da*

$$(1)\ axa = a \quad (2)\ xax = x \quad (3)\ (ax)^* = ax \quad (6)\ xa^2 = a \quad (7)\ ax^2 = x.$$

(iv) *Postoje $p \in \widetilde{E}(R)$ i $q \in E(R)$ tako da je $pR = aR$, $qR = aR$ i $Rq = Ra$.*

(v) *$a \in R^{(1)}$ i postoje $p \in \widetilde{E}(R)$ i $q \in E(R)$ tako da je ${}^{\circ}a = {}^{\circ}p$, ${}^{\circ}a = {}^{\circ}q$ i $a^{\circ} = q^{\circ}$.*

Ako su prethodna tvrđenja tačna onda je $x = a^{\oplus}$, $a^{\oplus}$ je jedinstven i tvrđenja (iv) i (v) uključuju isti par jedinstvenih idempotenata p i q. Šta više, proizvod $qa^{(1)}p$ je invarijantan u odnosu na izbor elementa $a^{(1)} \in a\{1\}$ i važi

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q}, \quad a^{\oplus} = \begin{bmatrix} qa^{(1)}p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q \times p}. \tag{4.7}$$

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Pretpostavimo da je a jezgarno invertibilan i neka je $x = a^{\oplus}$. Po definiciji važi $axa = a$, $xR = aR$ i $Rx = Ra^*$. Iz Lema 4.1.9 i 4.1.10, sledi da je ${}^{\circ}x = {}^{\circ}a$ i $x^{\circ} = (a^*)^{\circ}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Pretpostavimo da postoji $x \in R$ tako da je $axa = a$, ${}^{\circ}x = {}^{\circ}a$ i $x^{\circ} = (a^*)^{\circ}$. Prateći dokaze Teorema 4.1.11 i 4.1.12 možemo dobiti da je

$$x = ax^2, \quad ax = (ax)^* \quad \text{i} \quad xax = x.$$

Iz $xa - 1 \in {}^{\circ}x \subseteq {}^{\circ}a$ imamo

$$a = xa^2.$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Stavimo da je $p = ax$ i $q = xa$. Iz $axa = a$ sledi da su p i q idempotenti takvi da je $pR = aR$ i $Rq = Ra$. Jednačina (3) pokazuje da je p samo-adjungovan. Iz $a = xa^2 = qa$ i $q = xa = ax^2a$ zaključujemo $qR = aR$.

(iv) $\Rightarrow$ (v): Dokaz je sličan dokazu Teoreme 4.1.15 (ii) $\Rightarrow$ (iii).

(v) $\Rightarrow$ (i): Pretpostavimo da $a \in R^{(1)}$ i pretpostavimo da postoje samo-adjungovani idempotent $p \in R$ i idempotent $q \in R$ takvi da je ${}^{\circ}a = {}^{\circ}p$, ${}^{\circ}a = {}^{\circ}q$ i $a^{\circ} = q^{\circ}$. Fiksirajmo $a^{(1)} \in a\{1\}$. U dokazu Teoreme 4.1.15 smo dokazali da je $a = qa = aq$ i $q = qa^{(1)}a = aa^{(1)}q$. U dokazu Teoreme 4.1.16 smo dokazali da je $a = pa$ i $p = aa^{(1)}p$. Neka je $a^- \in a\{1\}$ proizvoljan. Tada je $qa^-p = qa^{(1)}aa^-aa^{(1)}p = qa^{(1)}aa^{(1)}p = qa^{(1)}p$, pa je qa^-p invarijantan u odnosu na izbor $a^- \in a\{1\}$. Stavimo da je $x = qa^{(1)}p$. Imamo $axa = aqa^{(1)}pa = aa^{(1)}a = a$. Takođe, $x = qa^{(1)}p = aa^{(1)}qa^{(1)}p$ i $xa^2 = qa^{(1)}pa^2 = qa^{(1)}aa = qa = a$, pa je $xR = aR$. Šta više,

$$x = qa^{(1)}p^* = qa^{(1)}(aa^{(1)}p)^* = qa^{(1)}p(a^{(1)})^*a^* \quad \text{i}$$
$$a^*ax = a^*aqa^{(1)}p = a^*aa^{(1)}p = a^*p = (pa)^* = a^*,$$

pa je $Rx = Ra^*$. Sledi da je $x = a^{\oplus}$, tj. a je jezgarno invertibilan.

Jedinstvenost idempotenata p i q sledi iz Lema 4.1.14 i 4.1.13. Pokazali smo da ako je x jezgarni inverz od a onda x ima osobine date u (ii) i (iii). Pretpostavimo da postoje dva elementa x i y koji zadovoljavaju jednačine u (iii). Iz dokaza (iii) $\Rightarrow$ (iv) i zbog jedinstvenosti idempotenata p i q zaključujemo da je $p = ax = ay$ i $q = xa = ya$. Dakle, $x = xax = yay = y$. Takođe smo dokazali da ako postoji neki element x koji zadovoljava jednačine u (iii) tada je a jezgarno invertibilan, ali njegov jezgarni inverz mora da zadovoljava jednačine u (iii) koje određuju x na jedinstven način. Sledi da su i element x koji se javlja u (ii) i element x koji se javlja u (iii) jednaki sa $a^{\oplus}$. Takođe sledi da je jezgarni inverz od a jedinstven. Reprezentacije (4.7) slede zbog $a = paq$ i $a^{\oplus} = x = qa^{(1)}p$. $\square$

Teorema koja se odnosi na dualni jezgarni inverz se može dokazati slično.

Teorema 4.1.19. *Neka je $a \in R$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(i) *a je dualno jezgarno invertibilan.*

(ii) *Postoji $x \in R$ tako da je $axa = a$, ${}^{\circ}x = {}^{\circ}(a^*)$ i $x^{\circ} = a^{\circ}$.*

(iii) *Postoji $x \in R$ tako da je*

$$(1)\ axa = a \quad (2)\ xax = x \quad (4)\ (xa)^* = xa \quad (8)\ a^2x = a \quad (9)\ x^2a = x.$$

(iv) *Postoje $r \in \widetilde{E}(R)$ i $q \in E(R)$ tako da je $Rr = Ra$, $qR = aR$ i $Rq = Ra$.*

(v) *$a \in R^{(1)}$ i postoje $r \in \widetilde{E}(R)$ i $q \in \widetilde{E}(R)$ tako da je $a^{\circ} = r^{\circ}$, ${}^{\circ}a = {}^{\circ}q$ i $a^{\circ} = q^{\circ}$.*

Ako su prethodna tvrđenja tačna onda je $x = a_{\oplus}$, $a_{\oplus}$ je jedinstven i tvrđenja (iv) i (v) uključuju isti par jedinstvenih idempotenata r i q. Šta više, proizvod $ra^{(1)}q$ je invarijantan u odnosu na izbor elementa $a^{(1)} \in a\{1\}$ i važi

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q\times r}, \quad a_{\oplus} = \begin{bmatrix} ra^{(1)}q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{r\times q}.$$

Koristićemo oznake q_a, p_a i r_a za idempotente povezane sa $a \in R$, date u Teoremama 4.1.15, 4.1.16, 4.1.18 i 4.1.19. Pisaćemo q, p i r umesto q_a, p_a i r_a kada ne postoji opasnost od zabune.

Pogledajmo jednačine u Teoremama 4.1.18 (iii) i 4.1.19 (iii) koje karakterišu jezgarni odnosno dualni jezgarni inverz. Primetimo da su te jednačine kombinacija jednačina koje karakterišu grupni inverz i jednačina koje karakterišu MP inverz. Da bi smo to videli dovoljno je proveriti da su sledeći skupovi jednačina ekvivalentni:

(i) $axa = a$, $xax = x$, $ax = xa$;

(ii) $axa = a$, $xax = x$, $xa^2 = a$, $a^2x = a$;

(iii) $axa = a$, $xax = x$, $x^2a = x$, $ax^2 = x$.

Napomena 4.1.20. U Teoremama 4.1.15, 4.1.16, 4.1.18 i 4.1.19 je uspostavljena povezanost između uopštene invertibilnosti elementa a i postojanja idempotenata $p = p_a$, $q = q_a$ i $r = r_a$ sa datim osobinama. Sledi, a je istovremeno grupno i MP invertibilan ako i samo ako je a istovremeno jezgarno i dualno jezgarno invertibilan. Drugim rečima, $R^\# \cap R^\dagger = R^{\oplus} \cap R_{\oplus}$ i $R^{\oplus} \cup R_{\oplus} \subseteq R^\#$. Treba naglasiti da unutrašnja invertibilnost elementa a (postoji x tako da je $axa = a$) implicira MP invertibilnost od a u slučaju kada je R, C^*-algebra (videti [45]) ili Rikartov $*$-prsten (Posledica 4.1.17).

Napomena 4.1.21. Tvrđenja (ii) i (iii) u Teoremi 4.1.18 i tvrđenja (ii) i (iii) u Teoremi 4.1.19 mogu poslužiti kao ekvivalentne definicije za jezgarni odnosno dualni jezgarni inverz.

Pretpostavimo da $a \in R^\# \cap R^\dagger$. Iz Teorema 4.1.15 i 4.1.16, sledi da postoje jedinstveni idempotent $q = q_a$ i jedinstveni samo-adjungovani idempotenti $p = p_a$ i $r = r_a$ sa datim osobinama. Zbog jedinstvenosti, zaključujemo da su ti idempotenti isti sa idempotentima u Teoremama 4.1.18 i 4.1.19. Dakle,

$$\begin{aligned} q &= aa^\# = a^\# a = a^{\oplus} a = a a_{\oplus} \\ p &= aa^\dagger = aa^{\oplus} \\ r &= a^\dagger a = a_{\oplus} a. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Sada je lako pokazati da je

$$pq = q, \quad qp = p, \quad rq = r, \quad qr = q. \tag{4.9}$$

Šta više,

$$q^*p = (pq)^* = q^*, \quad pq^* = (qp)^* = p, \quad q^*r = (rq)^* = r, \quad rq^* = (qr)^* = q^*. \tag{4.10}$$

Iz (4.9) i (4.10) sledi da je p rangovska projekcija od q (eng. "range projection") i da je r rangovska projekcija od q^*, tj. $p = q^\perp$ i $r = (q^*)^\perp$, videti [60]. U prethodnim teoremama smo takođe dokazali da je

$$a = qaq = paq = qar = par, \quad a^\# = qa^{(1)}q, \quad a^\dagger = ra^{(1)}p, \quad a^{\oplus} = qa^{(1)}p, \quad a_{\oplus} = ra^{(1)}q, \tag{4.11}$$

gde je $a^{(1)} \in a\{1\}$ proizvoljan. Iz (4.9) – (4.11), sledi

$$\begin{aligned}
a &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q\times q} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times q} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q\times r} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times r} \\
a^\# &= \begin{bmatrix} a^\# & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q\times q} = \begin{bmatrix} a^\# & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times q} = \begin{bmatrix} a^\# & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q\times r} = \begin{bmatrix} a^\# & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times r} \\
a^\dagger &= \begin{bmatrix} a^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{r\times p} = \begin{bmatrix} a^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q^*\times p} = \begin{bmatrix} a^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{r\times q^*} = \begin{bmatrix} a^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q^*\times q^*} \\
a^{\oplus} &= \begin{bmatrix} a^{\oplus} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q\times p} = \begin{bmatrix} a^{\oplus} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p} = \begin{bmatrix} a^{\oplus} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q\times q^*} = \begin{bmatrix} a^{\oplus} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times q^*} \\
a_{\oplus} &= \begin{bmatrix} a_{\oplus} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{r\times q} = \begin{bmatrix} a_{\oplus} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q^*\times q} = \begin{bmatrix} a_{\oplus} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{r\times r} = \begin{bmatrix} a_{\oplus} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q^*\times r}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Pogledajmo, na primer, reprezentaciju $a^{\textcircled{\#}} = \begin{bmatrix} a^{\textcircled{\#}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q\times q^*} \in qRq^*$. Postoji jedinstveni element $x \in q^*Rq$ takav da je $xa^{\textcircled{\#}} = q^*$ i $a^{\textcircled{\#}}x = q$. Naime, $x = q^*aq$. U smislu Definicije 3.1.10, možemo reći da je element $a^{\textcircled{\#}} \in qRq^*$, (q, q^*)-invertibilan. Može se pokazati da ovu osobinu imaju svi elementi u gornjim levim uglovima u (4.12).

Napomena 4.1.22. Na osnovu prethodnog dobijamo sledeće zaključke.

1. Ako je $a \in R^{\#}$ onda je $a^{\#}$ (q, q)-inverz od a.
2. Ako je $a \in R^{\dagger}$ onda je $a^{\dagger}$ (p, r)-inverz od a.
3. Ako je $a \in R^{\textcircled{\#}}$ onda je $a^{\textcircled{\#}}$ (p, q)-inverz od a.
4. Ako je $a \in R_{\textcircled{\#}}$ onda je $a_{\textcircled{\#}}$ (q, r)-inverz od a.

Na ovu osobinu ćemo se vratiti u Glavi 4.3 kada ove inverze budemo posmatrali na skupu Hilbertovih operatora.

Jasno je da je $(a^{\#})^{\#} = a$ i $(a^{\dagger})^{\dagger} = a$. Izrazi za $(A^{\textcircled{\#}})^{\dagger}$ i $(A^{\textcircled{\#}})^{\textcircled{\#}}$, gde su $A \in M_n$, su dati u [9]. Dajemo izraze za ostale "duple" inverze.

Teorema 4.1.23. *Neka je $a \in R^{\#} \cap R^{\dagger}$. Tada:*

(i) $p_{a^{\#}} = p_a, \quad q_{a^{\#}} = q_a, \quad r_{a^{\#}} = r_a$ *i*

$$(a^{\#})^{\#} = a, \quad (a^{\#})^{\dagger} = r_a a p_a, \quad (a^{\#})^{\textcircled{\#}} = ap_a, \quad (a^{\#})_{\textcircled{\#}} = r_a a.$$

(ii) $p_{a^{\dagger}} = r_a, \quad q_{a^{\dagger}} = q_a^*, \quad r_{a^{\dagger}} = p_a$ *i*

$$(a^{\dagger})^{\#} = q_a^* a q_a^*, \quad (a^{\dagger})^{\dagger} = a, \quad (a^{\dagger})^{\textcircled{\#}} = q_a^* a, \quad (a^{\dagger})_{\textcircled{\#}} = a q_a^*.$$

(iii) $p_{a^{\textcircled{\#}}} = q_{a^{\textcircled{\#}}} = r_{a^{\textcircled{\#}}} = p_a$ *i*

$$(a^{\textcircled{\#}})^{\#} = (a^{\textcircled{\#}})^{\dagger} = (a^{\textcircled{\#}})^{\textcircled{\#}} = (a^{\textcircled{\#}})_{\textcircled{\#}} = ap_a.$$

(iv) $p_{a_{\textcircled{\#}}} = q_{a_{\textcircled{\#}}} = r_{a_{\textcircled{\#}}} = r_a$ *i*

$$(a_{\textcircled{\#}})^{\#} = (a_{\textcircled{\#}})^{\dagger} = (a_{\textcircled{\#}})^{\textcircled{\#}} = (a_{\textcircled{\#}})_{\textcircled{\#}} = r_a a.$$

Dokaz. Dokazaćemo samo tvrđenje (iii); ostala tvrđenja se mogu dokazati na isti način. Kako je $a^{\textcircled{\#}}R = aR = p_aR$ i $Ra^{\textcircled{\#}} = Ra^* = (aR)^* = (p_aR)^* = Rp_a$, zaključujemo da je

$$p_{a^{\textcircled{\#}}} = q_{a^{\textcircled{\#}}} = r_{a^{\textcircled{\#}}} = p_a.$$

Iz (4.11), dobijamo

$$\begin{aligned}(a^{\textcircled{\#}})^{\#} = (a^{\textcircled{\#}})^{\dagger} = (a^{\textcircled{\#}})^{\textcircled{\#}} = (a^{\textcircled{\#}})_{\textcircled{\#}} &= \begin{bmatrix} p_a(a^{\textcircled{\#}})^{(1)}p_a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p_a\times p_a} \\ &= \begin{bmatrix} p_a a p_a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p_a\times p_a} = \begin{bmatrix} ap_a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p_a\times p_a}.\end{aligned}$$

$\square$

Iz Teoreme 4.1.23 sledi da su $a^{\textcircled{\#}}$ i $a_{\textcircled{\#}}$ EP elementi. Osobine jezgarnog inverza date u sledećoj teoremi su uopštenje slučaja $R = M_n$ (videti [9]) na slučaj proizvoljnog $*$-prstena.

Teorema 4.1.24. *Neka je $a \in R^{\textcircled{\#}}$ i $n \in \mathbb{N}$. Tada:*

(i) $a^{\textcircled{\#}} = a^{\#}p_a$;

(ii) $(a^{\textcircled{\#}})^2 a = a^{\#}$;

(iii) $(a^{\textcircled{\#}})^n = (a^n)^{\textcircled{\#}}$;

(iv) $((a^{\textcircled{\#}})^{\textcircled{\#}})^{\textcircled{\#}} = a^{\textcircled{\#}}$;

(v) *Ako je $a \in R^{\dagger}$ onda je*

$$a^{\#} = a^{\textcircled{\#}}aa_{\textcircled{\#}}, \quad a^{\dagger} = a_{\textcircled{\#}}aa^{\textcircled{\#}}, \quad a^{\textcircled{\#}} = a^{\#}aa^{\dagger}, \quad a_{\textcircled{\#}} = a^{\dagger}aa^{\#}.$$

Dokaz. Kako je $a \in R^{\textcircled{\#}}$, postoje $a^{\#}$, q_a i p_a.

(i): Po Teoremi 4.1.18 (iii) i zbog (4.8), imamo $a^{\textcircled{\#}} = a^{\textcircled{\#}}aa^{\textcircled{\#}} = a^{\#}aa^{\textcircled{\#}} = a^{\#}p_a$.

(ii): $(a^{\textcircled{\#}})^2 a = a^{\textcircled{\#}}q_a \overset{(i)}{=} a^{\#}p_a q_a \overset{(4.9)}{=} a^{\#}q_a = a^{\#}$.

(iii): Kako je $a = a^n(a^{\#})^{n-1} = (a^{\#})^{n-1}a^n$ zaključujemo da je $Ra^n = Ra = Rq_a$ i $a^nR = aR = q_aR = p_aR$. Koristeći $a(a^{\textcircled{\#}})^2 = a^{\textcircled{\#}}$ vidimo da je $a^n(a^{\textcircled{\#}})^n = aa^{\textcircled{\#}}$ pa je $a^n(a^{\textcircled{\#}})^n a^n = aa^{\textcircled{\#}}a^n = a^n$, tj. $(a^{\textcircled{\#}})^n \in a^n\{1\}$. Iz Teoreme 4.1.18, dobijamo

$$(a^n)^{\textcircled{\#}} = q_a(a^n)^{(1)}p_a = q_a(a^{\textcircled{\#}})^n p_a = (a^{\textcircled{\#}})^n.$$

(iv): Iz dokaza tvrđenja (iii) Teoreme 4.1.23, dobijamo

$$((a^{\textcircled{\#}})^{\textcircled{\#}})^{\textcircled{\#}} = a^{\textcircled{\#}}p_{a^{\textcircled{\#}}} = a^{\textcircled{\#}}p_a = a^{\textcircled{\#}}.$$

(v): Ako je $a \in R^{\dagger}$ tada, iz (4.8), sledi $a^{\#} = a^{\#}aa^{\#} = a^{\textcircled{\#}}aa_{\textcircled{\#}}$, $a^{\dagger} = a^{\dagger}aa^{\dagger} = a_{\textcircled{\#}}aa^{\textcircled{\#}}$, $a^{\textcircled{\#}} = a^{\textcircled{\#}}aa^{\textcircled{\#}} = a^{\#}aa^{\dagger}$ i $a_{\textcircled{\#}} = a_{\textcircled{\#}}aa_{\textcircled{\#}} = a^{\dagger}aa^{\#}$.

□

Naravno, važi i analogan rezultat za dualni jezgarni inverz elementa $a \in R_{\textcircled{\#}}$. Jednakosti u (v) u Teoremi 4.1.24, možda, na najbolji način ilustruju povezanost grupnog, MP, jezgarnog i dualnog jezgarnog inverza. Još jednom vidimo da su jezgarni i dualni jezgarni inverz "između" grupnog i MP inverza i obrnuto.

Karakterizacija EP elemenata

U nastavku ćemo posmatrati ekvivalentne uslove uslovu da je $a \in R$, EP element. EP matrice i EP operatori su opširno ispitivani od strane mnogih istraživača. U skorašnje vreme, EP elementi su dosta proučavani i u kontekstu prstena sa involucijom. Za skorašnju teoriju videti, na primer, [20], [81] i tamo navedenu literaturu.

Teorema 4.1.25. *Neka je $a \in R$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *a je EP, tj.* $a \in R^{\#} \cap R^{\dagger}$ *i* $a^{\#} = a^{\dagger}$.

(ii) $a \in R^{\dagger}$ *i* $p_a = r_a$.

(iii) $a \in R^{\oplus}$ *i* $p_a = q_a$.

(iv) $a \in R_{\oplus}$ *i* $r_a = q_a$.

(v) $a \in R^{\oplus}$ *i* $a^{\#} = a^{\oplus}$.

(vi) $a \in R_{\oplus}$ *i* $a^{\#} = a_{\oplus}$.

(vii) $a \in R^{\#} \cap R^{\dagger}$ *i* $a^{\dagger} = a^{\oplus}$.

(viii) $a \in R^{\#} \cap R^{\dagger}$ *i* $a^{\dagger} = a_{\oplus}$.

(ix) $a \in R^{\#} \cap R^{\dagger}$ *i* $a^{\oplus} = a_{\oplus}$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) – (ix): Ako je a EP element onda je

$$p_a = aa^{\dagger} = aa^{\#} = q_a = a^{\#}a = a^{\dagger}a = r_a.$$

Iz (4.11), sledi

$$a^{\#} = a^{\dagger} = a^{\oplus} = a_{\oplus} = q_a a^{(1)} q_a.$$

(ii) ili (iii) ili (iv) $\Rightarrow$ (i): Pretpostavimo da je $p_a = r_a$. Imamo $p_aR = aR$ i $Rp_a = Rr_a = Ra$ pa postoji q_a i $p_a = q_a = r_a$. Sledi da $a \in R^{\#}$ i $aa^{\dagger} = p_a = q_a = aa^{\#}$. Dakle, $aa^{\#} = a^{\#}a$ je samo-adjungovan, pa je $a^{\dagger} = a^{\#}$. Slično, $p_a = q_a$ ili $r_a = q_a$ implicira $p_a = r_a = q_a$ pa možemo nastaviti kao maločas.

(v) $\Rightarrow$ (i): Pretpostavimo da $a \in R^{\oplus}$ i da je $a^{\oplus} = a^{\#}$. Množeći obe strane ove jednakosti sa a sa leve strane, dobijamo $p_a = aa^{\oplus} = aa^{\#} = q_a$. Iz prethodnog dela dokaza sledi da je a EP.

Ostale implikacije se mogu dokazati na sličan način. □

Dakle, a je EP ako i samo ako $a \in R^{\#} \cap R^{\dagger}$ i $a^{\#} = a^{\dagger} = a^{\oplus} = a_{\oplus}$. Neke od karakterizacija u sledećoj teoremi uključuju samo grupni i MP inverz. Napominjemo da su neke od njih poznate. Navodimo ih zbog kompletnosti. Za $x, y \in R$ pišemo $[x, y] = xy - yx$.

Teorema 4.1.26. *Neka je* $a \in R^{\dagger} \cap R^{\#}$. *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *a je EP.*

(ii) *Bar jedan element (svi elementi) skupa*

$$\{[a, a^{\dagger}], [a, a^{\oplus}], [a, a_{\oplus}], [a^{\#}, a^{\dagger}], [a^{\#}, a^{\oplus}], [a^{\#}, a_{\oplus}]\}$$

je jednak nuli.

(iii) *Bar jedan element (svi elementi) skupa*

$$\{ap_a, r_a a, r_a a p_a, q_a^* a, a q_a^*, q_a^* a q_a^*\}$$

je jednak a.

(iv) $ap_a = r_a a$.

(v) $r_a a p_a = r_a a$.

(vi) $r_a a p_a = a p_a$.

(vii) $q_a^* a = a p_a$.

(viii) $a q_a^* = r_a a$.

Dokaz. Neka je $p = p_a$, $q = q_a$ i $r = r_a$.

(i) $\Rightarrow$ (ii)–(ix): Ako je a EP onda je iz Teoreme 4.1.25, $a^{\#} = a^{\dagger} = a^{\oplus} = a_{\oplus}$ i $q = p = r = q^*$. Sada dokazi trivijalno slede.

Za dokaz obrnutih implikacija koristićemo jednakosti (4.8)–(4.11) i Teoremu 4.1.25 ili neki od već dokazanih uslova.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Treba pokazati da ako postoji element skupa koji je jednak nuli onda je a EP. Ako je $aa^{\oplus} = a^{\oplus}a$ onda je $p = q$. Po Teoremi 4.1.25, a je EP. Pretpostavimo da je $[a^{\#}, a^{\oplus}] = 0$, tj. da je $a^{\#}a^{\oplus} = a^{\oplus}a^{\#}$. Množeći obe strane jednakosti sa leva sa a dobijamo $qa^{\oplus} = pa^{\#}$. Iz (4.11), sledi $a^{\oplus} = a^{\#}$, pa je a EP. Pretpostavimo da je $a^{\#}a^{\dagger} = a^{\dagger}a^{\#}$. Množeći obe strane jednakosti sa a sa leve strane dobijamo $a^{\oplus} = pa^{\#} = a^{\#}$, pa je a EP. Ostali slučajevi ($[a, a^{\dagger}] = 0$, $[a, a_{\oplus}] = 0$, $[a^{\#}, a_{\oplus}] = 0$) se mogu slično dokazati.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Ako je $ap = a$ onda, množeći obe strane sa $a^{\#}$ sa leva, dobijamo $qp = q$, odakle je $p = q$. Dakle, a je EP. Ako je $ra = a$ onda je $q = aa^{\#} = raa^{\#} = rq = r$, pa je a EP. Ako je $rap = a$ onda je $a = qa = qrap = qap = ap$. Ako je $q^*a = a$ onda je $a = q^*a = rq^*a = ra$. Ako je $aq^* = a$ onda je $a = aq^* = aq^*p = ap$. Konačno, ako je $q^*aq^* = a$ onda je $a = q^*aq^*p = ap$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Pretpostavimo da je $ap = ra$. Iz $qr = q$ dobijamo $a = qa = qra = qap = ap$. Iz prethodnog dela dokaza, zaključujemo da je a EP.

(v) $\Rightarrow$ (i): Ako je $rap = ra$ onda je $a = qa = qra = qrap = qap = ap$.

(vi) $\Rightarrow$ (i): Ako je $rap = ap$ onda je $a = aq = apq = rapq = raq = ra$.

(vii) $\Rightarrow$ (i): Pretpostavimo da je $q^*a = ap$. Kako je $pq^* = p$ imamo $a = pa = pq^*a = pap = ap$. Iz dela (iii) $\Rightarrow$ (i) sledi da je a EP.

(viii) $\Rightarrow$ (i): Kako je $q^*r = r$ zaključujemo da $aq^* = ra$ implicira $a = ar = aq^*r = rar = ra$, pa je a EP. □

Kombinujući Teoremu 4.1.23 sa Teoremom 4.1.26, možemo generalizovati rezultate iz rada [9] i dobiti ogroman broj novih karakterizacija za EP elemente.

Rao-Mitrin inverz sa ograničenjima i Drejzinov (b, c) inverz

Nakon što smo definiciju jezgarnog i dualnog jezgarnog inverza proširili sa skupa matrica na proizvoljan prsten, do kraja glave želimo da pokažemo da ovako definisani inverzi pripadaju klasi (b, c) inverza i klasi inverza duž elementa. Klase (b, c) inverza i inverza duž elementa su nedavno, pod ovim imenima, ispitivane u radovima [34] odnosno [70]. Još jedan tip inverza, takozvani jezgarni-EP inverz, je nedavno ispitivan od strane Prasada i Monahe u radu [87]. Međutim, čini se da su autori ovih radova prevideli Rao Mitrin inverz sa ograničenjima uveden 1972. godine u radu [100], videti takođe Glavu 4.11 u [99].

U ovom poglavlju želimo da ukažemo da je upravo ovaj inverz preteča Drejzinovog (b, c) inverza, a samim tim i inverza duž elementa i jezgarnog-EP inverza. Preciznije, kada se Rao Mitrin inverz napiše u čisto algebarskom (multiplikativnom) obliku ispostavlja se da se on poklapa sa (b, c) inverzom. Rezultati ovog poglavlja su publikovani u radu [94], a deo se nalazi i u rukopisu [90] koji je trenutno na recenziji. Naglašavamo da, uz adekvatnu interpretaciju, većina rezultata ovog poglavlja ostaje na snazi i za pravougaone kompleksne matrice. U radu [34] iz 2012. godine Drejzin je uveo sledeću klasu spoljašnjih uopštenih inverza.

Definicija 4.1.27. (Videti [34].) Neka je S polugrupa i neka su $a, b, c, y \in S$. Kažemo da je y, (b, c)-*inverz* od a ako je

(1) $y \in (bSy) \cap (ySc)$ i

(2) $yab = b$, $cay = c$.

U slučaju kada postoji (b, c)-inverz od a, označimo ga sa y, on je jedinstven i zadovoljava jednačinu $yay = y$. Kada je $S = M_n$ i $b = c = e$ gde je e idempotent, (b, c)-inverz od a se poklapa sa Bot-Dafinovim uopštenim inverzom od a u odnosu na e, [18]. Zbog toga je Drejzin naglasio da se Bot-Dafinov inverz mora prepoznati kao direktna preteča (b, c) inverza. Primetimo da se uslov (1) u Definiciji 4.1.27 može zameniti uslovom

$$(1')\ y \in (bS) \cap (Sc).$$

Zaista, pretpostavimo da je $y \in (bS) \cap (Sc)$ i $yab = b$, $cay = c$. Tada je $y = bu = vc$ za neke $u, v \in S$ pa je

$$y = bu = yabu = yavc \in ySc.$$

Slično, $y \in bSy$.

Neka su $A, B, C \in M_n$. U radu [100] iz 1972. godine, Rao i Mitra su uveli dva različita tipa ograničenja kako bi proširili koncept Bot-Dafinovog inverza i definisali novi inverz sa ograničenjima $Y \in M_n$ matrice A.

Ograničenje tipa 1.

c: $\operatorname{Im} Y \subseteq \operatorname{Im} B$;

r: $\operatorname{Im} Y^* \subseteq \operatorname{Im} C^*$.

Ograničenje tipa 2.

C: YA je identičko preslikavanje na $\operatorname{Im} B$;

R: $(AY)^*$ je identičko preslikavanje na $\operatorname{Im} C^*$.

Definicija 4.1.28. (Videti [100].) Neka su $A, B, C \in M_n$. Kažemo da je $Y \in M_n$, *crCR inverz sa ograničenjima* matrice A ako Y zadovoljava ograničenja c, r, C i R. Ovaj inverz ćemo označavati sa $A_{B,C}$.

Napominjemo da su Rao i Mitra označili njihov inverz sa A_{crCR}. Takođe, oni su ga definisali u nešto širem kontekstu, gde je A, $m \times n$ matrica koja slika vektore iz $\mathcal{E}^n$ u $\mathcal{E}^m$, gde $\mathcal{E}^n$ predstavlja n dimenzionalni vektorski prostor sa skalarnim proizvodom.

U cilju prepisivanja ulsova c, r, C i R na čisto multiplikativnom jeziku, primetimo da je $\operatorname{Im} Y \subseteq \operatorname{Im} B$ ako i samo ako je $Y = BK$ za neku matricu $K \in M_n$, tj. ako i samo ako

$Y \in BM_n$. Slično, $\operatorname{Im} Y^* \subseteq \operatorname{Im} C^*$ ako i samo ako je $Y^* \in C^* M_n$ što je ekvivalentno sa $Y \in M_n C$. Evidentno je da je ograničenje C ekvivalentno sa $YAB = B$, dok je ograničenje R ekvivalentno sa $(AY)^* C^* = C^*$, tj. sa $CAY = C$. Dakle, ograničenja se mogu napisati na sledeći način:

c: $Y \in BM_n$;
r: $Y \in M_n C$;
C: $YAB = B$;
R: $CAY = C$,
što su upravo uslovi (1') i (2).

U [100] je dokazano da $A_{B,C}$ postoji ako i samo ako je $\operatorname{rank}(CAB) = \operatorname{rank}(C) = \operatorname{rank}(B)$ i u tom slučaju je $A_{B,C}$ jedinstven. Zbog kompletnosti, u sledećoj teoremi ćemo ovo dokazati, ali na drugačiji način. Matrice ćemo identifikovati sa operatorima koji deluju na $\mathbb{C}^n$.

Teorema 4.1.29. *Neka su $A, B, C \in M_n$ i neka su K i L potprostori od $\mathbb{C}^n$ takvi da je $\operatorname{Im} B \oplus K = \mathbb{C}^n$ i $L \oplus \operatorname{Ker} C = \mathbb{C}^n$. crCR inverz sa ograničenjima $A_{B,C}$ of A postoji ako i samo ako je* $\operatorname{rank}(\mathrm{CAB}) = \operatorname{rank}(\mathrm{C}) = \operatorname{rank}(\mathrm{B})$ *i u tom slučaju je $A_{B,C}$ jedinstven, i A i $A_{B,C}$ imaju sledeće reprezentacije:*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} B \\ K \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} L \\ \operatorname{Ker} C \end{bmatrix}$$
$$A_{B,C} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} L \\ \operatorname{Ker} C \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} B \\ K \end{bmatrix},$$

gde je $A_1 : \operatorname{Im} B \to L$ invertibilan.

Dokaz. Neka je $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$ u odnosu na date dekompozicije. Jasno je da operatori $B : \operatorname{Im} B^* \oplus \operatorname{Ker} B \to \operatorname{Im} B \oplus K$ i $C : L \oplus \operatorname{Ker} C \to \operatorname{Im} C \oplus \operatorname{Ker} C^*$ imaju reprezentacije

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.13}$$

gde su B_1 i C_1 invertibilni.

Pretpostavimo da je $\operatorname{rank}(\mathrm{CAB}) = \operatorname{rank}(\mathrm{C}) = \operatorname{rank}(\mathrm{B})$. Sledi $\dim L = n - \dim \operatorname{Ker} C = \operatorname{rank}(\mathrm{C}) = \operatorname{rank}(\mathrm{B})$ i $\operatorname{Ker}(CAB) = \operatorname{Ker} B$. Da bi dokazali da je A_1 invertibilan dovoljno je dokazati da je on injektivan. Neka je $A_1 x = 0$ za neko $x = Bz \in \operatorname{Im} B$, $z \in \mathbb{C}^n$. Tada je $ABz = A_3 Bz \in \operatorname{Ker} C$ pa $z \in \operatorname{Ker}(CAB) = \operatorname{Ker} B$, tj. $x = 0$. Sada, jednostavna provera pokazuje da operator $Y = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} L \\ \operatorname{Ker} C \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} B \\ K \end{bmatrix}$ zadovoljava ograničenja c, r, C i R. Dakle, $A_{B,C}$ postoji i $A_{B,C} = Y$.

Pretpostavimo sa druge strane da postoji *crCR* inverz sa ograničenjima od A i označimo ga sa $Y \in M_n$. Kako Y ispunjava ograničenja c i r, imamo $\operatorname{Im} Y \subseteq \operatorname{Im} B$ i $\operatorname{Ker} C \subseteq \operatorname{Ker} Y$, pa Y ima reprezentaciju

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} L \\ \operatorname{Ker} C \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} B \\ K \end{bmatrix},$$

za neko $Y_1 : L \to \operatorname{Im} B$. Jenostavna kalkulacija pokazuje da je uslov C: $YAB = B$ ekvivalentan sa $Y_1A_1B_1 = B_1$. Kako je B_1 invertibilan, to je $Y_1A_1 = I_{\operatorname{Im} B}$. Slično, uslov R implicira $A_1Y_1 = I_L$. Dakle, A_1 je invertibilan, $Y_1 = A_1^{-1}$ i zato je Y jedinstven. Ostaje još da pokažemo jednakost rangova. Kako je A_1 invertibilan zaključujemo da je $\mathrm{rank(B) = dim\,L = rank(C)}$. Takođe, B_1 i C_1 su invertibilni pa je

$$\mathrm{rank(C) = rank(C_1) = rank(C_1A_1B_1) = rank(CAB).}$$

□

Napomena 4.1.30. Iz Teoreme 4.1.29 i njenog dokaza zaključujemo sledeće:

1. U ograničenjima c, r, C i R matrice B i C možemo zameniti bilo kojim drugim matricama B_1 odnosno C_1 takvim da je $\operatorname{Im} B_1 = \operatorname{Im} B$ i $\operatorname{Im} C_1^* = \operatorname{Im} C^*$ (tj. $\operatorname{Ker} C_1 = \operatorname{Ker} C$). Specijalno, možemo odabrati (samo-adjungovane) idempotentske matrice E i F takve da je $\operatorname{Im} E = \operatorname{Im} B$ i $\operatorname{Ker} F = \operatorname{Ker} C$, videti takođe [100].

2. $A_{B,C}$ je spoljašnji inverz $Y = A^{(2)}_{T,S}$ od A sa predefinisanom slikom i nul prostorom, naime, $\operatorname{Im} Y = T := \operatorname{Im} B$ i $\operatorname{Ker} Y = S := \operatorname{Ker} C = (\operatorname{Im} C^*)^{\perp}$. Ovaj inverz je ispitivan od strane velikog broja autora, videti na primer [13], str. 72, Teorema 14.

3. Pretpostavimo da $A_{B,C}$ postoji. Kako je $\mathrm{rank(B) = rank(C)}$, sledi da postoji matrica D takva da je $\operatorname{Im} D = \operatorname{Im} B$ i $\operatorname{Ker} D = \operatorname{Ker} C$ i zbog toga matricu D možemo uzeti umesto matrica B i C.

4. Iz (4.13) sledi da je $A_{B,C} = B(CAB)^{(1)}C$, gde je $(CAB)^{(1)}$ proizvoljan unutrašnji inverz od CAB. Ovo je takođe dokazano u [100].

Iz prethodne diskusije dobijamo sledeću teoremu.

Teorema 4.1.31. *Neka su $A, B, C \in M_n$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) $\mathrm{rank(B) = rank(C) = rank(CAB)}$,

(2) *Postoji (B, C)-inverz od A,*

(3) *Postoji $A_{B,C}$,*

(4) *Postoji $A^{(2)}_{\operatorname{Im} B, \operatorname{Ker} C}$,*

i u tom slučaju se ovi inverzi poklapaju.

Nedavno, Meri je nezavisno od Drejzina definisao inverz elementa a duž elementa d koji je specijalni slučaj (b, c) inverza od a, pa samim tim i specijalni slučaj Rao i Mitrinog $crCR$ inverza sa ograničenjima. Za polugrupu S, sa S^1 označavamo monoid generisan sa S. *Grinova relacija* (pre-uređenje) $\leqslant_{\mathcal{H}}$ je definisana sa, videti [70]:

$$a \leqslant_{\mathcal{H}} b \iff S^1a \subseteq S^1b \text{ i } aS^1 \subseteq bS^1.$$

Odmah vidimo da je

$$a \leqslant_{\mathcal{H}} b \iff a = b \text{ ili } a \in Sb \cap bS. \tag{4.14}$$

Definicija 4.1.32. (Videti [70].) Neka su $a, d \in S$. Kažemo da je $y \in S$ *inverz od a duž elementa d* ako je $yad = d = day$ i $y \leqslant_{\mathcal{H}} d$.

Sledi da je y inverz od a duž d ako i samo ako je y, (d, d)-inverz od a.

Napomena 4.1.33. Primetimo da je u slučaju $S = M_n$ uslov $a \in Sb$ ekvivalentan sa $\operatorname{Ker} b \subseteq \operatorname{Ker} a$. Takođe, uslov $a \in bS$ je ekvivalentan sa $\operatorname{Im} a \subseteq \operatorname{Im} b$.

U Lemi 3 u [70] je dokazano da je y inverz od a duž d ako i samo ako je

$$yay = y \text{ i } y \leqslant_{\mathcal{H}} d,\ d \leqslant_{\mathcal{H}} y. \tag{4.15}$$

Iz (4.15), (4.14) i Napomena 4.1.30 (2.) i 4.1.33 dobijamo sledeću teoremu.

Teorema 4.1.34. *Neka je $S = M_n$ i $A, D \in M_n$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) rank(D) = rank(DAD),

(2) *Postoji inverz od A duž D,*

(3) *Postoji $A_{D,D}$,*

(4) *Postoji $A^{(2)}_{\operatorname{Im} D, \operatorname{Ker} D}$,*

(5) *Postoji (D, D)-inverz od A,*

i u tom slučaju se ovi inverzi poklapaju.

Sledi da su u slučaju $S = M_n$, klasa inverza sa ograničenjima $crCR$, klasa spoljašnjih inverza sa predefinisanom slikom i nul prostorom, klasa (b, c) inverza i klasa inverza duž elementa jednake.

U radu iz 2014. godine, Prasad i Mohana su uveli pojam jezgarnog-EP inverza.

Definicija 4.1.35. (Videti [87].) Matrica $Y \in M_n$ je *jezgarni-EP* inverz od $A \in M_n$ ako je $YAY = Y$ i

$$\operatorname{Im} Y = \operatorname{Im} Y^* = \operatorname{Im} A^k, \tag{4.16}$$

gde je k indeks od A.

Svaka matrica $A \in M_n$ ima jedinstven jezgarni-EP inverz koji se označava sa $A^{\textcircled{\dagger}}$, [87]. Naravno, uslov (4.16) možemo zameniti uslovom

$$\operatorname{Im} Y = \operatorname{Im} A^k \text{ i } \operatorname{Ker} Y = \operatorname{Ker} (A^*)^k.$$

Primetimo da za matricu $D = A^k (A^*)^k$ važi $\operatorname{Im} D = \operatorname{Im} A^k$ i $\operatorname{Ker} D = \operatorname{Ker} (A^*)^k$. Iz ove opaske i Teoreme 4.1.31 dobijamo sledeći rezultat.

Teorema 4.1.36. *Neka matrica $A \in M_n$ ima indeks k i neka je $Y \in M_n$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) *Y je jezgarni-EP inverz od A, tj. $Y = A^{\textcircled{\dagger}}$.*

(2) *Y je spoljašnji inverz od A takav da je* $\operatorname{Im} Y = \operatorname{Im} A^k$ *i* $\operatorname{Ker} Y = \operatorname{Ker}(A^*)^k$, *tj.* $Y = A^{(2)}_{\operatorname{Im} A^k, \operatorname{Ker}(A^*)^k}$.

(3) *Y je crCR inverz sa ograničenjima od A gde je $B = A^k$ i $C = (A^*)^k$, tj. $Y = A_{A^k,(A^*)^k}$.*

(4) *Y je $(A^k, (A^*)^k)$-inverz od A.*

(5) *Y je inverz od A duž $A^k(A^*)^k$.*

U radu [87] je takođe definisan pojam *jezgarnog-EP inverza od $A \in M_n$. Matrica Y je *jezgarni-EP inverz od A ako je $YAY = Y$ i

$$\operatorname{Im} Y = \operatorname{Im} Y^* = \operatorname{Im}(A^*)^k.$$

Na isti način kao malopre možemo pokazati da je Y jezgarni-EP inverz od A ako i samo ako je $Y = A^{(2)}_{\operatorname{Im}(A^*)^k, \operatorname{Ker} A^k}$ ako i samo ako je $Y = A_{(A^*)^k, A^k}$ ako i samo ako je Y, $((A^*)^k, A^k)$-inverz od A ako i samo ako je Y inverz od A duž $(A^*)^k A^k$.

Jezgarni i dualni jezgarni inverz kao specijalni slučajevi (b, c) i inverza duž elementa

Poglavlje završavamo dokazima da jezgarni i dualni jezgarni inverz pripadaju klasi (b, c) inverza i klasi inverza duž elementa.

Teorema 4.1.37. *Neka je $a \in R^\dagger$. Tada:*

(i) *a je jezgarno invertibilan ako i samo ako je invertibilan duž elementa aa^*. U tom slučaju inverz od a duž aa^* se poklapa sa jezgarnim inverzom od a.*

(ii) *a je dualno jezgarno invertibilan ako i samo ako je invertibilan duž elementa a^*a. U tom slučaju inverz od a duž a^*a se poklapa sa dualnim jezgarnim inverzom od a.*

Dokaz. (i): Pretpostavimo da $a \in R^\dagger \cap R^\#$ i dokažimo da je $x = a^{\textcircled{\#}}$ inverz od a duž $d = aa^*$. Podsetimo se da je po Teoremi 4.1.18, $xa^2 = a$ i $(ax)^* = ax$. Odmah se vidi da je

$$\begin{aligned} xad &= xaaa^* = aa^* = d \quad \text{i} \\ dax &= aa^*ax = aa^*(ax)^* = a(axa)^* = aa^* = d. \end{aligned}$$

Nastavljamo sledećim zapažanjem. Neka je $z = (a^\dagger)^* a^\dagger$. Tada je

$$\begin{aligned} aa^*z &= aa^*(a^\dagger)^*a^\dagger = a(a^\dagger a)^*a^\dagger = aa^\dagger aa^\dagger = aa^\dagger \quad \text{i} \\ zaa^* &= (a^\dagger)^*a^\dagger aa^* = (a^\dagger)^*(a^\dagger a)^*a^* = (aa^\dagger aa^\dagger)^* = (aa^\dagger)^* = aa^\dagger. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Kako je $ax^2 = x$, $xax = x$ i $ax = aa^\dagger$ to je

$$\begin{aligned} x &= ax^2 = aa^\dagger x = aa^*zx = dzx \quad \text{i} \\ x &= xax = xaa^\dagger = xzaa^* = xzd. \end{aligned}$$

Sledi da $x \in dR$ i $x \in Rd$ pa je $xR \subseteq dR$ i $Rx \subseteq Rd$; zbog toga je $x \leqslant_{\mathcal{H}} d$. Po Definiciji 4.1.32, zaključujemo da je $a^{\oplus}$ inverz od a duž aa^*.

Obrnuto, pretpostavimo da postoji inverz od $a \in R^{\dagger}$ duž aa^*, označimo ga sa x, i dokažimo da $a \in R^{\oplus}$ i da je $x = a^{\oplus}$. Po Definiciji 4.1.32 imamo da je

$$xa^2a^* = aa^* = aa^*ax \tag{4.18}$$

i postoji $w \in R$ tako da je

$$x = aa^*w. \tag{4.19}$$

Dovoljno je dokazati da x zadovoljava jednakosti date u Teoremi 4.1.18 (iii). Iz (4.17) sledi

$$ax = aa^{\dagger}ax = zaa^*ax = zaa^* = aa^{\dagger},$$

pa je $(ax)^* = ax$. Sada, $axa = aa^{\dagger}a = a$. Takođe,

$$\begin{aligned} xa^2 &= xaaa^{\dagger}a = xa^2(a^{\dagger}a)^* = xa^2a^*(a^{\dagger})^* \overset{(4.18)}{=} aa^*(a^{\dagger})^* = a(a^{\dagger}a)^* = a \qquad (4.20)\\ ax^2 &\overset{(4.19)}{=} axaa^*w = aa^*w = x\\ xax &= xaaa^*w \overset{(4.20)}{=} aa^*w \overset{(4.19)}{=} x. \end{aligned}$$

Dokaz je završen.

(ii): Ovo tvrđenje se može dokazati na isti način kao i (i). □

Teorema 4.1.38. *Neka je $a \in R$. Tada:*

(i) *a je jezgarno invertibilan ako i samo ako postoji (a, a^*)-inverz od a. U tom slučaju se (a, a^*)-inverz od a poklapa sa jezgarnim inverzom od a.*

(ii) *a je dualno jezgarno invertibilan ako i samo ako postoji (a^*, a)-inverz od a. U tom slučaju se (a^*, a)-inverz od a poklapa sa dualnim jezgarnim inverzom od a.*

Dokaz. Dokazaćemo samo tvrđenje (i) zato što se tvrđenje (ii) može slično dokazati. Pretpostavimo da $a \in R^{\oplus}$ i neka je $x = a^{\oplus}$, $b = a$ i $c = a^*$. Iz osobina jezgarnog inverza dobijamo

$$\begin{aligned} xab &= xa^2 = a = b\\ cax &= a^*ax = a^*(ax)^* = (axa)^* = a^* = c\\ x &= xax = ax^2ax = bx^2ax \in bRx\\ x &= xax = x(ax)^* = xx^*a^* = xx^*c \in xRc. \end{aligned}$$

Dakle, po Definiciji 4.1.27, $x = a^{\oplus}$ je (a, a^*)-inverz od a.

Obrnuto, pretpostavimo da (a, a^*)-inverz od a postoji, označimo ga sa x, i dokažimo da x zadovoljava jednačine date u Teoremi 4.1.18 (iii). Po Definiciji 4.1.27 je

$$xa^2 = a, \quad a^*ax = a^* \tag{4.21}$$

i postoji $w \in R$ tako da je

$$x = awx. \tag{4.22}$$

Dobijamo

$$ax \overset{(4.21)}{=} (a^*ax)^*x = (ax)^*ax,$$

pa je $(ax)^* = ax$. Takođe,

$$\begin{aligned} axa &= (ax)^*a = (a^*ax)^* \overset{(4.21)}{=} (a^*)^* = a \qquad (4.23)\\ ax^2 &\overset{(4.22)}{=} axawx \overset{(4.23)}{=} awx = x\\ xax &\overset{(4.22)}{=} xaawx \overset{(4.21)}{=} awx = x. \end{aligned}$$

Dokaz teoreme je završen. □

4.2 Zvezda, oštro, jezgarno i dualno jezgarno parcijalno uređenje na prstenima sa involucijom

U Poglavlju 4.1 smo definisali i detaljno ispitali grupni, Mur-Penrouzov, jezgarni i dualni jezgarni uopšteni inverz elemenata u prstenu sa involucijom. Setimo se da se posredstvom MP i grupnog inverza, mogu definisati dva tipa parcijalna uređenja na skupu kompleksnih matrice, videti Sekciju 1.1 na strani 4. To su zvezda i oštro matrično parcijalno uređenje. U istom radu [9] u kome su ispitivali jezgarni i dualni jezgarni inerz, Baksalari i Trenkler su pomoću ovih inverza definisali odgovarajuća matrična uređenja.

Definicija 4.2.1. (Videti [9].) Neka su $A, B \in I_{1,n}$. Kažemo da je A manja od B u odnosu na *jezgarno (eng. core) parcijalno uređenje*, i to označavamo sa $A <^{\oplus} B$, ako važi

$$AA^{\oplus} = BA^{\oplus} \text{ i } A^{\oplus}A = A^{\oplus}B.$$

Definicija 4.2.2. (Videti [9].) Neka su $A, B \in I_{1,n}$. Kažemo da je A manja od B u odnosu na *dualno jezgarno parcijalno uređenje*, i to označavamo sa $A <_{\oplus} B$, ako važi

$$AA_{\oplus} = BA_{\oplus} \text{ i } A_{\oplus}A = A_{\oplus}B.$$

Koristeći dekompoziciju (4.1), u [9] je data sledeća karakterizacija jezgarnog uređenja, koja se često koristi u proučavanju ove relacije.

Teorema 4.2.3. *Neka su $A, B \in I_{1,n}$ i neka A ima dekompoziciju (4.1). Tada je $A <^{\oplus} B$ ako i samo ako je*

$$B = U \begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & Z \end{bmatrix} U^*, \tag{4.24}$$

gde je ΣK regularna i $Z \in M_{n-r}$ zadovoljava $\operatorname{ind} Z \leqslant 1$.

Relacija $<^{\oplus}$ je relacija parcijalnog uređenja na $I_{1,n}$.

Naravno, važi i odgovarajuća teorema za dualno jezgarno uređenje analogna Teoremi 4.2.3.

Primetimo da Definicije 1.1.5, 1.1.7, 4.2.1, 4.2.2, kojima se definišu pomenuta uređenja, imaju smisla i u proizvoljnom $*$-prstenu R. Naš cilj je da proučimo relacije $<^*$, $<^\#$, $<^{\textcircled{\#}}$, $<_{\textcircled{\#}}$ na proizvoljnom prstenu sa involucijom. U Poglavlju 3.1 smo videli da se minus parcijalno uređenje (koje se definiše na sličan način kao i ove četiri relacije) može vrlo lepo ispitati koristeći Parsovu dekompoziciju jedinice prstena indukovanu ovim uređenjem. Videćemo u nastavku da se ovaj pristup može primeniti i sada. I ne samo to, pokazaćemo da su zvezda, oštro, jezgarno i dualno jezgarno parcijalno uređenje blisko povezani i da se mogu proučavati na sasvim sličan način. Dokazaćemo da su ova uređenja zaista relacije poretka. Pored toga što ćemo generalizovati mnoga poznata svojstva ovih uređenja, takođe ćemo dokazati i znatan broj novih. Rezultati ovog poglavlja su deo rukopisa [95] koji je trenutno na reviziji.

U ovom poglavlju R označava proizvoljan prsten sa involucijom. Neka su $a, x \in R$. Podsetimo se jednačina kojima su definisani grupni, MP, jezgarni i dualni jezgarni inverz (videti Teoreme 4.1.18 i 4.1.19):

$$\begin{array}{ll} (1) & axa = a \\ (2) & xax = x \\ (3) & (ax)^* = ax \\ (4) & (xa)^* = xa \\ (5) & ax = xa \\ (6) & xa^2 = a \\ (7) & ax^2 = x \\ (8) & a^2x = a \\ (9) & x^2a = x. \end{array}$$

Setimo se da je

$$R^\# \cap R^\dagger = R^{\textcircled{\#}} \cap R_{\textcircled{\#}} \text{ i } R^{\textcircled{\#}} \cup R_{\textcircled{\#}} \subseteq R^\#. \tag{4.25}$$

Odgovarajuća parcijalna uređenja se definišu istim uslovima kao i u matričnom slučaju.

Definicija 4.2.4. Neka su $a, b \in R$.

Ako su $a, b \in R^\dagger$ onda kažemo da je a manje od b u odnosu na *zvezda* parcijalno uređenje ($a <^* b$) ako je

$$aa^\dagger = ba^\dagger \text{ i } a^\dagger a = a^\dagger b.$$

Ako su $a, b \in R^\#$ onda kažemo da je a manje od b u odnosu na *oštro* parcijalno uređenje ($a <^\# b$) ako je

$$aa^\# = ba^\# \text{ i } a^\# a = a^\# b.$$

Ako su $a, b \in R^{\textcircled{\#}}$ onda kažemo da je a manje od b u odnosu na *jezgarno* parcijalno uređenje ($a <^{\textcircled{\#}} b$) ako je

$$aa^{\textcircled{\#}} = ba^{\textcircled{\#}} \text{ i } a^{\textcircled{\#}} a = a^{\textcircled{\#}} b.$$

Ako su $a, b \in R_{\textcircled{\#}}$ onda kažemo da je a manje od b u odnosu na *dualno jezgarno* parcijalno uređenje ($a <_{\textcircled{\#}} b$) ako je

$$aa_{\textcircled{\#}} = ba_{\textcircled{\#}} \text{ and } a_{\textcircled{\#}} a = a_{\textcircled{\#}} b.$$

Matrčne reprezentacije elemenata a i b indukovane uslovom $a < b$

Iz Definicije 4.2.4 sledi da svaki od uslova

$$a <^{*} b, \quad a <^{\#} b, \quad a <^{\textcircled{\#}} b, \quad a <_{\textcircled{\#}} b$$

implicira $a <^{-} b$. Poznato je da iz $a <^{-} b$ sledi (videti Lemu 3.1.7)

$$a = ab^{(1)}b = bb^{(1)}a = ab^{(1)}a, \tag{4.26}$$

za svako $b^{(1)} \in b\{1\}$.

Sledeća teorema se moze naći u Drejzinovom radu [33].

Teorema 4.2.5. *Neka su $a, b \in R^{\dagger}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a <^{*} b$;

(ii) $aa^{*} = ba^{*}$ *i* $a^{*}a = a^{*}b$;

(iii) $aa^{\dagger} = ab^{\dagger}$ *i* $a^{\dagger}a = b^{\dagger}a$;

(iv) $a^{*} <^{*} b^{*}$.

Osim toga,

$$a^{\dagger}a = a^{\dagger}b \Leftrightarrow a^{*}a = a^{*}b \quad i \quad aa^{\dagger} = ba^{\dagger} \Leftrightarrow aa^{*} = ba^{*}. \tag{4.27}$$

Dokazaćemo da oštro uređenje poseduje analognu karakterizaciju.

Teorema 4.2.6. *Neka su $a, b \in R^{\#}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a <^{\#} b$;

(ii) $a^2 = ab = ba$;

(iii) $aa^{\#} = ab^{\#} = b^{\#}a$;

(iv) $a^{\#} <^{\#} b^{\#}$.

Osim toga,

$$\begin{aligned} a^{\#}a = a^{\#}b \Leftrightarrow a^2 = ab \Leftrightarrow aa^{\#} = ab^{\#} \quad i \\ aa^{\#} = ba^{\#} \Leftrightarrow a^2 = ba \Leftrightarrow a^{\#}a = b^{\#}a. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Dokaz. Dokaz dela (i) $\Leftrightarrow$ (ii) je isti kao u slučaju kompleksnih matrica, videti Teoremu 4.2.8 u [77].

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Kako je $a = a^{\#}a^2 = (a^{\#})^2a^3$ i $a^3 = a^2b = ab^2$ imamo da je

$$ab^{\#} = (a^{\#})^2a^3b^{\#} = (a^{\#})^2ab^2b^{\#} = (a^{\#})^2ab = (a^{\#})^2a^2 = aa^{\#}.$$

Slično, $b^{\#}a = a^{\#}a$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Kako je $a = a^2a^{\#} = a^2b^{\#} = a^3(b^{\#})^2$ to je

$$ab = a^3(b^{\#})^2b = a^3b^{\#} = a^3a^{\#} = a^2.$$

Slično, $ba = a^2$.

(i) $\Leftrightarrow$ (iv) sledi iz definicije oštrog parcijalnog uređenja i identiteta $(a^{\#})^{\#} = a$.

Ekvivalencije u (4.28) slede iz prethodnog dela dokaza. $\square$

Setimo se da smo u Poglavlju 4.1, za element $a \in R^{\dagger} \cap R^{\#}$ definisali odgovarajuće idempotente p_a, q_a i r_a. Tom prilikom smo dokazali da važe sledeće jednakosti (videti (4.8) i Teoremu 4.1.24)

$$\begin{aligned} q_a &= aa^{\#} = a^{\#}a = a^{\oplus}a = aa_{\oplus}, \\ p_a &= aa^{\dagger} = aa^{\oplus}, \\ r_a &= a^{\dagger}a = a_{\oplus}a \end{aligned} \tag{4.29}$$

Za jezgarno parcijalno uređenje imamo sledeći rezulatat.

Lema 4.2.7. *Neka su $a, b \in R^{\oplus} \cap R^{\dagger}$. Tada je*

(i) $a^{\oplus}a = a^{\oplus}b \;\Leftrightarrow\; a^*a = a^*b \;\Leftrightarrow\; a^{\dagger}a = a^{\dagger}b$;

(ii) $aa^{\oplus} = ba^{\oplus} \;\Leftrightarrow\; a^2 = ba \;\Leftrightarrow\; aa^{\#} = ba^{\#}$;

(iii) $aa_{\oplus} = ba_{\oplus} \;\Leftrightarrow\; aa^* = ba^* \;\Leftrightarrow\; aa^{\dagger} = ba^{\dagger}$;

(iv) $a_{\oplus}a = a_{\oplus}b \;\Leftrightarrow\; a^2 = ab \;\Leftrightarrow\; a^{\#}a = a^{\#}b$.

Dokaz. (i): Pretpostavimo da je $a^{\oplus}a = a^{\oplus}b$. Koristeći jednačine koje definišu jezgarni inverz dobijamo

$$a^*b = (aa^{\oplus}a)^*b = a^*(aa^{\oplus})^*b = a^*aa^{\oplus}b = a^*aa^{\oplus}a = a^*a.$$

Ako je $a^*a = a^*b$ onda je

$$a^{\oplus}b = a^{\oplus}(aa^{\oplus})^*b = a^{\oplus}(a^{\oplus})^*a^*b = a^{\oplus}(a^{\oplus})^*a^*a = a^{\oplus}(aa^{\oplus})^*a = a^{\oplus}a.$$

Preostali deo dokaza sledi iz Teoreme 4.2.5.

(ii): Ako je $aa^{\oplus} = ba^{\oplus}$ onda, iz (4.29), sledi da je

$$ba = b(a^{\#}a)a = ba^{\oplus}aa = aa^{\oplus}aa = a^2.$$

Obrnuto, pretpostavimo da je $a^2 = ba$. Iz (4.29), dobijamo

$$ba^{\oplus} = ba^{\oplus}aa^{\oplus} = ba^{\#}aa^{\oplus} = baa^{\#}a^{\oplus} = a^2a^{\#}a^{\oplus} = aa^{\oplus}.$$

Ostatak dokaza sledi iz Teoreme 4.2.6.

(iii) i (iv) se dokazuju slično kao (i) i (ii). □

Teorema 4.2.8. *Neka su $a, b \in R^{\oplus} \cap R^{\dagger}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a <^{\oplus} b$;

(ii) $a^{\dagger}a = a^{\dagger}b$ *i* $aa^{\#} = ba^{\#}$;

(iii) $a^*a = a^*b$ *i* $a^2 = ba$.

Bilo koji od uslova (i)–(iii) implicira

(iv) $aa^{\oplus} = ab^{\oplus}$ *i* $a^{\oplus}a = b^{\oplus}a$.

Dokaz. Ekvivalentnost uslova (i), (ii) i (iii) je direktna posledica Leme 4.2.7. Dokažimo da iz (i) sledi (iv). Pretpostavimo da je $a <^{\oplus} b$, tj. da je $aa^{\oplus} = ba^{\oplus}$ i $a^{\oplus}a = a^{\oplus}b$. Imamo

$$\begin{aligned} ab^{\oplus} &= aa^{\oplus}ab^{\oplus} = aa^{\oplus}bb^{\oplus} = (aa^{\oplus})^*bb^{\oplus} = (ba^{\oplus})^*(bb^{\oplus})^* \\ &= (bb^{\oplus}ba^{\oplus})^* = (ba^{\oplus})^* = (aa^{\oplus})^* = aa^{\oplus}, \\ b^{\oplus}a &= b^{\oplus}aa^{\oplus}a = b^{\oplus}ba^{\oplus}a = b^{\oplus}ba(a^{\oplus})^2a \quad (\text{sledi iz } a^{\oplus} = a(a^{\oplus})^2) \\ &= b^{\oplus}bb(a^{\oplus})^2a = b(a^{\oplus})^2a \quad (\text{sledi iz } b^{\oplus}b^2 = b) \\ &= a(a^{\oplus})^2a = a^{\oplus}a \quad (\text{sledi iz } a^{\oplus} = a(a^{\oplus})^2). \end{aligned}$$

□

Da iz (iv) ne sledi (i) možemo videti iz sledećeg kontraprimera. Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Lako se pokazuje da je $A^{\oplus} = B^{\oplus} = A$ pa je $AA^{\oplus} = AB^{\oplus}$ i $A^{\oplus}A = B^{\oplus}A$ ali $A^{\oplus}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A^{\oplus}B$.

Naravno, tu je i analogna teorema za dualno jezgarno parcijalno uređenje.

Teorema 4.2.9. *Neka su $a, b \in R_{\oplus} \cap R^{\dagger}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a <_{\oplus} b$;

(ii) $aa^{\dagger} = ba^{\dagger}$ *i* $a^{\#}a = a^{\#}b$;

(iii) $aa^* = ba^*$ *i* $a^2 = ab$.

Bilo koji od uslova (i)–(iii) implicira

(iv) $a_{\oplus}a = b_{\oplus}a$ *and* $aa_{\oplus} = ab_{\oplus}$.

Dokaz. Dokaz možemo izvesti na isti način kao dokaz Teoreme 4.2.8. □

Iz Teoreme 4.2.8 i Teoreme 4.2.9 možemo zaključiti da su jezgarno i dualno jezgarno parcijalno uređenje "između" zvezda i oštrog parcijalnog uređenja.

Primetimo da u Lemi 4.2.7, Teoremi 4.2.8 i Teoremi 4.2.9 možemo ukloniti ograničenje $a \in R^{\dagger}$ u tvrđenjima gde se $a^{\dagger}$ ne pojavljuje.

Na ovom mestu je pogodno navesti sledeće zapažanje.

Napomena 4.2.10. Videli smo da je $a <^* b$ ekvivalentno sa $a^* <^* b^*$, kao i da je $a <^{\#} b$ eivivalentno sa $a^{\#} <^{\#} b^{\#}$. Da analogna osobina ne važi za jezgarno (i dualno jezgarno) parcijalno uređenje pokazuje sledeći kontraprimer. Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (matrice su preuzete iz rada [9]). Lako se proverava da je $A^{\oplus} = (A^{\oplus})^{\oplus} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $B^{\oplus} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Takođe važi da je $A <^{\oplus} B$, ali $(A^{\oplus})^{\oplus}A^{\oplus} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $(A^{\oplus})^{\oplus}B^{\oplus} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ pa ne važi da je $A^{\oplus} <^{\oplus} B^{\oplus}$.

Jedne od najznačajnijih karakterizacija zvezda i oštrog matričnog parcijalnog uređenja su one koje uključuju idempotente, videti Teoreme 1.1.8 i 1.1.6. Ove rezultate ćemo generalizovati na proizvoljnom $*$-prstenu. Pored toga ćemo dati analogne rezultate za jezgarno i dualno jezgarno parcijalno uređenje.

Teorema 4.2.11. (i) *Ako su $a, b \in R^{\dagger}$ onda je $a <^{*} b$ ako i samo ako postoje $p, r \in \widetilde{E}(R)$ takvi da je $a = pb = br$.*

(ii) *Ako su $a, b \in R^{\#}$ onda je $a <^{\#} b$ ako i samo ako postoji $q \in E(R)$ takav da je $a = qb = bq$.*

(iii) *Ako su $a, b \in R^{\textcircled{\#}}$ onda je $a <^{\textcircled{\#}} b$ ako i samo ako postoje $p \in \widetilde{E}(R)$ i $q \in E(R)$ takvi da je $qa = a$ i $a = pb = bq$.*

(iv) *Ako su $a, b \in R_{\textcircled{\#}}$ onda je $a <_{\textcircled{\#}} b$ ako i samo ako postoje $r \in \widetilde{E}(R)$ i $q \in E(R)$ takvi da je $aq = a$ i $a = br = qb$.*

Dokaz. Da bi izbegli ponavljanje dokazaćemo samo tvrđenje (iii). Pretpostavimo da je $a, b \in R^{\textcircled{\#}}$ i $a <^{\textcircled{\#}} b$. Stavimo da je $p = aa^{\textcircled{\#}}$ i $q = a^{\textcircled{\#}}a$. Tada je $p = p^2 = p^*$, $q = q^2$ i $qa = a^{\textcircled{\#}}a^2 = a$. Takođe je

$$pb = aa^{\textcircled{\#}}b = aa^{\textcircled{\#}}a = a \quad \text{i} \quad bq = ba^{\textcircled{\#}}a = aa^{\textcircled{\#}}a = a.$$

Obrnuto, pretpostavimo da postoje samo-adjungovani idempotent p i idempotent q takvi da je $a = qa = pb = bq$. Odavde dobijamo da je $pa = ppb = pb = a$ pa je

$$a^*b = (pa)^*b = a^*pb = a^*a$$
$$ba = b(qa) = aa = a^2.$$

Po Teoremi 4.2.8 zaključujemo da je $a <^{\textcircled{\#}} b$. $\square$

Pod notacijom kao u Teoremi 4.2.11, primetimo da kada su $a, b \in R^{\dagger} \cap R^{\#}$, zbog (4.29), sledi da je idempotent p koji se javlja u tvrđenju (i) jednak idempotentu p koji se javlja u tvrđenju (iii), tj.

$$p = aa^{\dagger} = aa^{\textcircled{\#}}.$$

Slično,

$$q = aa^{\#} = a^{\#}a = a^{\textcircled{\#}}a = aa_{\textcircled{\#}}$$

i

$$r = a^{\dagger}a = a_{\textcircled{\#}}a.$$

U Poglavlju 1.1 smo naglasili važnost reprezentacija analognih onima u Teoremama 1.1.6 i 1.1.8, kada je A u relaciji sa B. Sledeće četiri teoreme su glavni rezultat ovog poglavlja.

Teorema 4.2.12. *Neka su $a, b \in R^{\dagger}$. Ako je $a <^{*} b$ onda postoje ortogonalne dekompozicije jedinice prstena R*

$$1 = e_1 + e_2 + e_3 \quad i \quad 1 = g_1 + g_2 + g_3$$

u odnosu na koje a i b imaju sledeće matrične reprezentacije:

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times g}, \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times g}, \tag{4.30}$$

pri čemu je element $a \in e_1Rg_1$, (e_1, g_1)-invertibilan, a element $b - a \in e_2Rg_2$, (e_2, g_2)-invertibilan.
Obrnuto, ako su reprezentacije elemenata a i b kao u (4.30) gde su $1 = e_1 + e_2 + e_3$ i $1 = g_1 + g_2 + g_3$ dve dekompozicije jedinice prstena R takve da je $e_1 = aa^\dagger$ i $g_1 = a^\dagger a$ onda je $a <^* b$.

Teorema 4.2.13. *Neka su $a, b \in R^{\#}$. Ako je $a <^{\#} b$ onda postoji dekompozicija jedinice prstena R*

$$1 = f_1 + f_2 + f_3$$

u odnosu na koju a i b imaju sledeće matrične reprezentacije:

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{f \times f}, \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{f \times f}, \tag{4.31}$$

pri čemu je element $a \in f_1Rf_1$, (f_1, f_1)-invertibilan, a element $b - a \in f_2Rf_2$, (f_2, f_2)-invertibilan.
Obrnuto, ako su reprezentacije elemenata a i b kao u (4.31) gde je $1 = f_1 + f_2 + f_3$ dekompozicija jedinice prstena R takva da je $f_1 = aa^{\#} = a^{\#}a$ onda je $a <^{\#} b$.

U Teoremama 4.1.3 i 4.2.3 smo naglasili važnost dekompozicija (4.1) i (4.24).

U sledećoj teoremi ćemo pokazati da, čak u slučaju prstena, postoje bolje matrične reprezentacije elemenata a i b kada je $a <^{\oplus} b$. Prednost reprezentacija (4.32) datih u Teoremi 4.2.14 u poređenju sa reprezentacijama (4.1) i (4.24) leži u činjenici da one imaju više nula, dok sva nenula polja imaju osobinu (p, q)-invertibilnosti.

Teorema 4.2.14. *Neka su $a, b \in R^{\oplus}$. Ako je $a <^{\oplus} b$ onda postoji ortogonalna dekompozicija jedinice prstena R*

$$1 = e_1 + e_2 + e_3$$

i postoji dekompozicija jedinice prstena R

$$1 = f_1 + f_2 + f_3$$

u odnosu na koje a i b imaju sledeće matrične reprezentacije:

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times f}, \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times f}, \tag{4.32}$$

pri čemu je element $a \in e_1Rf_1$, (e_1, f_1)-invertibilan, a element $b - a \in e_2Rf_2$, (e_2, f_2)-invertibilan.
Obrnuto, ako su reprezentacije elemenata a i b kao u (4.32) gde su $1 = e_1 + e_2 + e_3$ i $1 = f_1 + f_2 + f_3$ dve dekompozicije jedinice prstena R takve da je $e_1 = aa^{\oplus}$ i $f_1 = a^{\oplus}a$ onda je $a <^{\oplus} b$.

Teorema 4.2.15. *Neka su $a, b \in R_{\oplus}$. Ako je $a <_{\oplus} b$ onda postoji ortogonalna dekompozicija jedinice prstena R*

$$1 = g_1 + g_2 + g_3$$

i postoji dekompozicija jedinice prstena R

$$1 = f_1 + f_2 + f_3$$

u odnosu na koje a i b imaju sledeće matrične reprezentacije.

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{f \times g}, \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{f \times g}, \tag{4.33}$$

pri čemu je element $a \in f_1 R g_1$, (f_1, g_1)-invertibilan, a element $b - a \in f_2 R g_2$, (f_2, g_2)-invertibilan.
Obrnuto, ako su reprezentacije elemenata a i b kao u (4.33) gde su $1 = f_1 + f_2 + f_3$ i $1 = g_1 + g_2 + g_3$ dve dekompozicije jedinice prstena R takve da je $f_1 = aa_{\oplus}$ i $g_1 = a_{\oplus}a$ onda je $a <_{\oplus} b$.

Dokazaćemo samo Teoremu 4.2.14. Teoreme 4.2.12, 4.2.13 i 4.2.15 se mogu dokazati duž linija tog dokaza.

Dokaz Teoreme 4.2.14. Ideja dokaza je ista kao u dokazu Teoreme 3.1.8 na strani 28, gde smo analognu osobinu dokazali za minus parcijalno uređenje. Pretpostavimo da je $a <^{\oplus} b$. Stavimo da je

$$\begin{aligned} &e_1 = ab^{\oplus}, \quad e_2 = (b-a)b^{\oplus}, \quad e_3 = 1 - bb^{\oplus} \\ &f_1 = b^{\oplus}a, \quad f_2 = b^{\oplus}(b-a), \quad f_3 = 1 - b^{\oplus}b. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Iz Teoreme 4.2.8 sledi da je $e_1 = aa^{\oplus}$ i $f_1 = a^{\oplus}a$. Kako $a <^{\oplus} b$ implicira $a <^{-} b$, jednakosti u (4.26) pokazuju da je

$$a = ab^{\oplus}b = bb^{\oplus}a = ab^{\oplus}a. \tag{4.35}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} ab^{\oplus}ab^{\oplus} &= ab^{\oplus}, \\ bb^{\oplus}bb^{\oplus} &= bb^{\oplus}, \\ ab^{\oplus}bb^{\oplus} &= ab^{\oplus}, \\ bb^{\oplus}ab^{\oplus} &= ab^{\oplus}, \\ (ab^{\oplus})^* &= (aa^{\oplus})^* = aa^{\oplus} = ab^{\oplus}, \\ (bb^{\oplus})^* &= bb^{\oplus}. \end{aligned}$$

Odavde sledi da je $e_ie_j = 0$, za $i \neq j$ i da je $e_i^2 = e_i = e_i^*$, pa je $1 = e_1 + e_2 + e_3$ ortogonalna dekompozicija jedinice prstena R. Slično,

$$\begin{aligned} b^{\oplus}ab^{\oplus}a &= b^{\oplus}a, \\ b^{\oplus}bb^{\oplus}b &= b^{\oplus}b, \\ b^{\oplus}ab^{\oplus}b &= b^{\oplus}a, \\ b^{\oplus}bb^{\oplus}a &= b^{\oplus}a. \end{aligned}$$

Odavde sledi da je $1 = f_1 + f_2 + f_3$ dekompozicija jedinice prstena R. Da bi dokazali reprezentacije u (4.32) potrebno je i dovoljno (zbog jedinstvenosti predstavljanja) da dokažemo da je $a = e_1af_1$ i da je $b - a = e_2(b-a)f_2$. Koristeći (4.35), dobijamo

$$\begin{aligned} e_1af_1 &= ab^{\oplus}ab^{\oplus}a = ab^{\oplus}a = a \\ (b-a)b^{\oplus}(b-a) &= bb^{\oplus}b - bb^{\oplus}a - ab^{\oplus}b + ab^{\oplus}a \\ &= b - a - a + a = b - a, \end{aligned}$$

odakle je

$$e_2(b-a)f_2 = (b-a)b^{\oplus}(b-a)b^{\oplus}(b-a) = b - a.$$

Ostaje još da dokažemo da je $a \in e_1Rf_1$, (e_1, f_1)-invertibilan, a $b - a \in e_2Rf_2$, (e_2, f_2)-invertibilan. Kako je $e_1 = aa^{\oplus}$ i $f_1 = a^{\oplus}a$, to se lako pokazuje da je $a^{\oplus} \in f_1Re_1$, (e_1, f_1)-inverz elementa a. Kako je

$$b^{\oplus}(b-a)b^{\oplus} = b^{\oplus} - b^{\oplus}ab^{\oplus} = b^{\oplus} - a^{\oplus}aa^{\oplus} = b^{\oplus} - a^{\oplus},$$

i $e_2 = (b-a)b^{\oplus}$, $f_2 = b^{\oplus}(b-a)$ sledi da je $b^{\oplus} - a^{\oplus} = f_2b^{\oplus} = b^{\oplus}e_2$, tj.

$$b^{\oplus} - a^{\oplus} = f_2(b^{\oplus} - a^{\oplus})e_2 \in f_2Re_2.$$

Lako se dobija da je $(b-a)(b^{\oplus} - a^{\oplus}) = e_2 - ba^{\oplus} + aa^{\oplus} = e_2$ i slično $(b^{\oplus} - a^{\oplus})(b-a) = f_2$, odakle sledi da je $b^{\oplus} - a^{\oplus}$, (e_2, f_2)-inverz elementa $b - a$.

Obrnuto, pretpostavimo da a i b imaju reprezentacije kao u (4.32) gde je $e_1 = aa^{\oplus}$ i $f_1 = a^{\oplus}a$. Zaključujemo da je

$$f_1a^{\oplus}e_1 = a^{\oplus}aa^{\oplus}aa^{\oplus} = a^{\oplus},$$

pa je

$$a^{\oplus} = \begin{bmatrix} a^{\oplus} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{f \times e}. \tag{4.36}$$

Sada se lako vidi da je

$$aa^{\oplus} = ba^{\oplus} = \begin{bmatrix} aa^{\oplus} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times e} \quad \text{i} \quad a^{\oplus}a = a^{\oplus}b = \begin{bmatrix} a^{\oplus}a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{f \times f}.$$

Po definiciji, $a <^{\oplus} b$. $\square$

Pretpostavimo da je $a, b \in R^{\oplus}$ i $a <^{\oplus} b$. Pod notacijom kao u prethodnom dokazu, možemo dati matričnu reprezentaciju za $b^{\oplus}$:

$$b^{\oplus} = \begin{bmatrix} a^{\oplus} & 0 & 0 \\ 0 & b^{\oplus} - a^{\oplus} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{f \times e}. \tag{4.37}$$

Podsetimo se da, po Teoremi 4.2.5, iz $a <^* b$ sledi $aa^\dagger = ab^\dagger$ i $a^\dagger a = b^\dagger a$. Da bi dokazali reprezentacije (4.30) u Teoremi 4.2.12 treba staviti

$$\begin{aligned} e_1 &= ab^\dagger = aa^\dagger, \quad e_2 = (b-a)b^\dagger = bb^\dagger - aa^\dagger, \quad e_3 = 1 - bb^\dagger \\ g_1 &= b^\dagger a = a^\dagger a, \quad g_2 = b^\dagger(b-a) = b^\dagger b - a^\dagger a, \quad g_3 = 1 - b^\dagger b. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Da bi dokazali reprezentacije (4.31) u Teoremi 4.2.13 treba staviti

$$f_1 = ab^\# = aa^\#, \quad f_2 = (b-a)b^\# = bb^\# - aa^\#, \quad f_3 = 1 - bb^\#. \tag{4.39}$$

Konačno, da bi dokazali reprezentacije (4.33) u Teoremi 4.2.15 treba staviti

$$\begin{aligned} f_1 &= ab_{\oplus} = aa_{\oplus}, \quad f_2 = (b-a)b_{\oplus} = bb_{\oplus} - aa_{\oplus}, \quad f_3 = 1 - bb_{\oplus} \\ g_1 &= b_{\oplus}a = a_{\oplus}a, \quad g_2 = b_{\oplus}(b-a) = b_{\oplus}b - a_{\oplus}a, \quad g_3 = 1 - b_{\oplus}b. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Napomena 4.2.16. Pretpostavimo da su $a, b \in R^\dagger \cap R^\#$ i da je $a <^{\oplus} b$. Primetimo da za idempotente e_i i f_i, koji se javljaju u dokazu Teoreme 4.2.14, važe sledeće jednakosti:

$$\begin{aligned} e_1 &= ab^{\oplus} = aa^{\oplus} = aa^\dagger, \quad \text{po Teoremi 4.2.8 i (4.29)} \\ e_2 &= bb^{\oplus} - ab^{\oplus} = bb^\dagger - aa^\dagger \\ e_3 &= 1 - bb^{\oplus} = 1 - bb^\dagger \\ f_1 &= b^{\oplus}a = a^{\oplus}a = a^\# a = aa^\#, \quad \text{po Teoremi 4.2.8 i (4.29)} \\ f_2 &= b^{\oplus}b - b^{\oplus}a = b^\# b - a^\# a = bb^\# - aa^\# \\ f_3 &= 1 - b^{\oplus}b = 1 - b^\# b = 1 - bb^\#. \end{aligned}$$

Sličan zaključak možemo izvesti i za dualno jezgarno parcijalno uređenje. Odavde sledi da su idempotenti e_i koji se javljaju u Teoremi 4.2.12 i idempotenti e_i koji se javljaju u Teoremi 4.2.14 isti; idempotenti f_i koji se javljaju u Teoremama 4.2.13, 4.2.14 i 4.2.15 su isti; idempotenti g_i koji se javljaju u Teoremama 4.2.12 i 4.2.15 su isti. Kada ne može doći do zabune, kažemo da su dekompozicije jedinice $1 = e_1 + e_2 + e_3$, $1 = f_1 + f_2 + f_3$ i $1 = g_1 + g_2 + g_3$ *standardne dekompozicije.*

Sledeće ekvivalencije slede iz Teorema 4.2.12, 4.2.13, 3.1.8:

$$\begin{aligned} a <^* b &\Leftrightarrow b - a <^* b, \\ a <^\# b &\Leftrightarrow b - a <^\# b, \\ a <^- b &\Leftrightarrow b - a <^- b. \end{aligned}$$

Ali iz $a <^{\oplus} b$ ne sledi $b - a <^{\oplus} b$ čak ni u matričnom slučaju, videti [9]. Koristeći rezultate iz prethodnog dela možemo generalizovati veliki broj rezultata matričnih parcijalnih uređenja. U sledeće dve sekcije ćemo generalizovati samo najbitnije osobine.

Karakterizacija parcijalnih uređenja pomoću skupovne inkluzije

Već je u Uvodu rečeno da je poznato da se neka matrična parcijalna uređenja mogu okarakterisati posredstvom inkluzije odgovarajućih podskupova skupa uopštenih inverza. Poznate su sledeće ekvivalencije ($A, B \in M_n$):

$$A <^{-} B \Leftrightarrow B\{1\} \subseteq A\{1\}, \quad \text{videti [73]} \tag{4.41}$$

$$A <^{\#} B \Leftrightarrow B\{1,5\} \subseteq A\{1,5\}, \quad \text{videti [74]} \tag{4.42}$$

$$A <^{*} B \Leftrightarrow B\{1,3,4\} \subseteq A\{1,3,4\}, \quad \text{videti [73].} \tag{4.43}$$

U Teoremi 3.1.14 na strani 31 smo dokazali da u slučaju regularnog prstena R važi $a <^{-} b \Leftrightarrow b\{1\} \subseteq a\{1\}$. Poznato je da u proizvoljnom prstenu, iz $a <^{-} b$ sledi $b\{1\} \subseteq a\{1\}$. U nastavku ćemo dokazati da su ekvivalencije (4.42) i (4.43) tačne i u slučaju proizvoljnog $*$-prstena. Prirodno je postaviti pitanje da li analogne karakterizacije važe i za jezgarno i dualno jezgarno parcijalno uređenje. Potvrdan odgovor za proizvoljan $*$-prsten je dat Teoremom 4.2.18. U narednim dokazima ćemo često koristiti Napomene 3.1.12 i 4.1.22. Potrebna nam je sledeća lema.

Lema 4.2.17. (i) *Neka je $b \in R^{\dagger}$. Tada je*

$$b\{1,3\} = \left\{ \begin{bmatrix} b^{\dagger} & 0 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}_{r \times p} : x_3 \in (1-r)Rp,\ x_4 \in (1-r)R(1-p) \right\},$$

$$b\{1,4\} = \left\{ \begin{bmatrix} b^{\dagger} & x_2 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix}_{r \times p} : x_2 \in rR(1-p),\ x_4 \in (1-r)R(1-p) \right\},$$

$$b\{1,3,4\} = \left\{ \begin{bmatrix} b^{\dagger} & 0 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix}_{r \times p} : x_4 \in (1-r)R(1-p) \right\},$$

gde je $r = b^{\dagger}b$ i $p = bb^{\dagger}$.

(ii) *Neka je $b \in R^{\#}$. Tada je*

$$b\{1,6\} = b\{6\} = \left\{ \begin{bmatrix} b^{\#} & x_2 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix}_{q \times q} : x_2 \in qR(1-q),\ x_4 \in (1-q)R(1-q) \right\},$$

$$b\{1,8\} = b\{8\} = \left\{ \begin{bmatrix} b^{\#} & 0 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}_{q \times q} : x_3 \in (1-q)Rq,\ x_4 \in (1-q)R(1-q) \right\},$$

$$b\{1,5\} = b\{1,6,8\} = \left\{ \begin{bmatrix} b^{\#} & 0 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix}_{q \times q} : x_4 \in (1-q)R(1-q) \right\},$$

gde je $q = bb^{\#} = b^{\#}b$.

(iii) *Neka je* $b \in R^{\oplus}$. *Tada je*

$$b\{1,3\} = \left\{ \begin{bmatrix} b^{\oplus} & 0 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}_{q\times p} : x_3 \in (1-q)Rp,\ x_4 \in (1-q)R(1-p) \right\},$$

$$b\{1,6\} = b\{6\} = \left\{ \begin{bmatrix} b^{\oplus} & x_2 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix}_{q\times p} : x_2 \in qR(1-p),\ x_4 \in (1-q)R(1-p) \right\},$$

$$b\{1,3,6\} = b\{3,6\} = \left\{ \begin{bmatrix} b^{\oplus} & 0 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix}_{q\times p} : x_4 \in (1-q)R(1-p) \right\},$$

gde je $q = b^{\oplus}b = b^{\#}b$ *i* $p = bb^{\oplus}$. *Pored toga, ako je* $b \in R^{\dagger}$ *onda je* $p = bb^{\dagger}$.

(iv) *Neka je* $b \in R_{\oplus}$. *Tada je*

$$b\{1,4\} = \left\{ \begin{bmatrix} b_{\oplus} & x_2 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix}_{r\times q} : x_2 \in rR(1-q),\ x_4 \in (1-r)R(1-q) \right\},$$

$$b\{1,8\} = b\{8\} = \left\{ \begin{bmatrix} b_{\oplus} & 0 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}_{r\times q} : x_3 \in (1-r)Rq,\ x_4 \in (1-r)R(1-q) \right\},$$

$$b\{1,4,8\} = b\{4,8\} = \left\{ \begin{bmatrix} b_{\oplus} & 0 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix}_{r\times q} : x_4 \in (1-r)R(1-q) \right\},$$

gde je $r = b_{\oplus}b$ *i* $q = bb_{\oplus} = bb^{\#}$. *Pored toga, ako je* $b \in R^{\dagger}$ *onda je* $r = b^{\dagger}b$.

Dokaz. (iii): Prvo, ako $b \in R^{\oplus}$ tada je, po (4.25), $b \in R^{\#}$. Takođe, po (4.29), važi $q = b^{\#}b$. Dakle, ako je $xb^2 = b$ onda je

$$bxb = bxb^2b^{\#} = bbb^{\#} = b.$$

Sledi, $b\{1,6\} = b\{6\}$ i $b\{1,3,6\} = b\{3,6\}$. Iz prvog skupa jednačina u 4.12 sledi da je

$$b = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times q} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q\times q}.$$

Pretpostavimo da je $x \in b\{1,3\}$ i da je $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}_{q\times p}$. Iz $bxb = b$ sledi

$$\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times q} = b = bxb = \begin{bmatrix} bx_1b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times q}.$$

Kako je (p,q)-inverz od b jednak $b^{\oplus}$ i kako $x_1 \in qRp$, to iz $b = bx_1b$ sledi da je $x_1 = b^{\oplus}$, videti Napomene 3.1.12 i 4.1.22. Iz $x \in b\{1,3\}$ imamo $(bx)^* = bx$. Kako je p samo-adjungovan, odavde sledi da je

$$\begin{bmatrix} bb^{\oplus} & bx_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p} = bx = (bx)^* = \begin{bmatrix} (bb^{\oplus})^* & 0 \\ (bx_2)^* & 0 \end{bmatrix}_{p\times p}.$$

Kako je b, (p,q)-invertibilan i $x_2 \in qR$, iz $bx_2 = 0$ sledi da je $x_2 = 0$. Obrnuto, ako je $x = \begin{bmatrix} b^{\oplus} & 0 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}_{q\times p}$ onda je $bxb = b$ i $(bx)^* = bx$. Time smo dokazali prvu jednakost u (iii).

Predpostavimo sada da $x \in b\{6\}$ i da je $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}_{q\times p}$. Imamo

$$\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q\times q} = b = xb^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}_{q\times p} \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times q} \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q\times q} = \begin{bmatrix} x_1 b^2 & 0 \\ x_3 b^2 & 0 \end{bmatrix}_{q\times q}.$$

Sledi $x_1 b^2 = b$ i $x_3 b^2 = 0$. Slično kao malopre, kako je $b^{\#}$ (q,q)-inverz od b i kako $x_1 b, x_3 b \in Rq$ dobijamo da je $x_1 b = q$ odnosno $x_3 b = 0$. Sada, zbog toga što je $b^{\oplus}$ (p,q) inverz od b i $x_1, x_3 \in Rp$ sledi da je $x_1 = b^{\oplus}$ odnoso $x_3 = 0$. Obrnuto, ako je $x = \begin{bmatrix} b^{\oplus} & x_2 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix}_{q\times p}$ onda je lako pokazati da je $xb^2 = b$. Time smo dokazali drugu jednakost u (iii). Ako pored toga važi i $(bx)^* = bx$, tj. ako zahtevamo da $x \in b\{3,6\}$ onda je

$$\begin{bmatrix} bb^{\oplus} & bx_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p} = bx = (bx)^* = \begin{bmatrix} bb^{\oplus} & 0 \\ (bx_2)^* & 0 \end{bmatrix}_{p\times p}.$$

Sledi, $bx_2 = 0$, pa je $x_2 = 0$. Obrnuto, ako je $x = \begin{bmatrix} b^{\oplus} & 0 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix}_{q\times p}$ onda se lako pokazuje da je $(bx)^* = bx$ i $xb^2 = b$.

(i), (ii), (iv): Ova tvrđenja se mogu dokazati na sličan način. Samo ćemo dokazati da kada $b \in R^{\#}$ onda važi da je $b\{1,5\} = b\{1,6,8\}$. Ako je $bxb = b$ i $bx = xb$ onda je $xb^2 = bxb = b$ i $b^2 x = bxb = b$. Ako je $b = bxb = xb^2 = b^2 x$ onda je $bx = b^{\#} b^2 x = b^{\#} b$ i $xb = xb^2 b^{\#} = bb^{\#}$, pa je $bx = xb$. □

Naglašavamo da je u sledećoj teoremi tvrđenje (iv) i ekvivalentnost uslova (a) i (c) u tvrđenju (iii) nov rezultat čak i u slučaju kompleksnih matrica.

Teorema 4.2.18. (i) *Neka su $a, b \in R^{\dagger}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) $a <^{*} b$,

(b) $b\{1,3\} \subseteq a\{1,3\}$ *i* $b\{1,4\} \subseteq a\{1,4\}$,

(c) $b\{1,3,4\} \subseteq a\{1,3,4\}$.

(ii) *Neka su $a, b \in R^{\#}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) $a <^{\#} b$,

(b) $b\{6\} \subseteq a\{6\}$ *i* $b\{8\} \subseteq a\{8\}$,

(c) $b\{1,5\} \subseteq a\{1,5\}$.

(iii) *Neka su $a, b \in R^{\oplus}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) $a <^{\oplus} b$,

(b) $b\{1,3\} \subseteq a\{1,3\}$ *i* $b\{6\} \subseteq a\{6\}$, *(videti [71] za slučaj kompleksnih matrica)*

(c) $b\{3,6\} \subseteq a\{3,6\}$.

(iv) *Neka su* $a, b \in R_{\oplus}$. *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) $a <_{\oplus} b$,

(b) $b\{1,4\} \subseteq a\{1,4\}$ *i* $b\{8\} \subseteq a\{8\}$,

(c) $b\{4,8\} \subseteq a\{4,8\}$.

Dokaz. (iii): (a) $\Rightarrow$ (b) Pretpostavimo da $a, b \in R^{\oplus}$ i da je $a <^{\oplus} b$. Iz Teoreme 4.2.14 sledi da je

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e\times f}, \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e\times f},$$

gde je $e_1 = ab^{\oplus} = aa^{\oplus}$, $f_1 = b^{\oplus}a = a^{\oplus}a$. Iz Leme 4.2.17 i reprezentacije za $a^{\oplus}$ datoj u (4.36), sledi da $x \in a\{1,3\}$ ako i samo ako je

$$x = \begin{bmatrix} a^{\oplus} & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}_{e\times f},$$

gde su x_{ij} proizvoljni elementi odgovarajućih podskupova od R. Primetimo da je $e_1+e_2 = bb^{\oplus}$ i $f_1+f_2 = b^{\oplus}b$. Iz Leme 4.2.17 i reprezentacije za $b^{\oplus}$ date u (4.37), sledi da $x \in b\{1,3\}$ ako i samo ako je

$$x = \begin{bmatrix} a^{\oplus} & 0 & 0 \\ 0 & b^{\oplus}-a^{\oplus} & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}_{e\times f}.$$

Zaključujemo da je $b\{1,3\} \subseteq a\{1,3\}$. Slično dobijamo da je $b\{6\} \subseteq a\{6\}$.

(b) $\Rightarrow$ (c) je trivijalno.

(c) $\Rightarrow$ (a) Pretpostavimo da je $b\{3,6\} \subseteq a\{3,6\}$ i neka je $a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}_{p\times q}$, gde je $p = bb^{\oplus} = p^*$ i $q = b^{\oplus}b$. Iz

$$b^{\oplus} = \begin{bmatrix} b^{\oplus} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times q} \in b\{3,6\} \subseteq a\{3,6\} = a\{1,3,6\}$$

sledi da je

$$ab^{\oplus}a = a, \quad ab^{\oplus} = (ab^{\oplus})^*, \quad b^{\oplus}a^2 = a.$$

Kada uslov $ab^{\oplus} = (ab^{\oplus})^*$ prepišemo u matričnoj formi, dobićemo

$$\begin{bmatrix} a_1b^{\oplus} & 0 \\ a_3b^{\oplus} & 0 \end{bmatrix}_{p\times p} = \begin{bmatrix} (a_1b^{\oplus})^* & (a_3b^{\oplus})^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p}.$$

Dakle, $a_1b^{\oplus} = (a_1b^{\oplus})^* = (b^{\oplus})^*a_1^*$ i $a_3b^{\oplus} = 0$. Množeći poslednju jednačinu sa b sa desne strane dobijamo $a_3q = 0$. Kako $a_3 \in (1-p)Rq$ zaključujemo da je $a_3 = 0$. Kada jednačinu $a_1b^{\oplus} = (b^{\oplus})^*a_1^*$ pomnožimo sa b^* sa leve strane i sa b sa desne strane, dobijamo $b^*a_1q = b^*(b^{\oplus})^*a_1^*b$. Sledi,

$$b^*a_1 = (a_1b^{\oplus}b)^*b = (a_1q)^*b = a_1^*b. \tag{4.44}$$

Kako je $qp = p$ (v. (4.9)) to je $(1-q)(1-p) = 1-q$. Neka je $x = \begin{bmatrix} b^{\oplus} & 0 \\ 0 & 1-q \end{bmatrix}_{q\times p}$. Po Lemi 4.2.17, $x \in b\{3,6\}$, pa $x \in a\{3,6\}$. Kako je $ax = \begin{bmatrix} a_1b^{\oplus} & a_2 \\ 0 & a_4 \end{bmatrix}_{p\times p}$, uslov $ax = (ax)^*$ daje $a_2 = 0$. Sada, iz $ab^{\oplus}a = a$ sledi

$$\begin{bmatrix} a_1b^{\oplus}a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times q} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_4 \end{bmatrix}_{p\times q}.$$

Dakle $a_4 = 0$ i $a = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times q} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times q}$. Dakle, uslov (4.44) se svodi na

$$b^*a = a^*b. \tag{4.45}$$

Množeći jednačinu $b^{\oplus}a^2 = a$ sa b sa leve strane dobijamo $pa^2 = ba$, tj.

$$a^2 = ba. \tag{4.46}$$

Imajući u vidu uslov (4.46) i Teoremu 4.2.8, ako dokažemo da je $a^*b = a^*a$, onda će važiti i uslov $a <^{\oplus} b$. Imamo da je

$$\begin{aligned} a^*b &= (aa^{\oplus}a)^*b = (aa(a^{\oplus})^2a)^*(b^*)^* \quad (\text{sledi iz } a^{\oplus} = a(a^{\oplus})^2) \\ &= (b^*aa(a^{\oplus})^2a)^* = (a^*ba(a^{\oplus})^2a)^* \quad (\text{sledi iz } (4.45)) \\ &= (a^*a^2(a^{\oplus})^2a)^* \quad (\text{sledi iz } (4.46)) \\ &= (a^*aa^{\oplus}a)^* = (a^*a)^* = a^*a. \end{aligned}$$

(i), (ii), (iv): Dokazi tvrđenja (i), (ii) i (iv) su po ideji i načinu slični dokazu tvrđenja (iii). Šta više, dokazi za (i) i (ii) su lakši. □

Sada možemo dokazati da su posmatrana uređenja zaista relacije poretka.

Teorema 4.2.19. *Relacije $<^*$, $<^{\#}$, $<^{\oplus}$ i $<_{\oplus}$ su relacije parcijalnog uređenja na skupu $R^{\dagger}$ odnosno na $R^{\#}$ odnosno na $R^{\oplus}$ odnosno na $R_{\oplus}$.*

Dokaz. Refleksivnost i tranzitivnost ovih relacija slede iz Teoreme 4.2.18. Setimo se da je minus parcijalno uređenje relacija poretka. Kako iz $a < b$ sledi $a <^- b$, gde je $<$ jedna od relacija $<^*$, $<^{\#}$, $<^{\oplus}$ ili $<_{\oplus}$, sledi da je relacija $<$ antisimetrična. □

Kada iz $a <^- b$ sledi $a <^* b$, $a <^{\#} b$, $a <^{\oplus} b$ i $a <_{\oplus} b$?

Naglasili smo da svaki od uslova $a <^* b$, $a <^{\#} b$, $a <^{\oplus} b$, $a <_{\oplus} b$ implicira $a <^- b$. Pod kojim uslovima važi obrnuta implikacija? Teoreme 4.2.22 i 4.2.26 su poznate u slučaju kompleksnih matrica i mi ćemo ih dokazati u slučaju proizvoljnog $*$-prstena. Ranije smo ustanovili da su jezgarno i dualno jezgarno parcijalno uređenje "između" zvezda i oštrog parcijalnog uređenja. Da bi našli analogne uslove pod kojima minus uređenje implicira jezgarno i dualno jezgarno uređenje, moramo "podeliti" uslove (ii), (iii) i (iv) iz Teoreme 4.2.22 i uslove (ii), (iii), (iv) i (v) iz Teoreme 4.2.26, na dva uslova. Zbog toga su nam potrebne Leme 4.2.20, 4.2.21, 4.2.23, 4.2.24 i 4.2.25.

Lema 4.2.20. *Neka su $a, b \in R^\dagger$ i neka je $a <^- b$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a^*a = a^*b$

(ii) a^*b *je samo-adjungovan;*

(iii) $a^\dagger a = a^\dagger b$*;*

(iv) $a^\dagger b$ *je samo-adjungovan;*

(v) $ab^\dagger$ *je samo-adjungovan.*

Dokaz. (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Jasno je da iz (i) sledi (ii). Obrnuto, pretpostavimo da je a^*b samo-adjungovan. Kako je $a <^- b$, postoji $a^{(1)} \in a\{1\}$ tako da je $aa^{(1)} = ba^{(1)}$. Sledi,

$$a^*a = a^*aa^{(1)}a = a^*ba^{(1)}a = b^*aa^{(1)}a = b^*a,$$

pa je $a^*a = a^*b$.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) sledi iz Teoreme 4.2.5.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv): Očigledno je da iz (iii) sledi (iv). Obrnuto, pretpostavimo da je $a^\dagger b = (a^\dagger b)^*$. Iz (3.6) (Teorema 3.1.8) sledi da je $bf_1 = a = af_1$. Odavde je

$$\begin{aligned} a^\dagger a &= a^\dagger b f_1 = (f_1^* a^\dagger b)^* = (f_1^*(a^\dagger a)^* a^\dagger b)^* \\ &= ((a^\dagger a f_1)^* a^\dagger b)^* = ((a^\dagger a)^* a^\dagger b)^* = (a^\dagger b)^* = a^\dagger b. \end{aligned}$$

(i) $\Rightarrow$ (v): Pogledajmo dokaz Teoreme 3.1.8. Možemo pretpostaviti da je $h = b^\dagger$. Množeći jednakost $a^*a = a^*b$ sa $b^\dagger$ sa desne strane dobijamo $a^*e_1 = a^*bb^\dagger$. Delovanjem involucije na ovu jednakost dobijamo $e_1^*a = bb^\dagger a = (e_1 + e_2)a = a$. Množeći obe strane sa $b^\dagger$ sa desna dobijamo $e_1^*e_1 = e_1$, pa je $e_1 = ab^\dagger$ samo-adjungovan.

(v) $\Rightarrow$ (i): Pretpostavimo da je $ab^\dagger$ samo-adjungovan. Kao i malopre, u dokazu Teoreme 3.1.8 možemo uzeti da je $h = b^\dagger$. Sledi da je $e_1 = ab^\dagger$ samo-adjungovan. Kako je još $e_1 b = ab^\dagger b = a$ dobijamo

$$a^*b = (e_1 a)^* b = a^* e_1 b = a^*a.$$

□

Sledeća lema se može dokazati slično kao prethodna.

Lema 4.2.21. *Neka su $a, b \in R^\dagger$ i neka je $a <^- b$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $aa^* = ba^*$

(ii) ba^* *je samo-adjungovan;*

(iii) $aa^\dagger = ba^\dagger$;

(iv) $ba^\dagger$ *je samo-adjungovan;*

(v) $b^\dagger a$ *je samo-adjungovan.*

Teorema 4.2.22. *(Videti [74] i Teoremu 5.2.10 u [77] za slučaj kompleksnih matrica.) Neka su* $a, b \in R^\dagger$ *i neka je* $a <^- b$. *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a <^* b$;

(ii) a^*b *i* ba^* *su samo-adjungovani;*

(iii) $a^\dagger b$ *i* $ba^\dagger$ *su samo-adjungovani;*

(iv) $ab^\dagger$ *i* $b^\dagger a$ *su samo-adjungovani;*

(v) $ba^\dagger b = a$;

(vi) $b^\dagger ab^\dagger = a^\dagger$.

Dokaz. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) sledi iz Leme 4.2.20, Leme 4.2.21 i Teoreme 4.2.5.

(i) $\Leftrightarrow$ (v): Ako je $a <^* b$ onda je, po definiciji, $ba^\dagger b = aa^\dagger a = a$. Obrnuto, pretpostavimo da je $a <^- b$ i $ba^\dagger b = a$. Postoji $a^{(1)} \in a\{1\}$ tako da je $aa^{(1)} = ba^{(1)}$ i $a^{(1)}a = a^{(1)}b$. Množeći sa desne strane jednakost $a = ba^\dagger b$ sa $a^{(1)}aa^\dagger$ dobijamo

$$aa^\dagger = ba^\dagger ba^{(1)}aa^\dagger = ba^\dagger aa^{(1)}aa^\dagger = ba^\dagger.$$

Slično zaključujemo da je $a^\dagger a = a^\dagger b$.

(i) $\Rightarrow$ (vi): Ako je $a <^* b$ onda Teorema 4.2.5 daje $b^\dagger ab^\dagger = a^\dagger aa^\dagger = a^\dagger$.

(vi) $\Rightarrow$ (iv): Pretpostavimo da je $a^\dagger = b^\dagger ab^\dagger$. Kako je $a <^- b$ imamo $ab^\dagger a = a$, videti (4.26). Množeći sa desne strane jednakost $a^\dagger = b^\dagger ab^\dagger$ sa a dobijamo

$$a^\dagger a = b^\dagger ab^\dagger a = b^\dagger a,$$

pa je $b^\dagger a$ samo-adjungovan. Slično, $ab^\dagger$ je samo-adjungovan. $\square$

Lema 4.2.23. *Neka su* $a, b \in R^\#$. *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $ab = ba$;

(ii) $a^2b = aba$ *i* $ba^2 = aba$.

Dokaz. Očigledno je da iz (i) sledi (ii). Pretpostavimo da je $a^2b = aba$ i $ba^2 = aba$. Ako je $q = aa^\#$ onda je $a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q\times q}$. Neka je $b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}_{q\times q}$. Iz $a^2b = aba$ sledi $a^2b_1 = ab_1a$ i $a^2b_2 = 0$. Množeći $a^2b_1 = ab_1a$ sa $a^\#$ sa leve strane dobijamo $ab_1 = a^\#ab_1a = qb_1a = b_1a$. Množeći $a^2b_2 = 0$ sa $(a^\#)^2$ sa leve strane dobijamo $b_2 = 0$. Slično, iz $ba^2 = aba$ sledi $b_3 = 0$. Sada je lako videti da važi $ab = ba$. $\square$

Lema 4.2.24. *Neka su* $a, b \in R^\#$ *i neka je* $a <^- b$. *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $ba = a^2$;

(ii) $ba^2 = aba$;

(iii) $b(a^{\#})^2 = a^{\#}ba^{\#}$;

(iv) $b^{\#}a^2 = ab^{\#}a$;

(v) $b^{\#}(a^{\#})^2 = a^{\#}b^{\#}a^{\#}$.

Dokaz. Kako je $a <^- b$, postoji $a^{(1)} \in a\{1\}$ tako da je $a^{(1)}a = a^{(1)}a$ i $aa^{(1)} = ba^{(1)}$. Po Lemi 3.1.5 je

$$a^{(1)} = \begin{bmatrix} a^{\#} & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}_{q\times q},$$

za neke x_2, x_3, x_4, gde je $q = aa^{\#}$. Naravno,

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q\times q} \quad \text{i} \quad a^{\#} = \begin{bmatrix} a^{\#} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q\times q}.$$

Dalje, kako $a <^- b$ implicira $b\{1\} \subseteq a\{1\}$, imamo da je

$$ab^{\#}a = a. \tag{4.47}$$

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Ako je $ba = a^2$ onda je $ba^2 = a^3 = aba$. Obrnuto, pretpostavimo da je $ba^2 = aba$ i $b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}_{q\times q}$. Tada je $b_1a^2 = ab_1a$ i $b_3a^2 = 0$. Iz poslednje jednakosti, sobzirom na (q,q)-invertibilnost od a, sledi da je $b_3 = 0$. Takođe je

$$\begin{bmatrix} q & 0 \\ x_3a & 0 \end{bmatrix}_{q\times q} = a^{(1)}a = a^{(1)}b = \begin{bmatrix} a^{\#}b_1 & a^{\#}b_2 + x_2b_4 \\ x_3b_1 & x_3b_2 + x_4b_4 \end{bmatrix}_{q\times q},$$

pa je $q = a^{\#}b_1$. Množeći ovu jednakost sa a sa leve strane dobijamo $a = aa^{\#}b_1 = qb_1 = b_1$. Sada je lako pokazati da je $ba = a^2$.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): Ako je $a^2 = ba$ onda je $b(a^{\#})^2 = ba(a^{\#})^3 = a^2(a^{\#})^3 = a^{\#}$ i $a^{\#}ba^{\#} = a^{\#}ba(a^{\#})^2 = a^{\#}a^2(a^{\#})^2 = a^{\#}$, pa je $b(a^{\#})^2 = a^{\#}ba^{\#}$. Obrnuto, pretpostavimo da je $b(a^{\#})^2 = a^{\#}ba^{\#}$. Neka je $b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}_{q\times q}$. Uslov $b(a^{\#})^2 = a^{\#}ba^{\#}$ se sada svodi na $b_1(a^{\#})^2 = a^{\#}b_1a^{\#}$ i $b_3(a^{\#})^2 = 0$. Zbog toga je $b_3 = b_3q = b_3a^{\#}a = b_3(a^{\#})^2a^2 = 0$. Sada dokaz možemo nastaviti duž linija dokaza (ii) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Leftrightarrow$ (iv): Ako je $a^2 = ba$ tada je

$$b^{\#}a^2 = b^{\#}a^2aa^{\#} = b^{\#}baaa^{\#} = b^{\#}bbaa^{\#} = baa^{\#} = a^2a^{\#} = a.$$

Zbog (4.47) dobijamo (iv). Obrnuto, pretpostavimo da je $b^{\#}a^2 = ab^{\#}a = a$. Izvodimo

$$ba = bb^{\#}a^2 = bb^{\#}aa^{(1)}aa = bb^{\#}ba^{(1)}aa = ba^{(1)}aa = aa^{(1)}aa = a^2.$$

(iv) $\Leftrightarrow$ (v): Kako je $a <^- b$ imamo

$$a^\# b^\# a^\# = (a^\#)^2 ab^\# a(a^\#)^2 = (a^\#)^2 a(a^\#)^2 = (a^\#)^3.$$

Pretpostavimo da je $b^\# a^2 = ab^\# a = a$. Dobijamo

$$b^\# (a^\#)^2 = b^\# a^2 (a^\#)^4 = a(a^\#)^4 = (a^\#)^3.$$

Obrnuto, pretpostavimo da je $b^\#(a^\#)^2 = a^\# b^\# a^\# = (a^\#)^3$. Množeći ovu jednakost sa a^4 sa desne strane dobijamo $b^\# a^2 = a$. □

Na isti način možemo dokazati i sledeću lemu.

Lema 4.2.25. *Neka su $a, b \in R^\#$ i neka je $a <^- b$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $ab = a^2$;

(ii) $a^2 b = aba$;

(iii) $(a^\#)^2 b = a^\# b a^\#$;

(iv) $a^2 b^\# = ab^\# a$;

(v) $(a^\#)^2 b^\# = a^\# b^\# a^\#$.

Teorema 4.2.26. *(Videti [74] i Teoremu 4.2.12 u [77] za slučaj kompleksnih matrica.) Neka su $a, b \in R^\#$ i neka je $a <^- b$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a <^\# b$;

(ii) $ab = ba$;

(iii) $a^\# b = ba^\#$;

(iv) $ab^\# = b^\# a$;

(v) $a^\# b^\# = b^\# a^\#$;

(vi) $b^\# ab^\# = a^\#$;

(vii) $ba^\# b = a$.

Dokaz. Ekvivalentnost uslova (i)–(v) sledi iz Leme 4.2.23, Leme 4.2.24, Leme 4.2.25 i Teoreme 4.2.6.

(i) $\Rightarrow$ (vi): Pretpostavimo da je $a <^\# b$, tj. da je $a^2 = ab = ba$. Sledi $a^3 = aa^2 = a(ab) = a^2 b = abb = ab^2$. Slično je $a^3 = b^2 a$. Odavde dobijamo

$$\begin{aligned} b^\# ab^\# &= b^\# a^3 (a^\#)^5 a^3 b^\# = b^\# b^2 a (a^\#)^5 ab^2 b^\# \\ &= ba(a^\#)^5 ab = a^2 (a^\#)^5 a^2 = a^\#. \end{aligned}$$

(vi) $\Rightarrow$ (iv): Pretpostavimo da je $a^{\#} = b^{\#}ab^{\#}$. Podsetimo se da važi $ab^{\#}a = a$ i zbog toga je

$$a^{\#}a = b^{\#}ab^{\#}a = b^{\#}a$$

i

$$aa^{\#} = ab^{\#}ab^{\#} = ab^{\#}.$$

Dakle, $ab^{\#} = b^{\#}a$.

(i) $\Rightarrow$ (vii): Pretpostavimo da je $a^2 = ab = ba$. Tada je

$$ba^{\#}b = ba(a^{\#})^3ab = a^2(a^{\#})^3a^2 = a.$$

(vii) $\Rightarrow$ (iii): Pretpostavimo da je $ba^{\#}b = a$. Kako je $a <^- b$, postoji $a^{(1)} \in a\{1\}$ tako da je $aa^{(1)} = ba^{(1)}$ i $a^{(1)}a = a^{(1)}b$. Imamo

$$aa^{\#} = aa^{(1)}aa^{\#} = ba^{\#}ba^{(1)}aa^{\#} = ba^{\#}aa^{(1)}aa^{\#} = ba^{\#}$$
$$a^{\#}a = a^{\#}aa^{(1)}a = a^{\#}aa^{(1)}ba^{\#}b = a^{\#}aa^{(1)}aa^{\#}b = a^{\#}b,$$

pa je $ba^{\#} = a^{\#}b$. □

Kombinujući Lemu 4.2.20, Lemu 4.2.24 i Teoremu 4.2.8 možemo izvesti veliki broj ekvivalentnih uslova za $a <^{\oplus} b$ kada je $a <^- b$. Sledeća teorema predstavlja nov rezultat čak i u matričnom slučaju.

Teorema 4.2.27. *Neka su $a, b \in R^{\oplus}$ i neka je $a <^- b$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *$a <^{\oplus} b$.*

(ii) *Važi jedan od uslova (i), (ii) Leme 4.2.20 i jedan od uslva (i)–(v) Leme 4.2.24.*

Ako uz to važi i $a, b \in R^{\dagger}$ onda su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) *$a <^{\oplus} b$.*

(ii) *Važi jedan od uslova (iii)–(v) Leme 4.2.20 i jedan od uslova (i)–(v) Leme 4.2.24.*

Dokaz. Dokaz sledi iz Leme 4.2.20, Leme 4.2.24 i Teoreme 4.2.8. □

Ekvivalentnost uslova (i) i (ii) u sledećoj teoremi je uopštenje Teoreme 2.7 [66]. U istom radu je dokazano da ako su A i B jezgarno invertibilne matrice pri čemu je je $B^{\dagger} = B^{\#}$ onda je

$$A <^{\oplus} B \quad \Leftrightarrow \quad B^{\oplus}AB^{\oplus} = A^{\oplus} \text{ i } A <*B,$$

gde je $<*$ desno zvezda parcijalno uređenje. Podsetimo se da desno zvezda parcijalno uređenje implicira minus parcijalno uređenje. U sledećoj teoremi ćemo dokazati da je uslov $B^{\dagger} = B^{\#}$ nepotreban i da se uslov $A <*B$ može zameniti slabijim uslovom $A <^- B$.

Teorema 4.2.28. *Neka su $a, b \in R^{\oplus}$ i neka je $a <^- b$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *$a <^{\oplus} b$;*

(ii) *$ba^{\oplus}b = a$;*

(iii) $b^{\oplus}ab^{\oplus} = a^{\oplus}$.

Dokaz. (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Kako je $a <^{-} b$, postoji $a^{(1)} \in a\{1\}$ tako da je $aa^{(1)} = ba^{(1)}$ i $a^{(1)}a = a^{(1)}b$. Ako je $a <^{\oplus} b$ onda, po definiciji, sledi $ba^{\oplus}b = aa^{\oplus}a = a$. Obrnuto, pretpostavimo da je $a = ba^{\oplus}b$. Množeći ovu jednakost sa $a^{\oplus}aa^{(1)}$ sa leve strane dobijamo

$$a^{\oplus}aa^{(1)}a = a^{\oplus}aa^{(1)}ba^{\oplus}b = a^{\oplus}aa^{(1)}aa^{\oplus}b = a^{\oplus}aa^{\oplus}b = a^{\oplus}b.$$

Dakle, $a^{\oplus}a = a^{\oplus}b$. Slično, množeći $a = ba^{\oplus}b$ sa $a^{(1)}aa^{\oplus}$ sa desne strane dobijamo $aa^{\oplus} = ba^{\oplus}$.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): Kako je $a <^{-} b$ sledi $b\{1\} \subseteq a\{1\}$, pa je $ab^{\oplus}a = a$. Ako je $a <^{\oplus} b$ onda, po Teoremi 4.2.8, važi $aa^{\oplus} = ab^{\oplus}$ i $a^{\oplus}a = b^{\oplus}a$. Sledi, $b^{\oplus}ab^{\oplus} = a^{\oplus}aa^{\oplus} = a^{\oplus}$. Obrnuto, pretpostavimo da je $a^{\oplus} = b^{\oplus}ab^{\oplus}$. Odavde je

$$\begin{aligned} a^{\oplus}a &= b^{\oplus}ab^{\oplus}a = b^{\oplus}a \quad \text{i} \\ aa^{\oplus} &= ab^{\oplus}ab^{\oplus} = ab^{\oplus}. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Izaberimo $h = b^{\oplus}$ u dokazu Teoreme 3.1.8. Dokaz sada sledi iz (4.48), Teoreme 4.2.14 i Teoreme 3.1.8. □

Teorema 4.2.29. *Neka su $a, b \in R^{\oplus}$ i neka je $a <^{-} b$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a <_{\oplus} b$.

(ii) *Važi jedan od uslova (i), (ii) Leme 4.2.21 i jedan od uslova (i)–(v) Leme 4.2.25.*

Ako uz to važi i $a, b \in R^{\dagger}$ onda su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) $a <_{\oplus} b$.

(ii) *Važi jedan od uslova (iii)–(v) Leme 4.2.21 i jedan od uslova (i)–(v) Leme 4.2.25.*

Dokaz. Dokaz sledi iz Leme 4.2.21, Leme 4.2.25 i Teoreme 4.2.9. □

Teorema 4.2.30. *Neka su $a, b \in R_{\oplus}$ i neka je $a <^{-} b$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a <_{\oplus} b$;

(ii) $ba_{\oplus}b = a$;

(iii) $b_{\oplus}ab_{\oplus} = a_{\oplus}$.

Dokaz. Teorema se može dokazati na isti način kao i Teorema 4.2.28. □

4.3 Zvezda, oštro, jezgarno i dualno jezgarno parcijalno uređenje na Hilbertovim operatorima

Prisetimo se kako smo osobine minus parcijalnog uređenja, sa prstena (Poglavlje 3.1) preneli na skup Banahovih operatora (Poglavlje 3.2). Na isti način možemo preneti osobine zvezda, oštrog, jezgarnog i dualnog jezgarnog parcijalnog uređenja, sa prstena (Poglavlje 4.2) na skup Hilbertovih operatora. Rezultati ovog poglavlja se delom nalaze u radu [93].

Jezgarni inverz - definicija i osnovne osobine

Neka je H Hilbertov prostor. S obzirom da se grupni, jezgarni i dualni jezgarni inverz definišu samo za kvadratne matrice, u ovom poglavlju ćemo pretpostaviti da su svi operatori, ograničeni Hilbertovi operatori iz H u H.

Neka je R $*$-prsten. Podsetimo se definicije jezgarnog inverza na skupu matrica (Definicija 4.1.1), kao i njegove definicije na prstenu (Definicija 4.1.7).

Definicija jezgarnog inverza operatora $A \in \mathcal{B}(H)$ treba biti takva da se poklapa sa Definicijom 4.1.1 u slučaju $\dim H < \infty$, i da se poklapa sa Definicijom 4.1.7 u slučaju $R = \mathcal{B}(H)$. Kao što ćemo pokazati u Napomeni 4.3.8, kada je $\dim H = \infty$, tada Definicija 4.1.1 ne dovodi do željenih osobina (na primer odatle ne sledi da je $\operatorname{ind} A \leqslant 1$), pa nju nećemo uzeti za definiciju jezgarnog inverza operatora. Sa druge strane, za operatorski slučaj ne želimo uzeti ni Definiciju 4.1.7 (iako to možemo učiniti) jer se iz nje direktno ne vidi u kakvoj vezi su slika i jezgro operatora i njegovog jezgarnog inverza. Kako ćemo ubrzo videti sledeća definicija zadovoljava sve zahteve.

Definicija 4.3.1. Neka je H proizvoljan Hilbertov prostor, i $A \in \mathcal{B}(H)$. Operator $A^{\oplus} \in \mathcal{B}(H)$ se naziva *jezgarni* inverz od A ako zadovoljava

$$AA^{\oplus}A = A, \quad \operatorname{Im} A^{\oplus} = \operatorname{Im} A \quad \text{i} \quad \operatorname{Ker} A^{\oplus} = \operatorname{Ker} A^*.$$

Lema 4.3.2. (i) *Neka je* $\dim H < \infty$. *Definicije 4.1.1 i 4.3.1 su ekvivalentne.*

(ii) *Neka je* $R = \mathcal{B}(H)$, *gde je* H *proizvoljan Hilbertov prostor. Definicije 4.1.7 i 4.3.1 su ekvivalentne.*

Dokaz. (i): Pretpostavimo da je $\dim H < \infty$ i $A \in \mathcal{B}(H)$. Neka je $A^{\oplus} \in \mathcal{B}(H)$ jezgarni inverz od A u smislu Definicije 4.1.1. Na strani 50. smo dokazali da je tada $AA^{\oplus}A = A$, $\operatorname{Im} A^{\oplus} = \operatorname{Im} A$ i $\operatorname{Ker} A^{\oplus} = \operatorname{Ker} A^*$ pa je $A^{\oplus}$ jezgarni inverz od A u smislu Definicije 4.3.1. Obrnuto, pretpostavimo da je $A^{\oplus}$ jezgarni inverz od A u smislu Definicije 4.3.1 i dokažimo da je $A^{\oplus}$ istovremeno i jezgarni inverz od A u smislu Definicije 4.1.1. Iz $\operatorname{Im} A^{\oplus} = \operatorname{Im} A$ sledi $\operatorname{rank}(A^{\oplus}) = \operatorname{rank}(A)$. Uz to je i $A^{\oplus} \in A\{1\}$, pa je $A^{\oplus} \in A\{1,2\}$ ([13], strana 46.) Očigledno je $(AA^{\oplus})^2 = AA^{\oplus}$ i $\operatorname{Im}(AA^{\oplus}) = \operatorname{Im} A$. Ostaje još da pokažemo da je $\operatorname{Ker}(AA^{\oplus}) = (\operatorname{Im} A)^{\perp} = \operatorname{Ker} A^*$. Ali iz $A^{\oplus}AA^{\oplus} = A^{\oplus}$ sledi $\operatorname{Ker}(AA^{\oplus}) = \operatorname{Ker} A^{\oplus} = \operatorname{Ker} A^*$.

(ii): Neka je $R = \mathcal{B}(H)$. Iz obe definicije sledi da je A regularan. Ako još dokažemo da je $A^{\oplus}$ (u smislu obe definicije) regularan, onda će na osnovu Leme 3.2.5 slediti dokaz tvrđenja. U Teoremi 4.1.18 smo za $A^{\oplus}$, kada se posmatra po Definiciji 4.1.7, dokazali da je $A^{\oplus}AA^{\oplus} = A^{\oplus}$. Dokažimo da iz $AA^{\oplus}A = A$, $\operatorname{Im} A^{\oplus} = \operatorname{Im} A$ i $\operatorname{Ker} A^{\oplus} = \operatorname{Ker} A^*$ sledi $A^{\oplus}AA^{\oplus} = A^{\oplus}$. Po Lemi 3.2.4, iz $\operatorname{Ker} A^* \subseteq \operatorname{Ker} A^{\oplus}$ sledi $A^{\oplus} = A^{\oplus}(A^{\oplus})^*A^*$, jer je $(A^{\oplus})^*$ jedan g-inverz od A^*. Odavde je $AA^{\oplus} = AA^{\oplus}(AA^{\oplus})^*$ pa je $(AA^{\oplus})^* = AA^{\oplus}$. Sledi

$$A^*(I - AA^{\oplus}) = A^* - A^*(AA^{\oplus})^* = A^* - (AA^{\oplus}A)^* = 0.$$

Kako je $\operatorname{Ker} A^* \subseteq \operatorname{Ker} A^{\oplus}$ sledi $A^{\oplus}(I - AA^{\oplus}) = 0$, tj. $A^{\oplus}AA^{\oplus} = A^{\oplus}$. □

Naravno, dualni jezgarni inverz ćemo definisati na sledeći način.

Definicija 4.3.3. Neka je H proizvoljan Hilbertov prostor, i $A \in \mathcal{B}(H)$. Operator $A_{\oplus} \in \mathcal{B}(H)$ se naziva *dualni jezgarni* inverz od A ako zadovoljava

$$AA_{\oplus}A = A, \quad \operatorname{Im} A_{\oplus} = \operatorname{Im} A^* \quad \text{i} \quad \operatorname{Ker} A_{\oplus} = \operatorname{Ker} A.$$

Za dualni jezgarni inverz se može dokazati tvrđenje analogno Lemi 4.3.2.

MP i grupni inverz za operatore se definišu jednačinama na isti način kao i za elemente prstena. Zbog toga i zbog Leme 4.3.2 i njenog analogona sledi da svi rezultati iz Poglavlja 4.1 i Poglavlja 4.2 koji se tiču MP, grupnog, jezgarnog i dualnog jezgarnog inverza odnosno zvezda, oštrog, jezgarnog i dualnog jezgarnog parcijalnog uređenja važe i u operatorskom slučaju. U nastavku ćemo prilagoditi ove rezultate novoj terminologiji. Rezultate koji se u istom obliku iskazuju i u slučaju prstena i u operatorskom slučaju nećemo ponovo pisati da se ne bismo ponavljali. Zbog specifičnosti, u operatorskom slučaju ćemo imati neke dodatne osobine. Sledeća teorema je dobro poznata.

Teorema 4.3.4. *(Videti [26].) Operator $A \in \mathcal{B}(H)$ poseduje Mur-Penrouzov inverz ako i samo ako je $\operatorname{Im} A$ zatvoren potprostor u H.*

Iz Teoreme 4.1.18 sledi da se jezgarni inverz operatora može okarakterisati skupom jednačina.

Teorema 4.3.5. *Operator $A^{\oplus} \in \mathcal{B}(H)$ je jezgarni inverz operatora $A \in \mathcal{B}(H)$ ako i samo ako važe jednačine*

$$\begin{array}{lll} (1)\ AA^{\oplus}A = A & (2)\ A^{\oplus}AA^{\oplus} = A^{\oplus} & (3)\ (AA^{\oplus})^* = AA^{\oplus} \\ (6)\ A^{\oplus}A^2 = A & (7)\ A(A^{\oplus})^2 = A^{\oplus}. & \end{array}$$

Kada je H konačnodimenzionalan, tj. kada je A kompleksna matrica, tada se jezgarni inverz može okarakterisati manjim brojem jednačina nego što je to slučaj u Teoremi 4.3.5.

Teorema 4.3.6. *Neka je $A \in M_n$. Tada je $A\{2,3,6\} \neq \emptyset$ ako i samo ako je $\operatorname{ind}(A) \leqslant 1$. U tom slučaju je $A\{2,3,6\} = \{A^{\oplus}\}$, tj. jezgarni inverz od A je jedinstvena matrica $X \in M_n$ koja zadovoljava jednačine:*

$$\begin{array}{l} (2)\, XAX = X \\ (3)\, (AX)^* = AX \\ (6)\, XA^2 = A. \end{array}$$

Dokaz. Ako je $\mathrm{ind}(A) \leqslant 1$ onda postoji $A^{\oplus}$ i ona zadovoljava date jednačine. Pretpostavimo sada da postoji matrica X koja zadovoljava jednačine (2), (3) i (6). Iz (6) sledi $\mathrm{Ker}\,A^2 \subseteq \mathrm{Ker}\,A$ i zbog toga je $\mathrm{Ker}\,A^2 = \mathrm{Ker}\,A$. Dakle, $\mathrm{ind}(A) \leqslant 1$ pa postoji grupni inverz $A^{\#}$. Sada je $XA = XAA^{\#}A = XA^2A^{\#} = AA^{\#}$, pa je

$$AXA = A^2A^{\#} = A$$

i

$$AX^2 = AX(XAX) = AXAA^{\#}X = AA^{\#}X = XAX = X.$$

Po Teoremi 4.3.5 sledi da je $X = A^{\oplus}$. □

Kao i kod matričnog slučaja, samo određeni operatori imaju jezgarni inverz.

Teorema 4.3.7. *Operator $A \in \mathcal{B}(H)$ je jezgarno invertibilan ako i samo ako je* $\mathrm{ind}\,A \leqslant 1$.

Dokaz. Ako je A jezgarno invertibilan onda iz jednačine (6) sledi $\mathrm{Ker}\,A^2 = \mathrm{Ker}\,A$. Iz jednačina (1) i (7) sledi $A = A^2X^2A$ pa je i $\mathrm{Im}\,A^2 = \mathrm{Im}\,A$. Sledi, $\mathrm{ind}\,A \leqslant 1$. Sa druge strane, ako je $\mathrm{ind}\,A \leqslant 1$ onda je $\mathrm{Im}\,A$ zatvoren i postoje $A^{\#}$ i $A^{\dagger}$. Lako se proverava da operator $X = A^{\#}AA^{\dagger}$ zadovoljava jednačine (1), (2), (3), (6) i (7), pa je $X = A^{\oplus}$. □

Sledeća napomena pokazuje da Definicije 4.1.1 i 4.3.1 nisu ekvivalentne u beskonačnodimenzionalnom slučaju.

Napomena 4.3.8. Neka su $A, X \in \mathcal{B}(H)$, gde je H proizvoljan Hilbertov prostor. Posmatrajmo sledeće uslove

(i) $AX = P_A$ i $\mathrm{Im}\,X \subseteq \mathrm{Im}\,A$;

(ii) $AXA = A, \quad \mathrm{Im}\,X = \mathrm{Im}\,A \quad \text{i} \quad \mathrm{Ker}\,X = \mathrm{Ker}\,A^*$.

Tada iz uslova (ii) sledi uslov (i) ali ne i obrnuto.

Pretpostavimo da važi uslov (ii), tj. da je $X = A^{\oplus}$. Iz jednačina (1) i (3) iz Teoreme 4.3.5 sledi da je AX samo-adjungovani idempotent sa slikom $\mathrm{Im}\,A$. Dakle, važi uslov (i).

Sledeći kontraprimer pokazuje da, u opštem slučaju, uslov (i) ne implicira uslov (ii). Neka je $H = \ell^2(\mathbb{N})$ gde je $\ell^2(\mathbb{N})$ skup svih kompleksnih nizova $x = (x_i)$ sa osobinom $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$. Podsetimo se da je $\ell^2(\mathbb{N})$ Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}.$$

Neka su A i X operatori levog odnosno desnog pomeraja na H:

$$A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots), \quad X(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Nije teško proveriti sledeće poznate osobine ovih operatora, videti [43]:

1. A i X su ograničeni linearni operatori.

2. A je desno invertibilan ali nije levo invertibilan i njegov desni inverz je X.

3. X je levo invertibilan ali nije desno invertibilan i njegov levi inverz je A.

4. $A^* = X$ i $X^* = A$.

Dobijamo da je $\operatorname{Im} A = H$, $AX = I = P_{\operatorname{Im} A}$, $\operatorname{Im} X \subseteq \operatorname{Im} A$, pa je uslov (i) zadovoljen. Međutim, evidentno je da je $\operatorname{Im} X \neq H = \operatorname{Im} A$ pa uslov (ii) nije zadovoljen. Primetimo da smo za kontraprimer mogli uzeti bilo koji beskonačnodimenzionalni Hilbertov prostor H i proizvoljne ograničene operatore A i X na H takve da je A desno ali ne i levo invertibilan i da je $AX = I$. Ova napomena u potpunosti opravdava Definiciju 4.3.1.

Neka je $A \in \mathcal{B}(H)$ i $\operatorname{ind} A \leqslant 1$. Tada postoje sva četiri uopštena inverza operatora A. U Poglavlju 4.1, na strani 57, smo formulama (4.8) definisali sledeće idempotente pridružene operatoru A:

$$\begin{aligned} Q &= AA^{\#} = A^{\#}A = A^{\oplus}A = AA_{\oplus} \\ P &= AA^{\dagger} = AA^{\oplus} \\ R &= A^{\dagger}A = A_{\oplus}A. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Svaki od ovih idempotenata određuje odgovarajuću dekompoziciju prostora H u obliku sume. Nije teško pokazati da su to sledeće dekompozicije.

$$\begin{aligned} Q:&\quad H = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A \\ P:&\quad H = \operatorname{Im} A \ominus \operatorname{Ker} A^* \\ R:&\quad H = \operatorname{Im} A^* \ominus \operatorname{Ker} A. \end{aligned} \tag{4.50}$$

U (4.12) smo dali matrične reprezentacije elementa a i njegovih uopštenih inverza, u odnosu na dekompozicije indukovane idempotentima q, p i r. Zahvaljujući Teoremi 2.4.1 (strana 22), reprezentacije (4.12) se svode na (dajemo samo one reprezentacije koje su nam bitne):

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A \end{bmatrix}, & A &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A^* \end{bmatrix}, \\
A &= \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A^* \\ \operatorname{Ker} A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A \end{bmatrix}, & A &= \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A^* \\ \operatorname{Ker} A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A^* \end{bmatrix}, \\
A^{\#} &= \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A \end{bmatrix}, & A^{\#} &= \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A^* \end{bmatrix}, \\
A^{\dagger} &= \begin{bmatrix} A_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A^* \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A^* \\ \operatorname{Ker} A \end{bmatrix}, & A^{\dagger} &= \begin{bmatrix} A_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A^* \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A^* \\ \operatorname{Ker} A^* \end{bmatrix}, \\
A^{\oplus} &= \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A^* \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A \end{bmatrix}, & A^{\oplus} &= \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A^* \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A^* \end{bmatrix}, \\
A_{\oplus} &= \begin{bmatrix} A_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A^* \\ \operatorname{Ker} A \end{bmatrix}, & A_{\oplus} &= \begin{bmatrix} A_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A^* \\ \operatorname{Ker} A^* \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{4.51}$$

gde su $A_1 \in \mathcal{B}(\operatorname{Im} A)$ i $A_2 \in \mathcal{B}(\operatorname{Im} A^*, \operatorname{Im} A)$ invertibilni. Primetimo da je u matričnom slučaju, uslov $\operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{Ker} A$ dovoljan za $\operatorname{ind}(A) \leqslant 1$, ali u beskonačnodimenzionalnom slučaju nije. Ako pretpostavimo da $A \in \mathcal{B}(H)$ ima indeks manji ili jednak jedan onda je jezgarni inverz jedinstveno određen jednačinama (2), (3) i (6). Naglašavamo da se ni jedna od jednačina iz Teoreme 4.3.5 ne može izostaviti. Na primer, imamo sledeću napomenu.

Napomena 4.3.9. Neka je $H = \ell^2(\mathbb{N})$ i neka su A i X operatori desnog odnosno levog pomeraja na H, videti Napomenu 4.3.8:

$$A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots), \quad X(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Tada je $XA = I$ pa važe jednačine (1), (2) i (6). Takođe, imajući u vidu Napomenu 4.3.8, imamo da je $(AX)^* = X^*A^* = AX$ pa važi i jednačina (3). Ali,

$$AX^2(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_3, x_4, \dots),$$

pa je $AX^2 \neq X$ i jednačina (7) nije zadovoljena. Primetimo da je $X = A^\dagger$.

Podsetimo se da skup svih ograničenih operatora na H sa indeksom manjim ili jednakim jedan označavamo sa $I_{1,H}$:

$$I_{1,H} = \{A \in \mathcal{B}(H) : \operatorname{ind} A \leqslant 1\} = \{A \in \mathcal{B}(H) : \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A = X\}.$$

U sledećoj teoremi ćemo posmatrati neke specijalne slučajeve jezgarnog inverza. Podsetimo se da je A parcijalna izometrija ako je $A^* = A^\dagger$ ili, ekvivalentno, ako je $AA^*A = A$.

Teorema 4.3.10. *Neka je $A \in I_{1,H}$. Tada:*

(i) $A^{\oplus} = 0 \;\Leftrightarrow\; A = 0$;

(ii) $A^{\oplus} = P_{\operatorname{Im} A} \;\Leftrightarrow\; A^2 = A$;

(iii) $A^{\oplus} = A \;\Leftrightarrow\; A^3 = A$ *i A je EP;*

(iv) $A^{\oplus} = A^* \;\Leftrightarrow\;$ *A je parcijalna izometrija i EP.*

Dokaz. (i) Dokaz sledi iz $A^{\oplus} \in A\{1, 2\}$.

(ii) Ako je $A^{\oplus} = P_{\operatorname{Im} A}$ onda je $A = AA^{\oplus}A = AP_{\operatorname{Im} A}A = A^2$. Sa druge strane, ako je $A^2 = A$ onda je $A^{\oplus} = A^{\#}AA^\dagger = A^{\#}A^2A^\dagger = AA^\dagger = P_{\operatorname{Im} A}$.

(iii) Iz $A^{\oplus} = A$ sledi $A = AA^{\oplus}A = A^3$. Kako je $A^{\oplus}$ EP (Teorema 4.1.23), iz $A^{\oplus} = A$ sledi da je A EP. Obrnuto, $A^{\oplus} = A^{\#}AA^\dagger = A^{\#}A^3A^\dagger = A^2A^\dagger = A^2A^{\#} = A$.

(iv) Ako je $A^{\oplus} = A^*$ onda je $A^* = A^\dagger AA^* = A^\dagger AA^{\oplus} = A^\dagger AA^{\#}AA^\dagger = A^\dagger$, pa je A parcijalna izometrija. Iz $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A^{\oplus} = \operatorname{Im} A^*$ sledi da je A EP. Obrnuto, kako je A EP, imamo $A^\dagger = A^{\#}$, a kako je A parcijalna izometrija, imamo $A^* = A^\dagger$. Sledi, $A^{\oplus} = A^{\#}AA^\dagger = A^\dagger AA^* = A^*$.

□

Sledeća teorema je takođe data u [9] ali za slučaj kompleksnih matrica. Dokazaćemo je na jednostavniji način i to u slučaju Hilbertovog prostora.

Teorema 4.3.11. *Neka su* $A, B \in \mathcal{B}(H)$ *samo-adjungovani idempotenti takvi da je* $\mathrm{Im}\,(AB)$ *zatvoren. Tada je* $\mathrm{Im}\,(ABA)$ *zatvoren,* $\mathrm{ind}\,(AB) \leqslant 1$ *i*

$$(AB)^{\oplus} = (ABA)^{\dagger}. \tag{4.52}$$

Dokaz. Ako je $\mathrm{Im}\,(AB)$ zatvoren onda postoji $(AB)^{\dagger}$ i važi

$$\begin{aligned} AB &= AB(AB)^*((AB)^{\dagger})^* = ABA(BA)^{\dagger} \\ AB &= ((AB)^{\dagger})^*(AB)^*AB = (BA)^{\dagger}BAB \end{aligned}$$

Slično je

$$BA = BAB(AB)^{\dagger} = (AB)^{\dagger}ABA.$$

Odavde sledi da je $\mathrm{Im}\,(AB) \subseteq \mathrm{Im}\,(ABA)$ pa je $\mathrm{Im}\,(ABA) = \mathrm{Im}\,(AB)$ zatvoren. Iz gornjih jednakosti se vidi da je

$$AB = ABAB(AB)^{\dagger}(BA)^{\dagger} = (BA)^{\dagger}(AB)^{\dagger}ABAB.$$

Sledi $\mathrm{Im}\,(AB) = \mathrm{Im}\,(ABAB) = \mathrm{Im}\,((AB)^2)$ i $\mathrm{Ker}\,(AB) = \mathrm{Ker}\,(ABAB) = \mathrm{Ker}\,((AB)^2)$, pa je $\mathrm{ind}\,(AB) \leqslant 1$.

Pokazali smo postojanje inverza u (4.52), pa možemo preći na dokaz formule. Dokazaćemo ekvivalentno tvrđenje: $((AB)^{\oplus})^{\dagger} = ABA$. Po Teoremi 4.1.23 (iii), imamo da je $((AB)^{\oplus})^{\dagger} = ABP_{\mathrm{Im}\,(AB)} = (AB)^2(AB)^{\dagger}$. Koristeći poznatu formulu $T^{\dagger} = T^*(TT^*)^{\dagger}$ koja važi za svaki operator T sa zatvorenom slikom i koristeći pretpostavku da su A i B samo-adjungovani idempotenti, dobijamo

$$(AB)^{\dagger} = (AB)^*(AB(AB)^*)^{\dagger} = B^*A^*(ABB^*A^*)^{\dagger} = BA(ABA)^{\dagger}.$$

Kada ovaj izraz stavimo u gornju formulu, dobijamo

$$\begin{aligned} &((AB)^{\oplus})^{\dagger} = (AB)^2BA(ABA)^{\dagger} = ABABA(ABA)^{\dagger} = \\ &= ABAABA(ABA)^{\dagger} = (ABA)^*ABA(ABA)^{\dagger} = (ABA)^* = ABA. \end{aligned}$$

□

Spektralne osobine

U ovoj sekciji ćemo posmatriati takozvane spektralne osobine grupnog i jezgarnog inverza operatora $A \in \mathcal{B}(H)$, $\mathrm{ind}\,A \leqslant 1$. Spektralne osobine matričnog grupnog inverza se mogu naći u [13].

Ako $0 \in \sigma_p(A)$, i ako je x pridruženi sopstveni vektor, onda $x \in \mathrm{Ker}\,A$, pa je $\mathrm{Ker}\,A \neq \{0\}$. Kako je $H = \mathrm{Im}\,A \oplus \mathrm{Ker}\,A = \mathrm{Im}\,A \ominus \mathrm{Ker}\,A^*$ sledi da je $\mathrm{Ker}\,A^{\oplus} = \mathrm{Ker}\,A^* \neq \{0\}$. Dakle, $0 \in \sigma_p(A^{\oplus})$. Sledi zaključak da je

$$0 \in \sigma_p(A) \;\Leftrightarrow\; 0 \in \sigma_p(A^{\#}) \;\Leftrightarrow\; 0 \in \sigma_p(A^{\oplus}),$$

pri čemu ako je x zajednički sopstveni vektor za A, $A^{\#}$ i $A^{\oplus}$ koji odgovara sopstvenoj vrednosti 0 onda $x \in (\mathrm{Ker}\,A \cap \mathrm{Ker}\,A^*)\backslash\{0\}$.

Osim toga, $\operatorname{Ker} A^{\#} = \operatorname{Ker} A$, pa je

$$0 \in \sigma_p(A) \;\Leftrightarrow\; 0 \in \sigma_p(A^{\#})$$

pri čemu su odgovarajući sopstveni vektori za A odnosno za $A^{\#}$ jednaki i to su oni i samo oni elementi skupa $\operatorname{Ker} A \backslash \{0\}$.

Pretpostavimo sada da $0 \neq \lambda \in \sigma_p(A)$ sa odgovarajućim sopstvenim vektorom $x = x_1 + x_2 \in \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A$. Koristeći prvu reprezentaciju za A u (4.51) dobijamo

$$0 = (A - \lambda I)x = \begin{bmatrix} A_1 - \lambda I_{\operatorname{Im} A} & 0 \\ 0 & -\lambda I_{\operatorname{Ker} A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Ovo je ekvivalentno uslovu $A_1 x_1 = \lambda x_1$ i $-\lambda x_2 = 0$. Kako je $\lambda \neq 0$, to je $x_2 = 0$ i $\lambda \in \sigma_p(A_1)$. Dakle, za $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \sigma_p(A)$ sa sopstvenim vektorom x ako i samo ako $x \in \operatorname{Im} A$ i $\lambda \in \sigma_p(A_1)$ sa sopstvenim vektorom x.

Neka je sada $\mu \neq 0$ i $\mu \in \sigma_p(A^{\#})$ sa odgovarajućim sopstvenim vektorom $y = y_1 + y_2 \in \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A$. Tada, koristeći prvu reprezentaciju za $A^{\#}$ u (4.51), dobijamo

$$0 = (A^{\#} - \mu I)y = \begin{bmatrix} A_1^{-1} - \mu I_{\operatorname{Im} A} & 0 \\ 0 & -\mu I_{\operatorname{Ker} A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Odatle je $A_1^{-1} y_1 = \mu y_1$ i $-\mu y_2 = 0$, tj. $A_1 y_1 = \mu^{-1} y_1$ i $y_2 = 0$. Dakle, za $\mu \neq 0$, $\mu \in \sigma_p(A^{\#})$ sa sopstvenim vektorom y ako i samo ako $y \in \operatorname{Im} A$ i $\mu^{-1} \in \sigma_p(A_1)$.

Konačno, neka je $\nu \neq 0$ i neka $\nu \in \sigma_p(A^{\textcircled{\#}})$ sa odgovarajućim sopstvenim vektorom $z = z_1 + z_2 \in \operatorname{Im} A \ominus \operatorname{Ker} A^*$. Koristeći drugu reprezentaciju za $A^{\textcircled{\#}}$ u (4.51) dobijamo

$$0 = (A^{\textcircled{\#}} - \nu I)z = \begin{bmatrix} A_1^{-1} - \nu I_{\operatorname{Im} A} & 0 \\ 0 & -\nu I_{\operatorname{Ker} A^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

Sledi $A_1^{-1} z_1 = \nu z_1$ i $-\nu z_2 = 0$, tj. $A_1 z_1 \nu^{-1} z_1$ i $z_2 = 0$. Dakle, za $\nu \neq 0$, $\nu \in \sigma_p(A^{\textcircled{\#}})$ sa sopstvenim vektorom z ako i samo ako $z \in \operatorname{Im} A$ i $\nu^{-1} \in \sigma_p(A_1)$ sa odgovarajućim sopstvenim vektorom $z = z_1 \in \operatorname{Im} A$.

Iz gornjeg razmatranja sledi da za $\lambda \neq 0$, važi

$$\lambda \in \sigma_p(A) \;\Leftrightarrow\; \lambda^{-1} \in \sigma_p(A^{\#}) \;\Leftrightarrow\; \lambda^{-1} \in \sigma_p(A^{\textcircled{\#}}) \;\Leftrightarrow\; \lambda \in \sigma_p(A_1),$$

pri čemu su odgovarajući sopstveni vektori za A, $A^{\#}$, $A^{\textcircled{\#}}$ i A_1 jednaki i pripadaju skupu $\operatorname{Im} A$.

Parcijalna uređenja na Hilbertovim operatorima određenja uopštenim inverzima

U Teoremama 4.2.12–4.2.15 u Poglavlju 4.2 smo izveli matrične reprezentacije elemenata a i b $*$-prstena R, kada je $a < b$, gde je $<$ jedno od četiri parcijalna uređenja $<^*$, $<^{\#}$, $<^{\textcircled{\#}}$ ili $<_{\textcircled{\#}}$. Sada ćemo videti na šta se svode ove reprezentacije u slučaju kada su A i B operatori iz $\mathcal{B}(H)$. U operatorskom slučaju, ove relacije se definišu na isti način kao i u slučaju prstena, videti Definiciju 4.2.4.

Neka su $A, B \in \mathcal{B}(H)$ MP-invertibilni (tj. neka su $\operatorname{Im} A$ i $\operatorname{Im} B$ zatvoreni u H) i pretpostavimo da je $A <^* B$. Setimo se da ovaj uslov određuje dve ortogonalne dekompozicije jedinice prstena $\mathcal{B}(H)$ (formule (4.38) na strani 77):

$$I = E_1 + E_2 + E_3 \quad \text{i} \quad I = G_1 + G_2 + G_3,$$

gde je

$$\begin{aligned} E_1 &= AB^\dagger = AA^\dagger, \quad & E_2 &= (B-A)B^\dagger = BB^\dagger - AA^\dagger, \quad & E_3 &= I - BB^\dagger \\ G_1 &= B^\dagger A = A^\dagger A, \quad & G_2 &= B^\dagger(B-A) = B^\dagger B - A^\dagger A, \quad & G_3 &= I - B^\dagger B. \end{aligned}$$

Setimo se da za proizvoljan regularan operator C i proizvoljan njegov g-inverz $C^{(1)}$ važi $\operatorname{Im}(CC^{(1)}) = \operatorname{Im} C$ i $\operatorname{Ker}(C^{(1)}C) = \operatorname{Ker} C$. Primetimo da kada je $A <^* B$ onda je $B^\dagger \in (B-A)\{1\}$. Zbog toga dobijamo da je

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im} E_1 = \operatorname{Im} A, \quad \operatorname{Im} E_2 = \operatorname{Im}(B-A), \quad \operatorname{Im} E_3 = \operatorname{Ker}(BB^\dagger) = \operatorname{Ker} B^\dagger = \operatorname{Ker} B^* \\ &\operatorname{Im} G_1 = \operatorname{Im} A^\dagger = \operatorname{Im} A^*, \quad \operatorname{Im} G_2 = \operatorname{Im} G_2^* = \operatorname{Im}(B^* - A^*), \quad \operatorname{Im} G_3 = \operatorname{Ker}(B^\dagger B) = \operatorname{Ker} B. \end{aligned}$$

Zbog toga se Teorema 4.2.12, uz Teoremu 4.2.5 (i) $\Leftrightarrow$ (iv) i rezultate Poglavlja 2.4, u trenutnoj postavci svodi na sledeću teoremu.

Teorema 4.3.12. *Za $A, B \in \mathcal{B}(H)$ sledeći uslovi su ekvivalenti:*

(i) $A <^* B$.

(ii) $A^* <^* B^*$.

(iii) $H = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(B-A) \oplus \operatorname{Ker} B^*$,
$H = \operatorname{Im} A^* \oplus \operatorname{Im}(B^* - A^*) \oplus \operatorname{Ker} B$ *i*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A^* \\ \operatorname{Im}(B^* - A^*) \\ \operatorname{Ker} B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Im}(B-A) \\ \operatorname{Ker} B^* \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A^* \\ \operatorname{Im}(B^* - A^*) \\ \operatorname{Ker} B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Im}(B-A) \\ \operatorname{Ker} B^* \end{bmatrix},$$

gde su $A_1 \in \mathcal{B}(\operatorname{Im} A^*, \operatorname{Im} A)$ i $B_1 \in \mathcal{B}(\operatorname{Im}(B^* - A^*), \operatorname{Im}(B-A))$ invertibilni operatori.

Iz prethodnog sledi da ako je $A <^* B$ onda je

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im} B = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(B-A); \\ &\operatorname{Im} B^* = \operatorname{Im} A^* \oplus \operatorname{Im}(B^* - A^*); \\ &\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im}(B^* - A^*) \oplus \operatorname{Ker} B. \end{aligned}$$

Neka su $A, B \in I_{1,H}$ i pretpostavimo da je $A <^{\#} B$. Setimo se da ovaj uslov određuje dekompoziciju jedinice prstena $\mathcal{B}(H)$ (formule 4.39 na strani 77):

$$I = F_1 + F_2 + F_3,$$

gde je

$$F_1 = AB^{\#} = AA^{\#}, \quad F_2 = (B - A)B^{\#} = BB^{\#} - AA^{\#}, \quad F_3 = I - BB^{\#}.$$

Imamo da je

$$\operatorname{Im} F_1 = \operatorname{Im} A, \quad \operatorname{Im} F_2 = \operatorname{Im}(B - A), \quad \operatorname{Im} F_3 = \operatorname{Ker} B.$$

Teorema 4.2.13 se sada svodi na sledeću teoremu.

Teorema 4.3.13. *Za $A, B \in I_{1,H}$. sledeći uslovi su ekvivalenti:*

(i) $A <^{\#} B$.

(ii) $A^{\#} <^{\#} B^{\#}$.

(iii) $H = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(B - A) \oplus \operatorname{Ker} B$, *i*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Im}(B - A) \\ \operatorname{Ker} B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Im}(B - A) \\ \operatorname{Ker} B \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Im}(B - A) \\ \operatorname{Ker} B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Im}(B - A) \\ \operatorname{Ker} B \end{bmatrix},$$

gde su $A_1 \in \mathcal{B}(\operatorname{Im} A)$ i $B_1 \in \mathcal{B}(\operatorname{Im}(B - A))$ invertibilni operatori.

Iz prethodnog sledi da ako je $A <^{\#} B$ onda je

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} B &= \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(B - A); \\ \operatorname{Im} B^* &= \operatorname{Im} A^* \oplus \operatorname{Im}(B^* - A^*); \\ \operatorname{Ker} A &= \operatorname{Im}(B - A) \oplus \operatorname{Ker} B. \end{aligned}$$

Da bi izbegli nepotrebno ponavljanje, odmah navodimo na šta se svode Teoreme 4.2.14 i 4.2.15. Primetimo samo da u slučaju jezgarnog inverza uslov $A <^{\textcircled{\#}} B$ implicira (dokaz Teoreme 4.2.14 na strani 75)

$$\operatorname{Im} F_2 = \operatorname{Im}(B^{\textcircled{\#}}(B - A)) = \operatorname{Im}(BB^{\#} - AA^{\#}),$$

za razliku od uslova $A <^{\#} B$ iz kog sledi $F_2 = B^{\#}(B - A) = (B - A)B^{\#}$, pa je $\operatorname{Im} F_2 = \operatorname{Im}(B - A)$. Iz uslova $A <_{\textcircled{\#}} B$ sledi (videti (4.40)) $\operatorname{Im} F_2 = (B - A)B_{\textcircled{\#}} = \operatorname{Im}(B - A)$.

Teorema 4.3.14. *Za $A, B \in I_{1,H}$ sledeći uslovi su ekvivalenti:*

(i) $A <^{\textcircled{\#}} B$.

(ii) $H = \operatorname{Im} A \ominus \operatorname{Im}(B-A) \ominus \operatorname{Ker} B^*$,
$H = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(BB^{\#} - AA^{\#}) \oplus \operatorname{Ker} B$ *i*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Im}(BB^{\#} - AA^{\#}) \\ \operatorname{Ker} B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Im}(B-A) \\ \operatorname{Ker} B^* \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Im}(BB^{\#} - AA^{\#}) \\ \operatorname{Ker} B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Im}(B-A) \\ \operatorname{Ker} B^* \end{bmatrix},$$

gde su $A_1 \in \mathcal{B}(\operatorname{Im} A)$ *i* $B_1 \in \mathcal{B}(\operatorname{Im}(BB^{\#} - AA^{\#}), \operatorname{Im}(B-A))$ *invertibilni operatori.*

Iz prethodnog sledi da ako je $A <^{\textcircled{\#}} B$ *onda je*

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im} B = \operatorname{Im} A \ominus \operatorname{Im}(B-A); \\ &\operatorname{Im} B = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(BB^{\#} - AA^{\#}); \\ &\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im}(BB^{\#} - AA^{\#}) \oplus \operatorname{Ker} B. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Dekompozicija (4.53) sledi iz sledećeg razloga. Prvo $\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} B$ pa je $\operatorname{Im}(BB^{\#} - AA^{\#}) \subseteq \operatorname{Im} B$. Kako je $H = \operatorname{Im} B \oplus \operatorname{Ker} B = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(BB^{\#} - AA^{\#}) \oplus \operatorname{Ker} B$ iz prethodnog sledi $\operatorname{Im} B = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(BB^{\#} - AA^{\#})$.

Teorema 4.3.15. *Za* $A, B \in I_{1,H}$ *sledeći uslovi su ekvivalenti:*

(i) $A <_{\textcircled{\#}} B$.

(ii) $H = \operatorname{Im} A^* \ominus \operatorname{Im}(B^* - A^*) \ominus \operatorname{Ker} B$,
$H = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(B-A) \oplus \operatorname{Ker} B$ *i*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A^* \\ \operatorname{Im}(B^* - A^*) \\ \operatorname{Ker} B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Im}(B-A) \\ \operatorname{Ker} B \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A^* \\ \operatorname{Im}(B^* - A^*) \\ \operatorname{Ker} B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Im}(B-A) \\ \operatorname{Ker} B \end{bmatrix},$$

gde su $A_1 \in \mathcal{B}(\operatorname{Im} A^*, \operatorname{Im} A)$ *i* $B_1 \in \mathcal{B}(\operatorname{Im}(B^* - A^*), \operatorname{Im}(B-A))$ *invertibilni operatori.*

Iz prethodnog sledi da ako je $A <_{\textcircled{\#}} B$ *onda je*

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im} B = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im}(B-A); \\ &\operatorname{Im} B^* = \operatorname{Im} A^* \ominus \operatorname{Im}(B^* - A^*); \\ &\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im}(B^* - A^*) \ominus \operatorname{Ker} B. \end{aligned}$$

U slučaju prstena smo, za $a \in R$ okarakterisali razne podskupove skupa $a\{1\}$ (Lema 4.2.17) i pokazali da je uslov $a < b$, $< \in \{<^*, <^{\#}, <^{\textcircled{\#}}, <_{\textcircled{\#}}\}$ ekvivalentan odgovarajućim skupovnim inkluzijama (Teorema 4.2.18). Sada ćemo videti na šta se svode karakterizacije skupova $A\{1,3\}$, $A\{6\}$ i $A\{3,6\}$ i kako se pomoću njih opisuje jezgarno parcijalno uređenje.

Lema 4.3.16. *Neka je $A \in I_{1,H}$. Tada A ima sledeću reprezentaciju*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A^* \end{bmatrix},$$

gde je $A_1 \in \mathcal{B}(\operatorname{Im} A)$ invertibilan. Takođe imamo sledeće karakterizacije:

(i) $A\{1,3\} = \left\{ \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A^* \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A \end{bmatrix} : X_3, X_4 \text{ proizvoljni} \right\}$;

(ii) $A\{1,6\} = A\{6\} = \left\{ \begin{bmatrix} A_1^{-1} & X_2 \\ 0 & X_4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A^* \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A \end{bmatrix} : X_2, X_4 \text{ proizvoljni} \right\}$;

(iii) $A\{1,3,6\} = A\{3,6\} = \left\{ \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & X_4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A^* \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A \end{bmatrix} : X_4 \text{ proizvoljan} \right\}$.

Teorema 4.3.17. *Neka su $A, B \in I_{1,H}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *$A <^{\oplus} B$;*

(ii) *$B\{1,3\} \subseteq A\{1,3\}$ i $B\{6\} \subseteq A\{6\}$;*

(iii) *$B\{3,6\} \subseteq A\{3,6\}$.*

Izvođenje formula za ostale podskupove se može uraditi analogno.

Poglavlje završavamo sledećom napomenom. Za dodatne osobine videti Poglavlje 6 u [93].

Napomena 4.3.18. (i) Neka je $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ proizvoljan polinom. Tada je

$$\begin{aligned} p(A^{\oplus}) &= \sum_{k=0}^{n} a_k (A^{\oplus})^k = \sum_{k=1}^{n} a_k (A^{\sharp})^{k-1} A^{\oplus} + a_0 I = \\ &= a_0 I + q(A^{\sharp}) A^{\oplus}, \end{aligned}$$

gde je $q(t) = \frac{p(t)-a_0}{t}$. Drugi način je

$$p(A^{\oplus}) = a_0(I - AA^{\dagger}) + p(A^{\sharp}) AA^{\dagger}.$$

Za dualni jezgarni inverz imamo $p(A_{\oplus}) = a_0 I + A_{\oplus} q(A^{\sharp})$ i

$$p(A_{\oplus}) = a_0(I - A^{\dagger}A) + A^{\dagger}A p(A^{\sharp}).$$

(ii) Podsetimo se da se Bot-Dafinov inverz operatora $A \in \mathcal{B}(H)$ u odnosu na zatvoreni potprostor L, definiše sa

$$A_L^{(-1)} = P_L (A P_L + P_{L^{\perp}})^{-1},$$

gde je P_L samo-adjungovani (ortogonalni) idempotent na L. Bot-Dafinov i jezgarni inverz su povezani na sledeći način:

$$A_{\operatorname{Im} A}^{(-1)} = P_{\operatorname{Im} A} [A P_{\operatorname{Im} A} + P_{\operatorname{Ker} A^*}]^{-1} = A^{\oplus},$$

pod pretpostavkom da je $\operatorname{ind}(A) \leqslant 1$. Ovo sledi iz druge reprezentacije za A i prve reprezentacije za $A^{\oplus}$ u (4.51) i iz sledećih formi

$$P_{\operatorname{Im} A} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A^* \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad P_{\operatorname{Ker} A^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A^* \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \operatorname{Im} A \\ \operatorname{Ker} A^* \end{bmatrix}.$$

Analogno se može dokazati da je $A_{\oplus} = A^{(-1)}_{\operatorname{Im}(A^*)}$.

4.4 Jedinstvena teorija parcijalnih uređenja na prstenima određenih uopštenim inverzima

Do sada smo mogli da uočimo jasnu analogiju u definicijama različitih parcijalnih uređenja baziranih na uopštenim inverzima. Jedinstvenu teoriju ovih uređenja na skupu kompleksnih matrica je dao Mitra u radu [76]. U poslednje vreme, velika pažnja je posvećena uopštenim inverzima i njima određenim parcijalnim uređenjima na prstenima. Osim toga, uvedene su nove klase uopštenih inverza na prstenima, kao što su Drejzinov (b, c) inverz i Merijev inverz duž elementa. Zbog toga postoji potreba za jedinstvenom teorijom parcijalnih uređenja na prstenu baziranih na uopštenim inverzema. Rezultati ovog poglavlja su publikovani u radu [97].

U nastavku ćemo uvesti posebnu vrstu Dedekind-konačnog prstena, zahtevajući dodatan uslov na skupu njegovih idempotenata. Ovaj prsten, kojeg možemo nazvati konačno dimenzionalan prsten (FD prsten) predstavlja uopštenje prstena linearnih operatora na konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru. Zatim ćemo pokazati da osnovni rezultati jedinstvene teorije matričnih parcijalnih uređenja važe i na FD prstenu. Takođe ćemo dokazati i nekoliko novih rezultata.

$\mathcal{G}$-relacija

Jedinstvena teorija matričnih parcijalnih uređenja baziranih na uopštenim inverzima se može naću u Mitrinom radu [76] i Glavi 7 njegove monografije [77]. Definicije, pojmovi i notacija korišćeni u [77] se takođe mogu koristiti i u slučaju prstena, pa ćemo mi slediti tu notaciju.

Ukoliko drugačije nije naglašeno, R je proizvoljni prsten sa jedinicom 1 (sa ili bez involucije u zavisnosti od konteksta).

Definicija 4.4.1. Označimo sa $\mathcal{P}(R)$ klasu svih podskupova od R. *g-preslikavanje* je preslikavanje

$$\mathcal{G} : R \longrightarrow \mathcal{P}(R)$$

takvo da je $\mathcal{G}(a)$ određen podskup od $a\{1\}$, za svako $a \in R$. Skup

$$\Omega_{\mathcal{G}} = \{a \in R : \mathcal{G}(a) \neq \varnothing\}$$

se zove *nosač* g-preslikavanja $\mathcal{G}$. Sa $\mathcal{G}_r(a)$ označavamo skup $\mathcal{G}(a) \cap a\{1, 2\}$.

Definicija 4.4.2. Neka je $\mathcal{G} : R \longrightarrow \mathcal{P}(R)$ g-preslikavanje. Za $a, b \in R$, kažemo da je

$$a <^{\mathcal{G}} b \quad \text{ako} \quad a, b \in \Omega_{\mathcal{G}} \text{ i } ga = gb,\ ag = bg \quad \text{za neko} \quad g \in \mathcal{G}(a).$$

Relacju uređenja $<^{\mathcal{G}}$ zovemo *$\mathcal{G}$-relacija.*

Element $a \in R$ je $\mathcal{G}$-maksimalan ako za svako $b \in R$, iz $a <^{\mathcal{G}} b$ sledi $a = b$.

Primetimo da koncept $\mathcal{G}$-relacije pokriva minus, zvezda, oštro, jezgarno i dualno jezgarno parcijalno uređenje kao specijalne slučajeve:

- Ako je $\mathcal{G}(a) = a\{1\}$, tada se relacija $<^{\mathcal{G}}$ poklapa sa relacijom minus parcijalnog uređenja.
- Ako je $\mathcal{G}(a) = \{a^{\dagger}\}$, tada se $<^{\mathcal{G}}$ poklapa sa zvezda parcijalnim uređenjem.
- Ako je $\mathcal{G}(a) = \{a^{\#}\}$, tada se $<^{\mathcal{G}}$ poklapa sa oštrim uređenjem.
- Ako je $\mathcal{G}(a) = \{a^{\oplus}\}$, tada se $<^{\mathcal{G}}$ poklapa sa jezgarnim uređenjem.
- Ako je $\mathcal{G}(a) = \{a_{\oplus}\}$, tada se $<^{\mathcal{G}}$ poklapa sa dualnim jezgarnim uređenjem.

Odmah možemo videti da je $\mathcal{G}$-relacija refleksivna na nosaču $\Omega_{\mathcal{G}}$. Takođe, za $a, b \in R$, važi

$$a <^{\mathcal{G}} b \Longrightarrow a <^{-} b,$$

pa je $<^{\mathcal{G}}$ uvek antisimetrična. Naš glavni zadatak je ispitati pod kojim uslovima je $\mathcal{G}$-relacija tranzitivna, samim tim relacija poretka. Potrebne su nam sledeće definicije.

Definicija 4.4.3. Neka je $\mathcal{G} : R \longrightarrow \mathcal{P}(R)$ g-preslikavanje i neka je $a \in R$. Klasa

$$\tilde{\mathcal{G}}(a) = \{g : ga = a^{(1)}a,\ ag = aa^{(1)} \text{ za neko } a^{(1)} \in \mathcal{G}(a)\}$$

se zove *kompletizacija* skupa $\mathcal{G}(a)$. Kažemo da je $\mathcal{G}(a)$ *kompletan* ako je $\mathcal{G}(a) = \tilde{\mathcal{G}}(a)$. Ako je $\mathcal{G}(a)$ kompletan za svako $a \in R$ onda kažemo da je preslikavanje $\mathcal{G}$ *kompletno*.

Odmah se vidi da je $\tilde{\mathcal{G}}(a) \subseteq a\{1\}$ i $\mathcal{G}(a) \subseteq \tilde{\mathcal{G}}(a)$ za svako $a \in R$.

Definicija 4.4.4. Neka je $\mathcal{G} : R \longrightarrow \mathcal{P}(R)$ g-preslikavanje. Za $a, b \in R$ neka je

$$\mathcal{G}(a, b) = \{hah : h \in \mathcal{G}(b)\}.$$

Kažemo da par (a, b) zadovoljava *(T)-uslov* ako je $\mathcal{G}(a, b) \subseteq \mathcal{G}(a)$.

Definicija 4.4.5. Neka je $\mathcal{G} : R \longrightarrow \mathcal{P}(R)$ g-preslikavanje i $a \in R$. Za skup $\mathcal{G}(a)$ kažemo da je *polu-kompletan* ako je $\mathcal{G}(a, a) \subseteq \mathcal{G}(a)$. Ako je za svako $a \in R$, skup $\mathcal{G}(a)$ polu-kompletan onda kažemo da je g-preslikavanje $\mathcal{G}$ *polu-kompletno*.

Dakle, $\mathcal{G}(a)$ polu-kompletan ako i samo ako par (a, a) zadovoljava (T)-uslov.

Napomena 4.4.6. Dokazi mnogih rezultata iz [76] su čisto algebarski i mogu se primeniti i u slučaju prstena, uz sledeći komentar. Po Lemi 3.2.5, uslovi $\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} B$ i $\operatorname{Im} A^* \subseteq \operatorname{Im} B^*$ se moraju zameniti uslovima $aR \subseteq bR$ odnosno $Ra \subseteq Rb$.

Glavni cilj jedinstvene teorije je nalaženje potrebnih i dovoljnih uslova pod kojima je neka $\mathcal{G}$-relacija parcijalno uređenje. Dokaz tog rezultata, u matričnom slučaju, koristi tehnike linearne algebre koje ne možemo primeniti u slučaju prstena. Umesto toga, kao i do sada, koristićemo Parsovu dekompoziciju jedinice prstena R.

Konačno dimenzionalni prsten

Pored prirodnog parcijalnog uređenja $\leqslant$ (Definicija 1.2.7), na skupu idempotenata $E(R)$, prstena R, se definiše i sledeća poznata relacija ekvivalencije.

Definicija 4.4.7. (Videti [55].) Idempotenti $e, f \in E(R)$ su *ekvivalentni*, u oznaci $e \sim f$, ako postoje elementi $x \in eRf$ i $y \in fRe$ takvi da je $xy = e$ i $yx = f$.

Iz Definicije 4.4.7 dobijamo da za $e \in E(R)$ važi

$$e \sim 0 \implies e = 0. \tag{4.54}$$

Napomena 4.4.8. Nije teško dokazati da su idempotenti e i f ekvivalentni ako i samo ako su eR i fR izomorfni kao desni R-moduli ako i samo ako su Re i Rf izomorfni kao levi R-moduli. Za dokaz videti Teoremu 14 u [55]. Odavde sledi da je relacija $\sim$ relacija ekvivalencije na $E(R)$, [55].

Napomena 4.4.9. Primetimo da je $e \sim f$ ako i samo ako postoje $x, y \in R$ tako da je $xy = e$ i $yx = f$. Zaista, pretpostavimo da je $xy = e$ i $yx = f$ i izaberimo $x_1 = exf$ i $y_1 = fye$. Lako se pokazuje da $x_1 \in eRf$, $y_1 \in fRe$ i $x_1y_1 = e$, $y_1x_1 = f$.

Prsten R je *Dedekind-konačan* (direktno konačan) ako za proizvoljne elemente $x, y \in R$ iz $xy = 1$ sledi $yx = 1$, videti [62], [40]. Odmah se vidi da je R Dedekind-konačan ako i samo ako za svaki idempotent $e \in E(R)$ važi

$$e \sim 1 \implies e = 1. \tag{4.55}$$

Skup svih kompleksnih $n \times n$ matrica možemo poistovetiti sa skupom linearnih transformacija $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.

Lema 4.4.10. *Neka je V proizvoljan vektorski prostor i neka su $P, Q \in \mathcal{L}(V)$ dva idempotenta. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $P \sim Q$;

(ii) *Potprostori* $\operatorname{Im} P$ *i* $\operatorname{Im} Q$ *su izomorfni.*

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Iz $P \sim Q$ sledi da je $P = XY$ i $Q = YX$ za neke $X, Y \in \mathcal{L}(V)$ takve da je $X = PXQ$ i $Y = QYP$. Lako se pokazuje da transformacija $X_1 = X|_{\operatorname{Im} Q} : \operatorname{Im} Q \to \operatorname{Im} P$ svedoči o izomorfnosti prostora $\operatorname{Im} P$ i $\operatorname{Im} Q$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Neka je $X_1 : \operatorname{Im} Q \to \operatorname{Im} P$ izomorfizam. Definišimo transformacije $X, Y \in \mathcal{L}(V)$ sa $Xv = X_1Qv$ i $Yv = X_1^{-1}Pv$, $v \in V$. Tada je $XYv = X_1Q(X_1^{-1}Pv) = Pv$ za svako $v \in V$. Slično je $YX = Q$ odakle sledi $P \sim Q$. □

Napomena 4.4.11. Poznato je da je kompleksan vektorski prostor V konačno dimenzionalan ako i samo ako je $\mathcal{L}(V)$ Dedekind-konačan prsten. Dokaz se može naći, na primer, u [40], str. 165–166.

Nama će biti potrebna malo drugačija karakterizacija konačno dimenzionalnih prostora.

Teorema 4.4.12. *Neka je V proizvoljan vektorski prostor. sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $\dim V < \infty$;

(ii) *Za proizvoljne idempotente $P, Q \in \mathcal{L}(V)$ važi uslov:*

$$P \sim Q \quad \Longrightarrow \quad I - P \sim I - Q.$$

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Pretpostavimo da je $\dim V = n < \infty$ i neka su $P, Q \in \mathcal{L}(V)$ dva ekvivalentna idempotenta. Dva konačno dimenzionalna vektorska prostora izomorfna ako i samo ako imaju iste dimenzije. Zbog toga, po Lemi 4.4.10, imamo da je $\dim \operatorname{Im} P = \dim \operatorname{Im} Q = r$ za neko $r \leqslant n$. Dakle, $\dim \operatorname{Im}(I-P) = \dim \operatorname{Ker} P = n-r$ i $\dim \operatorname{Im}(I-Q) = \dim \operatorname{Ker} Q = n - r$. Opet, po Lemi 4.4.10, zaključujemo da je $I - P \sim I - Q$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Imajući u vidu (4.54), jasno je da iz uslova (ii) sledi uslov $P \sim I \;\Rightarrow\; P = I$. Dakle, $\mathcal{L}(V)$ je Dedekind-konačan prsten, pa na osnovu Napomene 4.4.11, sledi da je $\dim V < \infty$. □

Kao što se može videti, prethodna karakterizacija konačno dimenzionalnosti je čisto algebarska. Inspirisani Teoremom 4.4.12, uvodimo novu klasu prstena, a njene elemente možemo zvati konačno dimenzionalni prsteni ili skraćeno FD (*Finite Dimensional*) prsteni.

Definicija 4.4.13. Prsten R je *FD prsten* ako za porizvoljne idempotente $e, f \in E(R)$ važi uslov:

$$e \sim f \quad \Longrightarrow \quad 1 - e \sim 1 - f. \tag{4.56}$$

Napomena 4.4.14. Pojam FD prstena je nov, koliko je autor upoznat, i, kao što možemo videti, svaki FD prsten je Dedekind-konačan prsten. Zbog toga, iz (4.55) sledi da za FD prsten R i proizvoljan njegov idempotent $e \in E(R)$ važi:

$$e \sim 1 \;\Rightarrow\; e = 1. \tag{4.57}$$

Iz Teoreme 4.4.12 sledi da je M_n FD prsten, ali da $\mathcal{L}(V)$, gde je $\dim V = \infty$, nije FD prsten.

Napomena 4.4.15. Iz Napomene 4.4.8 sledi da su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) R je FD prsten.

(ii) Za svaka dva idempotenta $e, f \in E(R)$ važi:

Ako su eR i fR izomorfni kao desni R-moduli onda su $(1-e)R$ i $(1-f)R$ izomorfni kao desni R-moduli.

(iii) Za svaka dva idempotenta $e, f \in E(R)$ važi:

Ako su Re i Rf izomorfni kao levi R-moduli onda su $R(1-e)$ i $R(1-f)$ izomorfni kao levi R-moduli.

Kada je R, FD prsten, sledeća teorema pokazuje da važi jači uslov od onog u (4.56).

Teorema 4.4.16. *Neka je R, FD prsten i neka su $e_1, e_2, f_1, f_2 \in E(R)$ idempotenti iz R. Važi sledeća implikacija:*

$$(e_1 \sim e_2,\ f_1 \sim f_2,\ e_1 \leqslant f_1,\ e_2 \leqslant f_2) \quad \Longrightarrow \quad f_1 - e_1 \sim f_2 - e_2. \tag{4.58}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $e_1 \sim e_2,\ f_1 \sim f_2$ i da je

$$e_1 f_1 = f_1 e_1 = e_1,\ e_2 f_2 = f_2 e_2 = e_2. \tag{4.59}$$

Očigledno je da su $f_1 - e_1$ i $f_2 - e_2$ idempotenti. Stavimo da je

$$\begin{aligned} p_1 &= e_1,\ p_2 = f_1 - e_1,\ p_3 = 1 - f_1 \\ q_1 &= e_2,\ q_2 = f_2 - e_2,\ q_3 = 1 - f_2. \end{aligned}$$

Koristeći (4.59), jednostavna provera pokazuje da su $1 = p_1 + p_2 + p_3$ i $1 = q_1 + q_2 + q_3$ dve dekompozicije jedinice prstena R. Iz $p_1 = e_1 \sim e_2 = q_1$, sledi da postoje $x \in p_1 R q_1$ i $y \in q_1 R p_1$ tako da je $xy = p_1$ i $yx = q_1$. Kako je $x = p_1 x q_1$ i $y = q_1 y p_1$, imamo sledeće reprezentacije:

$$x = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times q} \quad \text{i} \quad y = \begin{bmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{q\times p}.$$

Kako je R, FD prsten, iz $f_1 \sim f_2$ sledi $1 - f_1 \sim 1 - f_2$, tj. $p_3 \sim q_3$. Dakle, postoje $u \in p_3 R q_3$ i $v \in q_3 R p_3$ tako da je $uv = p_3$ i $vu = q_3$. Iz $u = p_3 u q_3$ i $v = q_3 v p_3$ sledi da je:

$$u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix}_{p\times q} \quad \text{i} \quad v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v \end{bmatrix}_{q\times p}.$$

Na osnovu prethodnog sledi

$$(x+u)(y+v) = \begin{bmatrix} xy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & uv \end{bmatrix}_{p\times p} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}_{p\times p}.$$

Dakle, $(x+u)(y+v) = p_1 + p_3$. Slično možemo dokazati da je $(y+v)(x+u) = q_1 + q_3$. Zaključujemo da je $p_1 + p_3 \sim q_1 + q_3$. Kako je R, FD prsten, sledi da je $1 - (p_1 + p_3) \sim 1 - (q_1 + q_3)$, tj. $f_1 - e_1 \sim f_2 - e_2$. □

Primetimo da kada u Teoremi 4.4.16 stavimo $f_1 = f_2 = 1$ onda se uslov (4.58) svodi na uslov (4.56).

Jedinstvena teorija

Neka je $<^{\mathcal{G}}$ proizvoljna G-relacija. Glavni cilj ove sekcije je naći potrebne i dovoljne uslove pod kojima je relacija $<^{\mathcal{G}}$ parcijalno uređenje. S obzirom da iz $a <^{\mathcal{G}} b$ sledi $a <^{-} b$, imamo

$$a <^{\mathcal{G}} b \Longrightarrow\ a = bb^{(1)}a = ab^{(1)}b = ab^{(1)}a \ \text{ i } \ (b-a)b^{(1)}(b-a) = b - a, \tag{4.60}$$

za svako $b^{(1)} \in b\{1\}$.

Ispostavlja se da se ideja iz Teoreme 3.1.8 i Teorema 4.2.12–4.2.15 može primeniti i na jedinstvenu teoriju.

Teorema 4.4.17. *Neka je R prsten i $\mathcal{G} : R \longrightarrow \mathcal{P}(R)$ g-preslikavanje. Neka su $a, b \in \Omega_{\mathcal{G}}$. Tada važe sledeća tvrđenja.*

(i) *Pretpostavimo da je $a <^{\mathcal{G}} b$. Fiksirajmo $h \in \mathcal{G}(b)$ i stavimo da je*

$$\begin{aligned} e_1 &= ah, \quad e_2 = (b-a)h, \quad e_3 = 1 - bh \\ f_1 &= ha, \quad f_2 = h(b-a), \quad f_3 = 1 - hb. \end{aligned}$$

Tada su

$$1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad i \quad 1 = f_1 + f_2 + f_3$$

dve dekompozicije jedinice prstena R u odnosu na koje elementi a i b imaju sledeće matrične forme:

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times f}, \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times f}, \tag{4.61}$$

pri čemu je element $a \in e_1 R f_1$, (e_1, f_1)-invertibilan, a element $b - a \in e_2 R f_2$, (e_2, f_2)-invertibilan.

(ii) *Ako je $\mathcal{G}$ polu-kompletno preslikavanje i ako a i b imaju reprezentacije (4.61) gde su $1 = e_1 + e_2 + e_3$ i $1 = f_1 + f_2 + f_3$ dve dekompozicije jedinice prstena R takve da je $e_1 = ag$ i $f_1 = ga$ za neko $g \in \mathcal{G}(a)$, onda je $a <^{\mathcal{G}} b$.*

Dokaz. Dokaz tvrđenja (i) se može izvesti duž linija dokaza Teoreme 3.1.8 i Teoreme 3.1.9. Da bi dokazali tvrđenje (ii) pretpostavimo da a i b imaju reprezentacije (4.61) gde je $e_1 = ag$ i $f_1 = ga$ za neko $g \in \mathcal{G}(a)$. Neka je $g' = gag$. Kako je $\mathcal{G}$ polu-kompletno, dobijamo da $g' \in \mathcal{G}(a)$. Imamo

$$f_1 g' e_1 = gagagag = gag = g',$$

pa je

$$g' = \begin{bmatrix} g' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{f \times e}.$$

Sada je lako videti da je

$$ag' = bg' = \begin{bmatrix} ag' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times e} \quad \text{i} \quad g'a = g'b = \begin{bmatrix} g'a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{f \times f}.$$

Po Definiciji 4.4.2, $a <^{\mathcal{G}} b$. □

Napomena 4.4.18. Primetimo da i za $\mathcal{G}$-relaciju važi tvrđenje iskazano u Teroemi 3.1.25 na strani 36.

U sledećoj teoremi ćemo okarakterisati sve elemente b veće od elementa a u odnosu na proizvoljnu polu-kompletnu G-relaciju. Videti Teoremu 3.4.3 u [77] za karakterizaciju u slučaju kompleksnih matrica.

Teorema 4.4.19. *Neka je $\mathcal{G} : R \longrightarrow \mathcal{P}(R)$ polu-kompletno g-preslikavanje i neka je $a \in \Omega_{\mathcal{G}}$. Tada je*

$$\{b \in R : a <^{\mathcal{G}} b\} = \{a + (1 - ag)d(1 - ga) : g \in \mathcal{G}(a),\ d \in R\}. \tag{4.62}$$

Dokaz. Označimo sa S skup na desnoj strani jednakosti (4.62). Pretpostavimo da je $a <^{\mathcal{G}} b$. Tada je $ag = bg$ i $ga = gb$ za neko $g \in \mathcal{G}(a)$. Dakle, $(b - a)g = 0$ i $g(b - a) = 0$. Lako se proverava da je

$$b = a + b - a = a + (1 - ag)(b - a)(1 - ga),$$

odakle sledi da $b \in S$. Pretpostavimo sada da $b \in S$, tj. da je $b = a + (1 - ag)d(1 - ga)$ za neko $g \in \mathcal{G}(a)$ i $d \in R$. Neka je $g' = gag$. Kako je $\mathcal{G}$ polu-kompletno sledi da $g' \in \mathcal{G}(a)$. Iz $aga = a$, lako se vidi da je $bg' = ag'$ i $g'b = g'a$. Dakle, $a <^{\mathcal{G}} b$. □

Iz Teoreme 4.4.19, zaključujemo da je $a <^{\mathcal{G}} b$ ako i samo ako je

$$b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}_{p \times q},$$

gde je $p = ag$, $q = ga$ za neko $g \in \mathcal{G}(a)$ i proizvoljno $v \in (1 - p)R(1 - q)$.

U sledećoj teoremi ćemo dokazati da su, pod određenim uslovima, jedini maksimalni elementi invertibilni elementi.

Teorema 4.4.20. *Neka je R, FD prsten i neka je $\mathcal{G} : R \to \mathcal{P}(R)$ polu-kompletno g-preslikavanje. Element $a \in \Omega_{\mathcal{G}}$ je $\mathcal{G}$-maksimalan u odnosu na $<^{\mathcal{G}}$ ako i samo ako je a invertibilan.*

Dokaz. Pretpostavimo da $a \in \Omega_G$ nije invertibilan. Hoćemo da pokažemo da a nije $\mathcal{G}$-maksimalan. Neka je $a^{(1)} \in \mathcal{G}(a)$ i $g = a^{(1)}aa^{(1)}$. Kako je G polu-kompletno, imamo da $g \in \mathcal{G}(a)$. Takođe, $gag = g$. Izaberimo $e = ag$ i $f = ga$. Tada je $e \sim f$. Ako je $e = 1$ ili $f = 1$ tada iz (4.57) sledi $e = f = 1$, pa je a invertibilan. Dakle, $e \neq 1$ i $f \neq 1$. Kako je R, FD prsten, sledi da je $1 - e \sim 1 - f$. Zbog toga postoje $x \in (1 - e)R(1 - f)$ i $y \in (1 - f)R(1 - e)$ tako da je $xy = 1 - e$ i $yx = 1 - f$. Neka je $b = a + x$. Kako je $1 - e \neq 0$, imamo da je $x \neq 0$ pa je $b \neq a$. Primetimo da je

$$(1 - f)g = (1 - ga)g = 0 \quad \text{i} \quad g(1 - e) = g(1 - ag) = 0.$$

Dakle, $xg = 0$ i $gx = 0$. Sledi $bg = ag$ i $gb = ga$ pa je $a <^{\mathcal{G}} b$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je a maksimalan.

Sa druge strane, pretpostavimo da je $a \in \Omega_{\mathcal{G}}$ invertibilan i da je $a <^{\mathcal{G}} b$ za neko $b \in R$. Kako je a invertibilan, jedini njegov unutrašni inverz je a^{-1}. Dakle, $\mathcal{G}(a) = \{a^{-1}\}$. Sada, iz $a <^{\mathcal{G}} b$ sledi $aa^{-1} = ba^{-1}$, pa je $a = b$. Dokazali smo da je a maksimalan. □

Sada smo u poziciji da damo potrebne i dovoljne uslove pod kojima je $\mathcal{G}$-relacija parcijalno uređenje na R. Ispostavlja se da je mnogo lakše naći dovoljne uslove.

Teorema 4.4.21. *Neka je $\mathcal{G} : R \longrightarrow \mathcal{P}(R)$ g-preslikavanje. Pretpostavimo da za proizvoljne elemente $a, b \in R$, iz uslova da je $a <^{\mathcal{G}} b$ i da b nije maksimalan sledi da par (a, b) zadovoljava (T)-uslov. Tada je relacija $<^{\mathcal{G}}$ parcijalno uređenje na Ω_G.*

Dokaz. Dokaz se ne razlikuje od dokaza u slučaju kompleksnih matrica, videti Teoremu 7.2.13. u [77]. Dokaz ćemo dati zbog kompletnosti. Kako je relacija $<^{\mathcal{G}}$ uvek refleksivna i antisimetrična na Ω_G, dovoljno je dokazati da je $<^{\mathcal{G}}$ tranzitivna. Pretpostavimo da je $a <^{\mathcal{G}} b$ i $b <^{\mathcal{G}} c$. Ako je b maksimalan onda je $b = c$ pa je $a <^{\mathcal{G}} c$. Neka zato b nije maksimalan. Kako je $b <^{\mathcal{G}} c$, postoji $h \in \mathcal{G}(b)$ tako da je $bh = ch$ i $hb = hc$. Po uslovu teoreme, zbog $a <^{\mathcal{G}} b$, imamo da par (a, b) zadovoljava (T)-uslov. Zato $hah \in \mathcal{G}(a)$. Neka je $g = hah$. Kako iz $a <^{\mathcal{G}} b$ sledi $a <^{-} b$, iz osobina (4.60), dobijamo $a = bha = ahb = aha$. Sledi

$$ag = ahah = ah = bhah = chah = cg.$$

Slično je $ga = gc$, odakle je $a <^{\mathcal{G}} c$. □

Posledica 4.4.22. *Neka je $\mathcal{G} : R \longrightarrow \mathcal{P}(R)$ polu-kompletno g-preslikavanje. Za $a, b \in R$, sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *Ako je $a <^{\mathcal{G}} b$ i b nije maksimalan onda par (a, b) zadovoljava (T)-uslov.*

(ii) *Ako je $a <^{\mathcal{G}} b$ i b nije maksimalan onda je $\tilde{\mathcal{G}}(b) \subseteq \tilde{\mathcal{G}}(a)$.*

(iii) *Ako je $a <^{\mathcal{G}} b$ i b nije maksimalan onda je $\mathcal{G}(b) \subseteq \tilde{\mathcal{G}}(a)$.*

Ako jedan od uslova (i)–(iii) važi za svako $a, b \in R$ onda je $<^{\mathcal{G}}$ relacija parcijalnog uređenja na Ω_G.

Dokaz. S obzirom na Teoremu 4.4.21 dovoljno je dokazati ekvivalenciju uslova (i), (ii) i (iii). Ako je $\mathcal{G}(b) = \varnothing$ tada su svi uslovi zadovoljeni. Pretpostavimo da je $\mathcal{G}(b) \neq \varnothing$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Pretpostavimo da važi (i) i da je $a <^{\mathcal{G}} b$ pri čemu b nije maksimalan. Neka je h proizvoljan element skupa $\tilde{\mathcal{G}}(b)$. To znači da postoji $b^{(1)} \in \mathcal{G}(b)$ tako da je $hb = b^{(1)}b$ i $bh = bb^{(1)}$. Neka je $g = b^{(1)}ab^{(1)}$. Kako (a, b) zadovoljava (T)-uslov, imamo da $g \in \mathcal{G}(a)$. Iz $a <^{\mathcal{G}} b$ sledi $a <^{-} b$, pa na osnovu (4.60), sledi da je $a = aua = aub = bua$ za svako $u \in b\{1\}$. Dobijamo, $a = bha = ahb = ab^{(1)}a$. Na osnovu prethodnog sledi da je

$$ha = h(bha) = b^{(1)}bha = b^{(1)}a = b^{(1)}(ab^{(1)}a) = ga$$
$$ah = (ahb)h = ahbb^{(1)} = ab^{(1)} = (ab^{(1)}a)b^{(1)} = ag.$$

Dakle, $h \in \tilde{\mathcal{G}}(a)$, pa je $\tilde{\mathcal{G}}(b) \subseteq \tilde{\mathcal{G}}(a)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) je jasno jer je $\mathcal{G}(b) \subseteq \tilde{\mathcal{G}}(b)$ za svako $b \in R$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Pretpostavimo da važi (iii). Neka je $a <^{\mathcal{G}} b$ pri čemu b nije maksimalan element. Za svako $h \in \mathcal{G}(b)$ postoji $g \in \mathcal{G}(a)$ tako da je $ag = ah$ i $ga = ha$. Kako je $\mathcal{G}$ polu-kompletno, dobijamo da je $hah = gag \in \mathcal{G}(a)$, pa par (a, b) zadovoljava (T)-uslov. □

U sledećoj teoremi ćemo dokazati da je pod određenim pretpostavkama, dovoljan uslov iz Teoreme 4.4.21 i Posledice 4.4.22, takođe i potreban uslov da bi $\mathcal{G}$-relacija bila relacija poretka na R. Ekvivalentnost uslova (i) i (ii) u sledećoj teoremi je uopštenje Mitrinog rezultata, Teorema 2.6 u [76] i rezultata Mitre, Bimasankarama i Malika, videti Teoremu 7.2.31 u [77], koji su posmatrali slučaj $R = M_n$.

Teorema 4.4.23. *Neka je R, FD prsten i neka je $\mathcal{G} : R \longrightarrow \mathcal{P}(R)$ polu-kompletno g-preslikavanje. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *Relacija* $<^{\mathcal{G}}$ *je parcijalno uređenje na* Ω_G.

(ii) *Neka su* $a, b \in R$. *Ako je* $a <^{\mathcal{G}} b$ *onda par* (a, b) *zadovoljava (T)-uslov.*

(iii) *Neka su* $a, b \in R$. *Ako je* $a <^{\mathcal{G}} b$ *onda je* $\tilde{\mathcal{G}}(b) \subseteq \tilde{\mathcal{G}}(a)$.

(iv) *Neka su* $a, b \in R$. *Ako je* $a <^{\mathcal{G}} b$ *onda je* $\mathcal{G}(b) \subseteq \tilde{\mathcal{G}}(a)$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Pretpostavimo da je R, FD prsten, da je $\mathcal{G}$ polu-kompletno g-preslikavanje i da je $<^{\mathcal{G}}$ tranzitivna. Neka su a, b elemetni iz R takvi da je $a <^{\mathcal{G}} b$. Jasno je da ako je $\mathcal{G}(b) = \varnothing$ onda par (a, b) zadovoljava (T)-uslov. Pretpostavimo zbog toga da je $\mathcal{G}(b) \neq \varnothing$. Neka je $b^{(1)} \in \mathcal{G}(b)$. Treba dokazati da je $b^{(1)}ab^{(1)} \in \mathcal{G}(a)$. Neka je $h = b^{(1)}bb^{(1)}$. Kako je G polu-kompletno, imamo $h \in \mathcal{G}(b) \subseteq b\{1\}$. Lako se vidi da je $hbh = h$. Takođe, iz (4.60) dobijamo

$$hah = b^{(1)}(bb^{(1)}a)b^{(1)}bb^{(1)} = b^{(1)}(ab^{(1)}b)b^{(1)} = b^{(1)}ab^{(1)}. \tag{4.63}$$

Neka su e_i i f_i, $i = 1, 2, 3$ kao u Teoremi 4.4.17. Tada a i b imaju reprezentacije (4.61). Zbog Napomene 4.4.9, imamo da je $bh \sim hb$. Zbog toga što je R, FD prsten, imamo da je $e_3 = 1 - bh \sim 1 - hb = f_3$. Odavde sledi da postoje $x \in e_3Rf_3$ i $y \in f_3Re_3$ tako da je $e_3 = xy$ i $f_3 = yx$. Primetimo da je $hah = f_1h = he_1$ pa $hah \in f_1Re_1$. Slično $h(b-a)h \in f_2Re_2$. Sledi da je

$$h = hbh = hah + h(b-a)h = \begin{bmatrix} hah & 0 & 0 \\ 0 & h(b-a)h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{f \times e}. \tag{4.64}$$

Neka je $c = b + x$ i $z = h + y$. Imamo

$$c = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}_{e \times f} \quad \text{i} \quad z = \begin{bmatrix} hah & 0 & 0 \\ 0 & h(b-a)h & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}_{f \times e}. \tag{4.65}$$

Iz (4.60) sledi da je

$$cz = \begin{bmatrix} ahah & 0 & 0 \\ 0 & (b-a)h(b-a)h & 0 \\ 0 & 0 & xy \end{bmatrix}_{e \times e} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix}_{e \times e} = 1.$$

Slično dobijamo da je $zc = 1$, odakle sledi da je c invertibilan i $z = c^{-1}$. Dokažimo sada da je $b <^{\mathcal{G}} c$. Iz (4.61), (4.64), (4.65) dobijamo

$$bh = ch = \begin{bmatrix} ahah & 0 & 0 \\ 0 & (b-a)h(b-a)h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times e} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times e}.$$

Slično je $hb = hc = f_1 + f_2$. Po definiciji dobijamo $b <^{\mathcal{G}} c$. Kako je $<^{\mathcal{G}}$ tranzitivna to je $a <^{\mathcal{G}} c$. Zbog toga postoji $g \in \mathcal{G}(a)$ tako da je $ag = cg$ i $ga = gc$. Stoga je $a = aga = cgc$.

Sledi

$$g = c^{-1}ac^{-1} = \begin{bmatrix} hah & 0 & 0 \\ 0 & h(b-a)h & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}_{f\times e} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e\times f} \begin{bmatrix} hah & 0 & 0 \\ 0 & h(b-a)h & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}_{f\times e}$$

$$= \begin{bmatrix} hahahah & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{f\times e} = hah.$$

Iz (4.63) dobijamo da je $b^{(1)}ab^{(1)} = g \in \mathcal{G}(a)$, što je i trebalo dokazati.

Dokaz (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i) se izvodi duž linija dokaza Posledice 4.4.22. $\square$

Posledica 4.4.24. *Neka je $\mathcal{G} : R \longrightarrow \mathcal{P}(R)$ g-preslikavanje takvo da je $\mathcal{G}(x) = \{g_x\}$ gde je g_x određeni g-inverz od x. Za $a, b \in R$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *Ako je $a <^{\mathcal{G}} b$ onda je $g_b a g_b = g_a$.*

(ii) *Ako je $a <^{\mathcal{G}} b$ onda je $ag_a = ag_b$ i $g_a a = g_b a$.*

(iii) *Ako je $a <^{\mathcal{G}} b$ onda je $\tilde{\mathcal{G}}(b) \subseteq \tilde{\mathcal{G}}(a)$.*

Ako jedan od uslova (i)–(iii) važi za svako $a, b \in R$ onda je $<^{\mathcal{G}}$ relacija parcijalnog uređenja na $\Omega_{\mathcal{G}}$.

Dokaz. Dokaz sledi iz Posledice 4.4.22. $\square$

Posledica 4.4.25. *Neka je R, FD prsten i neka je $\mathcal{G} : R \longrightarrow \mathcal{P}(R)$ g-preslikavanje takvo da je za $x \in R$, $\mathcal{G}(x) = \{g_x\}$ gde je g_x određeni refleksivni uopšteni inverz od x. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *Relacija $<^{\mathcal{G}}$ je relacija parcijalnog uređenja na $\Omega_{\mathcal{G}}$.*

(ii) *Neka su $a, b \in R$. Ako je $a <^{\mathcal{G}} b$ onda je $g_b a g_b = g_a$.*

(iii) *Neka su $a, b \in R$. Ako je $a <^{\mathcal{G}} b$ onda je $ag_a = ag_b$ i $g_a a = g_b a$.*

(iv) *Neka su $a, b \in R$. Ako je $a <^{\mathcal{G}} b$ onda je $\tilde{\mathcal{G}}(b) \subseteq \tilde{\mathcal{G}}(a)$.*

Dokaz. Kako je za svako $x \in \Omega_{\mathcal{G}}$, g_x refleksivni uopšteni inverz od x, sledi da je $\mathcal{G}$ polu-kompletno preslikavanje. Zbog toga, dokaz sledi iz Teoreme 4.4.23. $\square$

Već smo dokazali u Teoremi 4.4.23 da pod određenim uslovima iz $a <^{\mathcal{G}} b$ sledi $\mathcal{G}(b) \subseteq \tilde{\mathcal{G}}(a)$. Prirodno je postaviti pitanje da li važi i obrnuto.

Teorema 4.4.26. *Neka je $\mathcal{G} : R \longrightarrow \mathcal{P}(R)$ g-preslikavanje i neka su $a, b \in \Omega_{\mathcal{G}}$. Ako je $\mathcal{G}(b) \subseteq \tilde{\mathcal{G}}(a)$ i $a <^s b$ onda je $a <^{\mathcal{G}} b$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathcal{G}(b) \subseteq \tilde{\mathcal{G}}(a)$ i da je $a <^s b$. Fiksirajmo $h \in \mathcal{G}(b)$. Tada $h \in \tilde{\mathcal{G}}(a)$ pa postoji $g \in \mathcal{G}(a)$ tako da je $ha = ga$ i $ah = ag$. Iz $a <^s b$ sledi $a = bha = ahb$, videti Teoremu 3.1.4. Kako je $\mathcal{G}$ polu-kompletno, imamo da je $f := gag \in \mathcal{G}(a)$. Lako se može videti da je $faf = f$ i da je $fa = gaga = ga = ha$. Zbog toga je $af = bhaf = bfaf = bf$. Slično je $af = ah$ i $fa = fb$. Po definiciji je $a <^{\mathcal{G}} b$. $\square$

U Teoremi 4.4.23 smo dokazali da pod određenim pretpostavkama iz $a <^{\mathcal{G}} b$ sledi da par (a, b) zadovoljava (T)-uslov. Takođe, iz $a <^{\mathcal{G}} b$ sledi $a <^{-} b$. Obratan rezultat je dokazan za neka matrična parcijalna uređenja. Naime, u Teoremi 2.4 u [74] je dokazano da za $A, B \in M_n$ iz $A <^{-} B$ i $B^{\#}AB^{\#} <^{s} A^{\#}$ sledi $A <^{\#} B$. Isti rezultat je dokazan kada se umesto grupnog inverza i oštrog uređenja posmatra MP inverz odnosno zvezda uređenje. U sledećoj teoremi ćemo dokazati jači rezultat.

Teorema 4.4.27. *Neka su $a, b \in R$ i neka je $\mathcal{G} : R \longrightarrow \mathcal{P}(R)$ g-preslikavanje. Pretpostavimo da je $a <^{-} b$ i da postoje $h \in b\{1\}$ i $g \in \mathcal{G}_r(a)$ takvi da je $hah <^{s} g$. Tada je $a <^{\mathcal{G}} b$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $a <^{-} b$ i da je $hah <^{s} g$ za neke $h \in b\{1\}$ i $g \in \mathcal{G}_r(a)$. Dakle, $hah = xg = gy$ za neke $x, y \in R$. Iz $a <^{-} b$ sledi $a = aha = ahb = bha$. Dobijamo da je

$$\begin{aligned} g &= gag = g(aha)g = gahahag = ga(hah)ag \\ &= ga(xg)ag = gax(gag) = gaxg = ga(xg) \\ &= ga(gy) = (gag)y = gy, \end{aligned}$$

pa je $hah = g$. Sada je

$$\begin{aligned} gb &= hahb = h(ahb) = ha = haha = (hah)a = ga \\ bg &= bhah = (bha)h = ah = ahah = a(hah) = ag. \end{aligned}$$

Sledi da je $a <^{\mathcal{G}} b$. □

Sledeća teorema je uopštenje Teoreme 2.3 u [74] gde je Mitra posmatrao slučaj $R = M_n$, $\mathcal{G}(A) = \{A^{\dagger}\}$ i $\mathcal{G}(A) = \{A^{\#}\}$.

Teorema 4.4.28. *Neka su $a, b \in R$ i neka je $\mathcal{G} : R \longrightarrow \mathcal{P}(R)$ g-preslikavanje. Tada važi:*

(i) *Ako je $\mathcal{G}$ polu-kompletno i $a <^{\mathcal{G}} b$ onda je $a <^{-} b$ i $a = bgb$ za neko $g \in \mathcal{G}_r(a)$.*

(ii) *Ako je $b \in \Omega_{\mathcal{G}}$, $a <^{-} b$ i ako postoji $g \in \mathcal{G}_r(a)$ tako da je $bgb <^{s} a$ onda je $a <^{\mathcal{G}} b$.*

Dokaz. (i): Pretpostavimo da je $\mathcal{G}$ polu-kompletno i da je $a <^{\mathcal{G}} b$. Tada je $a <^{-} b$ i postoji $a^{(1)} \in \mathcal{G}(a)$ tako da je $aa^{(1)} = ba^{(1)}$ i $a^{(1)}a = a^{(1)}b$. Neka je $g = a^{(1)}aa^{(1)}$. Kako je $\mathcal{G}$ polu-kompletno, imamo da $g \in \mathcal{G}(a)$. Lako se proverava da je $bgb = a$.

(ii): Pretpostavimo da je $a <^{-} b$ i da postoji $g \in \mathcal{G}_r(a)$ tako da je $bgb <^{s} a$. Dakle, postoje $x, y \in R$ tako da je $bgb = xa = ay$. Fiksirajmo $h \in \mathcal{G}(b)$. Iz $a <^{-} b$ sledi $a = aha = bha = ahb$. Imamo da je

$$\begin{aligned} a &= aga = (ahb)g(bha) = ah(bgb)ha = ah(xa)ha \\ &= ahx(aha) = ahxa = ah(xa) = ah(ay) = (aha)y = ay, \end{aligned}$$

pa je $bgb = a$. Sledi

$$\begin{aligned} bg &= bgag = bg(bha)g = (bgb)hag = ahag = ag \\ gb &= gagb = g(ahb)gb = gah(bgb) = gaha = ga. \end{aligned}$$

Dakle, $a <^{\mathcal{G}} b$. □

Ranije smo naglasili da iz $a < b$ sledi $b - a < b$, gde je $< \in \{<^-, <^*, <^\#\}$. Ali, kada je $< \in \{<^{\oplus}, <_{\oplus}\}$, onda iz $a < b$ ne sledi $b - a < b$. U sledećoj teoremi dajemo odgovor na pitanje pod kojim uslovima ova osobina važi za $\mathcal{G}$-relaciju. Videti takođe Teoremu 2.8 u [76].

Teorema 4.4.29. *Neka je R, FD prsten i neka je $\mathcal{G} : R \longrightarrow \mathcal{P}(R)$ g-preslikavanje takvo da je $\mathcal{G}(x) = \{g_x\}$ gde je g_x određeni refleksivni inverz od x. Pretpostavimo da je $<^{\mathcal{G}}$ parcijalno uređenje na $\Omega_{\mathcal{G}}$ i da je $a <^{\mathcal{G}} b$. Tada je $b - a <^{\mathcal{G}} b$ ako i samo ako je $g_{b-a} = g_b - g_a$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $a <^{\mathcal{G}} b$ i $b - a <^{\mathcal{G}} b$. Iz Posledice 4.4.25 sledi $g_b a g_b = g_a$ i $g_b(b - a)g_b = g_{b-a}$. Dakle, $g_{b-a} = g_b b g_b - g_b a g_b = g_b - g_a$. Sa druge strane pretpostavimo da je $a <^{\mathcal{G}} b$ i $g_{b-a} = g_b - g_a$. Iz Posledice 4.4.25, sledi da je $a g_a = a g_b$ i $g_a a = g_b a$. Zbog toga dobijamo

$$(b - a)g_{b-a} = (b - a)(g_b - g_a) = b(g_b - g_a) - a g_b + a g_a = b g_{b-a}.$$

Na isti način možemo dobiti da je $g_{b-a}(b - a) = g_{b-a} b$ pa je $b - a <^{\mathcal{G}} b$. □

U prethodnim poglavljima smo dokazali da su minus, zvezda, oštro, jezgarno i dualno jezgarno uređenje zaista parcijalna uređenja. Ova tvrđenja možemo dokazati i koristeći Posledicu 4.4.24.

G1. Minus uređenje je relacija parcijalnog uređenja na skupu $\Omega_{\mathcal{G}} := R^{(1)}$.

Po Teoremi 4.4.21 dovoljno je dokazati da iz $a, b \in \Omega_{\mathcal{G}}$, $a <^- b$ sledi $b^{(1)} a b^{(1)} \in a\{1\}$ za svako $b^{(1)} \in b\{1\}$. Međutim iz $a <^- b$ sledi $a b^{(1)} a = a$ pa je prethodna osobina zadovoljena.

G2. Oštro uređenje je relacija parcijalnog uređenja na skupu $\Omega_{\mathcal{G}} := R^\#$.

Na osnovu Posledice 4.4.24, dovoljno je dokazati da iz $a, b \in \Omega_{\mathcal{G}}$, $a <^\# b$ sledi $b^\# a b^\# = a^\#$. Ovu osobinu smo dokazali u Teoremi 4.2.26.

G3. Zvezda uređenje je relacija parcijalnog uređenja na skupu $\Omega_{\mathcal{G}} := R^\dagger$.

Zbog Posledice 4.4.24 dovoljno je dokazati da iz $a, b \in \Omega_{\mathcal{G}}$, $a <^* b$ sledi $b^\dagger a b^\dagger = a^\dagger$. Ovu osobinu smo dokazali u Teoremi 4.2.22.

G4. Jezgarno uređenje je relacija parcijalnog uređenja na skupu $\Omega_{\mathcal{G}} := R^{\oplus}$.

Treba dokazati da iz $a <^{\oplus} b$ sledi $b^{\oplus} a b^{\oplus} = a^{\oplus}$. Ovu osobinu smo dokazali u Teoremi 4.2.28.

G5. Dualno jezgarno uređenje je relacija parcijalnog uređenja na skupu $\Omega_{\mathcal{G}} := \mathrm{Im}_{\oplus}$.

Osobinu $a <_{\oplus} b \Rightarrow b_{\oplus} a b_{\oplus} = a_{\oplus}$ smo dokazali u Teoremi 4.2.30.

Iz Posledica 4.4.22 i 4.4.24 i iz stavki G1 – G5, sledi da $a < b$ povlači $\tilde{\mathcal{G}}(b) \subseteq \tilde{\mathcal{G}}(a)$, gde je $< \in \{<^-, <^\#, <^\dagger, <^{\oplus}, <_{\oplus}\}$, a $\mathcal{G}$ je odgovarajuće g-preslikavanje. Poglavlje završavamo karakterizacijama skupova $\tilde{\mathcal{G}}(a)$ za određeni tip g-preslikavanja.

Teorema 4.4.30. *Neka je $\mathcal{G} : R \longrightarrow \mathcal{P}(R)$ g-preslikavanje takvo da je $\mathcal{G}(x) = \{g_x\}$ gde je g_x određeni refleksivni uopšteni inverz od x. Za $a \in \Omega_{\mathcal{G}}$ važi*

$$\tilde{\mathcal{G}}(a) = \left\{ \begin{bmatrix} g_a & 0 \\ 0 & g_4 \end{bmatrix}_{q\times p} : g_4 \in (1-q)R(1-p) \right\},$$

gde je $p = ag_a$ i $q = g_a a$.

Dokaz. Pretpostavimo da g pripada skupu sa desne strane. Iz $a = paq$ i $g_a = qg_a p$ dobijamo

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times q} \text{ i } g_a = \begin{bmatrix} g_a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q\times p}.$$

Sada je lako videti da je $ga = g_a a$ i $ag = ag_a$, pa $g \in \tilde{\mathcal{G}}(a)$. Obrnuto, pretpostavimo da $g \in \tilde{\mathcal{G}}(a)$ i neka je $g = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}_{q\times p}$. Iz $ag = ag_a$ sledi

$$\begin{bmatrix} ag_1 & ag_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p} = \begin{bmatrix} ag_a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p}.$$

Dakle, $ag_1 = ag_a$ i $ag_2 = 0$. Množeći ove jednakosti sa g_a sa leve strane dobijamo $qg_1 = g_a$ odnosno $qg_2 = 0$. Kako $g_1 \in qRp$ i $g_2 \in qR(1-p)$ zaključujemo da je $g_1 = g_a$ odnosno da je $g_2 = 0$. Slično, iz $ga = g_a a$ dobijamo $g_3 = 0$. □

Iz prethodne teoreme i Leme 4.2.17 dobijamo:

- Za g-preslikavanje $\mathcal{G}$ definisano sa $\mathcal{G}(a) = a\{1\}$ je $\tilde{\mathcal{G}}(a) = a\{1\}$, $a \in \Omega_{\mathcal{G}}$.
- Za g-preslikavanje $\mathcal{G}$ definisano sa $\mathcal{G}(a) = \{a^{\#}\}$ je $\tilde{\mathcal{G}}(a) = a\{1,5\}$, $a \in \Omega_{\mathcal{G}}$.
- Za g-preslikavanje $\mathcal{G}$ definisano sa $\mathcal{G}(a) = \{a^{\dagger}\}$ je $\tilde{\mathcal{G}}(a) = a\{1,3,4\}$, $a \in \Omega_{\mathcal{G}}$.
- Za g-preslikavanje $\mathcal{G}$ definisano sa $\mathcal{G}(a) = \{a^{\oplus}\}$ je $\tilde{\mathcal{G}}(a) = a\{3,6\}$, $a \in \Omega_{\mathcal{G}}$.
- Za g-preslikavanje $\mathcal{G}$ definisano sa $\mathcal{G}(a) = \{a_{\oplus}\}$ je $\tilde{\mathcal{G}}(a) = a\{4,8\}$, $a \in \Omega_{\mathcal{G}}$.

Glava 5

Parcijalna uređenja određena anulatorima

U dosadašnjem delu disertacije smo posmatrali parcijalna uređenja koja se definišu pomoću uopštenih inverza elemenata. Postojanje uopštenog inverza je dosta jako ograničenje. Već na algebri $B(H)$, gde je H beskonačno dimenzionalan Hilbertov prostor, proizvoljan operator, sa slikom koja nije zatvoren skup, ne poseduje g-inverz. Ali cilj je definisati relaciju uređenja na celom skupu, a ne samo na podskupu g-invertibilnih elemenata. Ispostavlja se da je, nezavisno od matičnog skupa, najvažinije definisati minus parcijalno uređenje. Definicije ostalih uređenja se onda prirodno nameću. Naravno, novouvedena definicija se mora poklapati sa originalnom definicijom minus parcijalnog uređenja, u matričnom slučaju. Problem proširenja minus parcijalnog uređenja sa skupa matrica na skup $\mathcal{B}(H)$, gde je H beskonačno dimenzionalan Hilbertov prostor, prvi je posmatrao Šemrl u radu [105]. Kao što smo rekli, definicija koja bi uključivala g-inverz elementa nije odgovarajuća. Pojam ranga matrice se ne može primeniti u beskonačno dimenzionalnom slučaju, pa definicija $A <^- B \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B - A) = \operatorname{rank}(B)$, takođe nije adekvatna. Šemrl je zbog toga našao još jednu karakterizaciju matričnog minus parcijalnog uređenja i njome definisao novo uređenje: za $A, B \in \mathcal{B}(H)$, gde je H konačno dimenzionalan Hilbertov prostor, kažemo da je $A <^- B$ ako i samo ako postoje idempotenti $P, Q \in \mathcal{B}(H)$ takvi da je $\operatorname{Im} P = \operatorname{Im} A$, $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Ker} A$, $PA = PB$ i $AQ = BQ$, videti [105]. Podsetimo se da je slika idempotenta $P \in \mathcal{B}(H)$, gde H može biti proizvoljan Hilbertov prostor, zatvoren skup. Koristeći iste jednačine, dodajući samo zatvorenje na $\operatorname{Im} A$, Šemrl je proširio koncept minus parcijalnog uređenja na $\mathcal{B}(H)$ za proizvoljan Hilbertov prostor H.

Definicija 5.0.31. (Videti [105].) Neka je H Hilbertov prostor i neka $A, B \in \mathcal{B}(H)$. Kažemo da je $A <^- B$ ako postoje idempotenti $P, Q \in \mathcal{B}(H)$ takvi da važi

(1) $\operatorname{Im} P = \overline{\operatorname{Im} A}$;

(2) $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} Q$;

(3) $PA = PB$;

(4) $AQ = BQ$.

Dokazano je da je $<^-$ zaista parcijalno uređenje na $B(H)$. Ova definicija je pravilno proširenje Hartvigove definicije minus parcijalnog uređenja na matricama.

Naš cilj je da definiciju minus uređenja proširimo na opštije matematičke strukture. Za razliku od prethodnog dela disertacije gde smo definicije nekoliko različitih parcijalnih uređenja uveli posredstvom uopštenih inverza, u ovom delu želimo da uopštimo Šemrlov pristup i da bez korišćenja g-inverza definišemo minus i ostala parcijalna uređenja na prstenu. Međutim Definicija 5.0.31 uključuje pojam slike i jezgra operatora koji nemaju smisla u prstenu. Zbog toga moramo naći ekvivalentnu algebarsku definiciju. Iz Definicije 5.0.31, je takođe jasno da struktura mora biti "bogata" idempotentima. Ispostavlja se da je proširenje minus parcijalnog uređenja moguće uraditi korišćenjem anulatora i da je to najprirodnije učiniti na Rikartovim prstenima. U sledećem poglavlju ćemo se bliže upoznati sa ovim pojmovima. Rezultati ove glave su publikovani u radovima [92], [69] i u radu [25] koji je trenutno na recenziji.

5.1 Anulatori i Rikartovi prsteni

U ovom poglavlju ćemo dati osnovne definicije i osobine anulatora i Rikartovih prstena. Pojedina elementarna tvrđenja ćemo dokazati zbog kompletnosti.

Definicija 5.1.1. Neka je R prsten i A neprazan podskup od R. Skup

$$A^\circ = \{x \in R : ax = 0 \text{ za svako } a \in A\}$$

nazivamo *desni anulator* skupa A. Slično, skup

$$^\circ A = \{x \in R : xa = 0 \text{ za svako } a \in A\}$$

nazivamo *levi anulator* skupa A.

Napominjemo da neki autori umesto termina "anulator" koriste termin "anihilator" (eng. *annihilator*).

Umesto $\{a\}^\circ$ i $^\circ\{a\}$ pišemo a° odnosno $^\circ a$.

Lema 5.1.2. *(Videti [15].) Neka su A i B neprazni podskupovi prstena R. Važi:*

(i) $A \subseteq {}^\circ(A^\circ)$ *i* $A \subseteq ({}^\circ A)^\circ$;

(ii) $A \subseteq B$ *sledi* $B^\circ \subseteq A^\circ$ *i* ${}^\circ B \subseteq {}^\circ A$;

(iii) $A^\circ = ({}^\circ(A^\circ))^\circ$ *i* ${}^\circ A = {}^\circ(({}^\circ A)^\circ)$;

(iv) A° *je desni ideal od* R, ${}^\circ A$ *je levi ideal od* R.

(v) *Ako je* J *levi ideal od* R, *onda je* ${}^\circ J$ *ideal od* R. *Ako je* J *desni ideal od* R *onda je* J° *ideal od* R.

(vi) *Ako je* R $*$*-prsten onda je* $(A^*)^\circ = ({}^\circ A)^*$, *gde je* $A^* = \{a^* : a \in A\}$. *Slično,* ${}^\circ(A^*) = (A^\circ)^*$.

Lema 5.1.3. *Ako je* $e \in E(R)$ *onda je*

$$^\circ e = R(1-e) \text{ i } e^\circ = (1-e)R.$$

Dokaz. Ako je $xe = 0$ onda je $x = x(e+1-e) = x(1-e) \in R(1-e)$. Obrnuto, ako $x \in R(1-e)$ onda je $x = x(1-e)$ pa je $xe = 0$, tj. $x \in {}^\circ e$. Slično, $e^\circ = (1-e)R$. □

Lema 5.1.4. *Neka su* $e, f \in E(R)$. *Ako je* $e^\circ \subseteq f^\circ$ *i* $^\circ f \subseteq {}^\circ e$ *onda je* $e = f$.

Dokaz. Iz $e^\circ \subseteq f^\circ$ sledi $f(1-e) = 0$ tj. $f = fe$. Iz $^\circ f \subseteq {}^\circ e$ sledi $(1-f)e = 0$ pa je $e = fe = f$. □

Lema 5.1.5. *Neka su* $e, f \in \widetilde{E}(R)$. *Ako je* $e^\circ = f^\circ$ *ili* $^\circ e = {}^\circ f$ *onda je* $e = f$.

Dokaz. Dokaz je trivijalan. □

Definicija 5.1.6. Prsten $\mathcal{A}$ je *Rikartov* prsten ako za svako $a \in \mathcal{A}$ postoje idempotenti $e, f \in E(\mathcal{A})$ takvi da je $a^\circ = e\mathcal{A}$ i $^\circ a = \mathcal{A}f$.

Definicija 5.1.7. $*$-prsten $\mathcal{A}$ je *Rikartov $*$-prsten* ako za svako $a \in \mathcal{A}$ postoji samo-adjungovani idempotent $e \in \widetilde{E}(\mathcal{A})$ takav da je $a^\circ = e\mathcal{A}$. Iz Leme 5.1.2 sledi $^\circ a = ((a^*)^\circ)^* = (f\mathcal{A})^* = \mathcal{A}f$, gde je f odgovarajući samo-adjungovani idempotent za a^*. Iz Leme 5.1.5 sledi da su $e, f \in \widetilde{E}(\mathcal{A})$ jedinstveni.

Teorema 5.1.8. *(Videti [15].) Ako je* $\mathcal{A}$ *Rikartov prsten onda* $\mathcal{A}$ *ima jedinicu. Ako je* $\mathcal{A}$ *Rikartov $*$-prsten onda je $*$ pravilna involucija.*

Sledeće dve leme su dosta korisne.

Lema 5.1.9. *Neka su* $a \in R$ *i* $p \in E(R)$. *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $^\circ a = {}^\circ p$;

(ii) $a = pa$ *i za svako* $z \in Rp$ *važi*

$$za = 0 \Rightarrow z = 0.$$

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Iz $^\circ p \subseteq {}^\circ a$ sledi $(1-p)a = 0$, tj. $a = pa$. Neka je $z \in Rp$ i $za = 0$. Iz $^\circ a \subseteq {}^\circ p$ sledi $zp = 0$. Međutim, $z \in Rp$ pa je $z = zp = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Pretpostavimo da važi uslov (ii) i neka je $za = 0$. Tada je $0 = za = zpa$, $zp \in Rp$ pa je $zp = 0$. Obrnuto, ako je $zp = 0$ onda je $za = z(pa) = 0$. Dakle, $^\circ a = {}^\circ p$. □

Naravno, važi i dualni rezultat.

Lema 5.1.10. *Neka su* $a \in R$ *i* $q \in E(R)$. *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a^\circ = q^\circ$;

(ii) $a = aq$ *i za svako* $z \in qR$ *važi*

$$az = 0 \Rightarrow z = 0.$$

Napomena 5.1.11. Neka je R proizvoljan prsten. Pretpostavimo da je $a \in R$ regularan. Tada postoji $x \in R$ tako da je $axa = a$ i $xax = x$. Neka je $p = ax$ i $q = xa$. Važi $a = paq$ i $x = qxp$. Setimo se da u ovom slučaju kažemo da je element $a \in pRq$ (p,q)-invertibilan i da je njegov jedinstven (p,q)-inverz $a' = x \in qRp$. Osim toga, lako se pokazuje da je ${}^\circ a = {}^\circ p$ i $a^\circ = q^\circ$.

Pretpostavimo sada da za $a \in R$ postoje $p, q \in E(R)$ takvi da je ${}^\circ a = {}^\circ p$ i $a^\circ = q^\circ$. Odavde ne sledi da je a regualran, videti Teoremu 5.2.2. I sada važi da je $a = paq$ (sledi iz Lema 5.1.9 i 5.1.10), ali $a \in pRq$ nije obavezno (p,q)-invertibilan. Sada važi nešto slabije svojstvo koje je iskazano Lemama 5.1.9 i 5.1.10. Zbog toga uvodimo sledeći pojam.

Definicija 5.1.12. Neka su $p, q \in E(R)$. Za element $a \in R$ kažemo da *nije (p,q)-delilac nule* ako važe sledeći uslovi

(1) $a \in pRq$;

(2) $z \in Rp \;\Rightarrow\; (za = 0 \;\Rightarrow\; z = 0)$;

(3) $z \in qR \;\Rightarrow\; (az = 0 \;\Rightarrow\; z = 0)$.

Lema 5.1.13. *Neka su $p, q \in E(R)$. Za element $a \in R$ važi da je ${}^\circ a = {}^\circ p$ i $a^\circ = q^\circ$ ako i samo ako a nije (p,q)-delilac nule.*

Osobinu kojom se definišu Rikartovi prsteni ćemo često posmatrati u smislu Leme 5.1.13.

Napomena 5.1.14. Neka je $a \in R$ i neka postoje $p, q \in E(R)$ tako da je ${}^\circ a = {}^\circ p$ i $a^\circ = q^\circ$. Primetimo da u opštem slučaju za a ne važe osobine iskazane Napomenom 3.1.12. Umesto mogućnosti rešavanja jednačina oblika $ax = b$ i $xa = b$, sada imamo malo slabije osobine. Naime, pretpostavimo da su $b, c \in Rp$ i neka je $ba = ca$. Tada, iz Leme 5.1.9, lako dobijamo da je $b - c = 0$. Dakle, u ovom slučaju važi zakon skraćivanja:

$$b, c \in Rp \;\Rightarrow\; (ba = ca \;\Leftrightarrow\; b = c).$$

Naravno, važi i

$$b, c \in qR \;\Rightarrow\; (ab = ac \;\Leftrightarrow\; b = c).$$

Setimo se da da za prsten kažemo da je $*$-regularan ako je svaki njegov element MP invertibilan. Na osnovu Napomene 5.1.11 i Posledice 4.1.17 dobijamo sledeću poznatu teoremu.

Teorema 5.1.15. *Svaki von Nojman regualran prsten je Rikartov prsten. Obrnuto ne važi. Svaki von Nojman regularan prsten koji je i Rikartov $*$-prsten je $*$-regularan prsten.*

Poglavlje završavamo sledećim lemama u kojima ćemo izostaviti dualne rezultate koji se mogu dobiti analogno.

Lema 5.1.16. *Neka je $e \in E(R)$. Tada je $R = eR \oplus (1-e)R$ (direktna suma desnih ideala).*

Dokaz. Dokaz je trivijalan. □

Lema 5.1.17. *Neka su I i J dva desna ideala od R takva da je $R = I \oplus J$. Tada važe sledeća tvrđenja.*

(1) *Postoji jedinstven idempotent $e \in E(R)$ takav da je $I = eR$ i $J = (1-e)R$;*

(2) $R = {}^\circ I \oplus {}^\circ J$.

Dokaz. Kako je $R = I \oplus J$, postoje $e \in I$ i $f \in J$ takvi da je

$$1 = e + f.$$

Tada je $e = e^2 + fe$ i $e^2 \in I$, $fe \in J$ pošto su I i J desni ideali. Kako je $I \cap J = \{0\}$ dobijamo $fe = 0$ i $e = e^2$. Takođe, $eR \subseteq I$ jer je I desni ideal. Slično je $f^2 = f$, $ef = 0$ i $fR \subseteq J$. Za proizvoljno $i \in I$ je

$$i = ei + fi, \quad ei \in I,\ fi \in J.$$

Dakle, $i = ei \in eR$ i $fi = 0$. Sledi da je $I = eR$ i $f \in {}^\circ I$. Slično, $J = fR = (1-e)R$ i $e \in {}^\circ J$. Da bi dokazali jedinstvenost za e, pretpostavimo da je $eR = gR$ i $(1-e)R = (1-g)R$ za neki idempotent g. Lako je videti da je $e = ge$ i $1 - e = (1-g)(1-e)$. Odavde dobijamo $e = g$. Da bi dokazali (2) dovoljno je da dokažemo da je ${}^\circ I \cap {}^\circ J = \{0\}$. Ako $x \in {}^\circ I \cap {}^\circ J$ onda je $xe = 0$ i $xf = 0$ pa je $x = 0$. □

5.2 Anulator operatora na normiranom prostoru

Sledeća teorema će nam omogućiti da damo ekvivalentnu algebarsku definiciju Šemrlove definicije minus parcijalnog uređenja na $\mathcal{B}(H)$. Kao što ćemo videti u narednim poglavljima, pomoću ove teoreme možemo proširiti i ostala parcijalna uređenja. Iako je za naše potrebe dovoljno posmatrati slučaj Hilbertovog prostora, teoremu ćemo dokazati za proizvoljan normiran prostor. Napominjemo da je njen dokaz u slučaju Hilbertovog ili Banahovog prostora dosta lakši.

Teorema 5.2.1. *Neka je X normiran prostor. Neka je $P \in \mathcal{B}(X)$ idempotentski operator i $A \in \mathcal{B}(X)$. Tada je:*

(1) $A^\circ = (I-P)\mathcal{B}(X) \iff A^\circ = P^\circ \iff \operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} A$;

(2) ${}^\circ A = \mathcal{B}(X)(I-P) \iff {}^\circ A = {}^\circ P \iff \operatorname{Im} P = \overline{\operatorname{Im} A}$.

Dokaz. Po Lemi 5.1.3, znamo da je $A^\circ = (I-P)\mathcal{B}(X)$ ako i samo ako je $A^\circ = P^\circ$, i ${}^\circ A = \mathcal{B}(X)(I-P)$ ako i samo ako ${}^\circ A = {}^\circ P$.

(1): Pretpostavimo da je $A^\circ = (I-P)\mathcal{B}(X)$, tj. $A^\circ = P^\circ$. Imamo $A(I-P) = 0$, pa je $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Im}(I-P) \subseteq \operatorname{Ker} A$. Pretpostavimo sa druge strane da je $Ax_0 = 0$ za neko $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Iz posledice Han-Banahove teoreme sledi da postoji ograničen linearan funkcional $f : X \to \mathbb{C}$ takav da je $f(x_0) = 1$. Neka je $S : X \to X$ preslikavanje definisano sa $Sx = f(x)x_0$, $x \in X$. Tada $S \in \mathcal{B}(X)$ i $\|S\| = \|f\|\|x_0\|$. Za proizvoljno $x \in X$ imamo da je $ASx = A(f(x)x_0) = f(x)Ax_0 = 0$ pa $S \in A^\circ$. Sledi $S \in P^\circ$, i zbog toga je

$$0 = PSx_0 = P(f(x_0)x_0) = Px_0,$$

pa $x_0 \in \operatorname{Ker} P$. Dakle, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} P$.

Pretpostavimo sada da je $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} A$. Primetimo da je $A^\circ = P^\circ$ ako i samo ako za svako $C \in \mathcal{B}(X)$ važi sledeća ekvivalencija:

$$\text{za svako } x \in X\ (ACx = 0) \iff \text{za svako } x \in X\ (PCx = 0).$$

Kako za svako $z \in X$ važi da je $Az = 0$ ako i samo ako je $Pz = 0$, sledi da je $A^\circ = P^\circ$.

(2): Pretpostavimo da je ${}^\circ A = \mathcal{B}(X)(I - P)$, tj. ${}^\circ A = {}^\circ P$ i dokažimo da je $\operatorname{Im} P = \overline{\operatorname{Im} A}$. Imamo da je $(I - P)A = 0$ pa je

$$\overline{\operatorname{Im} A} \subseteq \operatorname{Ker}(I - P) = \operatorname{Im} P,$$

jer je $\operatorname{Im} P$ zatvoren. Sledi da, u odnosu na dekompoziciju (topološku direktnu sumu) $X = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P$, preslikavanja $A, P : \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P \to \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P$ imaju sledeće matrične reprezentacije:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gde su $A_1 : \operatorname{Im} P \to \operatorname{Im} P$ i $A_2 : \operatorname{Ker} P \to \operatorname{Im} P$ ograničeni linearni operatori. Pretpostavimo, suprotno našoj tvrdnji, da postoji

$$x_0 \in \operatorname{Im} P \backslash \overline{\operatorname{Im} A}.$$

Naravno, $x_0 \neq 0$. Iz posledice Han-Banahove teoreme sledi da postoji ograničen linearan funkcional $f : \operatorname{Im} P \to \mathbb{C}$ takav da je $f(x_0) = 1$ i $f(x) = 0$ za svako $x \in \operatorname{Im} A$. Neka je $S_1 : \operatorname{Im} P \to \operatorname{Im} P$ preslikavanje definisano sa $S_1(x) = f(x)x_0$. Lako se pokazuje da je S_1 ograničen linearan operator takav da je $S_1 x = 0$ za svako $x \in \operatorname{Im} A$ i $S_1 x_0 = x_0 \neq 0$. Stoga, kako je $\operatorname{Im} A_1 \subseteq \operatorname{Im} A$ i $\operatorname{Im} A_2 \subseteq \operatorname{Im} A$, dobijamo da je $S_1 A_1 = 0$ i $S_1 A_2 = 0$. Konačno, neka je

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Naravno, S je ograničen i linearan i važi $Sx_0 = S_1 x_0 = x_0 \neq 0$. Imamo da je

$$SA = \begin{bmatrix} S_1 A_1 & S_1 A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

i

$$SP = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = S \neq 0.$$

Ovo je u kontradikciji sa našom pretpostavkom. Dokazali smo da je $\operatorname{Im} P = \overline{\operatorname{Im} A}$.

Pretpostavimo sada da je $\operatorname{Im} P = \overline{\operatorname{Im} A}$. Prema tome, $\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Ker}(I - P)$, pa je $(I - P)A = 0$, tj. $A = PA$. Odavde je ${}^\circ P \subseteq {}^\circ A$. Sa druge strane, pretpostavimo da je $CA = 0$ za neko $C \in \mathcal{B}(X)$, i neka je $x \in X$ proizvoljan. Kako je $Px \in \operatorname{Im} P = \overline{\operatorname{Im} A}$, postoji niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ takav da Ax_n konvergira u normi ka Px. Kako je C neprekidno preslikavanje sledi da $CAx_n \to CPx$. Ali $CAx_n = 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$, pa zaključujemo da je $CPx = 0$. Ovo važi za svako $x \in X$, pa je $CP = 0$. Dokazali smo da je ${}^\circ A = {}^\circ P$. $\square$

Podsetimo se da je svaki zatvoren potprostor M Hilbertovog prostora X komplementaran u X; naime $X = M \oplus M^{\perp}$. Drugim rečima, postoji samo-adjungovan ograničen idempotent $P \in \mathcal{B}(X)$ takav da je $\operatorname{Im} P = M$. Kao što znamo ako je X Banahov prostor onda njegovi zatvoreni potprostori nisu komplementarni u opštem slučaju. Dalje, $\operatorname{Ker} A$ je zatvoren za svaki ograničen operator. Iz ovog zapažanja, kao direktnu posledicu Teoreme 5.2.1, dobijamo sledeći važan opšte poznat rezultat.

Teorema 5.2.2. *(Videti [15].) Ako je X Hilbertov prostor onda je $\mathcal{B}(X)$ Rikartov $*$-prsten. Ako je X Banahov prostor onda $\mathcal{B}(X)$ u opštem slučaju nije Rikartov prsten.*

5.3 Minus parcijalno uređenje na Rikartovim prstenima

Definicija minus parcijalnog uređenja korišćenjem anulatora

U ovoj sekciji sa R označavamo proizvoljan prsten sa jedinicom sem ako drugačije ne naglasimo. Teorema 5.2.1 sugeriše sledeću definiciju.

Definicija 5.3.1. Neka je H Hilbertov prostor i neka su $A, B \in \mathcal{B}(H)$. Kažemo da je $A \prec^{-} B$ ako postoje idempotenti $P, Q \in \mathcal{B}(H)$ takvi da važe sledeći uslovi:

(1) ${}^{\circ}A = {}^{\circ}P$;

(2) $A^{\circ} = Q^{\circ}$;

(3) $PA = PB$;

(4) $AQ = BQ$.

Teorema 5.3.2. *Neka su $A, B \in \mathcal{B}(H)$ gde je H Hilbertov prostor. Tada je $A <^{-} B$ ako i samo ako je $A \prec^{-} B$, tj. Definicije 5.0.31 i 5.3.1 definišu istu binarnu relaciju.*

Dokaz. Dokaz je direktna posledica Teoreme 5.2.1. □

Proširenje na slučaj proizvoljnog prstena je prirodno. Primetimo da na osnovu Lema 5.1.9 i 5.1.10, iz ${}^{\circ}a = {}^{\circ}p$ i $a^{\circ} = q^{\circ}$ sledi $a = pa = qa$. Zbog toga uvodimo sledeću definiciju.

Definicija 5.3.3. Neka je R prsten i neka su $a, b \in R$. Kažemo da je a manje od b u odnosu na *minus parcijano uređenje*, i to označavamo sa $a \prec^{-} b$, ako postoje idempotenti $p, q \in R$ takvi da važe sledeći uslovi:

(1) ${}^{\circ}a = {}^{\circ}p$;

(2) $a^{\circ} = q^{\circ}$;

(3) $a = pb$;

(4) $a = bq$.

Iz sledeće teoreme sledi da je naša definicija pravilno proširenje poznatog uređenja na skupu idempotenata, videti Definiciju 1.2.7.

Teorema 5.3.4. *Neka su $a, b \in E(R)$. Tada je $a \prec^- b$ ako i samo ako je $ab = ba = a$.*

Dokaz. Pretpostavimo da su $a, b \in E(R)$ i da je $a = ab = ba$. Ako stavimo $p = a$ i $q = a$ dobijamo $a \prec^- b$. Pretpostavimo sada da je $a \prec^- b$. Postoje $p, q \in E(R)$ kao u Definiciji 5.3.3 pa je $ab = (pb)b = pb = a$ i $ba = b(bq) = bq = a$. □

Sledeća teorema pokazuje da se, u slučaju kada je R von Nojman regularan prsten, relacija $\prec^-$ poklapa sa poznatom relacijom minus uređenja $<^-$ koju smo ispitivali u Poglavlju 3.1.

Teorema 5.3.5. *Neka je R von Nojman regularan prsten i neka su $a, b \in R$. Tada je $a \prec^- b$ ako i samo ako je $a <^- b$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $a \prec^- b$ i neka su $p, q \in E(R)$ kao u Definiciji 5.3.3. Kako je R von Nojman regularan, postoji $x \in R$ tako da je $axa = a$. Neka je $y = qxp$. Imamo da je $aya = a(qxp)a = axa = a$, $ay = aqxp = bqxp = by$, $ya = qxpa = qxpb = yb$, pa je $a <^- b$.

Pretpostavimo sada da je $a <^- b$. Postoji $x \in R$ tako da je $axa = a$, $ax = bx$, $xa = xb$. Stavimo $p = ax$ i $q = xa$. Tada $p \in E(R)$ i $1 - p \in {}^\circ a$, tj. na osnovu Leme 5.1.3, ${}^\circ p = R(1 - p) \subseteq {}^\circ a$. Sa druge strane, ako $u \in {}^\circ a$ onda je $up = u(ax) = 0$. Dakle, ${}^\circ a = {}^\circ p$. Osim toga, $a = axa = axb = pb$. Slično, $q \in E(R)$, $a^\circ = q^\circ$ i $a = bq$. Sledi $a \prec^- b$. □

Teorema 5.3.6. *Neka su $a, b \in R$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *$a \prec^- b$;*

(ii) *Postoje $p, q \in E(R)$ takvi da važe sledeća tri uslova*

(1)

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q} \quad i \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b - a \end{bmatrix}_{p \times q}; \tag{5.1}$$

(2) Ako $z \in Rp$ i $za = 0$ onda je $z = 0$;

(3) Ako $z \in qR$ i $az = 0$ onda je $z = 0$.

Dokaz. Primetimo da se, na osnovu Lema 5.1.9 i 5.1.10, uslovi (2) i (3) mogu zameniti uslovima ${}^\circ a = {}^\circ p$ i $a^\circ = q^\circ$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Pretpostavimo da je $a \prec^- b$. Tada postoje $p, q \in E(R)$ tako da je ${}^\circ a = {}^\circ p$, $a^\circ = q^\circ$ i $a = pa = pb = aq = bq$. Imamo da je $paq = a$, $pbq = aq = a$, $(1 - p)b(1 - q) = (b - a)(1 - q) = b - a$. Svaki element iz R ima jedinstvenu matričnu formu u odnosu na idempotente p i q. Zbog toga, iz prethodnih jednačina slede reprezentacije 5.1.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Pretpostavimo sada da važi uslov (ii). Kako je $p = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p}$ to je $pa = pb$. Slično je $aq = bq$, pa je $a \prec^- b$. □

Minus parcijalno uređenje na Rikartovim prstenima

Ukoliko nije drugačije naglašeno, u ovoj sekciji sa R označavamo proizvoljan prsten, dok sa $\mathcal{A}$ označavamo proizvoljan Rikartov prsten. Počinjemo sa jednim elementarnim tvrđenjem.

Teorema 5.3.7. *Neka je $\mathcal{A}$ Rikartov $*$-prsten i neka su $a, b \in \mathcal{A}$. Tada je $a <^- b$ ako i samo ako je $a^* <^- b^*$.*

Dokaz. Ako je $a <^- b$ onda postoje idempotenti p i q takvi da je ${}^\circ a = {}^\circ p$, $a^\circ = q^\circ$ i $a = pb = bq$. Iz osobine (vi) Leme 5.1.2 sledi ${}^\circ(a^*) = {}^\circ(q^*)$ i $(a^*)^\circ = (p^*)^\circ$, $p^*, q^* \in E(\mathcal{A})$. Takođe važi $a^* = b^*p^* = q^*b^*$ pa je $a^* <^- b^*$. Naravno, zbog prethodnog važi i obrnut smer. $\square$

Zbog Leme 5.1.3, iz operativnih razloga, češće ćemo koristiti sledeću definiciju Rikartovog prstena. Prsten R je Rikartov ako postoje idempotenti $p, q \in R$ takvi da je ${}^\circ a = {}^\circ p$ i $a^\circ = q^\circ$. Idempotenti p i q ne moraju biti jedinstveni. Zbog toga uvodimo sledeće skupove

$$\begin{aligned}\mathrm{LP}(a) &:= \{p \in E(R) : {}^\circ a = R(1-p)\} = \{p \in E(R) : {}^\circ a = {}^\circ p\},\\ \mathrm{RP}(a) &:= \{q \in E(R) : a^\circ = (1-q)R\} = \{q \in E(R) : a^\circ = q^\circ\}.\end{aligned}$$

Lema 5.3.8. *Neka je $a \in R$. Pretpostavimo da postoje $p \in LP(a)$ i $q \in RP(a)$. Tada je*

(1) $LP(a) = \left\{ \begin{bmatrix} p & p_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p} : p_1 \in pR(1-p) \right\} = \{p + px(1-p) : x \in R\}$;

(2) $RP(a) = \left\{ \begin{bmatrix} q & 0 \\ q_1 & 0 \end{bmatrix}_{q\times q} : q_1 \in (1-q)Rq \right\} = \{q + (1-q)xq : x \in R\}$.

Dokaz. Kako je $a = paq$ (na osnovu Lema 5.1.9 i 5.1.10), to je $a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p}$. Neka je $e = \begin{bmatrix} p & p_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p}$. Lako se pokazuje da je $e^2 = e$ i da je $ea = a$ odakle sledi da je ${}^\circ e \subseteq {}^\circ a$. Sa druge strane, pretpostavimo da $z \in {}^\circ a$, tj. $z \in {}^\circ p$. Iz $zp = 0$ sledi $z = pz(1-p) + (1-p)z(1-p)$, pa je $z = \begin{bmatrix} 0 & z_1 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}_{p\times p}$, gde je $z_1 = pz(1-p)$ i $z_2 = (1-p)z(1-p)$. Sada dobijamo da je $ze = 0$, pa je ${}^\circ a \subseteq {}^\circ e$. Sledi, $e \in \mathrm{LP}(a)$.

Obrnuto, pretpostavimo da $e = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{bmatrix}_{p\times p} \in \mathrm{LP}(a)$, tj. $e^2 = e$ i ${}^\circ e = {}^\circ a$ $(= {}^\circ p)$. Sledi $e = pe$ i $p = ep$. Odavde dobijamo

$$\begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{bmatrix}_{p\times p} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ e_3 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p},$$

pa je $e_1 = p$, $e_3 = 0$ i $e_4 = 0$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Posledica 5.3.9. *Neka su $a, b \in R$. Pretpostavimo da je $a <^- b$ i neka su $p, q \in E(R)$ odgovarajući idempotenti ($^\circ a = {}^\circ p$, $a^\circ = q^\circ$, $a = pb = bq$). Tada je*

$$\{p' \in LP(a) : a = p'b\} = \left\{ \begin{bmatrix} p & p_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p} : p_1 \in pR(1-p),\ p_1(b-a) = 0 \right\} \tag{5.2}$$

$$\{q' \in RP(a) : a = bq'\} = \left\{ \begin{bmatrix} q & 0 \\ q_1 & 0 \end{bmatrix}_{q \times q} : q_1 \in (1-q)Rq,\ (b-a)q_1 = 0 \right\}.$$

Dokaz. Dokazaćemo samo jednakost (5.2) jer je dokaz druge analogan. Kako je $a <^- b$, Teorema 5.3.6 daje

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q}, \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b-a \end{bmatrix}_{p \times q}.$$

Ako p' pripada skupu na desnoj strani onda je, na osnovu Leme 5.3.8, $p' \in \mathrm{LP}(a)$. Takođe,

$$p'b = \begin{bmatrix} p & p_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b-a \end{bmatrix}_{p \times q} = \begin{bmatrix} a & p_1(b-a) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q} = a.$$

Da bi dokazali obrnutu inkluziju, pretpostavimo da je $p' \in \mathrm{LP}(a)$ i $a = p'b$. Iz Leme 5.3.8 sledi $p = \begin{bmatrix} p & p_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p}$. Sada, iz $a = p'b$ sledi

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q} = a = p'b = \begin{bmatrix} a & p_1(b-a) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q},$$

pa je $p_1(b-a) = 0$. □

Napomena 5.3.10. Primetimo da rezultati iz Leme 5.3.8 i Posledice 5.3.9 važe na proizvoljnom prstenu R. Međutim, da bi dokazali da je $<^-$ parcijalno uređenje, potrebno je pretpostaviti da je R Rikartov prsten.

Teorema 5.3.11. *Neka je $\mathcal{A}$ Rikartov prsten. Tada je $<^-$ relacija parcijalnog uređenja na $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Kako je $\mathcal{A}$ Rikartov prsten, za svako $a \in \mathcal{A}$ postoje idempotenti $p \in \mathrm{LP}(a)$ i $q \in \mathrm{RP}(a)$. Kako je $a = pa = aq$, refleksivnost sledi. Da bi dokazali antisimetričnost, pretpostavimo da je $a <^- b$ i $b <^- a$. Sledi da postoje $q, r \in E(\mathcal{A})$ tako da je $a = aq = bq$ i $b = rb = ra$. Dobijamo da je $a = bq = raq = ra = b$. Ostaje još da dokažemo tranzitivnost. Pretpostavimo da je $a <^- b$ i $b <^- c$. Dakle, postoje $p, q, r, s \in E(\mathcal{A})$ takvi da je

$$a = paq = pb = bq,\ {}^\circ a = {}^\circ p,\ a^\circ = q^\circ \quad \text{i} \quad b = rbs = rc = cs,\ {}^\circ b = {}^\circ r,\ b^\circ = s^\circ.$$

Neka je $p' = p + pr(1-p)$. Na osnovu Leme 5.3.8 sledi da $p' \in \mathrm{LP}(a)$. Primetimo da je $rp = p$. Zaista, iz $ra = rbq = bq = a$ sledi $1 - r \in {}^\circ a = {}^\circ p$, pa je $(1-r)p = 0$, tj. $rp = p$. Zbog toga je $p' = pr$ i

$$p'c = prc = pb = a.$$

Slično se pokazuje da za $q' = sq$ važi $q' \in \mathrm{RP}(a)$ i $cq' = a$. Zaključujemo da je $a <^- c$. □

Napomena 5.3.12. Zadržimo oznake iz dokaza Teoreme 5.3.11. Primetimo da takođe važi $p'b = prb = pb = a$ i slično $bq' = a$. Sledi da ako je $a <^- b$ i $b <^- c$ onda postoje $p' \in \mathrm{LP}(a)$ i $q' \in RP(a)$ koji svedoče i o uslovu $a <^- b$ i o uslovu $a <^- c$.

Setimo se da smo za parcijalna uređenja definisana uopštenim inverzima, uslov $a < b$, $a \in \{<^-, <^*, <^\#, <^{\oplus}, <_{\oplus}\}$ okarakterisali odgovarajućim 3×3 matričnim reprezentacijama elemenata a i b. Da li je to moguće uraditi i za uređenje $<^-$? Potvrdan odgovor na ovo pitanje daje sledeća teorema.

Teorema 5.3.13. *Neka su $a, b \in \mathcal{A}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a <^- b$;

(ii) *Postoje dekompozicije jedinice prstena $\mathcal{A}$*

$$1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad 1 = f_1 + f_2 + f_3,$$

takve da

$$e_1 \in \mathrm{LP}(a),\ e_2 \in \mathrm{LP}(b-a),\ f_1 \in \mathrm{RP}(a),\ f_2 \in \mathrm{RP}(b-a) \tag{5.3}$$

i u odnosu na njih a i b imaju sledeće matrčne forme

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times f} \quad i \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times f}, \tag{5.4}$$

pri čemu $a \in e_1\mathcal{A}f_1$ nije (e_1, f_1)-delilac nule, a $b - a \in e_2\mathcal{A}f_2$ nije (e_2, f_2)-delilac nule.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Pretpostavimo da je $a <^- b$. Zbog toga postoje $p \in \mathrm{LP}(a)$ i $q \in \mathrm{RP}(a)$ i važi $a = paq = pb = bq$. Kako je $\mathcal{A}$ Rikartov prsten, postoje idempotenti $r \in \mathrm{LP}(b-a)$ i $s \in \mathrm{RP}(b-a)$. Iz $p(b-a) = 0$ sledi $p \in {}^\circ(b-a) = {}^\circ r$, pa je $pr = 0$. Neka je

$$r := r - rp(1-r) = r - rp = r(1-p).$$

Zbog toga što u svakom prstenu važi $x(-y) = -xy$, iz Leme 5.3.8 sledi da $r' \in \mathrm{LP}(b-a)$. Osim toga,

$$pr' = pr(1-p) = 0 \text{ i } r'p = r(1-p)p = 0. \tag{5.5}$$

Neka je $e_1 = p$, $e_2 = r'$ i $e_3 = 1 - p - r'$. Iz 5.5 sledi da je $1 = e_1 + e_2 + e_3$ dekompozicija jedincie prstena $\mathcal{A}$. Slično, neka je $f_1 = q$, $f_2 = (1-q)s$ i $f_3 = 1 - f_1 - f_2$. Kao i malopre, možemo dokazati da je $1 = f_1 + f_2 + f_3$ dekompozicija jedinice pri čemu je $f_1 \in \mathrm{RP}(a)$ i $f_2 \in \mathrm{RP}(b-a)$. Matrične reprezentacije 5.3 slede iz njihove jedinstvenosti i sledećih jednakosti

$$e_1 a f_1 = paq = a, \quad e_2(b-a)f_2 = b - a, \quad b = a + (b-a).$$

Da elementi $a \in e_1\mathcal{A}f_1$ i $b - a \in e_2\mathcal{A}f_2$ nisu (p, q)-delioci nule, sledi iz Leme 5.1.13 i prethodnog dela dokaza.

(ii) $\Rightarrow$ (i) sledi iz Teoreme 5.3.6. $\square$

U vezi uslova 5.3 videti takođe Leme 5.1.9 i 5.1.10.

Posledica 5.3.14. *Neka su $a, b \in \mathcal{A}$. Tada je $a <^- b$ ako i samo ako je $b - a <^- b$.*

Teorema 5.3.15. *Neka su $a, b \in \mathcal{A}$. Tada je $a <^- b$ ako i samo ako postoje idempotenti $e_1 \in LP(a)$, $e_2 \in LP(b-a)$, $f_1 \in RP(a)$, $f_2 \in RP(b-a)$ takvi da je $e_1e_2 = 0$ i $f_2f_1 = 0$.*

Dokaz. Deo "samo ako" sledi iz Teoreme 5.3.13. Obrnuto, pretpostavimo da postoje $e_1 \in \mathrm{LP}(a)$, $e_2 \in \mathrm{LP}(b-a)$ i da je $e_1e_2 = 0$. Tada je $e_1a = a$ i

$$e_1b = e_1a + e_1(b-a) = a + e_1e_2(b-a) = a.$$

Slično, iz $f_2f_1 = 0$ gde je $f_1 \in \mathrm{RP}(a)$, $f_2 \in \mathrm{RP}(b-a)$, sledi $a = bf_1$. Po definiciji je $a <^- b$. □

Pod notacijom kao u Teoremi 5.3.13 lako je proveriti da

$$e_1 + e_2 \in \mathrm{LP}(b) \quad \text{i} \quad f_1 + f_2 \in \mathrm{RP}(b). \tag{5.6}$$

U Teoremi 3.1.17 smo videli da, u slučaju regularnih elemenata $a, b \in R$, uslov $a <^- b$ važi ako i samo ako postoje $p, q \in E(R)$ tako da je $a = pb = bq$. Logično je postaviti pitanje da li ista karakterizacija važi i u slučaju uređenja $<^-$ na Rikartovom prstenu $\mathcal{A}$. Potvrdan odgovor na ovo pitanje je nedavno dat u radu [68]. S obzirom da se ovaj rezultat može dokazati korišćenjem ideje iz dokaza Teorema 5.3.11 i 5.3.13, kao i zbog kompletnosti, dajemo dokaz.

Teorema 5.3.16. *(Videti [68].) Neka su $a, b \in \mathcal{A}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *$a <^- b$;*

(ii) *Postoje $p, q \in E(\mathcal{A})$ takvi da je $a = pb = bq$.*

Dokaz. Iz definicije relacije $<^-$ sledi da (i) implicira (ii). Pretpostavimo sada da je $a = pb = bq$ za neke $p, q \in E(\mathcal{A})$. Kako je $\mathcal{A}$ Rikartov prsten, postoje idempotenti $e \in \mathrm{LP}(a)$ i $f \in \mathrm{RP}(a)$. Uzmimo $e' = e + ep(1-e)$. Iz Leme 5.3.8 sledi da $e' \in \mathrm{LP}(a)$. Kako je $a = pb$ to je $a = pa$, pa $1 - p \in {}^\circ a = {}^\circ e$. Dobijamo da je $e = pe$, a odavde sledi da je $e' = ep$. Sada je

$$e'b = epb = ea = a.$$

Slično, za $f' = qf$ važi $f' \in \mathrm{RP}(a)$ i $a = bf'$. Dakle, $a <^- b$. □

U slučaju minus parcijalnog uređenja $<^-$ na skupu $\mathcal{B}^{(1)}(X, Y)$, gde su X i Y Banahovi prostori, videli smo koje dekompozicije prostora X i Y indukuje uslov $A <^- B$, i koje matrične reprezentacije imaju operatori A i B u odnosu na ove dekompozicije, videti Teoremu 3.2.15 na strani 43.

Neka su sada A i B ograničeni operatori iz $\mathcal{B}(H, K)$, gde su H i K Hilbertovi prostori. Pretpostavimo da je $A <^- B$ i pogledajmo na šta se svodi Teorema 5.3.13. U tome će nam pomoći Teorema 5.2.1, i, naravno, rezultati iz Glave 2. Uslovi $E_1 \in \mathrm{LP}(A)$ i $E_2 \in \mathrm{LP}(B - A)$ su, po Teoremi 5.2.1, ekvivalentni sa $\mathrm{Im}\, E_1 = \overline{\mathrm{Im}\, A}$ odnosno sa $\mathrm{Im}\, E_2 =$

$\overline{\mathrm{Im}\,(B-A)}$. Sada, kako je $I = E_1 + E_2 + E_3$ dekompozicija jedinice I_K prstena $\mathcal{B}(K)$, to je

$$K = \overline{\mathrm{Im}\,A} \oplus \overline{\mathrm{Im}\,(B-A)} \oplus \mathrm{Im}\,E_3.$$

Takođe, iz (5.6) sledi

$$\overline{\mathrm{Im}\,B} = \overline{\mathrm{Im}\,A} \oplus \overline{\mathrm{Im}\,(B-A)}. \tag{5.7}$$

Primetimo da iz Teoreme 5.3.7, na osnovu 5.7, sledi

$$\overline{\mathrm{Im}\,B^*} = \overline{\mathrm{Im}\,A^*} \oplus \overline{\mathrm{Im}\,(B^*-A^*)}. \tag{5.8}$$

Uslovi $F_1 \in \mathrm{RP}(A)$ i $F_2 \in \mathrm{RP}(B-A)$ su ekvivalentni sa $\mathrm{Ker}\,A = \mathrm{Ker}\,F_1 = \mathrm{Im}\,F_2 \oplus \mathrm{Im}\,F_3$ odnosno $\mathrm{Ker}\,(B-A) = \mathrm{Ker}\,F_2 = \mathrm{Im}\,F_1 \oplus \mathrm{Im}\,F_3$. Iz (5.6) sledi $\mathrm{Ker}\,(F_1+F_2) = \mathrm{Ker}\,B$, tj. $\mathrm{Im}\,F_3 = \mathrm{Ker}\,B$.

Primetimo, takođe, da iz uslova (5.7) i (5.8) sledi $A <^- B$, videti Teoremu 2 u [105]. Zaista, neka je $P \in \mathcal{B}(K)$ idempotent takav da je $\mathrm{Im}\,P = \overline{\mathrm{Im}\,A}$ i $\mathrm{Im}\,(B-A) \subseteq \mathrm{Ker}\,P$. Tada je $P(B-A) = 0$, tj. $A = PA = PB$. Slično možemo naći idempotent $R \in \mathcal{B}(H)$ takav da je $\mathrm{Im}\,R = \overline{\mathrm{Im}\,A^*}$ i $A^* = RA^* = RB^*$. Uzmimo sada da je $Q = R^*$. Imamo $\mathrm{Ker}\,Q = \mathrm{Ker}\,A$ i $A = AQ = BQ$, odakle sledi $A <^- B$.

Teorema 5.3.17. *Neka su H i K Hilbertovi prostori i neka su $A, B \in \mathcal{B}(H,K)$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $A <^- B$;

(ii) *Postoje dekompozicije (topološke direktne sume)*

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus \mathrm{Ker}\,B \quad i \quad K = \overline{\mathrm{Im}\,A} \oplus \overline{\mathrm{Im}\,(B-A)} \oplus K_1,$$

u odnosu na koje operatori

$$A, B : H_1 \oplus H_2 \oplus \mathrm{Ker}\,B \to \overline{\mathrm{Im}\,A} \oplus \overline{\mathrm{Im}\,(B-A)} \oplus K_1$$

imaju sledeće matrične forme

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad i \quad B = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gde su $A_1 : H_1 \to \overline{\mathrm{Im}\,A}$ i $B_1 : H_2 \to \overline{\mathrm{Im}\,(B-A)}$ injektivni operatori stim da je $\overline{\mathrm{Im}\,A_1} = \overline{\mathrm{Im}\,A}$ i $\overline{B_1} = \overline{\mathrm{Im}\,(B-A)}$.

(iii)

$$\overline{\mathrm{Im}\,B} = \overline{\mathrm{Im}\,A} \oplus \overline{\mathrm{Im}\,(B-A)} \quad i \quad \overline{\mathrm{Im}\,B^*} = \overline{\mathrm{Im}\,A^*} \oplus \overline{\mathrm{Im}\,(B^*-A^*)}$$

Teorema 5.3.17 je prvi put dokazana u radu [105]. Jedina razlika je u tome što su u našoj teoremi matrične reprezentacije reda 3×3 za razliku od reprezentacija reda 2×2 koje su dobijene u [105].

5.4 Zvezda parcijalno uređenje na Rikartovim $*$-prstenima

Definicija zvezda parcijalnog uređenja korišćenjem anulatora

Drejzinovo zvezda parcijalno uređenje ima smisla posmatrati na algebri $\mathcal{B}(H)$, gde je H Hilbertov prostor:

$$A <^* B \;\Leftrightarrow\; AA^* = BA^* \;\text{ i }\; A^*A = A^*B. \tag{5.9}$$

Drejzin je dokazao da je relacija $<^*$ parcijalno uređenje na svakoj polugrupi $(S, *)$ sa pravilnom involucijom $*$. Poznato je (i nije teško dokazati) da je involucija na $\mathcal{B}(H)$ pravilna, odakle sledi da je relacija definisana sa 5.9, relacija parcijalnog uređenja. Međutim, ovakva definicija ne prati Šemrlov pristup iskazan definicijom minus parcijalnog uređenja, Definicija 5.0.31. Setimo se da je u slučaju kompleksnih matrica, zvezda uređenje okarakterisano uslovom $A <^* B$ ako i samo ako je $A = PB = BQ$ za neke samo-adjungovane idempotentske matrice P i Q, Teorema 1.1.8. Analogan rezultat smo i mi dobili u slučaju prstena, kada su a i b MP invertibilni elementi (Teorema 4.2.11), pa samim tim rezultat važi i u slučaju MP invertibilnih operatora. Sada je jasno da je sledeća definicija u skladu sa prethodnim zapažanjem ali i sa Šemrlovim pristupom.

Definicija 5.4.1. (Videti [30].) Za $A, B \in B(H)$ kažemo da je $A <^* B$ ako postoje samo-adjungovani idempotenti $P, Q \in B(H)$ takvi da je

(i) $\operatorname{Im} P = \overline{\operatorname{Im} A}$,

(ii) $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} Q$,

(iii) $PA = PB$,

(iv) $AQ = BQ$.

Očekivani rezultat je dokazan u radu [30]. Naime, relacija definisana uslovom (5.9) je ekvivalentna sa relacijom iz Definicije 5.4.1.

Rezultati ovog poglavlja su publikovani u radu [69]. Prateći ideju iz Poglavlja 5.3, nema sumnje kako bi trebalo definisati relaciju $\prec^*$ na $\mathcal{B}(H)$.

Definicija 5.4.2. Neka je H Hilbertov prostor i neka su $A, B \in \mathcal{B}(H)$. Kažemo da je $A \prec^* B$ ako postoje samo-adjungovani idempotenti $P, Q \in \mathcal{B}(H)$ takvi da važe sledeći uslovi:

(1) $^\circ A = {}^\circ P$;

(2) $A^\circ = Q^\circ$;

(3) $PA = PB$;

(4) $AQ = BQ$.

Za očekivati je da su relacije $<^*$ i $\prec^*$ ekvivalentne na $\mathcal{B}(H)$. Kao direktnu posledicu Teoreme 5.2.1 dobijamo da je to zaista tačno. Na osnovu prethodnog imamo sledeći rezultat.

Teorema 5.4.3. *Neka su $A, B \in \mathcal{B}(H)$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

1. $A <^* B$;
2. $A \prec^* B$;
3. $AA^* = BA^*$ *i* $A^*A = A^*B$.

Relacija $\prec^*$ je relacija parcijalnog uređenja na $\mathcal{B}(H)$.

Sada je jasno kako treba definisati relaciju zvezda uređenja na $*$-prstenu R.

Definicija 5.4.4. Neka je R $*$-prsten i neka su $a, b \in R$. Kažemo da je a manje od b u odnosu na *zvezda parcijalno uređenje*, i to označavamo sa $a \prec^* b$, ako postoje $p, q \in \widetilde{E}(\mathcal{A})$ takvi da je

(1) $^\circ a = {}^\circ p$,

(2) $a^\circ = q^\circ$,

(3) $a = pb$,

(4) $a = bq$.

Na osnovu Leme 5.1.3, uslove (1) i (2) možemo zameniti uslovima $^\circ a = R(1-p)$ odnosno $a^\circ = (1-q)R$. Takođe, iz uslova (1) i (2) sledi

$$a = pa = aq = paq.$$

Osobine zvezda parcijalnog uređenja na Rikartovim $*$-prstenima

Prsten $\mathcal{A}$ je Rikartov $*$-prsten ako postoje samo-adjungovani idempotenti $p \in \mathrm{LP}(a)$ i $q \in \mathrm{RP}(a)$. Iz Leme 5.1.5 sledi da su ova dva idempotenta jedinstvena, pa ćemo ih označiti sa $p = \mathrm{lp}(a)$ odnosno sa $q = \mathrm{rp}(a)$. Dakle, ako je $\mathcal{A}$ Rikartov $*$-prsten onda važi

$$a \prec^* b \iff a = \mathrm{lp}(a)b = b\mathrm{rp}(a). \tag{5.10}$$

Primetimo da je $\mathrm{lp}(a)$ rangovska projekcija za svako $e \in \mathrm{LP}(a)$. Slično, $\mathrm{rp}(a)$ je rangovska projekcija za svako $f \in \mathrm{RP}(a)$.

Od sad pa do kraja ovog poglavlja, $\mathcal{A}$ označava proizvoljan Rikartov $*$-prsten.

Sledeću lemu ćemo često koristiti.

Lema 5.4.5. *Neka je $a \in \mathcal{A}$. Tada je*

(i) $(a^*)^\circ = (\mathrm{lp}(a))^\circ$;

(ii) $^\circ(a^*) = {}^\circ(\mathrm{rp}(a))$.

Dokaz. Primenom osobine (vi) Leme 5.1.2 dobijamo

$$(a^*)^\circ = (^\circ a)^* = (^\circ\mathrm{lp}(a))^* = (\mathrm{lp}(a))^\circ.$$

Slično se dokazuje i druga jednakost. $\square$

Logično je postaviti pitanje da li se na Rikartovim $*$-prstenima uređenje $\prec^*$ ipak poklapa sa originalnim Drejzinovim uređenjem. Ili čak, da li se u karakterizaciji (5.10), $\mathrm{lp}(a)$ i $\mathrm{rp}(a)$ mogu zameniti proizvoljnim samo-adjungovanim idempotentima kao u slučaju kompleksnih matrica, ili MP invertibilnih elementa. Za odgovore na ova pitanja će nam pomoći sledeće dve leme.

Lema 5.4.6. *Neka su $a, b \in \mathcal{A}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a = \mathrm{lp}(a)b$;

(ii) $a = pb$, *za neko* $p \in \widetilde{E}(\mathcal{A})$;

(iii) $a^*a = a^*b$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) je trivijalno.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Pretpostavimo da je $a = pb$ gde je $p \in \widetilde{E}(\mathcal{A})$. Tada je $a = pa$ i $a^*a = a^*pb = (pa)^*b = a^*b$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sada je $a^*(b-a) = 0$. Iz Leme 5.4.5 sledi $\mathrm{lp}(a)(b-a) = 0$ pa je $a = \mathrm{lp}(a)b$. $\square$

Dualni rezultat se slično dokazuje.

Lema 5.4.7. *Neka su $a, b \in \mathcal{A}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a = b\mathrm{rp}(a)$;

(ii) $a = bq$, *za neko* $q \in \widetilde{E}(\mathcal{A})$;

(iii) $aa^* = ba^*$.

Teorema 5.4.8. *Neka su $a, b \in \mathcal{A}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a \prec^* b$.

(ii) *Postoje* $p, q \in \widetilde{E}(\mathcal{A})$ *takvi da je* $a = pb = bq$.

(iii) $a^*a = a^*b$ *i* $aa^* = ba^*$.

(iv)
$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times q} \quad i \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b-a \end{bmatrix}_{p\times q} \tag{5.11}$$

gde je $p = \mathrm{lp}(a)$ *i* $q = \mathrm{rp}(a)$;

(v) *Postoje* $p, q \in \widetilde{E}(\mathcal{A})$ *takvi da (5.11) važi.*

Dokaz. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) sledi na osnovu Lema 5.4.6 i 5.4.7.

(i) $\Rightarrow$ (iv): Pretpostavimo da je $a \prec^* b$. Tada je $a = pb = bq$ gde je $p = \mathrm{lp}(a)$ i $q = \mathrm{rp}(a)$. Jasno je da je $a = paq$ odakle sledi da a ima traženu matričnu formu. Matrična forma za b sledi iz njene jedinstvenosti i sledećih jednakosti

$$\begin{aligned} pbq &= bqq = bq = a, \\ pb(1-q) &= bq(1-q) = 0, \\ (1-p)bq &= (1-p)pb = 0. \end{aligned}$$

(iv) $\Rightarrow$ (v) je trivijalno.

(v) $\Rightarrow$ (ii): Imamo da je

$$pb = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b-a \end{bmatrix}_{p\times q} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times q} = a.$$

Slično je $a = bq$. □

Poznato je da je involucija $*$ na svakom Rikartovom $*$-prstenu pravilna. Naime, ako je $aa^* = 0$ onda $a^* \in a^\circ = \mathrm{rp}(a)^\circ$ pa je $0 = \mathrm{rp}(a)a^* = (a\mathrm{rp}(a))^* = a^*$, tj. $a = 0$. Zbog toga sledeća teorema direktno sledi iz Teoreme 1.2.10. Naravno, teoremu je moguće dokazati i prateći korake dokaza Teoreme 5.3.11.

Teorema 5.4.9. *Neka je R Rikartov $*$-prsten. Relacija $\prec^*$ je relacija parcijalnog uređenja na R.*

Napomena 5.4.10. Karakterizacija (ii) u Teoremi 5.4.8 pokazuje da su uslovi (i) i (ii) iz Definicije 5.4.4 suvišni u slučaju kada je R Rikartov $*$-prsten. Odavde dobijamo i da su uslovi (i) i (ii) iz Definicije 5.4.1 takođe suvišni.

Napomena 5.4.11. Uslovi (iv) i (v) iz Teoreme 5.4.8 daju karakterizaciju svih elemenata b većih od a u odnosu na zvezda parcijalno uređenje.

Posledica 5.4.12. *Neka su $a, b \in \mathcal{A}$. Tada je $a \prec^* b$ ako i samo ako je $b - a \prec^* b$.*

Dokaz. Dokaz sledi iz Teoreme 5.4.8 (i) $\Leftrightarrow$ (iii). □

Slično Teoremi 5.3.13 i uslov $a \prec^* b$ možemo okarakterisati odgovarajućim 3×3 reprezentacijama elemenata a i b.

Teorema 5.4.13. *Neka su $a, b \in \mathcal{A}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a \prec^* b$.

(ii) $\mathrm{lp}(a)\mathrm{lp}(b-a) = 0$ *i* $\mathrm{rp}(a)\mathrm{rp}(b-a) = 0$.

(iii) $\mathrm{lp}(b-a) = \mathrm{lp}(b) - \mathrm{lp}(a), \quad \mathrm{lp}(a)\mathrm{lp}(b) = \mathrm{lp}(a)$
$\mathrm{rp}(b-a) = \mathrm{rp}(b) - \mathrm{rp}(a), \quad \mathrm{rp}(a)\mathrm{rp}(b) = \mathrm{rp}(a).$

(iv) *Postoje ortogonalne dekompozicije jedinice prstena* $\mathcal{A}$

$$1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad 1 = g_1 + g_2 + g_3,$$

gde je $e_1 = \mathrm{lp}(a)$*,* $e_2 = \mathrm{lp}(b-a)$*,* $g_1 = \mathrm{rp}(a)$*,* $g_2 = \mathrm{rp}(b-a)$ *u odnosu na koje elementi* a *i* b *imaju sledeće matrične forme*

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e\times g} \quad i \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e\times g}, \tag{5.12}$$

pri čemu $a \in e_1Rg_1$ *nije* (e_1, g_1)*-delilac nule, a* $b-a \in e_2Rg_2$ *nije* (e_2, g_2)*-delilac nule.*

Dokaz. (i) $\Leftrightarrow$ (ii):

$a \prec^* b \Leftrightarrow \mathrm{lp}(a)(b-a) = 0$ i $(b-a)\mathrm{rp}(a) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{lp}(a)\mathrm{lp}(b-a) = 0$ i $\mathrm{rp}(b-a)\mathrm{rp}(a) = 0$.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Pretpostavimo da je $a \prec^* b$. Tada je $a = \mathrm{lp}(a)b = b\mathrm{rp}(a)$. Kako je $1 - \mathrm{lp}(b) \in {}^\circ\mathrm{lp}(b) = {}^\circ b$ to je

$$(1 - \mathrm{lp}(b))a = (1 - \mathrm{lp}(b))b\mathrm{rp}(a) = 0.$$

Sledi $1 - \mathrm{lp}(b) \in {}^\circ a = {}^\circ\mathrm{lp}(a)$, odakle zaključujemo da je $\mathrm{lp}(a) = \mathrm{lp}(b)\mathrm{lp}(a)$, ali i $\mathrm{lp}(a) = \mathrm{lp}(a)\mathrm{lp}(b)$ jer su $\mathrm{lp}(a)$ i $\mathrm{lp}(b)$ samo-adjungovani. Dakle, $\mathrm{lp}(b) - \mathrm{lp}(a)$ je samo-adjungovani idempotent. Da bi dokazali da je $\mathrm{lp}(b-a) = \mathrm{lp}(b) - \mathrm{lp}(a)$ dovoljno je još dokazati da je ${}^\circ(b-a) = {}^\circ(\mathrm{lp}(b) - \mathrm{lp}(a))$. Koristeći da je $b = \mathrm{lp}(b)b$ i $a = \mathrm{lp}(a)b$ dobijamo

$$\begin{aligned} x(b-a) = 0 &\iff x(\mathrm{lp}(b)b - \mathrm{lp}(a)b) = 0 \iff x(\mathrm{lp}(b) - \mathrm{lp}(a))b = 0 \\ &\iff x(\mathrm{lp}(b) - \mathrm{lp}(a)) \in {}^\circ b = {}^\circ\mathrm{lp}(b) \iff x(\mathrm{lp}(b) - \mathrm{lp}(a))\mathrm{lp}(b) = 0 \\ &\iff x(\mathrm{lp}(b)\mathrm{lp}(b) - \mathrm{lp}(a)\mathrm{lp}(b)) = 0 \iff x(\mathrm{lp}(b) - \mathrm{lp}(a)) = 0. \end{aligned}$$

Analogno dokazujemo i dualni rezultat za $\mathrm{rp}(b)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Neka je $e_1 = \mathrm{lp}(a)$, $e_2 = \mathrm{lp}(b-a) = \mathrm{lp}(b) - \mathrm{lp}(a)$ i $e_3 = 1 - \mathrm{lp}(b)$. Iz $\mathrm{lp}(a)\mathrm{lp}(b) = \mathrm{lp}(a)$ dobijamo da je $1 = e_1 + e_2 + e_3$ ortogonalna dekompozicija jedinice. Slično, za $f_1 = \mathrm{rp}(a)$, $f_2 = \mathrm{rp}(b-a) = \mathrm{rp}(b) - \mathrm{rp}(a)$, $f_3 = 1 - \mathrm{rp}(b)$ važi da je $1 = f_1 + f_2 + f_3$ ortogonalna dekompoozicija jedinice. Iz $\mathrm{lp}(a)\mathrm{lp}(b) = \mathrm{lp}(a)$ sledi $\mathrm{lp}(b)\mathrm{lp}(a) = \mathrm{lp}(a)$ pa je $(1 - \mathrm{lp}(b)) \in {}^\circ\mathrm{lp}(a) = {}^\circ a$. Dakle, $a = \mathrm{lp}(b)a$. Imajući ovo u vidu, reprezentacije (5.12) slede iz $b = a + (b-a)$ i sledećih jednakosti

$$\begin{aligned} &e_1af_1 = \mathrm{lp}(a)a\mathrm{rp}(a) = a; \\ &e_2bf_2 = e_2af_2 + e_2(b-a)f_2 = (\mathrm{lp}(b) - \mathrm{lp}(a))af_2 + \mathrm{lp}(b-a)(b-a)\mathrm{rp}(b-a) = b-a. \end{aligned}$$

Da elementi $a \in e_1\mathcal{A}g_1$ i $b - a \in e_2\mathcal{A}g_2$ nisu (p,q)-delioci nule, sledi iz Leme 5.1.13 i prethodnog dela dokaza.

(iv) $\Rightarrow$ (i) sledi na osnovu Teoreme 5.4.8 (iv) $\Rightarrow$ (i). $\square$

Napomena 5.4.14. Pretpostavimo sada da je $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$ gde je H Hilbertov prostor i posmatrajmo matrične reprezentacije u Teoremi 5.4.13. Neka je $E_1 = \mathrm{lp}(A)$, $E_2 = \mathrm{lp}(B-A) = \mathrm{lp}(B) - \mathrm{lp}(A)$ i $E_3 = I - \mathrm{lp}(B)$. Kako je ${}^\circ E_1 = {}^\circ A$, ${}^\circ E_2 = {}^\circ(B-A)$ i ${}^\circ\mathrm{lp}(B) = {}^\circ B$, iz Teoreme 5.2.1, dobijamo da je $\mathrm{Im}\, E_1 = \overline{\mathrm{Im}\, A}$, $\mathrm{Im}\, E_2 = \overline{\mathrm{Im}\,(B-A)}$ i

$$\mathrm{Im}\, E_3 = \mathrm{Ker}\,\mathrm{lp}(B) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{lp}(B))^* = (\mathrm{Im}\,\mathrm{lp}(B))^\perp = \overline{\mathrm{Im}\, B}^\perp = \mathrm{Ker}\, B^*.$$

Kako je $1 = E_1 + E_2 + E_3$ ortogonalna dekompozicija jedinice I prstena $\mathcal{B}(H)$, zaključujemo da je $H = \mathrm{Im}\, E_1 \oplus \mathrm{Im}\, E_2 \oplus \mathrm{Im}\, E_3$, videti Poglavlje 2.3. Dakle,

$$H = \overline{\mathrm{Im}\, A} \oplus \overline{\mathrm{Im}\,(B-A)} \oplus \mathrm{Ker}\, B^*.$$

Neka je dalje $F_1 = \mathrm{rp}(A) = \mathrm{lp}(A^*)$, $F_2 = \mathrm{rp}(B-A) = \mathrm{lp}(B^* - A^*)$ i $F_3 = I - \mathrm{rp}(B) = I - \mathrm{lp}(B^*)$. Slično kao malopre, dobijamo da je

$$H = \overline{\mathrm{Im}\, A^*} \oplus \overline{\mathrm{Im}\,(B^* - A^*)} \oplus \mathrm{Ker}\, B.$$

Takođe, na osnovu Teoreme 5.2.1, imamo da je

$$\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, F_1 = \mathrm{Im}\, F_2 \oplus \mathrm{Im}\, F_3 = \mathrm{Im}\,(B^* - A^*) \oplus \mathrm{Ker}\, B$$

i

$$\mathrm{Ker}\,(B-A) = \mathrm{Ker}\, F_2 = \mathrm{Im}\, A^* \oplus \mathrm{Ker}\, B.$$

Zbog toga se reprezentacije u Teoremi 5.4.13 svode na sledeći rezultat.

Teorema 5.4.15. *Neka su $A, B \in \mathcal{B}(H)$, gde je H Hilbertov prostor. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) $A <^* B$;

(2) $H = \overline{\mathrm{Im}\, A^*} \oplus \overline{\mathrm{Im}\,(B^* - A^*)} \oplus \mathrm{Ker}\, B$,
$H = \overline{\mathrm{Im}\, A} \oplus \overline{\mathrm{Im}\,(B-A)} \oplus \mathrm{Ker}\, B^*$ *i*

$$A, B : \overline{\mathrm{Im}\, A^*} \oplus \overline{\mathrm{Im}\,(B^* - A^*)} \oplus \mathrm{Ker}\, B \to \overline{\mathrm{Im}\, A} \oplus \overline{\mathrm{Im}\,(B-A)} \oplus \mathrm{Ker}\, B^*$$

imaju sledeće matrične reprezentacije

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad i \quad B = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gde su $A_1 : \overline{\mathrm{Im}\, A^*} \to \overline{\mathrm{Im}\, A}$ i $B_1 : \overline{\mathrm{Im}\,(B^* - A^*)} \to \overline{\mathrm{Im}\,(B-A)}$ injektivni ograničeni operatori i uz to važi da je $\overline{\mathrm{Im}\, A_1} = \overline{\mathrm{Im}\, A}$ i $\overline{\mathrm{Im}\, B_1} = \overline{\mathrm{Im}\,(B-A)}$.

U sledećoj lemi ćemo naći matrične reprezentacije za a i b u odnosu na $\mathrm{lp}(a)$ i $\mathrm{rp}(a)$ kada je $a <^- b$. Rezultat je, na neki način, analogon Teoreme 1 u [48] gde je posmatran slučaj kompleksnih matrica. Naš dokaz je u potpunosti drugačiji.

Lema 5.4.16. *Neka su $a, b \in \mathcal{A}$ i neka je $p = \mathrm{lp}(a)$ i $q = \mathrm{rp}(a)$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a <^- b$.

(ii) *Postoje $p_1 \in pR(1-p)$, $q_1 \in (1-q)Rq$, i $b_4 \in (1-p)R(1-q)$ takvi da je*

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times q} \quad i \quad b = \begin{bmatrix} a + p_1 b_4 q_1 & p_1 b_4 \\ b_4 q_1 & b_4 \end{bmatrix}_{p\times q}. \tag{5.13}$$

Dokaz. Jasno je da a ima datu matričnu formu. Neka je $b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}_{p\times q}$. Po definiciji je $a <^- b$ ako i samo ako postoje $p' \in \mathrm{LP}(a)$ i $q' \in \mathrm{RP}(a)$ tako da je $a = p'b$ i $a = bq'$. Prema karakterizacijama datim u Lemi 5.3.8, ovo je ekvivalentno sledećim uslovima

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times q} = a = p'b = \begin{bmatrix} p & p_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}_{p\times q} = \begin{bmatrix} b_1 + p_1 b_3 & b_2 + p_1 b_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times q},$$
$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times q} = a = bq' = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}_{p\times q} \begin{bmatrix} q & 0 \\ q_1 & 0 \end{bmatrix}_{q\times q} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 q_1 & 0 \\ b_3 + b_4 q_1 & 0 \end{bmatrix}_{p\times q}.$$

Ovo je tačno ako i samo ako je $b_2 = -p_1 b_4$, $b_3 = -b_4 q_1$ i $b_1 = a + p_1 b_4 q_1$. Da bi završili dokaz, dovoljno je uzeti $p_1 = -p_1$ i $q_1 = -q_1$. $\square$

Jasno je da zvezda parcijalno uređenje implicira minus parcijalno uređenje. Potražimo uslove pod kojima važi obrnuta implikacija. Većina sledećih rezultata je podstaknuta odgovarajućim rezultatima na kompleksnim matricama [6,48]. Čak i u matričnom slučaju, dokazi nisu elementarni. Šta više, neki od sledećih dokaza su jednostavniji od matričnih, koji uključuju tehnike konačno dimenzionalne linearne algebre i/ili koriste Mur-Penrouzov inverz. Podsetimo se da je element $a \in \mathcal{A}$ *normalan* ako je $aa^* = a^*a$.

Teorema 5.4.17. *Neka su $a, b \in \mathcal{A}$ takvi da je $a <^- b$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a <^* b$;

(ii) *ba^* i a^*b su samo-adjungovani;*

(iii) *ba^* i a^*b su normalni.*

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Kako je $a <^* b$, iz Teoreme 5.4.8 sledi da je $aa^* = ba^*$ i $a^*a = a^*b$ pa su ba^* i a^*b samo-adjungovani.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) je trivijalno.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Pretpostavimo da je $a <^- b$ i da su ba^* i a^*b normalni. Tada je $ba^*ab^* = ab^*ba^*$. Koristeći reprezentacije (5.13), dobijamo

$$ba^*ab^* = \begin{bmatrix} (a + p_1 b_4 q_1)a^*a(a + p_1 b_4 q_1)^* & (a + p_1 b_4 q_1)a^*a(b_4 q_1)^* \\ b_4 q_1 a^*a(a + p_1 b_4 q_1)^* & b_4 q_1 a^*a(b_4 q_1)^* \end{bmatrix}_{p\times p},$$
$$ab^*ba^* = \begin{bmatrix} a(a + p_1 b_4 q_1)^*(a + p_1 b_4 q_1)a^* + a(b_4 q_1)^* b_4 q_1 a^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p},$$

gde je $p = \mathrm{lp}(a)$ i $q = \mathrm{rp}(a)$ Sledi $0 = b_4q_1a^*a(b_4q_1)^* = (b_4q_1a^*)(b_4q_1a^*)^*$. $\mathcal{A}$ je Rikartov $*$-prsten pa je njegova involucija pravilna, odakle sledi da je $b_4q_1a^* = 0$. Zbog toga, na osnovu Leme 5.4.5, dobijamo da je $b_4q_1 \in {}^\circ(a^*) = {}^\circ\mathrm{rp}(a) = {}^\circ q$. Kako $q_1 \in Rq$, to je $b_4q_1 = 0$. Slično dobijamo da je $p_1b_4 = 0$, pa je

$$b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}_{p\times q}.$$

Po Teoremi 5.4.8, $a <^* b$. □

Lema 5.4.18. *Za $a \in \mathcal{A}$ važi:*

(i) $\mathrm{lp}(a) = \mathrm{rp}(a^*)$;

(ii) $\mathrm{lp}(a) = \mathrm{lp}(aa^*)$;

(iii) $\mathrm{rp}(a^*) = \mathrm{rp}(aa^*)$;

(iv) $\mathrm{lp}(aa^*) = \mathrm{rp}(aa^*) = \mathrm{lp}(a) = \mathrm{rp}(a^*)$.

Dokaz. (i): Dokaz direktno sledi iz osobine (i) Leme 5.4.5.

(ii): Involucija na svakom Rikartovom $*$-prstenu je pravilna, tj. iz $aa^* = 0$ sledi $a = 0$ za svako $a \in R$. Neka je $xaa^* = 0$. Tada je $(xa)(xa)^* = 0$ a odatle i $xa = 0$. To znači da je ${}^\circ(aa^*) = {}^\circ a$ pa je $\mathrm{lp}(aa^*) = \mathrm{lp}(a)$.

(iii): Slično kao (ii).

(iv): Sledi iz (i), (ii) i (iii). □

Teorema 5.4.19. *Neka su $a, b \in \mathcal{A}$ i neka je $a <^- b$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a <^* b$;

(ii) $aa^* <^* bb^*$;

(iii) $a^*a <^* b^*b$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Pretpostavimo da je $a <^* b$. Tada je $aa^* = ba^* = ab^*$ i $a^*a = a^*b = b^*a$. Sledi

$$(aa^*)^*(bb^*) = aa^*bb^* = aa^*ab^* = aa^*aa^* = (aa^*)^*(aa^*).$$

Slično, $(bb^*)(aa^*)^* = (aa^*)(aa^*)^*$, pa je $aa^* <^* bb^*$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Neka je $p = \mathrm{lp}(a)$ i $q = \mathrm{rp}(a)$. Tada je

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times q} \quad \text{i} \quad aa^* = \begin{bmatrix} aa^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p}.$$

Pretpostavimo da je $aa^* <^* bb^*$. Iz Teoreme 5.4.8 ((i) $\Leftrightarrow$ (iv)) i Leme 5.4.18 sledi da je

$$bb^* = \begin{bmatrix} aa^* & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}_{p\times p}, \tag{5.14}$$

gde $c \in (1-p)R(1-p)$. Po Lemi 5.4.16, iz uslova $a <^- b$ sledi da je

$$b = \begin{bmatrix} a + p_1 b_4 q_1 & p_1 b_4 \\ b_4 q_1 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times q}. \tag{5.15}$$

Iz poslednje reprezentacije sledi

$$bb^* = \begin{bmatrix} (a + p_1 b_4 q_1)(a + p_1 b_4 q_1)^* + (p_1 b_4)(p_1 b_4)^* & (a + p_1 b_4 q_1)(b_4 q_1)^* + p_1 b_4 b_4^* \\ b_4 q_1 (a + p_1 b_4 q_1)^* + b_4 (p_1 b_4)^* & b_4 q_1 (b_4 q_1)^* + b_4 b_4^* \end{bmatrix}_{p \times p}. \tag{5.16}$$

Iz (5.14) i (5.16) zaključujemo da je

$$\begin{aligned} aa^* &= (a + p_1 b_4 q_1)(a + p_1 b_4 q_1)^* + (p_1 b_4)(p_1 b_4)^* \qquad (5.17) \\ &= (a + p_1 b_4 q_1)a^* + (a + p_1 b_4 q_1)(b_4 q_1)^* p_1^* + (p_1 b_4)(p_1 b_4)^* \\ &= (a + p_1 b_4 q_1)a^* + (-p_1 b_4 b_4^*) p_1^* + (p_1 b_4)(p_1 b_4)^* \\ &= (a + p_1 b_4 q_1)a^* = aa^* + p_1 b_4 q_1 a^*. \end{aligned}$$

Dakle, $p_1 b_4 q_1 a^* = 0$. Sada iz Leme 5.4.5 (ii) dobijamo da je $0 = p_1 b_4 q_1 q = p_1 b_4 q_1$, jer $q_1 \in (1-q)Rq$. Zbog toga, iz jednakosti (5.17) sledi da je $(p_1 b_4)(p_1 b_4)^* = 0$. Involucija $*$ je pravilna, pa zaključujemo da je $p_1 b_4 = 0$. Iz (5.16) je takođe

$$(a + p_1 b_4 q_1)(b_4 q_1)^* + p_1 b_4 b_4^* = 0,$$

odakle sledi da je $a(b_4 q_1)^* = 0$. Zbog toga je $q(b_4 q_1)^* = 0$, pa je $b_4 q_1 = 0$. Jednakost (5.15) postaje

$$b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times q}.$$

Po Teoremi 5.4.8, $a <^* b$.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): Slično kao (i) $\Leftrightarrow$ (ii). $\square$

Lema 5.4.20. *Ako je $a \in \mathcal{A}$ normalan onda je* $\mathrm{lp}(a) = \mathrm{rp}(a)$.

Dokaz. Po Lemi 5.4.18 je $\mathrm{rp}(a) = \mathrm{rp}(a^*a) = \mathrm{rp}(aa^*) = \mathrm{rp}(a^*) = \mathrm{lp}(a)$. $\square$

Teorema 5.4.21. *Neka su $a, b \in \mathcal{A}$ gde je a normalan i neka je $a <^- b$. Sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *$a <^* b$;*

(ii) *a i b komutiraju;*

(iii) *a^* i b komutiraju;*

(iv) *a i b^* komutiraju;*

(v) *a^* i b^* komutiraju.*

Dokaz. Dokazaćemo samo ekvivalentnost uslova (i) i (ii). Ostale ekvivalencije se dokazuju slično. Kako je a normalan to je, po Lemi 5.4.20, $\mathrm{lp}(a) = \mathrm{rp}(a)$. Označimo ovaj idempotent sa p.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Pretpostavimo da je $a \prec^* b$. Teorema 5.4.8 daje

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p} \quad \text{i} \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}_{p\times p},$$

gde je $b_1 = b - a$. Lako se vidi da je

$$ab = ba = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Kako je $a \prec^- b$, iz Leme 5.4.16 sledi

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p} \quad \text{i} \quad b = \begin{bmatrix} a + p_1 b_4 q_1 & p_1 b_4 \\ b_4 q_1 & b_4 \end{bmatrix}_{p\times p},$$

gde je $p_1 \in pR(1-p)$ i $q_1 \in (1-p)Rp$. Pretpostavimo da je $ab = ba$. Sledi

$$\begin{bmatrix} a^2 + ap_1b_4q_1 & ap_1b_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times p} = \begin{bmatrix} a^2 + p_1b_4q_1a & 0 \\ b_4q_1a & 0 \end{bmatrix}_{p\times p},$$

i zbog toga je $ap_1b_4 = 0$. Kako je $a^\circ = p^\circ$ i $p_1 \in pR(1-p)$, sledi da je $p_1b_4 = 0$. Slično, iz $b_4q_1a = 0$ sledi $b_4q_1 = 0$. Dakle,

$$b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}_{p\times p},$$

odakle je $a \prec^* b$. $\square$

Podsetimo se da je $w \in R$ *parcijalna izometrija* ako je $ww^*w = w$.

Teorema 5.4.22. *Neka su $a, b \in \mathcal{A}$ parcijalne izometrije. Tada je $a \prec^* b$ ako i samo ako je $a \prec^- b$.*

Dokaz. Deo "samo ako" je trivijalan. Pretpostavimo da je $a \prec^- b$. Treba pokazati da je $a \prec^* b$. Po Teoremi 5.4.19 dovoljno je dokazati da je $aa^* \prec^* bb^*$. Po pretpostavci, postoje idempotenti p i q takvi da je $a = pb = bq$. Odavde je $a = bq = bb^*bq = bb^*a$, pa je

$$(aa^*)(aa^*)^* = aa^* = bb^*aa^* = (bb^*)(aa^*)^*$$

i

$$(aa^*)^*(aa^*) = aa^* = aa^*bb^* = (aa^*)^*(bb^*).$$

Dakle, $aa^* \prec^* bb^*$. $\square$

Sada ćemo dati nekoliko osobina "nasleđivanja" zvezda parcijalnog uređenja. Proširimo najpre poznatu osobinu minus parcijalnog uređenja sa $\mathcal{B}(H)$ (videti [105]) na proizvoljan prsten.

Lema 5.4.23. *Neka je R proizvoljan prsten i neka su $a, b \in R$. Ako je $b \in E(R)$ i $a <^- b$ onda je $a \in E(R)$.*

Dokaz. Neka je b idempotent i neka je $a <^- b$. Po definiciji, postoje $p \in \mathrm{LP}(a)$ i $q \in \mathrm{RP}(a)$ tako da je $a = pb = bq$. Imamo $a = bq = b^2q = ba$ pa $1 - b \in {}^\circ a = {}^\circ p$, tj. $p = bp$. Sledi, $p = p^2 = pbp = ap$, odakle je $a = pa = apa = aa = a^2$. □

Sledećom teoremom ćemo pokazati da ako je b idempotent, samo-adjungovani idempotent ili parcijalna izometrija, onda i svaki element a koji zadovoljava $a <^* b$ nasleđuje istu osobinu.

Teorema 5.4.24. *Neka su $a, b \in \mathcal{A}$ i pretpostavimo da je $a <^* b$.*

(i) *Ako je $b^2 = b$ onda je $a^2 = a$.*

(ii) *Ako je $b^2 = b = b^*$ onda je $a^2 = a = a^*$.*

(iii) *Ako je $bb^*b = b$ onda je $aa^*a = a$.*

Dokaz. (i): Sledi iz Leme 5.4.23 i osobine $a <^* b \Rightarrow a <^- b$.

(ii): Neka je sada $b^2 = b = b^*$. Kao i malopre zaključujemo da je $a^2 = a$ pa ostaje još da pokažemo da je a samo-adjungovan. Kako je $a <^* b$, imamo $a = pb = bq$ gde je $p = \mathrm{lp}(a)$ i $q = \mathrm{rp}(a)$. Iz dokaza Leme 5.4.23, znamo da je $p = bp$, pa je

$$a = pa = bpa = b^*p^*a = (pb)^*a = a^*a.$$

Dakle, a je samo-adjungovan.

(iii): Na kraju, neka je $b = bb^*b$. Iz $a <^* b$ sledi

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q} \quad \text{i} \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}_{p \times q},$$

gde je $b_1 = b - a$. Imamo

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}_{p \times q} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}_{p \times q} \begin{bmatrix} a^* & 0 \\ 0 & b_1^* \end{bmatrix}_{q \times p} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}_{p \times q}$$

odakle je $a = aa^*a$. □

Levo-zvezda i desno-zvezda parcijalno uređenje

Levo-zvezda i desno-zvezda parcijalno uređenje su uveli Baksalari i Mitra u radu [8] na sledeći način.

Definicija 5.4.25. *Levo zvezda* parcijalno uređenje, $*<$, na $M_{m\times n}$ je relacija definisana sa

$$A *< B \quad \text{ako je} \quad A^*A = A^*B \text{ i } \operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} B.$$

Desno zvezda parcijalno uređenje, $<*$, na $M_{m\times n}$ je relacija definisana sa

$$A <* B \quad \text{ako je} \quad AA^* = BA^* \text{ i } \operatorname{Im} A^* \subseteq \operatorname{Im} B^*.$$

Baksalari i Mitra su dokazali da za $A, B \in M_{m,n}$, iz $A <^* B$ sledi $A *< B$ i $A <* B$. Takođe, iz $A *< B$ ili $A <* B$ sledi $A <^- B$. Obrnute implikacije ne važe.

Prateći Šemrlov pirstup definisanja minus parcijalnog uređenja na $\mathcal{B}(H)$ i koristeći poznate činjenice vezane za gore pomenuta matrična uređenja, u radu [29] su definisane sledeće relacije na $\mathcal{B}(H)$.

Definicija 5.4.26. (Videti [29].) Za $A, B \in \mathcal{B}(H)$ kažemo da je $A *< B$ kada postoji samo-adjungovani idempotent $P \in \mathcal{B}(H)$ i idempotent $Q \in \mathcal{B}(H)$ tako da je

(i) $\operatorname{Im} P = \overline{\operatorname{Im} A}$,

(ii) $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} Q$,

(iii) $PA = PB$,

(iv) $AQ = BQ$.

U [29] je dokazano da je za $A, B \in \mathcal{B}(H)$, $A *< B$ ako i samo ako je $A^*A = A^*B$ i $\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} B$, pa je relacija iz Definicije 5.4.26 pravilno proširenje levog-zvezda uređneja na skupu kompleksnih matrica. Analogno se definiše i desno-zvezda parcijalno uređenje na $\mathcal{B}(H)$, videti [29].

Levo-zvezda uređenje možemo okarakterisati čisto algebarskim uslovom.

Definicija 5.4.27. Za $A, B \in \mathcal{B}(H)$ kažemo da je $A *< B$ ako postoji samo-adjungovani idempotent $P \in \mathcal{B}(H)$ i idempotent $Q \in \mathcal{B}(H)$ tako da je

(i) ${}^\circ A = {}^\circ P$,

(ii) $A^\circ = Q^\circ$,

(iii) $A = PB$,

(iv) $A = BQ$.

Da je relacija $*<$ iz prethodne definicije zaista ekvivalentna sa relacijom $*<$ iz Definicije 5.4.26, sledi iz Teoreme 5.2.1.

Sada smo u poziciji da proširimo pojmove levog-zvezda i desnog-zvezda uređenja na prsten sa involucijom.

Definicija 5.4.28. Neka je R $*$-prsten i neka su $a, b \in R$. Kažemo da je a manje od b u odnosu na *levo-zvezda* parcijalno uređenje, i to označavamo sa $a *< b$, ako postoje $p \in \widetilde{E}(R)$ i $q \in E(R)$ takvi da je

(i) ${}^\circ a = {}^\circ p$,

(ii) $a^\circ = q^\circ$,

(iii) $a = pb$,

(iv) $a = bq$.

Definicija 5.4.29. Neka je R $*$-prsten i neka su $a, b \in R$. Kažemo da je a manje od b u odnosu na *desno-zvezda* parcijalno uređenje, i to označavamo sa $a \prec * b$, ako postoje $p \in E(R)$ i $q \in \widetilde{E}(R)$ takvi da je

(i) ${}^\circ a = {}^\circ p$,

(ii) $a^\circ = q^\circ$,

(iii) $a = pb$,

(iv) $a = bq$.

Napomena 5.4.30. Lako se proverava da je $a * \prec b$ ako i samo ako je $a^* \prec * b^*$. Ovo sledi iz $x^\circ = y^\circ \Leftrightarrow {}^\circ(x^*) = {}^\circ(y^*)$.

Napomena 5.4.31. Neka je R $*$-prsten. Upoređujući Definiciju 5.3.3 sa Definicijama 5.4.28 i 5.4.29, lako nalazimo da $a * \prec b \Rightarrow a \prec^- b$ i $a \prec * b \Rightarrow a \prec^- b$.

Teorema 5.4.32. *Neka su $a, b \in \mathcal{A}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a * \prec b$.

(ii) *Postoje $p \in \widetilde{E}(\mathcal{A})$ i $q \in E(\mathcal{A})$ takvi da je $a = pb = bq$.*

(iii) *$a^*a = a^*b$ i $a = bq$ za neko $q \in E(\mathcal{A})$.*

(iv)
$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q} \quad i \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b - a \end{bmatrix}_{p \times q}. \tag{5.18}$$
gde je $p = \mathrm{lp}(a)$ i $q \in \mathrm{RP}(a)$;

(v) *Postoje $p \in \widetilde{E}(\mathcal{A})$ i $q \in E(\mathcal{A})$ tako da važe matrične forme (5.18).*

Dokaz. Primetimo da se u stavkama (ii), (iii) i (v) zahteva samo da je q idempotent, a ne i da obavezno pripada skupu $\mathrm{RP}(a)$. To se može dokazati na isti način kao u dokazu Teoreme 5.3.16. Ostali deo teoreme se može dokazati na sličan način kao i Teorema 5.4.8. $\square$

Naravno, analogna teorema važi i za desno-zvezda uređenje.

Sledeća teorema govori da su relacije uvedene Definicijama 5.4.28 i 5.4.29 zaista parcijalna uređenja kada je $\mathcal{A}$ Rikartov $*$-prsten.

Teorema 5.4.33. *Relacije $* \prec$ i $\prec *$ su relacije parcijalnog uređenja na $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Dokaz se može izvesti prateći linije dokaza Teoreme 5.3.11. $\square$

Sledeća teorema je uopštenje odgovarajućeg matričnog rezultata (videti Teoremu 4.2. u [8] i Teoremu 2.1 u [4]).

Teorema 5.4.34. *Neka je R Rikartov $*$-prsten i neka su $a, b \in R$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a \ast\!\!< b$;

(ii) $a <^{-} b$ *i* a^*b *je samo-adjungovan;*

(iii)
$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times q} \quad i \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b_4q_1 & b_4 \end{bmatrix}_{p\times q},$$
gde je $p = \mathrm{lp}(a)$ *i* $q = \mathrm{rp}(a)$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) sledi iz Napomene 5.4.31 i Teoreme 5.4.32 ((i) $\Rightarrow$ (iii)).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Pretpostavimo da je $a <^{-} b$ i da je a^*b samo-adjungovan. Iz Leme 5.4.16 sledi
$$a^*b = \begin{bmatrix} a^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q\times p} \begin{bmatrix} a + p_1b_4q_1 & p_1b_4 \\ b_4q_1 & b_4 \end{bmatrix}_{p\times q} = \begin{bmatrix} a^*a + a^*p_1b_4q_1 & a^*p_1b_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q\times q},$$
gde je $p = \mathrm{lp}(a)$ i $q = \mathrm{rp}(a)$. Kako je a^*b samo-adjungovan, imamo da je $a^*p_1b_4 = 0$, i zbog toga je $p_1b_4 \in (a^*)^\circ = \mathrm{rp}(a^*)^\circ = \mathrm{lp}(a)^\circ = p^\circ$. Kako $p_1 \in pR(1-p)$ dobijamo da je $p_1b_4 = 0$, odakle sledi reprezentacija za b.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Pretpostavimo da a i b imaju date reprezentacije i neka je $q' = \begin{bmatrix} q & 0 \\ -q_1 & 0 \end{bmatrix}_{q\times q}$. Iz Leme 5.3.8 sledi da $q' \in \mathrm{RP}(a)$. Direktna provera pokazuje da je $a^*a = a^*b$ i $a = bq'$. Po Teoremi 5.4.32 sledi da je $a \ast\!\!< b$. □

Slično se dokazuje i sledeća teorema.

Teorema 5.4.35. *Neka je R Rikartov $\ast$-prsten i $a, b \in R$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a <\!\!\ast\, b$;

(ii) $a <^{-} b$ *i* ba^* *je samo-adjungovan;*

(iii)
$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p\times q} \quad i \quad b = \begin{bmatrix} a & p_1b_4 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}_{p\times q},$$
gde je $p = \mathrm{lp}(a)$ *i* $q = \mathrm{rp}(a)$.

Teorema 5.4.36. *Neka su $a, b \in \mathcal{A}$ normalni elementi. Tada je*
$$a \ast\!\!< b \quad \Leftrightarrow \quad a <\!\!\ast\, b \quad \Leftrightarrow \quad a <^* b.$$

Dokaz. Pretpostavimo da su a i b normalni i da je $a \ast\!\!< b$. Po Lemi 5.4.20 važi da je $\mathrm{lp}(a) = \mathrm{rp}(a)$. Iz Teoreme 5.4.34 sledi
$$bb^* = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b_4q_1 & b_4 \end{bmatrix}_{p\times p} \begin{bmatrix} a^* & (b_4q_1)^* \\ 0 & b_4^* \end{bmatrix}_{p\times p} = \begin{bmatrix} aa^* & a(b_4q_1)^* \\ b_4q_1a^* & b_4q_1(b_4q_1)^* + b_4b_4^* \end{bmatrix}_{p\times p},$$
$$b^*b = \begin{bmatrix} a^*a + (b_4q_1)^*b_4q_1 & (b_4q_1)^*b_4 \\ b_4^*b_4q_1 & b_4^*b_4 \end{bmatrix}_{p\times p},$$

gde je $p = \text{lp}(a)$. Kako su a i b normalni, sledi da je $aa^* = a^*a$ i $aa^* = a^*a + (b_4q_1)^*b_4q_1$. Dakle, $(b_4q_1)^*b_4q_1 = 0$. $\mathcal{A}$ ima pravilnu involuciju, pa je $b_4q_1 = 0$. Po Teoremi 5.4.8 (iv) $\Rightarrow$ (i) sledi da je $a \prec^* b$. Kako zvezda uređenje implicira levo-zvezda uređenje, dokazali smo da je $a \,{*}{\prec}\, b$ ako i samo ako $a \prec^* b$. Na isti način možemo dokazati da je $a \prec_* b$ ako i samo ako je $a \prec^* b$. □

5.5 Oštro i jezgarno parcijalno uređenje na Rikartovim prstenima

Grupni inverz i oštro parcijalno uređenje definisano pomoću njega smo detaljno ispitali u Glavama 4.1 odnosno 4.2. Kao i u slučaju minus i zvezda uređenja i sada želimo da definiciju proširimo tako da ona ima smisla i za elemente koji nisu g-invertibilni. Rezultati ovog poglavlja se delom nalaze u radu [92]. Pre svega da vidimo kako se oštro uređenje može proširiti na algebru $\mathcal{B}(X)$, gde je X beskonačno dimenzionalan Banahov prostor (s obzirom da se grupni inverz definiše i na strukturama bez involucije, nema potrebe sužavati kontekst na Hilbertov prostor). I u ovoj situaciji se može primeniti univerzalan Šemrlov pristup. Neka je

$$I_X = \{A \in \mathcal{B}(X) : \overline{\text{Im}\, A} \oplus \text{Ker}\, A = X\}.$$

Lako se vidi da $A \in I_X$ ako i samo ako postoji idempotent $P_A \in \mathcal{B}(X)$ takav da je

$$\text{Im}\, P_A = \overline{\text{Im}\, A} \;\text{ i }\; \text{Ker}\, P_A = \text{Ker}\, A.$$

Takav idempotent je jedinstven i važi

$$A = P_A A = A P_A.$$

Primetimo da se skup I_X poklapa sa skupom $I_{1,n}$ kada je $\dim X < \infty$. Prateći Šemrlov pristup, Efimov je u radu [35] proširio definicijiju oštrog uređenja na $\mathcal{B}(H)$ na sledeći način.

Definicija 5.5.1. (Videti [35].) Neka je X Banahov prostor. Za $A, B \in \mathcal{B}(X)$ kažemo da je $A <^\sharp B$ ako $A \in I_X$ i

$$A = P_A B = B P_A.$$

Relacija $<^\sharp$ je relacija parcijalnog uređenja na I_X, [35], i ona je pravilno proširenje oštrog parcijalnog uređenja sa $I_{1,n}$ na I_X. Nedavno je definicija oštrog uređenja uopštena sa M_n na skup $R^\#$ (podskup grupno invertibilnih elemenata prstena), videti [68]. Naš cilj je da definiciju oštrog uređenja proširimo na prstene, ali, kao i do sada, ne želimo da ograničimo naše razmatranje samo na elemente koji poseduju grupni inverz. Ekvivalentna algebarska definicija sa anulatorima je očekivana.

Neka je X Banahov prostor i neka je

$$\mathcal{I}_X = \{A \in \mathcal{B}(X) : {}^\circ A = {}^\circ P \text{ i } A^\circ = P^\circ \text{ za neki idempotent } P \in \mathcal{B}(X)\}. \tag{5.19}$$

Kada $A \in \mathcal{I}_X$, idempotent P koji se javlja u (5.19) je jedinstven (Lema 5.1.4) i označavaćemo ga sa P_A.

Definicija 5.5.2. Neka je X Banahov prostor. Za $A, B \in \mathcal{B}(X)$ kažemo da je $A <^\sharp B$ ako $A \in \mathcal{I}_X$ i

$$A = P_A B = B P_A.$$

Teorema 5.5.3. *Neka je X Banahov prostor. Tada je:*

(1) $I_X = \mathcal{I}_X$;

(2) *Oštro parcijalno uređenje $<^\#$ uvedeno Definicijom 5.5.1 i relacija $\prec^\#$ uvedena Definicijom 5.5.2 su jednake na $\mathcal{B}(X)$.*

Dokaz. Dokaz je direktna posledica Teoreme 5.2.1. □

Oštro parcijalno uređenje na $\mathcal{I}_R$

Neka je R proizvoljan prsten. Definicije skupa $\mathcal{I}_X$ i relacije $\prec^\#$ date Definicijom 5.5.2 imaju smisla i u R. Označimo

$$\mathcal{I}_R = \{a \in R : {}^\circ a = {}^\circ p \text{ i } a^\circ = p^\circ \text{ za neko } p \in E(R)\}.$$

U Lemi 5.1.4 je dokazana jedinstvenost idempotenta p, pa ga možemo označiti sa $p = p_a$. Ako $a \in \mathcal{I}_R$ onda je $(1 - p_a)a = a(1 - p_a) = 0$ jer $1 - p_a \in {}^\circ p_a \cap p_a^\circ$. Zbog toga je

$$a = p_a a = a p_a.$$

Definicija 5.5.4. Neka su $a, b \in R$. Kažemo da je a manje od b u odnosu na *oštro* parcijalno uređenje , i to označavamo sa $a \prec^\# b$, ako $a \in \mathcal{I}_R$ i

$$a = p_a b = b p_a.$$

Jasno je da za $a, b \in R$ važi

$$a \prec^\# b \;\Rightarrow\; a \prec^- b.$$

Lema 5.5.5. *Neka su $a, b \in \mathcal{I}_R$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) $a = p_a b$;

(2) $a^2 = ab$.

Bilo koji od uslova (1) ili (2) implicira $p_a p_b = p_a$.

Dokaz. Kako je $a = p_a a$ to je

$$\begin{aligned} a = p_a b \iff p_a(b - a) = 0 \iff b - a \in p_a^\circ \iff b - a \in a^\circ \\ \iff a(b - a) = 0 \iff a^2 = ab. \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $a = p_a b$. Iz $1 - p_b \in p_b^\circ = b^\circ$ dobijamo da je $a(1 - p_b) = p_a b(1 - p_b) = 0$, pa $1 - p_b \in a^\circ = p_a^\circ$. Sledi $p_a(1 - p_b) = 0$. □

Zbog dualnosti, dobijamo i sledeću lemu.

Lema 5.5.6. *Neka su $a, b \in \mathcal{I}_R$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) $a = bp_a$;

(2) $a^2 = ba$.

Bilo koji od uslova (1) ili (2) implicira $p_b p_a = p_a$.

Teorema 5.5.7. *Neka su $a, b \in \mathcal{I}_R$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a \prec^{\#} b$.

(ii) $b - a \in \mathcal{I}_R$ *i* $p_a p_{b-a} = 0$ *i* $p_{b-a} p_a = 0$.

(iii) $b - a \in \mathcal{I}_R$ *i* $p_a p_b = p_b p_a = p_a$ *i* $p_{b-a} = p_b - p_a$.

(iv) *Postoji dekompozicija jedinice prstena R, $1 = f_1 + f_2 + f_3$, gde je $f_1 = p_a$ i $f_2 = p_{b-a}$, u odnosu na koju je*

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{f \times f} \quad i \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{f \times f}, \tag{5.20}$$

pri čemu $a \in f_1 R f_1$ nije (f_1, f_1)-delilac nule, a $b - a \in f_2 R f_2$ nije (f_2, f_2)-delilac nule.

(v) $a = pb = bp$, *za neko* $p \in E(R)$.

(vi) $a^2 = ab = ba$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (iii): Pretpostavimo da su $a, b \in \mathcal{I}_R$ i $a \prec^{\#} b$. Tada je $a = p_a b = b p_a$. Iz Lema 5.5.5 i 5.5.6 imamo

$$p_a = p_a p_b = p_b p_a. \tag{5.21}$$

Sledi da je $p_b - p_a$ idempotent. Dokažimo da $b - a \in \mathcal{I}_R$ i da je $p_{b-a} = p_b - p_a$. Pretpostavimo da je $(p_b - p_a)x = 0$ za neko $x \in R$. Tada je

$$(b - a)x = (bp_b - bp_a)x = b(p_b - p_a)x = 0.$$

Sa druge strane ako je $(b-a)x = 0$ onda je $b(1-p_a)x = (b-a)x = 0$, pa $(1-p_a)x \in b^\circ = p_b^\circ$. Dakle,

$$0 = p_b(1 - p_a)x = (p_b - p_a)x.$$

Dakle, $(b - a)^\circ = (p_b - p_a)^\circ$. Slično, ${}^\circ(b - a) = {}^\circ(p_b - p_a)$. Odavde sledi da $b - a \in \mathcal{I}_R$ i da je $p_{b-a} = p_b - p_a$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Neka je $f_1 = p_a$, $f_2 = p_b - p_a = p_{b-a}$ i $f_3 = 1 - p_b$. Iz pretpostavke da je $p_a p_b = p_b p_a = p_a$ lako dobijamo da je $1 = f_1 + f_2 + f_3$ dekompozicija jedinice prstena R. Znamo da je $a = p_a a p_a = f_1 a f_1$. Takođe, $b - a = p_{b-a}(b - a)p_{b-a} = f_2(b - a)f_2$, pa je $b = a + (b-a) = f_1 a f_1 + f_2(b-a)f_2$. Zbog jedinstvenosti matrične reprezentacije elemenata u odnosu na dekompoziciju jedinice, $1 = f_1 + f_2 + f_3$, sledi da a i b imaju tražene matrične forme (5.20). Iz Leme 5.1.13 i prethodnog dela dokaza sledi da $a \in f_1Rf_1$ i $b-a \in f_2Rf_2$ nisu (p,q)-delioci nule.

(iv) $\Rightarrow$ (vi) je jasno; obično matrično množenje.

(vi) $\Rightarrow$ (i) sledi iz Lema 5.5.5 i 5.5.6.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Već smo dokazali da iz $a <^{\#} b$ sledi $b-a \in \mathcal{I}_R$.

$$a <^{\#} b \Leftrightarrow p_a(b-a) = 0 \text{ i } (b-a)p_a = 0 \Leftrightarrow p_a p_{b-a} = 0 \text{ i } p_{b-a}p_a = 0.$$

(i) $\Rightarrow$ (v) je očigledno.

(v) $\Rightarrow$ (vi): Iz $a = pb = bp$ sledi $pa = ap = a$, pa je $a^2 = apb = ab$ i $a^2 = bpa = ba$. $\square$

Koristeći Teoremu 5.5.7 možemo okarakterisati skup svih elemenata b većih od elementa $a \in \mathcal{I}_R$ u odnosu na relaciju $<^{\#}$:

$$a <^{\#} b \iff b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}_{p_a \times p_a} \iff b = a + (1-p_a)x(1-p_a),$$

gde su $b_1 \in (1-p_a)R(1-p_a)$ i $x \in R$ proizvoljni.

Napomena 5.5.8. Pogledajmo sada na koje reprezentacije se svode matrične forme date u (5.20) u slučaju kada je $R = \mathcal{B}(X)$ gde je X Banahov prostor. Pretpostavimo da $A, B \in I_X = \mathcal{I}_X$ i $A <^{\#} B$, tj. $A <^{\#} B$. U Teoremi 5.5.7 smo dokazali da je $I = F_1 + F_2 + F_3$, gde je $F_1 = P_A$, $F_2 = P_{B-A} = P_B - P_A$, $F_3 = I - P_B$, dekompozicija jedinice I prstena $\mathcal{B}(X)$. Kako je ${}^\circ A = {}^\circ P_A$, ${}^\circ(B-A) = {}^\circ P_{B-A}$ i $B^\circ = P_B^\circ$, iz Teoreme 5.2.1 sledi da je $\operatorname{Im} F_1 = \overline{\operatorname{Im} A}$, $\operatorname{Im} F_2 = \overline{\operatorname{Im}(B-A)}$ i $\operatorname{Im} F_3 = \operatorname{Im}(I - P_B) = \operatorname{Ker} P_B = \operatorname{Ker} B$. Dakle,

$$X = \overline{\operatorname{Im} A} \oplus \overline{\operatorname{Im}(B-A)} \oplus \operatorname{Ker} B.$$

Šta više, kako je $A^\circ = P_A^\circ$, Teorema 5.2.1 pokazuje da je $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} P_A = \operatorname{Ker} F_1$. Ali, kako je $\operatorname{Ker} F_1 = \operatorname{Im} F_2 \oplus \operatorname{Im} F_3$, to je

$$\operatorname{Ker} A = \overline{\operatorname{Im}(B-A)} \oplus \operatorname{Ker} B.$$

Slično,

$$\operatorname{Ker}(B-A) = \overline{\operatorname{Im} A} \oplus \operatorname{Ker} B.$$

Sada smo u poziciji da preformulišemo Teoremu 5.5.7. Matrične reprezentacije u sledećoj teoremi su dokazane u Teoremi 1 u [35], sa tom razlikom da mi imamo 3×3 nasuprot 2×2 reprezentacijama dobijenim u [35].

Teorema 5.5.9. *Neka su $A, B \in I_X$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) $A <^{\#} B$.

(2) $P_A P_B = P_B P_A = P_A$ *i* $P_{B-A} = P_B - P_A$.

(3) $X = \overline{\operatorname{Im} A} \oplus \overline{\operatorname{Im}(B-A)} \oplus \operatorname{Ker} B$ *i A i B imaju sledeće matrične reprezentacije u odnosu na ovu dekompoziciju*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gde su $A_1 : \overline{\mathrm{Im}\, A} \to \overline{\mathrm{Im}\, A}$ *i* $B_1 : \overline{\mathrm{Im}\,(B-A)} \to \overline{\mathrm{Im}\,(B-A)}$ *injektivni ograničeni operatori sa* $\overline{\mathrm{Im}\, A_1} = \overline{\mathrm{Im}\, A}$ *i* $\overline{\mathrm{Im}\, B_1} = \overline{\mathrm{Im}\,(B-A)}$.

(4) $A^2 = AB = BA$.

Teorema 5.5.10. *Relacija* $<^{\#}$ *je relacija parcijalnog uređenja na* $\mathcal{I}_R$.

Dokaz. Ako $a \in \mathcal{I}_R$ onda je $a = p_a a = a p_a$, pa je $<^{\#}$ refleksivna. Kako $<^{\#}$ implicira $<^{-}$ i kako je relacija $<^{-}$ antisimetrična, sledi da je i $<^{\#}$ antisimetrična. Da bi dokazali tranzitivnost, pretpostavimo da $a, b, c \in \mathcal{I}_R$ i da je $a <^{\#} b$, $b <^{\#} c$. Tada je $a = p_a b = b p_a$ i $b = p_b c = c p_b$. Takođe, $p_a p_b = p_b p_a = p_a$. Sledi da je $a = p_a b = p_a p_b c = p_a c$ i $a = b p_a = c p_b p_a = c p_a$. Po definiciji je $a <^{\#} c$. □

Nastavljamo sa jednostranim oštrim uređenjima. Videti [77] za definicije u matričnom slučaju.

Definicija 5.5.11. Za $a, b \in R$ kažemo da je $a \,\#\!< b$ ako $a \in \mathcal{I}_R$, postoji $q \in \mathrm{RP}(a)$ i

$$a = p_a b = bq.$$

Definicija 5.5.12. Za $a, b \in R$ kažemo da je $a <\!\# \, b$ ako $a \in \mathcal{I}_R$, postoji $q \in \mathrm{LP}(a)$ i

$$a = qb = b p_a.$$

Relacije $\#\!<$ i $<\!\#$ se zovu *levo-oštro* odnosno *desno-oštro* parcijalno uređenje. Odmah vidimo da za $a, b \in R$ važi

$$a \,\#\!< b \;\Rightarrow a <^{-} b \quad \text{i} \quad a <\!\# \, b \;\Rightarrow\; a <^{-} b.$$

Teorema 5.5.13. *Neka su* $a, b \in \mathcal{I}_R$. *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a \,\#\!< b$;

(ii) $a = ap = pb = bq$, *za neke* $p, q \in E(R)$.

(iii)
$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p_a \times q} \; i \; b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b-a \end{bmatrix}_{p_a \times q}, \tag{5.22}$$

za neko $q \in \mathrm{RP}(a)$ *pri čemu* $a \in p_a R q$ *nije* (p_a, q)*-delilac nule.*

(iv) *Postoji* $q \in E(R)$ *tako da važe matrične forme 5.22*

(v) $a^2 = ab$ *i* $a = bq$ *za neko* $q \in \mathrm{RP}(a)$.

(vi) $a^2 = ab$ *i* $a = bq$ *za neko* $q \in E(R)$

Dokaz. (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Primetimo da iz $a = ap$ sledi $1 - p \in a^\circ = p_a^\circ$, pa je $p_a p = p_a$. Sledi, $p_a b = p_a p b = p_a a = a$. Ostatak dokaza je sličan dokazu Teoreme 5.3.16.

Ekvivalencije (i) $\Leftrightarrow$ (v) i (ii) $\Leftrightarrow$ (vi) slede iz Leme 5.5.5.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Pretpostavimo da je $a \#\!\prec b$, tj. da je $a = p_a b = bq$ gde $q \in \mathrm{RP}(a)$. Kako je $a = p_a a = aq = p_a b = bq$ lako možemo proveriti da je

$$a = p_a a q, \quad b - a = (1 - p_a) b (1 - q). \tag{5.23}$$

Sada, kako je $b = a + (b - a)$, slede matrične forme za a i b date u (5.22). Da $a \in p_a R q$ nije (p_a, q)-delilac nule sledi iz Leme 5.1.13.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) je očigledno.

(iv) $\Rightarrow$ (ii): Kako je $a = p_a a = aq$, iz (5.22) i

$$p_a = \begin{bmatrix} p_a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p_a \times p_a} \text{ i } q = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q \times q},$$

sledi da je $a = p_a b = bq$, tj. $a \#\!\prec b$. $\square$

Analogno se može formulisati i dokazati dualna teorema za desno-oštro uređenje.

Teorema 5.5.14. *Relacije $\#\!\prec$ i $\prec\!\#$ su relacije parcijalnih uređenja na $\mathcal{I}_R$.*

Dokaz. Daćemo dokaz samo za levo-oštro uređenje jer se dokaz za desno-oštro uređenje može izvesti slično. Refleksivnost za $\#\!\prec$ sledi iz $a = p_a a = a p_a$, dok antisimetričnost sledi iz osobine $a \#\!\prec b \Rightarrow a \prec^- b$. Pretpostavimo sada da $a, b \in \mathcal{I}_R$ i da je $a \#\!\prec b$ i $b \#\!\prec c$. Po Definiciji 5.5.11 imamo da je $a = p_a b = bq$ i $b = p_b c = cr$ za neke $q \in \mathrm{RP}(a)$ i $r \in \mathrm{RP}(b)$. Iz Leme 5.5.5 imamo da je $p_a p_b = p_a$, pa je

$$p_a c = p_a p_b c = p_a b = a.$$

Neka je $q' = q + (1 - q) r q$. Slično kao u dokazu Teoreme 5.3.11 se pokazuje da je $q' = rq \in \mathrm{RP}(a)$ i da je $a = cq'$. Dakle, $a \#\!\prec b$. $\square$

Jezgarno parcijalno uređenje na Rikartovim $*$-prstenima

Proširenje jezgarnog parcijalnog uređenja $<^{\#\!\!\!\!\bigcirc}$ sa $I_{1,n}$ na $\mathcal{I}_R$, pomoću anulatora, je analogno proširenjima ostalih relacija koje smo posmatrali.

Definicija 5.5.15. Neka je R $*$-prsten i neka su $a, b \in R$. Kažemo da je a manje od b u odnosu na *jezgarno* parcijalno uređenje, i to označavamo sa $a \prec^{\#\!\!\!\!\bigcirc} b$, ako $a \in \mathcal{I}_R$ i

$$a = \mathrm{lp}(a) b = b p_a.$$

Naravno, možemo posmatrati i dualno jezgarno uređenje.

Definicija 5.5.16. Neka je R $*$-prsten i neka su $a, b \in R$. Kažemo da je a manje od b u odnosu na *dualno jezgarno* parcijalno uređenje, i to označavamo sa $a \prec_{\#\!\!\!\!\bigcirc} b$, ako $a \in \mathcal{I}_R$ i

$$a = p_a b = b \mathrm{rp}(a).$$

Zbog očigledne dualnosti jezgarnog i dualnog jezgarnog uređenja, u nastavku ćemo analizirati samo jezgarno uređenje.

Zbog toga što uslov $a \prec^{\oplus} b$ podrazumeva postojanje samo-adjungovanog idempotenta $\mathrm{lp}(a)$, nadalje ćemo ovu relaciju ispitivati isključivo na Rikartovom $*$-prstenu $\mathcal{A}$.

Napomena 5.5.17. Očigledno je da iz $a \prec^{\oplus} b$ sledi $a \prec^{-} b$.

Pretpostavimo sada da je $\prec \in \{\prec^{-}, \prec^{\sharp}, \#\!\prec, \prec\!\#\}$ i neka su $e, f \in E(R)$. Primetimo da je $p_e = e$. Nije teško videti da je $e \prec f$ ako i samo ako je $e \leqslant f$. Šta više, ako $e, f \in \widetilde{E}(R)$ onda je $\mathrm{lp}(e) = \mathrm{rp}(e) = p_e = e$. Sada možemo pokazati da je $e \leqslant f$ ako i samo ako je $e \prec f$, gde $\prec \in \{\prec^{*}, *\!\prec, \prec\!*, \prec^{\oplus}, \prec_{\oplus}\}$. Dakle, sve posmatrane relacije su pravilna proširenja prirodnog parcijalnog uređenja na skupu (samo-adjungovanih) idempotenata.

Teorema 5.5.18. *Neka su $a, b \in \mathcal{A}$. Tada je*

$$a \prec^{\oplus} b \iff a \,*\!\prec b \text{ i } a \prec\!\# \, b.$$

Relacija $\prec^{\oplus}$ je relacija parcijalnog uređenja na $\mathcal{I}_R$.

Dokaz. Iz Definicija 5.5.12 i 5.5.15 i Teoreme 5.4.32 sledi da je $a \prec^{\oplus} b$ ako i samo ako je $a \,*\!\prec b$ i $a \prec\!\# \, b$. U Teoremama 5.5.14 i 5.4.33 smo dokazali da su relacije $\prec\!\#$ odnosno $*\!\prec$ parcijalna uređenja na $\mathcal{A}$. Odavde sledi da je $\prec^{\oplus}$ parcijalno uređenje na $\mathcal{A}$. $\square$

Teorema 5.5.19. *Neka su $a, b \in \mathcal{A}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a \prec^{\oplus} b$.

(ii) $a = qa = pb = bq$, *za neke* $p \in \widetilde{E}(R)$ *i* $q \in E(R)$.

(iii) $a^*a = a^*b$ *i* $a^2 = ba$.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) je trivijalno. Neka važi (ii). Iz $a = qa = bq$ sledi $a^2 = ba$, a iz $a = pb$, na osnovu Leme 5.4.6, sledi $a^*a = a^*b$. Implikacija (iii) $\Rightarrow$ (i) sledi iz Lema 5.5.6 i 5.4.6. $\square$

Teorema 5.5.20. *Neka su $a, b \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $a \prec^{\oplus} b$;

(ii) *Postoji ortogonalna dekompozicija jedinice*

$$1 = e_1 + e_2 + e_3$$

i postoji dekompozicija jedinice

$$1 = f_1 + f_2 + f_3,$$

tako da je $e_1 = \mathrm{lp}(a)$, $e_2 = \mathrm{lp}(b-a) = \mathrm{lp}(b) - \mathrm{lp}(a)$, $f_1 = p_a$, $f_2^{\circ} = (b-a)^{\circ}$ *i*

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times f} \quad i \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times f}, \tag{5.24}$$

pri čemu $a \in e_1\mathcal{A}f_1$ *nije* (e_1, f_1)*-delilac nule, a* $b - a \in e_2\mathcal{A}f_2$ *nije* (e_2, f_2)*-delilac nule.*

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Pretpostavimo da su $a, b \in \mathcal{I}_R$ i da je $a \prec^{\oplus} b$. Tada je $a = \mathrm{lp}(a)b = bp_a$. Neka je $e_1 = \mathrm{lp}(a)$, $e_2 = \mathrm{lp}(b-a)$ i $e_3 = 1 - \mathrm{lp}(b)$. Na isti način kao u dokazu Teoreme 5.4.13, možemo dokazati da je $\mathrm{lp}(b-a) = \mathrm{lp}(b) - \mathrm{lp}(a)$, $\mathrm{lp}(a)\mathrm{lp}(b) = \mathrm{lp}(a)$, $\mathrm{lp}(a)\mathrm{lp}(b) = \mathrm{lp}(a)$, i da je $1 = e_1 + e_2 + e_3$ ortogonalna dekompozicija jedinice prstena $\mathcal{A}$. U Lemi 5.5.6 smo dokazali da iz $a = bp_a$ sledi $p_b p_a = p_a$. Kako je $1 - p_b \in p_b^{\circ} = b^{\circ}$ imamo da je

$$a(1 - p_b) = \mathrm{lp}(a)b(1 - p_b) = 0,$$

pa je $1 - p_b \in a^{\circ} = p_a^{\circ}$. Zaključujemo da je $p_a = p_a p_b$ i zbog toga $p_b - p_a \in E(\mathcal{A})$. Neka je $f_1 = p_a$, $f_2 = p_b - p_a$ i $f_3 = 1 - p_b$. Iz $p_a = p_a p_b = p_b p_a$ sledi da je $1 = f_1 + f_2 + f_3$ dekompozicija jedinice prstena $\mathcal{A}$. Da je $(b-a)^{\circ} = (p_b - p_a)^{\circ}$ možemo dokazati kao u dokazu Teoreme 5.5.7. Dokažimo sada da je $ap_b = a$. Zaista, iz $p_a = p_a p_b$ sledi $1 - p_b \in p_a^{\circ} = a^{\circ}$, pa je $a(1 - p_b) = 0$. Primetimo da je

$$e_1 a f_1 = \mathrm{lp}(a) a p_a = a$$

i

$$e_2 b f_2 = (\mathrm{lp}(b) - \mathrm{lp}(a)) b (p_b - p_a) = (b - a)(p_b - p_a) = b(p_b - p_a) = b - a.$$

Dakle, $a = e_1 a f_1$ i $e_2(b-a)f_2 = b - a$, pa je $b = a + (b - a) = e_1 a f_1 + e_2(b-a)f_2$. Iz ovih jednačina slede matrične reprezentacije elemenata a i b date u (5.24). Da elementi $a \in e_1 \mathcal{A} f_1$ i $b - a \in e_2 \mathcal{A} f_2$ nisu (p, q)-delioci nule, sledi iz Leme 5.1.13 i prethodnog dela dokaza.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Kako je $\mathrm{lp}(a) = e_1 \mathrm{lp}(a) e_1$ i $p_a = f_1 p_a f_1$, zbog jedinstvenosti matričnog predstavljanja elemenata, dobijamo da je

$$\mathrm{lp}(a) = \begin{bmatrix} \mathrm{lp}(a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times e} \text{ i } p_a = \begin{bmatrix} p_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{f \times f}.$$

Sada je lako pokazati da je $a = \mathrm{lp}(a)b = bp_a$, pa je $a \prec^{\oplus} b$. $\square$

Napomena 5.5.21. U dokazu Teoreme 5.5.20 smo videli da iz $a \prec^{\oplus} b$ sledi $\mathrm{lp}(b-a) = \mathrm{lp}(b) - \mathrm{lp}(a)$ i $p_{b-a}^{\circ} = (p_b - p_a)^{\circ}$. Dokažimo sada da iz $a \prec^{\oplus} b$ ne sledi $p_{b-a} = p_b - p_a$, u opštem slučaju. Pretpostavimo, suprotno našoj tvrdnji, da iz $a \prec^{\oplus} b$ sledi $p_{b-a} = p_b - p_a$. Tada iz ekvivalentnosti uslova (i) i (ii) iz Teoreme 5.5.20, možemo zaključiti da je $a \prec^{\oplus} b$ ako i samo ako je $b - a \prec^{\oplus} b$. Ali ovo ne važi čak i u slučaju kompleksnih matrica, videti [9].

Koristeći Teoremu 5.5.20, možemo okarakterisati skup svih elemenata b većih od $a \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ u odnosu na jezgarno parcijalno uređenje:

$$a \prec^{\oplus} b \iff b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}_{\mathrm{lp}(a) \times p_a} \iff b = a + (1 - \mathrm{lp}(a))x(1 - p_a),$$

gde su $b_1 \in (1 - \mathrm{lp}(a))R(1 - p_a)$ i $x \in R$ proizvoljni.

Napomena 5.5.22. Pretpostavimo sada da je $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$, $A, B \in I_H$, gde je H Hilbertov prostor i posmatrajmo Teoremu 5.5.20. Neka je $E_1 = \mathrm{lp}(A)$, $E_2 = \mathrm{lp}(B - A) = \mathrm{lp}(B) - \mathrm{lp}(A)$, $E_3 = 1 - \mathrm{lp}(B)$ i $F_1 = P_A$, $F_2 = P_B - P_A$, $F_3 = I - P_B$. Slično kao za zvezda uređenje, na strani 131, dobijamo da je

$$H = \overline{\mathrm{Im}\, A} \ominus \overline{\mathrm{Im}\,(B - A)} \ominus \mathrm{Ker}\, B^*.$$

Kako je ${}^\circ F_1 = {}^\circ A$, $P_B^\circ = B^\circ$, dobijamo da je $\mathrm{Im}\, F_1 = \overline{\mathrm{Im}\, A}$ i $\mathrm{Im}\, F_3 = \mathrm{Ker}\, P_B = \mathrm{Ker}\, B$. Zbog toga je

$$H = \overline{\mathrm{Im}\, A} \oplus \mathrm{Im}\,(P_B - P_A) \oplus \mathrm{Ker}\, B.$$

Dalje, kako je $A^\circ = F_1^\circ$, to je

$$\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, F_1 = \mathrm{Im}\, F_2 \oplus \mathrm{Im}\, F_3 = \mathrm{Im}\,(P_B - P_A) \oplus \mathrm{Ker}\, B.$$

Takođe, iz $(B - A)^\circ = F_2^\circ$ zaključujemo da je

$$\mathrm{Ker}\,(B - A) = \mathrm{Ker}\, F_2 = \mathrm{Im}\, F_1 \oplus \mathrm{Im}\, F_3 = \overline{\mathrm{Im}\, A} \oplus \mathrm{Ker}\, B.$$

Sada smo u poziciji da preformulišemo Teoremu 5.5.20.

Teorema 5.5.23. *Neka su $A, B \in I_H$, gde je H Hilbertov prostor. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) $A \prec^{\oplus} B$;

(2)

$$\begin{aligned} H &= \overline{\mathrm{Im}\, A} \oplus \mathrm{Im}\,(P_B - P_A) \oplus \mathrm{Ker}\, B, \\ H &= \overline{\mathrm{Im}\, A} \ominus \overline{\mathrm{Im}\,(B - A)} \ominus \mathrm{Ker}\, B^* \end{aligned}$$

i

$$A, B : \overline{\mathrm{Im}\, A} \oplus \mathrm{Im}\,(P_B - P_A) \oplus \mathrm{Ker}\, B \to \overline{\mathrm{Im}\, A} \ominus \overline{\mathrm{Im}\,(B - A)} \ominus \mathrm{Ker}\, B^*$$

imaju sledeće matrične reprezentacije

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gde su $A_1 : \overline{\mathrm{Im}\, A} \to \overline{\mathrm{Im}\, A}$ i $B_1 : \mathrm{Im}\,(P_B - P_A) \to \overline{\mathrm{Im}\,(B - A)}$ injektivni ograničeni operatori i uz to važi da je $\overline{\mathrm{Im}\, A_1} = \overline{\mathrm{Im}\, A}$ i $\overline{\mathrm{Im}\, B_1} = \overline{\mathrm{Im}\,(B - A)}$.

Indeks simbola i pojmova

Literatura

[1] P. Ara and P. Menal. On regular rings with involution. *Arch. Math.*, 42:126–130, 1984.

[2] G. Azumaya. Strongly π regular rings. *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I*, 13(1):34–39, 1954.

[3] J. K. Baksalary. A relationship between the star and minus orderings. *Linear Algebra Appl.*, 82:163–167, 1986.

[4] J. K. Baksalary, O. M. Baksalary, and X. Liu. Further properties of the star, left-star, right-star, and minus partial orderings. *Linear Algebra Appl.*, 375:83–94, 2003.

[5] J. K. Baksalary and F. Pukelsheim. On the Löwner, minus, and star partial orderings of nonnegative definite matrices and their squares. *Linear Algebra Appl.*, 151:135–141, 1991.

[6] J. K. Baksalary, F. Pukelsheim, and G. P. Styan. Some properties of matrix partial orderings. *Linear Algebra Appl.*, 119:57–85, 1989.

[7] J.K. Baksalary and J. Hauke. A further algebraic version of Cochran's theorem and matrix partial orderings. *Linear Algebra Appl.*, 127:157–169, 1990.

[8] J.K. Baksalary and S.K. Mitra. Left-star and right-star partial orderings. *Linear Algebra Appl.*, 149:73–89, 1991.

[9] O. M. Baksalary and G. Trenkler. Core inverse of matrices. *Linear Multilinear Algebra*, 58(6):681–697, 2010.

[10] R. B. Bapat, S. K. Jain, and L. E. Snyder. Nonnegative idempotent matrices and minus partial order. *Linear Algebra Appl.*, 261:143–154, 1997.

[11] B. Barnes. Majorization, range inclusion, and factorization for bounded linear operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133(1):155–162, 2005.

[12] A. Ben-Israel. The Moore of the Moore-Penrose inverse. *Electron. J. Linear Algebra*, 9:150–157, 2002.

[13] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville. *Generalized inverses: theory and applications.* Springer, New York, 2 edition, 2003.

[14] Benjamin Peirce. http://en.wikipedia.org/wiki/Benjamin_Peirce. Accessed: 2014-11-18.

[15] S. K. Berberian. *Baer *-rings.* Springer-Verlag, 1972.

[16] A. Bjerhammar. Application of calculus of matrices to method of least squares; with special reference to geodetic calculations. *Trans. Roy. Inst. Tech. Stockholm*, 49, 1951.

[17] B. Blackwood, S. K. Jain, K. M. Prasad, and A. K. Srivastava. Shorted operators relative to a partial order in a regular ring. *Comm. Algebra*, 37(11):4141–4152, 2009.

[18] R. Bott and R. J. Duffin. On the algebra of networks. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 74:99–109, 1953.

[19] S. R. Caradus. *Inverses of rank invariant powers of a matrix.* Queen's paper in pure and applied mathematics, Queen's University, Kingston, ON, 1978.

[20] W. Chen. On ep elements, normal elements and partial isometries in rings with involution. *Electron. J. Linear Algebra*, 23:553–561, 2012.

[21] A. H. Clifford and G. B. Preston. *The algebraic theory of semigroups, vol. 1.* Amer. Math. Soc., 1961.

[22] R. E. Cline. Inverses of rank invariant powers of a matrix. *SIAM J. Numer. Anal.*, 5(1):182–197, 1968.

[23] Peirce decomposition. http://planetmath.org/peircedecomposition. Accessed: 2014-12-27.

[24] D. S. Djordjević and J. J. Koliha. Characterizations of hermitian, normal and EP operators. *Filomat*, 21(1):39–54, 2007.

[25] D. S. Djordjević, D. S. Rakić, and J. Marovt. Minus partial order in Rickart rings. (na recenziji).

[26] D. S. Djordjević and V. Rakočević. *Lectures on generalized inverses.* Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš, 2008.

[27] D. S. Djordjević and P. S. Stanimirović. General representations of pseudo inverses. *Mat. Vesnik.*, 51(3-4):69–76, 1999.

[28] D. S. Djordjević and Y. Wei. Outer generalized inverses in rings. *Comm. Algebra*, 33:3051–3060, 2005.

[29] G. Dolinar, A. Guterman, and J. Marovt. Monotone transformations on $B(H)$ with respect to the left-star and the right-star partial order. *Math. Inequal. Appl.*, 17:573–589, 2014.

[30] G. Dolinar and J. Marovt. Star partial order on $B(H)$. *Linear Algebra Appl.*, 434:319–326, 2011.

[31] R. G. Douglas. On majorization, factorization, and range inclusion of operators on hilbert space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 17(2):413–415, 1966.

[32] M. P. Drazin. Pseudo-inverses in associative rings and semigroups. *Amer. Math. Monthly*, 65(7):506–514, 1958.

[33] M. P. Drazin. Natural structures on semigroups with involution. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84(1):139–141, 1978.

[34] M. P. Drazin. A class of outer generalized inverses. *Linear Algebra Appl.*, 436:1909–1923, 2012.

[35] M. A. Efimov. On the $\overset{\sharp}{\leqslant}$-order on the set of linear bounded operators in Banach space. *Math. Notes*, 93(5):784–788, 2013.

[36] Е. С. Ляпин. Полугруппы. Физматгиз, Москва, 1960.

[37] Conditions for internal ring direct sum. `https://proofwiki.org/wiki/Conditions_for_Internal_Ring_Direct_Sum`. Accessed: 2014-10-31.

[38] H. Goller. Shorted operators and rank decomposition matrices. *Linear Algebra Appl.*, 81:207–236, 1986.

[39] G. M. S. Gomes. On left quasinormal orthodox semigroups. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 95(1–2):59–71, 1983.

[40] K. R. Goodearl. *Von Neumann regular rings.* Pitman Publishing Limited, 1979.

[41] J. Groß. A note on the rank-subtractivity ordering. *Linear Algebra Appl.*, 289(1-3):151–160, 1999.

[42] A. Grothendieck. *Topological vector spaces.* Gordeon and Breach, 1973.

[43] P. R. Halmos. *A Hilbert space problem book.* Springer-Verlag, 2 edition, 1982.

[44] R. Harte. *Invertibility and Singularity for Bounded Linear Operators.* M. Dekker, 1988.

[45] R. Harte and M. Mbekhta. On generalized inverses in C^*-algebras. *Studia Math.*, 103(1):71–77, 1992.

[46] R. E. Hartwig. How to partially order regular elements. *Math. Japon.*, 25:1–13, 1980.

[47] R. E. Hartwig and K. Spindelböck. Matrices for wich a^* and $a^\dagger$ commute. *Linear Multilinear Algebra*, 14:241–256, 1984.

[48] R. E. Hartwig and G. P. H. Styan. On some characterizations of the "star" partial ordering for matrices and rank subtractivity. *Linear Algebra Appl.*, 82:145–161, 1986.

[49] R.E. Hartwig. 1-2 inverses and the invariance of ba^+c. *Linear Algebra Appl.*, 11:271–275, 1975.

[50] J. B. Hickey. Semigroups under a sendwich operation. *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, 26:371–382, 1983.

[51] P. M. Higgins. The Mitsch order on a semigroup. *Semigroup Forum*, 49:261–266, 1994.

[52] N. Jacobson. *Structure of rings.* Amer. Math. Soc., 1986.

[53] S. K. Jain and K. M. Prasad. Right-left symmetry of $ar \oplus br = (a + b)r$ in regular rings. *Pure Appl. Algebra*, 133:141–142, 1998.

[54] Shani Jose and K. C. Sivakumar. On partial orders of Hilbert space operators. *Linear Multilinear Algebra*, 2014. DOI: 10.1080/03081087.2014.942248.

[55] I. Kaplansky. *Rings of operators.* W. A. Benjamin, 1968.

[56] Lj. Kočinac. *Linearna algebra i analitička geometrija.* Prosveta, Niš, 2. izdanje, 1997.

[57] J. J. Koliha, D. Djordjević, and D. Cvetković. Moore-Penrose inverse in rings with involution. *Linear Algebra Appl.*, 426:371–381, 2007.

[58] J. J. Koliha and V. Rakočević. Invertibility of the sum of idempotents. *Linear Multilinear Algebra*, 50(4):285–292, 2002.

[59] J. J. Koliha and V. Rakočević. Invertibility of the difference of idempotents. *Linear Multilinear Algebra*, 51(1):97–110, 2003.

[60] J. J. Koliha and V. Rakočević. Range projections and the Moore-Penrose inverse in rings with involution. *Linear Multilinear Algebra*, 55(2):103–112, 2007.

[61] Carlos S. Kubrusly. *The elements of operator theory.* Birkhäuser, 2 edition, 2011.

[62] T. Y. Lam. *A first course in noncommutative rings.* Springer-Verlag, 1991.

[63] L. Lebtahi, P. Patrício, and N. Thome. The diamond partial order in rings. *Linear Multilinear Algebra*, 62(3):386–395, 2014.

[64] P. Legiša. Automorphisms of M_n, partially ordered by rank subtractivity ordering. *Linear Algebra Appl.*, 389:147–158, 2004.

[65] X. Liu, J. Benítez, and J. Zhong. Some results on partial ordering and reverse order law of elements of C^*-algebras. *J. Math. Anal. Appl.*, 370:295–301, 2010.

[66] S. B. Malik. Some more properties of core partial order. *Appl. Math. Comput.*, 221:192–201, 2013.

[67] S. B. Malik, L. Rueda, and N. Thome. Further properties on the core partial order and other matrix partial orders. *Linear Multilinear Algebra*, 62(12):1629–1648, 2014.

[68] J. Marovt. On partial orders in Rickart rings. *Linear Multilinear Algebra*, 2014. DOI: 10.1080/03081087.2014.972314.

[69] J. Marovt, D. S. Rakić, and D. S. Djordjević. Star, left-star, and right-star partial orders in Rickart $*$-rings. *Linear Multilinear Algebra*, 63(2):343–365, 2015.

[70] X. Mary. On generalized inverses and Green's relations. *Linear Algebra Appl.*, 434:1836–1844, 2011.

[71] J. Mielniczuk. Note on the core matrix partial ordering. *Discusiones Math. Probability and Statistics*, 31:71–75, 2011.

[72] S. K. Mitra. Fixed rank solutions of linear matrix equations. *Sankhyā Ser. A*, 34(4):387–392, 1972.

[73] S. K. Mitra. The minus partial order and the shorted matrix. *Linear Algebra Appl.*, 83:1–27, 1986.

[74] S. K. Mitra. On group inverses and the sharp order. *Linear Algebra Appl.*, 92:17–37, 1987.

[75] S. K. Mitra. Infimum of a pair of matrices. *Linear Algebra Appl.*, 105:163–182, 1988.

[76] S. K. Mitra. Matrix partial orders through generalized inverses: unified theory. *Linear Algebra Appl.*, 148:237–263, 1991.

[77] S. K. Mitra, P. Bhimasankaram, and S. B. Malik. *Matrix partial orders, shorted operators and applications.* World Scientific, 2010.

[78] S. K. Mitra and P. L. Odell. On parallel summability of matrices. *Linear Algebra Appl.*, 74:239–255, 1986.

[79] H. Mitsch. A natural partial order for semigroups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 97(3):384–388, 1986.

[80] E. H. Moore. On the reciprocal of the general algebraic matrix. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 26:394–395, 1920.

[81] D. Mosić, D. S. Djordjević, and J. J. Koliha. Ep elements in rings. *Linear Algebra Appl.*, 431:527–535, 2009.

[82] B. Načevska and D. S. Djordjević. Inner generalized inverses with prescribed idempotents. *Comm. Algebra*, 39:634–646, 2011.

[83] K. S. S. Nambooripad. The natural partial order on a regular semigroup. *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 23:249–260, 1980.

[84] P. Patrício. The Moore-Penrose inverse of a companion matrix. *Linear Algebra Appl.*, 437:870–877, 2012.

[85] P. Patrício and R. Puystjens. Drazin-Moore-Penrose invertibility in rings. *Linear Algebra Appl.*, 389:159–173, 2004.

[86] R. Penrose. A generalized inverse for matrices. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 51:406–413, 1955.

[87] K. Manjunatha Prasad and K. S. Mohana. Core-EP inverse. *Linear Multilinear Algebra*, 62(6):792–802, 2014.

[88] G. B. Preston. Inverse semi-groups. *J. London Math. Soc.*, s1-29(4):396–403, 1954.

[89] D. S. Rakić. Direct sum and decomposition of the identity. neobjavljen rukopis.

[90] D. S. Rakić. A note on Rao and Mitra's constrained inverse and Drazin's (b, c) inverse. (na recenziji).

[91] D. S. Rakić. Decomposition of a ring induced by minus partial order. *Electron. J. Linear Algebra*, 23:1040–1059, 2012.

[92] D. S. Rakić. Generalization of sharp and core partial order using annihilators. *Banach J. Math. Anal.*, 9(3):228–242, 2015.

[93] D. S. Rakić, N. Č. Dinčić, and D. S. Djordjević. Core inverse and core partial order of Hilbert space operators. *Appl. Math. Comput.*, 244:283–302, 2014.

[94] D. S. Rakić, N. Č. Dinčić, and D. S. Djordjević. Group, Moore-Penrose, core and dual core inverse in rings with involution. *Linear Algebra Appl.*, 463:115–133, 2014.

[95] D. S. Rakić and D. S. Djordjević. Star, sharp, core and dual core partial order in rings with involution. (na reviziji).

[96] D. S. Rakić and D. S. Djordjević. Space pre-order and minus partial order for operators on banach spaces. *Aequationes Math.*, 85:429–448, 2013.

[97] D. S. Rakić and D. S. Djordjević. Partial orders in rings based on generalized inverses – unified theory. *Linear Algebra Appl.*, 471:203–223, 2015.

[98] V. Rakočević. *Funkcionalna analiza.* Naučna knjiga, Beograd, 1994.

[99] C. R. Rao and S. K. Mitra. *Generalized inverse of matrices and its applications.* John Wiley & Sons Inc, 1971.

[100] C. R. Rao and S. K. Mitra. Generalized inverse of a matrix and its applications. *Proc. Sixth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob.*, 1:601–620, 1972.

[101] C. R. Rao, S. K. Mitra, and P. Bhimasankaram. Determination of a matrix by its subclasses of generalized inverses. *Sankhyā Ser. A.*, 34(1):5–8, 1972.

[102] K. P. S. Bhaskara Rao. *The theory of generalized inverses over commutative rings.* Taylor and Francis, 2002.

[103] C. E. Rickart. *General theory of Banach algebras.* Krieger publishing co., inc., 1974.

[104] P. Sambamutry. Characterization of a matrix by its subclass of g-inverses. *Sankhyā Ser. A.*, 49(3):412–414, 1987.

[105] P. Šemrl. Automorphisms of $B(H)$ with respect to minus partial order. *J. Math. Anal. Appl.*, 369:205–213, 2010.

[106] Direct sum of closed orthogonal subspaces. `http://math.stackexchange.com/questions/435588/direct-sum-of-orthogonal-subspaces`. Accessed: 2014-11-17.

[107] Direct sums and complemented subspaces. `https://www0.maths.ox.ac.uk/system/files/coursematerial/2014/3119/26/Chapter_1.pdf`. Accessed: 2014-11-18.

[108] Y. Tian. Solving a minus partial ordering equation over von Neumann regular rings. *Rev. Mat. Complut.*, 24:335–342, 2011.

[109] Y. Tian and S. Cheng. The maximal and minimal ranks of $a-bxc$ with applications. *New York J. Math.*, 9:345–362, 2003.

[110] M. Tošić and D. S. Cvetković-Ilić. Invertibility of a linear combination of two matrices and partial orderings. *Appl. Math. Comput.*, 218:4651–4657, 2012.

[111] N. S. Urquhart. Computation of generalized inverse matrices which satisfy specified conditions. *SIAM Review*, 10:216–218, 1968.

[112] J. von Neumann. On regular rings. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 22(12):707–713, 1936.

[113] V. V. Wagner. Generalised groups. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 84:1119–1122, 1952. (Russian) English translation.

Biografija autora

Dragan Rakić je je rođen 10. 05. 1983. godine u Nišu. Osnovnu školu "Vožd Karađorđe" i Gimnaziju "Svetozar Marković" je završio u Nišu kao nosilac diplome "Vuk Karadžić". Na republičkom takmičenju iz matematike u 2. razredu srednje škole je osvojio drugu nagradu. Takođe je bio učesnik saveznih takmičenja iz matematike od 2. do 4. razreda.

Godine 2008. je diplomirao na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu, na odseku za matematiku, sa prosečnom ocenom 9,89. Na istom fakultetu je 2008. godine upisao doktorske studije iz matematike. Položio je sve ispite sa prosečnom ocenom 10.

Od 2013. godine radi kao asistent na Mašinskom fakultetu u Nišu. Školske 2012/2013. godine je predavao matematiku isturenim odeljenjima 7. i 8. razreda pri Gimnaziji "Svetozar Marković". Od 2009. do 2011. godine je radio kao istraživač na projektu Ministarstva za nauku pod nazivom "Numerička linearna algebra, stohastika i statistika sa primenama", a od 2011. godine radi kao istraživač na projektu "Funkcionalna analiza, stohastička analiza i primene". Autor je 7 naučnih radova sa SCI liste.

Tokom školovanja je nekoliko puta bio stipendista Ministarstva prosvete i nauke i opštine grada Niša, a bio je i dobitnik Eurobank EFG stipendije namenjene najboljim studentima Srbije. Od 2004. godine je pitomac humanitarnog fonda "Privrednik".

Bibliografija autora

Radovi iz kategorije M21

1. D. S. Rakić, Generalization of sharp and core partial order using annihilators, *Banach J. Math. Anal.* 9(3): 228-242, 2015.

2. D. S. Rakić, N. Č. Dinčić, D. S. Djordjević, Core inverse and core partial order of Hilbert space operators, *Appl. Math. Comput*, 244: 283-302, 2014.

3. D. S. Rakić, Decomposition of a ring induced by minus partial order, *Electron. J. Linear Algebra*, 23: 1040-1059, 2012.

Radovi iz kategorije M22

4. D. S. Rakić, D. S. Djordjević, Partial orders in rings based on generalized inverses - unified theory, *Linear Algebra Appl.* 471: 203-223, 2015.

5. J. Marovt, D. S. Rakić, D. S. Djordjević, Star, left-star, and right-star partial orders in Rickart *-rings, *Linear Multilinear Algebra*, 63(2): 343-365, 2015.

6. D. S. Rakić, N. Č. Dinčić, D. S. Djordjević, Group, Moore-Penrose, core and dual core inverse in rings with involution, *Linear Algebra Appl.* 463: 115-133, 2014.

Rad iz kategorije M23

7. D. S. Rakić, D. S. Djordjević, Space pre-order and minus partial order for operators on Banach spaces, *Aequationes Math.* 85: 429-448, 2013.

Rad na reviziji

8. D. S. Rakić, D. S. Djordjević, Star, sharp, core and dual core partial order in rings with involution

Radovi na recenziji

9. D. S. Rakić, A note on Rao and Mitra's constrained inverse and Drazin's (b,c) inverse

10. D. S. Djordjević, D. S. Rakić, J. Marovt, Minus partial order in Rickart rings

Прилог 1.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

Парцијална уређења одређена уопштеним инверзима и анулаторима

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација, ни у целини, ни у деловима, није била предложена за добијање било које дипломе, према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

У Нишу, 27.12.2014

Аутор дисертације: Драган Ракић

Потпис докторанда:

Драган Ракић

Прилог 2.

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Име и презиме аутора: Драган Ракић

Студијски програм: Математика

Наслов рада: Парцијална уређења одређена уопштеним инверзима и анулаторима

Ментор: др Драган Ђорђевић, редовни професор

Изјављујем да је штампана верзија моје докторске дисертације истоветна електронској верзији, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 27.12.2014.

Аутор дисертације: Драган Ракић

Потпис докторанда:

Прилог 3.

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да, у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

Parcijalna uređenja određena uopštenim inverzima i anulatorima

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство – некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да подвучете само једну од шест понуђених лиценци; кратак опис лиценци је у наставку текста).

У Нишу, 27. 12. 2014.

Аутор дисертације: Dragan Rakić

Потпис докторанда:

Драган Ракић