УНИВЕРЗИТЕТ
У НИШУ

Универзитетска
Библиотека
"Никола Тесла"

UNIVERSITY
OF NIŠ

University
Library
"Nikola Tesla"

ДИГИТАЛНИ
РЕПОЗИТОРИЈУМ
УНИВЕРЗИТЕТА
У НИШУ

Библиотека
Дисертације

DIGITAL
REPOSITORY
OF THE UNIVERSITY
OF NIŠ

Ph.D. Theses

UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
ODSEK ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Nebojša Č. Dinčić

UOPŠTENI INVERZI PROIZVODA OPERATORA

Doktorska disertacija

Niš, 2011.

PODACI O AUTORU

Nebojša Dinčić je rođen 21.3.1983. godine u Surdulici. Osnovnu školu završio je u Surdulici sa Vukovom diplomom. Gimnaziju je zavrio u Surdulici, takođe sa Vukovom diplomom.

Studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu, na Odseku za matematiku i informatiku, smer Diplomirani matematičar za računarstvo i informatiku, upisao je školske 2001/2002. godine. Diplomirao je u septembru 2006. godine sa prosečnom ocenom 9,11.

Školske 2007/2008. godine upisao je doktorske studije iz matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Nišu.

Od 2007. radi na projektu Ministarstva prosvete i sporta kao istraživač pripravnik. U zvanje istraživač saradnik izabran je 2010. godine. Od 2011. godine radi kao asistent na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Nišu.

Ima višegodišnje iskustvo sa držanjem vežbi iz predmeta Matematička analiza I i Matematička analiza II, zatim Linearna algebra, Osnovi Furijeove analize i Teorija fiksne tačke i primene.

Do sada je objavio sledeće naučne radove:

1. N. Č. Dinčić, *Matrix splittings and generalized inverses*, Publ. Math. Debrecen, 74/3-4 (2009), 233-247

2. Dragan S. Djordjević and Nebojša Č. Dinčić, *Reverse order law for the Moore-Penrose inverse*, J. Math. Anal. Appl. 361 (1) (2010), 252-261.

Učestvovao je izlažući radove na nekoliko konferencija: 12th Serbian Mathematical Congress (Novi Sad, Serbia, 2008), Functional Analysis and Its Applications (Niš, Serbia, 2009), 16th Conference of the International Linear Algebra Society-ILAS (Pisa, Italy, 2010).

NAUČNI DOPRINOS DISERTACIJE

U ovoj disertaciji izloženi su originalni rezultati koji se mogu podeliti u dve celine. Najpre se na dva različita načina uvodi razlaganje elemenata iz klase kvadratnih singularnih kompleksnih matrica indukovano uopštenim inverzima, koje se potom koristi u konstruktivnom dokazu Hartove teoreme. Narednu celinu čine rezultati koji se odnose na razne zakone obrnutog redosleda za Mur-Penrouzov inverz proizvoda dva ili više ograničenih operatora na Hilbertovim prostorima. Ispitivani su uslovi pod kojima oni važa, relacije među njima kao i razni identiteti povezani sa zakonima obrnutog redosleda. Popravljeni su rezultati koji važe za kompleksne matrice, s tim što se pri dokazivanju koristi metod operatorskih matrica u odnosu na odgovarajuća razlaganja prostora, umesto metoda matričnih rangova koji je ovde neprimenljiv.

UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
ODSEK ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Nebojša Č. Dinčić

UOPŠTENI INVERZI PROIZVODA OPERATORA

Doktorska disertacija

Mentor
Prof. dr Dragan S. Đorđević

Niš, 2011.

Sadržaj

Predgovor

U ovoj doktorskoj disertaciji izloženi su novi i originalni rezultati iz teorije uopštenih inverza. To se pre svega odnosi na radove [96] i [31], dok su ostali rezultati još uvek u preprintu.

Uopšteni (generalisani) inverzi predstavljaju deo funkcionalne analize i linearne algebre koji se razvijao tokom XX veka, proizašao iz praktičnih problema vezanih za integralne i diferencijalne jednačine, da bi se kasnije prešlo na kompleksne matrice, operatore na Banahovim[1] i Hilbertovim[2] prostorima, odnosno elemente prstena s involucijom, Banahovih i C^*-algebri. Izučavaju se teorijski aspekti, ali i numerički deo povezan sa izračunavanjima i mogućnostima praktične primene.

Prvo poglavlje je pre svega uvodnog tipa. U sekciji 1.1, da bi se izbegle zabune oko simbola i terminologije, uvode se (uglavnom uobičajene) oznake i pojmovi koji će biti korišćeni. Sekcija 1.2 bavi se ukratko problemom invertibilnosti u algebarskim strukturama, dok se u sekcijama 1.3 i 1.4 mogu naći osnovne informacije o uopštenim inverzima kompleksnih matrica odnosno operatora na Hilbertovim prostorima. Više o istorijatu uopštenih inverza i samog zakona obrnutog redosleda može se naći u sekciji 1.5,

Drugo poglavlje bavi se razlaganjem kompleksnih matrica primenom uopštenih inverza. Posle neophodnih uvodnih napomena, prvo definišemo razlaganje klase kvadratnih kompleksnih matrica primenom uopštenih inverza. Samo razlaganje može se izvesti na dva načina:

[1]Stefan Banach (1892-1945), poljski matematičar, osnivač moderne funkcionalne analize i začetnik Lvovske matematičke skole

[2]David Hilbert (1862–1943), nemački matematičar, jedan od osnivača funkcionalne analize

klasični, preko Žordanove[3] normalne forme, i novi, korišćenjem koncepta kondijagonalizabilnosti, koji je uveden u radu Ikramova [45]. Zatim se vrši povezivanje sa Hartovom[4] teoremom [39] i daje se njen konstruktivni dokaz primenom uvedenog razlaganja; na kraju se ispituju osobine dobijenog razlaganja. Rezultati iz ovog poglavlja predstavljaju originalne rezultate, i objavljeni su 2009. godine [96].

Potom se prelazi na razmatranje problema vezanih za zakon obrnutog redosleda za Mur-Penrouzov inverz linearnih operatora na Hilbertovim prostorima. Na samom početku trećeg poglavlja nalazi se kraći osvrt na sam zakon obrnutog redosleda raznih uopštenih inverza u algebarskim strukturama, kao i njegove različite varijante. Nešto više o istorijskom osvrtu na zakon obrnutog redosleda može se naći u sekciji 1.4. Rezultati koji slede u trećem i četvrtom poglavlju uglavnom predstavljaju poboljšanje rezultata iz [85][86][87][88] [89] za kompleksne matrice. Budući da su u tim radovima korišćeni uglavnom metodi zasnovani na matričnim rangovima, neprimenljivi u slučaju operatora na Hilbertovim prostorima, bio je potreban originalan metod: iskorišćene su osobine matrica operatora, i ukratko su opisane u sekciji 3.1.

U sekciji 3.2 izloženi su rezultati vezani za određene zakone obrnutog redosleda za Mur-Penrouzov inverz. Ti originalni rezultati objavljeni su 2010. [31], i predstavljaju uopštenje rezultata do kojih je došao Tian [85] 2004. za kompleksne matrice.

Sekcija 3.3 bavi se identitetima koji se javljaju pri izučavanju zakona obrnutog redosleda za Mur-Penrouzov inverz proizvoda dva odnosno tri operatora. Reč je o uopštenju rezultata do kojih su 2004. došli Tian i Čeng [89] za kompleksne matrice, kao i uopštenju jednog klasičnog rezultata do kojeg je došao Kline [20], još 1964.

Poglavlje 4. bavi se raznim zakonima obrnutog redosleda mešovitog tipa za Mur-Penrouzov inverz proizvoda operatora. U sekciji 4.1. razmatraju se uslovi pod kojima važi zakon obrnutog redosleda oblika $(AB)^\dagger = B^\dagger(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger A^\dagger$ za operatore, čime se uopštavaju rezultati do kojih je 2005. došao Tian [86]. U sekciji 4.2 dati su originalni rezultati vezani za različite ekvivalentne oblike osnovnog zakona obrnutog redosleda $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$, koji predstavljaju uopštenje rezultata koje je

[3] Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922), francuski matematičar

[4] Robin Harte, savremeni irski matematičar

2006. objavio Tian [87], za kompleksne matrice.

Konačno, u sekciji 4.3 mogu se naći ekvivalentni oblici raznih oblika zakona obrnutog redosleda za određene forme proizvoda tri operatora, koji predstavljaju originalna uopštenja Tianovih rezultata [88], objavljenih 2007.

Autor je pokušao da smisaone, pravopisne i gramatičke greške koliko je bilo moguće izbegne.

Želim da se zahvalim svom mentoru, profesoru Draganu S. Đorđeviću, na podršci, saradnji i brojnim korisnim savetima i primedbama koji su vešto usmeravali moj naučni rad i doprineli da ova disertacija bude kvalitetnija, a da moja malenkost sazreva kao matematičar.

Posebno bih se zahvalio svojim roditeljima na bezrezervnoj podršci koja mi mnogo znači.

Glava 1

Uvod

1.1 Oznake i pojmovi

Sa $\mathbf{C}^{m\times n}$ označavaćemo skup svih matrica formata $m\times n$ nad poljem kompleksnih brojeva. Ukoliko želimo da naglasimo da posmatramo samo matrice ranga tačno r (gde $r\leq\min\{m,n\}$), koristićemo oznaku $\mathbf{C}_r^{m\times n}$. Koristićemo oznake A^T, A^*, $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{N}(A)$ i $r(A)$ za transponovanu, odnosno adjungovanu matricu matrice A, prostor kolona (sliku), jezgro i rang matrice A, redom. Dimenziju potprostora T označavaćemo sa $\dim T$. Sa $\langle .,.\rangle$ označavaće se standardni skalarni proizvod na $\mathbf{C}^n$.

Kvadratna kompleksna matrica je ermitska ako $A=A^*$, normalna ukoliko $AA^*=A^*A$, a unitarna ako $A^*=A^{-1}$. Ako za kvadratnu kompleksnu matricu A važi $\mathcal{R}(A)=\mathcal{R}(A^*)$, ekvivalentno, $\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}(A^*)$, tada je A matrica ermitskog ranga (ili EP-matrica). Prema drugoj karakterizaciji, to je matrica koja komutira sa svojim Mur-Penrouzovim inverzom (za definiciju Mur-Penrouzovog inverza videti poglavlje 1.3).

Broj $\lambda\in\mathbf{C}$ je sopstvena vrednost matrice $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$, ako važi $Ax=\lambda x$, za neki nenula vektor $x\in\mathbf{C}^n$ (koji se naziva sopstveni vektor). Spektar matrice A predstavlja skup svih sopstvenih vrednosti matrice A i označava se sa $\sigma(A)$. Ermitska matrica $H\in\mathbf{C}^{n\times n}$ je pozitivno semidefinitna, ako $\langle Hx,x\rangle>0$, za sve $x\in\mathbf{C}^n$, odnosno ako su sopstvene vrednosti matrice H nenegativne. Spektralna norma matrice A, u oznaci $||A||$, je kvadratni koren najveće sopstvene vrednosti pozitivno-semidefinitne matrice AA^* (ekvivalentno, A^*A). Spektralni radijus kvadratne matrice A, u oznaci $\rho(A)$, je sopstvena vrednost matrice A koja je najveća po modulu. Kvadratna matrica A je nilpotentna, ako postoji neko $k \in \mathbf{N}$ tako da $A^k = 0$. Indeks matrice $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, u oznaci $ind(A)$, je najmanji $k \in \mathbf{N}$ za koji $r(A^{k+1}) = r(A^k)$.

Žordanova matrica reda $k \in \mathbf{N}$ je matrica:

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Nula-Žordanov blok je matrica:

$$J_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}.$$

Neka su X i Y proizvoljni Banahovi prostori. Sa $\mathcal{L}(X,Y)$ označavamo skup svih ograničenih linearnih operatora iz X u Y; u slučaju da $X = Y$ koristimo zapis $\mathcal{L}(X)$. Poznato je da $\mathcal{L}(X)$ predstavlja Banahovu algebru ograničenih linearnih operatora.

Neka je $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Nula-prostor (jezgro) operatora A, u oznaci $\mathcal{N}(A)$, je skup $\mathcal{N}(A) = \{x \in X : Ax = 0\}$. Slika operatora A, u oznaci $\mathcal{R}(A)$, je skup $\mathcal{R}(A) = \{Ax : x \in X\}$. Neka nadalje X i Y budu Hilbertovi prostori, sem ako nije drugačije rečeno. Sa A^* označavaćemo adjungovani operator operatora $A \in \mathcal{L}(X,Y)$; ukoliko je $A = A^*$, operator A je ermitski. Operator $P \in \mathcal{L}(X)$ je projektor, ako je $P^2 = P$. Ukoliko važi još i $P = P^*$, onda je P ortogonalni projektor. Sa $L \oplus M$ označićemo ortogonalnu direktnu sumu potprostora L i M Hilbertovog prostora X. Ukoliko je $P \in \mathcal{L}(X)$ ortogonalni projektor, tada je njegova slika zatvorena, i $\mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P) = X$.

1.2 Problem invertibilnosti

U opštim algebarskim strukturama ideja inverznog elementa uopštava koncept suprotnog elementa kod sabiranja, odnosno recipročnog elementa kod množenja. Pojam inverza može se uopštiti na dva načina: preko pojma jediničnog elementa ili izostavljanjem jediničnog elementa ali uz očuvanje asocijativnosti.

Grupoid s jedinicom

Neka je e jedinični element grupoida $(S, *)$. Ako za $a, b \in S$ važi $a*b = e$, tada je a levi inverz od b, a b je desni inverz od a. Ako je x i levi i desni inverz od y, onda je x (dvostrani) inverz od y, i y je invertibilan.

Kako $(S, *)$ može imati i više levih ili desnih jedinica, moguće je da neki element ima nekoliko levih i/ili desnih inverza. Ako je operacija $*$ asocijativna, tj. $(S, *)$ monoid, tada svaki element ima najviše jedan inverz i skup svih dvostrano invertibilnih elemenata formira grupu.

Polugrupa

U polugrupi S element $x \in S$ je (fon Nojman-) regularan ako postoji $z \in S$ tako da $xzx = x$; često se takvo z naziva pseudoinverz. Element y je inverz od x ako $xyx = x$ i $yxy = y$. Svaki regularni element ima bar jedan inverz: ako $x = xzx$, tada je $y = zxz$ inverz od x. Zatim, ako je y inverz od x, onda su $e = xy$ i $f = yx$ idempotenti, važi $ex = xf = x$ i $ye = fy = y$ što znači da e služi kao leva jedinica za x, a f kao desna; za y je obratno.

$U-$**polugrupe**

Prirodno uopštenje inverzne polugrupe dobija se definisanjem (proizvoljne) unarne operacije $^\circ$, takve da $(a^\circ)^\circ = a$ za sve $a \in S$; ovim S postaje $< 2, 1 >$ algebra, i naziva se $U-$polugrupa. Iako se čini da je a° inverz od a, to ne mora biti tačno. Da bismo dobili nešto važno, ova unarna operacija mora na određeni način da interaguje sa operacijom polugrupe.

Proučavane su dve važne klase polugrupa: $I-$**polugrupe** (sa aksiomom $aa^\circ a = a$) i $*-$**polugrupe** (sa aksiomom $(ab)^\circ = b^\circ a^\circ$, tzv. operacija involucije, u oznaci a^*). Obe ove polugrupe su inverzne. Potpuno regularne polugrupe su $I-$polugrupe gde $aa^\circ = a^\circ a$. Obratno, $*-$regularne polugrupe daju najznačajniji primer (jedinstvenog) pseudoinverza, Mur-Penrouzovog inverza. Tada a^* nije pseudoinverz, već je pseudoinverz od x jedinstveni element y takav da $xyx = x$, $yxy = y$,

$(xy)^* = y^*x^*$, $(yx)^* = x^*y^*$. Pošto $*-$regularne polugrupe uopštavaju inverzne, ovako definisan jedinstveni element naziva se uopšteni inverz ili Mur-Penrouzov inverz.

Primer: Kvadratna matrica M nad poljem K je invertibilna ako i samo ako je njena determinanata različita od nule. Kvadratna matrica nad komutativnim prstenom R je invertibilna ako i samo je njena determinanta invertibilna u R.

Nekvadratna matrica A tipa $m \times n$ potpunog ranga ($r(A) = m$ ili $r(A) = n$) ima jednostrane inverze: ako $m > n$, ima levi inverz $(A^TA)^{-1}A^T$, jer $(A^TA)^{-1}A^TA = I_n$; ako $m < n$, ima desni inverz $A^T(AA^T)^{-1}$, jer $AA^T(A^T)^{-1} = I_m$. Nijedna matrica ranga manjeg od $\min\{m, n\}$ nema (ni jednostrani) inverz, dok Mur-Penrouzov inverz postoji za sve matrice, i poklapa se sa levim, desnim ili pravim inverzom, ako oni postoje.

1.3 Uopšteni inverzi kompleksnih matrica

Poznato je da svaka nesingularna kvadratna matrica A formata $n \times n$ ima jedinstveni inverz, u oznaci A^{-1}, tako da važi

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n,$$

gde je I_n jedinična matrica. Kako se u praktičnim problemima javljaju i nesingularne i pravougaone matrice, bilo je neophodno naći određenu matricu za datu, tako da ona ima što više osobina običnih inverza. Dakle, pod uopštenim inverzom date matrice A podrazumeva se matrica X koja je povezana sa A na sledeći način:

a) postoji za klasu matrica opštiju od nesingularnih kvadratnih;

b) ima određena svojstva običnih inverza;

c) svodi se na A^{-1} kad je A invertibilna.

Američki matematičar Mur[1] je u periodu od 1910. do 1920. uveo i intenzivno izučavao uopšteni inverz (”general reciprocal”) matrice.

[1] Eliakim Hastings Moore (1862–1932)

Ciljeve svojih istraživanja Mur je u [60], str. 197, ovako formulisao: "The efectiveness of the reciprocal of a non-singular finite matrix in the study of properties of such matrices makes it desirable to define if possible an analogous matrix to be associated with each finite matrix κ^{12} even if κ^{12} is not square or, if square, is not necessarily nonsingular." (Efikasnost reciprociteta (inverza) nesingularne konačne matrice pri proučavanju osobina takvih matrica čini poželjnim definisanje, ako je to moguće, analogne matrice koja bi odgovarala proizvoljnoj kvadratnoj matrici κ^{12} čak i kada κ^{12} nije kvadratna, ili ako je kvadratna - ali ne i nesingularna.). Treba napomenuti da je čitanje originalnih Murovih radova veoma teško zbog specifičnih oznaka, videti [7], str. 370. Pored neizmernog doprinosa teoriji uopštenih inverza, Mur je imao značajan uticaj na istraživačke aktivnosti iz oblasti matematike u Americi. Kao ilustracija njegovog uticaja neka posluži sledeći podatak: dok je on radio na odseku za matematiku Univerziteta u Čikagu, proizvedeno je dvostruko više doktora nauka nego u bilo kojoj drugoj instituciji u Sjedinjenim Državama.

Penrouz je još 1955. pokazao da za svaku konačnu kompleksnu (kvadratnu ili pravougaonu) matricu $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$ postoji jedinstvena kompleksna matrica $X \in \mathbf{C}^{n\times m}$ koja zadovoljava sledeće četiri tzv. Penrouzove jednačine:

1) $AXA = A$;

2) $XAX = X$;

3) $(AX)^* = AX$;

4) $(XA)^* = XA$.

Iz istorijskih razloga, ovakav inverz naziva sa Mur-Penrouzov inverz matrice A, i označava sa $A^\dagger$.

Uopšteni inverzi koji zadovoljavaju samo neke od pomenute četiri jednačine imaju svoju primenu kod raznih tipova rešavanja linearnih sistema. Za njih ćemo koristiti oznake iz naredne definicije.

Za svaku matricu $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$ sa $A\{i,j,k\}$ označavaćemo skup svih matrica $X \in \mathbf{C}^{n\times m}$ koje zadovoljavaju jednačine (i),(j),(k) iz skupa

Penrouzovih jednačina. Matrica $X \in A\{i,j,k\}$ naziva se $\{i,j,k\}-$inverz od A, u oznaci $A^{(i,j,k)}$. Koristićemo i skraćeni zapis A^{θ} gde $\emptyset \neq \theta \subset \{1,2,3,4\}$.

Često se za $\{1\}$-inverz koristi termin unutrašnji inverz, za $\{2\}-$inverz spoljašnji, a za $\{1,2\}-$inverz refleksivni inverz.

Glavna primena $\{1\}-$inverza je pri rešavanju raznih linearnih sistema, gde se oni koriste na sličan način kao obični inverzi. Elementi klase $\{1,3\}-$inverza tesno su povezani sa rešenjima najmanjih kvadrata za linearni sistem $Ax = b$ u smislu da je $||Ax - b||$ najmanje kada $x = A^{(1,3)}b$, gde $A^{(1,3)} \in A\{1,3\}$. S druge strane, $\{1,4\}-$ inverzi povezani su sa rešenjima sa minimalnom normom na sledeći način: ako pomenuti sistem ima rešenja, ono rešenje za koje je $||x||$ najmanje je dato sa $x = A^{(1,4)}b$, gde $A^{(1,4)} \in A\{1,4\}$.

Među svim spoljašnjim inverzima poseban značaj ima onaj čija su slika i jezgro unapred zadati, jer se odgovarajućim izborom slike i jezgra mogu dobiti razni drugi inverzi:

Definicija 1.3.1 *Neka je $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$ ranga r, neka je T potprostor od $\mathbf{C}^n$ dimenzije $s \leq r$, i neka je S potprostor od $\mathbf{C}^m$ dimenzije $m - s$. Ako matrica $X \in \mathbf{C}^{n\times m}$ zadovoljava uslove*

$$XAX = X, \quad \mathcal{R}(X) = T, \quad \mathcal{N}(X) = S,$$

tada je X spoljašnji inverz matrice A sa unapred definisanom slikom T i jezgrom S, u oznaci $X = A^{(2)}_{T,S}$.

U sledećoj definiciji dato je prirodno uopštenje Mur-Penrouzovog inverza.

Definicija 1.3.2 *Neka je $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$ i neka su M i N pozitivno definitne matrice reda m i n, respektivno. Težinski Mur-Penrouzov inverz matrice A je jedinstvena matrica $A^{\dagger}_{M,N} \in \mathbf{C}^{n\times m}$ takva da je*

1) $AXA = A$;

2) $XAX = X$;

3M) $(MAX)^* = MAX$;

4N) $(XAN)^* = NXA$.

Ako je $M = I_m$ i $N = I_n$, tada je $A^{\dagger}_{I_m,I_n} = A^{\dagger}$.

Kod kvadratnih matrica, može se definisati i Drejzinov [2] inverz.

Definicija 1.3.3 *Neka je $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ matrica indeksa k. Drejzinov inverz matrice A, u oznaci A^d, je matrica koja zadovoljava sledeće:*

1k) $A^{k+1}A^d = A^k$;

2) $A^dAA^d = A^d$;

5) $AA^d = A^dA$.

Ovaj inverz definisao je Drejzin [32] 1958, u asocijativnim prstenima i polugrupama, bez posebnog pominjanja matrica. Drejzinov inverz ima, za razliku od običnog, i izvesna spektralna svojstva.

Više o uopštenim inverzima kompleksnih matrica može se naći u knjigama [7], [99].

1.4 Uopšteni inverzi operatora

Neka su X i Y Banahovi prostori. Obično je veoma važno znati da li je operator $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ invertibilan, ali se i tada često koriste samo neke osobine invertibilnih operatora. Te osobine se mogu opisatu pomoću određenih jednačina koje sadrže sam operator A i njegov "pseudo-inverz."

Definicija 1.4.1 *Neka je $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Ako postoji operator $B \in \mathcal{L}(Y,X)$ tako da je $ABA = A$, onda je B unutrašnji uopšteni inverz operatora A, a operator A je unutrašnje regularan. Koristi se još i termin $g-$invertibilan.*

Ako važi $CAC = C$ za neko $C \in \mathcal{L}(Y,X)$, $C \neq 0$, onda je C spoljašnji uopšteni inverz operatora A, a sam operator A je spoljašnje regularan.

Ako je $D \in \mathcal{L}(Y,X)$ unutrašnji i spoljašnji uopšteni inverz operatora A, tada je D refleksivni uopšteni inverz od A.

[2] Michael P. Drazin, američki matematičar

Operator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ je regularan ako i samo ako su $\mathcal{N}(A)$ i $\mathcal{R}(A)$ zatvoreni i komplementarni potprostori od X i Y, respektivno.

Unutrašnji inverz operatora sa unapred zadatom slikom i jezgrom ne mora da bude jedinstven. Međutim, refleksivni generalisani inverz je jedinstveno određen svojom slikom i nula prostorom, kao i spoljašnji inverz.

Nenula operator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ uvek ima nenula spoljašnji inverz $B \in \mathcal{L}(Y, X)$. Ako je $BAB = B$, $T = \mathcal{R}(B)$ i $S = \mathcal{N}(B)$, tada je B poznat kao $A^{(2)}_{T,S}$ generalisani inverz od A, odnosno kao spoljašnji generalisani inverz operatora A sa slikom T i jezgrom S. Za date potprostore T od X i S od Y, postoji generalisani inverz $A^{(2)}_{T,S}$ od A ako i samo ako su zadovoljeni sledeći uslovi: T, S i $A(T)$ su zatvoreni komplementarni potprostori od X, Y i Y respektivno, restrikcija $A_1 = A|_T : T \to A(T)$ je invertibilan operator i $A(T) \oplus S = Y$. U tom slučaju generalisani inverz $A^{(2)}_{T,S}$ je jedinstveno određen.

Neka su sada X i Y Hilbertovi prostori. Tada je A regularan ako i samo ako je $\mathcal{R}(A)$ zatvoren, tj. kad je A operator sa zatvorenom slikom. Regularnost je dovoljan uslov za egzistenciju Mur-Penrouzovog inverza o kome će biti više reči u nastavku. Inače, ova pretpostavka o zatvorenosti slike u opštem slučaju se može izbeći, ali tada Mur-Penrouzov inverz neće biti ograničen operator, i tu situaciju nećemo razmatrati.

Mur-Penrouzov inverz

Među svim refleksivnim inverzima operatora A, poseban značaj ima onaj kod koga su odgovarajući projektori ermitski. Budući da je taj pseudoinverz moguće sagledati iz više aspekata, daćemo njegove četiri ekvivalentne definicije.

Neka su X_1 i X_2 Hilbertovi prostori nad istim poljem skalara. Posmatramo fundamentalni problem rešavanja opšte linearne jednačine oblika:

$$Tx = b \tag{1.1}$$

gde $b \in X_2$, $T \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$. Ako operator T ima inverz, jednačina (1.1) uvek ima jedinstveno rešenje $x = T^{-1}b$. U opštem slučaju jednačina (1.1) može imati više od jednog rešenja ako $\mathcal{N}(T) \neq \{0\}$, ili nemati nijedno kada $b \notin \mathcal{R}(T)$. Čak i kada nema rešenja u tradicionalnom smislu, opet je moguće naći u određenom smislu "najbolje moguće" rešenje problema. U stvari, ako sa P označimo projektor sa X_2 na $\mathcal{R}(T)$, tada je Pb vektor iz $\mathcal{R}(T)$ najbliži b, i izgleda razumnim da rešenje $u \in X_1$ jednačine

$$Tx = Pb \tag{1.2}$$

smatramo uopštenim rešenjem jednačine (1.1). Drugi prirodan pristup pridruživanja uopštenih rešenja jednačini (1.1) je nalaženje $u \in X_1$ koje "dolazi najbliže" rešenju (1.1) u smislu da

$$||Tu - b|| \leq ||Tx - b|| \tag{1.3}$$

za proizvoljno $x \in X_1$.

Teorema 1.4.1 *Neka $T \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ ima zatvorenu sliku $\mathcal{R}(T)$ i neka $b \in X_2$, tada su sledeći uslovi za $u \in X_1$ ekvivalentni:*

1. $Tu = Pb$;
2. $||Tu - b|| \leq ||Tx - b||$, *za sve* $x \in X_1$;
3. $T^*Tu = T^*b$.

Vektor $u \in X_1$ koji zadovoljava ma koji od gornja tri uslova naziva se rešenje najmanjih kvadrata jednačine (1.1).

Pošto je $\mathcal{R}(T)$ zatvoren, rešenje najmanjih kvadrata jednačine (1.1) postoji za sve $b \in X_2$. Takođe, ako $\mathcal{N}(T) \neq \{0\}$, tada postoji beskonačno mnogo rešenja najmanjih kvadrata, jer ako je u rešenje najmanjih kvadrata, tada je to i $u + v$ za sve $v \in \mathcal{N}(T)$.

Iz Teoreme 1.4.1 sledi da se skup rešenja najmanjih kvadrata jednačine (1.1) može zapisati kao $\{u \in X_1 : T^*Tu = T^*b\}$; ovaj skup je zatvoren i konveksan, zbog neprekidnosti i linearnosti T i T^*. Takođe, ovaj skup sadrži jedinstveni vektor minimalne norme, koji ćemo odabrati da bude jedinstveno rešenje najmanjih kvadrata povezano sa b.

Definicija 1.4.2 *[Najmanje kvadratno rešenje] Neka $T \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ ima zatvorenu sliku $\mathcal{R}(T)$. Preslikavanje $T^\dagger : X_2 \to X_1$, definisano sa $T^\dagger b = u$, gde je u rešenje najmanjih kvadrata minimalne norme jednačine (1.1), naziva se uopšteni inverz od T.*

Može se dokazati: ako $T \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ ima zatvorenu sliku, tada $T^\dagger \in \mathcal{L}(X_2, X_1)$.

Definicija 1.4.3 *[Mur] Ako $T \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ ima zatvorenu sliku $\mathcal{R}(T)$, tada je $T^\dagger$ jedinstveni operator u $\mathcal{L}(X_2, X_1)$ koji zadovoljava:*

1. $TT^\dagger = P_{\mathcal{R}(T)}$;
2. $T^\dagger T = P_{\mathcal{R}(T^\dagger)}$.

Definicija 1.4.4 *[Penrouz] Ako $T \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ ima zatvorenu sliku $\mathcal{R}(T)$, tada je $T^\dagger$ jedinstveni operator u $\mathcal{L}(X_2, X_1)$ koji zadovoljava:*

1. $TT^\dagger T = T$;
2. $T^\dagger T T^\dagger = T^\dagger$;
3. $(TT^\dagger)^* = TT^\dagger$;
4. $(T^\dagger T)^* = T^\dagger T$.

Definicija 1.4.5 *[Dezoer-Valen[3]] Ako $T \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ ima zatvorenu sliku $\mathcal{R}(T)$, tada je $T^\dagger$ jedinstveni operator u $\mathcal{L}(X_2, X_1)$ koji zadovoljava:*

1. $T^\dagger T x = x, \quad x \in \mathcal{N}(T)^\perp$;
2. $T^\dagger y = 0, \quad y \in \mathcal{R}(T)^\perp$.

Sve četiri gornje definicije su su ekvivalentne.

Pošto je $\mathcal{R}(T^\dagger) = \mathcal{N}(T)^\perp$, ako je u rešenje najmanjih kvadrata i $v \in \mathcal{N}(T)$, tada je i $u + v$ najmanje kvadratno rešenje; zato je skup rešenja najmanjih kvadrata jednačine (1.1) dat sa $T^\dagger b + \mathcal{N}(T)$.

Ukoliko neki operator zadovoljava Penrouzove jednačine (i), (j) i (k), takav inverz naziva se $\{i, j, k\}-$inverz operatora A, u oznaci $A^{(i,j,k)}$.

Neka su X i Y Hilbertovi prostori, i neka su operatori $M \in \mathcal{L}(Y)$ i $N \in \mathcal{L}(X)$ pozitivni (i invertibilni). Mogu se uvesti novi skalarni proizvodi: $\langle x, y \rangle_N = \langle Nx, y \rangle$ u X, odnosno $\langle u, v \rangle_M = \langle Mu, v \rangle$ u Y. Prostori X i Y su Hilbertovi u odnosu na ove nove skalarne proizvode.

[3]Charles A. Desoer i B. H. Whalen

Zatim, linearan operator $A : X \to Y$ je ograničen u odnosu na ove "stare" skalarne proizvode ako i samo ako je ograničen u odnosu na "nove" skalarne proizvode ($\langle .,. \rangle_M$ i $\langle .,. \rangle_N$). Ako je operator A relativno regularan, tada postoji jedinstveni operator $B \in \mathcal{L}(Y, X)$ takav da $ABA = A$, $BAB = B$, AB je ortogonalan u odnosu na $\langle .,. \rangle_M$, a BA je ortogonalan u odnosu na $\langle .,. \rangle_N$.

Teorema 1.4.2 *Neka su X i Y Hilbertovi prostori, i neka su operatori $M \in \mathcal{L}(Y)$ i $N \in \mathcal{L}(X)$ pozitivni (i invertibilni). Ako $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ima zatvorenu sliku, tada postoji jedinstven operator $A^\dagger_{M,N} \in \mathcal{L}(Y, X)$ koji zadovolja sledeće jednakosti:*

1. $AA^\dagger_{M,N}A = A$,
2. $A^\dagger_{M,N}AA^\dagger_{M,N} = A^\dagger_{M,N}$,
3. *(3M)* $(MAA^\dagger_{M,N})^* = MAA^\dagger_{M,N}$,
4. *(4N)* $(NA^\dagger_{M,N}A)^* = NA^\dagger_{M,N}A$.

Operator $A^\dagger_{M,N}$ je težinski Mur-Penrouzov inverz od A.

Neke najbitnije osobine običnog i težinskog Mur-Penrouzovog inverza navedene su u narednom tvrđenju.

Tvrđenje 1.4.1 *[7], [30], [99] Neka je $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ operator sa zatvorenom slikom, i neka su $M \in \mathcal{L}(Y)$ i $N \in \mathcal{L}(X)$ pozitivno definitni invertibilni operatori. Tada:*

(1) $(A^\dagger)^\dagger = A$, $(A^*)^\dagger = (A^\dagger)^*$, $(\lambda A)^\dagger = \lambda^{-1}A^\dagger$ *za* $\lambda \in C \setminus \{0\}$;

(2) $A^* = A^\dagger AA^* = A^*AA^\dagger$, $A = AA^*(A^*)^\dagger = (A^*)^\dagger A^*A$;

(3) $A^\dagger = A^*(AA^*)^\dagger = (A^*A)^\dagger A^*$;

(4) $(AA^*)^\dagger = (A^*)^\dagger A^\dagger$ $(A^*A)^\dagger = A^\dagger(A^*)^\dagger$;

(5) $(UAV)^\dagger = V^*A^\dagger U^*$, *samo ako su U i V unitarni;*

(6) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^\dagger) = \mathcal{R}(AA^*)$;

(7) $\mathcal{R}(A^\dagger) = \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A^\dagger A) = \mathcal{R}(A^* A)$;

(8) $\mathcal{R}(I - A^\dagger A) = \mathcal{N}(A^\dagger A) = \mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^*)^\perp$;

(9) $\mathcal{R}(I - AA^\dagger) = \mathcal{N}(AA^\dagger) = \mathcal{N}(A^\dagger) = \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$;

(10) $(A^\dagger_{M,N})^\dagger_{N,M} = A$;

(11) $(A^\dagger_{M,N})^* = (A^*)^\dagger_{N^{-1},M^{-1}}$;

(12) $A^\dagger_{M,N} = N^{-1/2}(M^{1/2}AN^{-1/2})^\dagger M^{1/2}$.

(13) $\mathcal{R}(A^\dagger_{M,N}) = N^{-1}\mathcal{R}(A^*)$, $\mathcal{N}(A^\dagger_{M,N}) = M^{-1}\mathcal{N}(A^*)$;

(14) $\mathcal{R}(AA^\dagger_{M,N}) = \mathcal{R}(A)$, $\mathcal{N}(AA^\dagger_{M,N}) = M^{-1}\mathcal{N}(A^*)$;

(15) $\mathcal{R}(A^\dagger_{M,N}A) = N^{-1}\mathcal{R}(A^*)$, $\mathcal{N}(A^\dagger_{M,N}A) = \mathcal{N}(A)$.

Više o uopštenim inverzima operatora na Banahovim i Hilbertovim prostorima može se naći u knjigama [7], [99] i [30].

Mur-Penrouzov inverz u prstenima s involucijom i C^*-algebrama

Neka je $\mathcal{R}$ prsten sa nulom 0 i jedinicom 1. Pretpostavimo da je na $\mathcal{R}$ definisana involucija $x \to x^*$, odnosno da za sve $x, y \in \mathcal{R}$ važi:

$$(x^*)^* = x, \ \ (x+y)^* = x^* + y^*, \ \ (xy)^* = y^*x^*, \ \ 1^* = 1, \ \ 0^* = 0.$$

Element $x \in \mathcal{R}$ je samoadjungovan ako $x = x^*$. Element $a^\dagger \in \mathcal{R}$ je Mur-Penrouzov inverz elementa $a \in \mathcal{R}$ ako važi sledeće:

$$aa^\dagger a = a; \ \ a^\dagger a a^\dagger = a^\dagger, \ \ (aa^\dagger)^* = aa^\dagger, \ \ (a^\dagger a)^* = a^\dagger a.$$

Tvrđenje 1.4.2 *Neka je $\mathcal{R}$ prsten s involucijom. Ako $a \in \mathcal{R}$ i ako postoji Mur-Penrouzov inverz $a^\dagger$ od a, tada je on jedinstven.*

Element $a \in \mathcal{R}$ je Mur-Penrouz invertibilan, ili MP-invertibilan, ako postoji Mur-Penrouzov inverz od a. Skup svih MP-invertibilnih elemenata prstena $\mathcal{R}$ označava se sa $\mathcal{R}^\dagger$. Ako skup svih invertibilnih elemenata iz $\mathcal{R}$ označimo sa $\mathcal{R}^{-1}$, a skup svih relativno regularnih (tj. unutrašnje regularnih) sa $\mathcal{R}^-$, važi: $\mathcal{R}^{-1} \subset \mathcal{R}^\dagger \subset \mathcal{R}^-$.

U C^*-algebrama MP-invertibilnost se karakteriše na sledeći način.

Teorema 1.4.3 *U C^*-algebri $\mathcal{A}$ sa jedinicom, sledeći uslovi za $a \in \mathcal{A}$ su ekvivalentni:*

(1) *a je dobro podržan;*

(2) *a je MP-invertibilan;*

(3) *a je regularan.*

Element $a \in \mathcal{R}$ je dobro podržan ('well-supported'), ako postoji samoadjungovani idempotent p tako da: $ap = a, \ a^*a + 1 - p \in \mathcal{R}^{-1}$; takvo p je nosač.

Opširnije o Mur-Penrouzovom inverzu u prstenima s involucijom i C^*-algebrama može se naći, na primer, u [30], str. 9-13. Sama knjiga predstavlja i opširnu listu relevantne literature iz ove oblasti.

1.5 Istorijat

1.5.1 Istorijat uopštenih inverza

Po svemu sudeći, prvi matematičar koji je iskoristio koncept uopštenog inverza bio je Fredholm[4] [34]. On je dao poseban uopšteni inverz integralnog operatora, i njega je zvao "pseudoinverse". Klasu svih pseudoinverza okarakterisao je Hurvic[5][44] 1912. On je iskoristio konačnu dimenzionalnost nul-prostora Fredholmovih operatora da bi dao jednostavnu algebarsku konstrukciju. Uopštene inverze diferencijalnih operatora, koje je već nagovestio Hilbert u svom razmatranju uopštenih Grinovih[6] funkcija [42] 1904, izučavali su mnogi: Majler [Myller] 1906, Vestfol [Westfall] 1909, Bunicki [Bounitzky] [14] 1909, Eliot[7] 1928. i Reid [73] 1931.

U izvesnom smislu, uopšteni inverzi integralnih i diferencijalnih operatora prethodili su uopštenim inverzima matrica, čiju egzistenciju je prvi zabeležio Mur. On je u prvoj publikaciji na ovu temu, u sažetku predavanja koje je držao na konferenciji Američkog matematičkog društva [59] 1920, definisao jedinstveni inverz (zvao ga je "general reciprocal") preko projektora za svaku konačnu matricu. Danas se smatra da je do svojih rezultata došao još 1906. Detalji su objavljeni [60] tek 1935, posle Murove smrti. Murovo otkriće bilo je zapostavljeno narednih dvadeset godina. U tom periodu važno je pomenuti rezultate do kojih su došli Zigel[8] 1937. [74] za matrice, Tseng [9] [91] [93], [94], [92], Marej[10] i fon Nojman[11] 1936 [62], Etkinson [Atkinson][4] [3] i drugi.

Oživljavanje interesovanje za ovu temu tokom '50–ih vezuje se za osobine najmanjih kvadrata (što Mur nije ni pominjao) određenih uopštenih inverza. Te osobine je primetio Bjerhamar[12] 1951, koji je ponovo otkrio Murov inverz, ali i uočio njegovu vezu sa rešavanjem linearnih

[4] Erik Ivar Fredholm (1866–1927), švedski matematičar
[5] Adolf Hurwitz (1859–1919), nemački matematičar
[6] George Green (1793–1841), britanski matematičar
[7] Waters Montroll Elliott, (1916–1983), američki naučnik i matematičar
[8] Carl Ludwig Siegel (1896–1981), nemački matematičar
[9] Y. Y. Tseng
[10] Francis Joseph Murray (1911–1996), američki matematičar
[11] John von Neumann (1903–1957), američki matematičar mađarskog porekla
[12] Arne Bjerhammar (1917–), švedski geodezista

sistema [11] [10] [9]. Penrouz[13] je 1955. [66] pooštrio i proširio rezultate Bjerhamara za linearne sisteme, i pokazao da je Murov inverz date matrice A jedinstvena matrica X koja zadovoljava tzv. Penrouzove jednačine ($AXA = A$, $XAX = X$, $(AX)^* = AX$, $(XA)^* = XA$). Ovo otkriće pokrenulo je lavinu sjajnih radova na temu uopštenih inverza, tako da se s pravom ovaj uopšteni inverz naziva Mur-Penrouzov.

Od 1955. pojavilo se više od 2000 radova na temu raznih aspekata uopštenih inverza i njihovih primena. Jednu prekretnicu predstavlja objavljivanje nekoliko monografija na ovu temu tokom '70–ih ([16], [37], [72]), posebno odlična knjiga Ben–Izraela i Grevila iz 1974. [7], koja je ostvarila veliki uticaj na generacije matematičara. Drugu prekretnicu predstavljalo je objavljivanje dva toma zbornika radova. Prvi tom čine sažeci sa Naprednog seminara o uopštenim inverzima i primenama, održanog na Univerzitetu Viskonsin–Medison 1973. Ova opširna knjiga [63] sadrži 14 radova o teorijskim rezultatima, izračunavanjima i primenama uopštenih inverza i iscrpnu bibliografiju koja obuhvata sve relevantne reference do 1975. Drugi tom čine sažeci sa Regionalne konferencije Američkog matematičkog društva, održane u Kolumbiji u Južnoj Karolini, 1976. Ova knjiga [15] sadrži 12 radova sa najnovijim primenama uopštenih inverza. I ne samo to, već predstavlja i zaokret u pravcima interesovanja u okviru uopštenih inverza tokom '70–ih. Do ovog perioda, zbog primena u statistici, istraživanja su bila usredsređena na rešavanje linearnih sistema i osobine najmanjih kvadrata određenih klasa uopštenih inverza; zaokret je bio u smeru beskonačno dimenzionalne teorije, numeričkih izračunavanja, matrica posebnih tipova (bulovske, celobrojne), matrice nad algebarskom strukturama koje nisu polje, teorije sistema i uopštenih inverza kojima se ne rešavaju jednačine.

[13] Roger Penrose (1931–), engleski fizičar i matematičar

1.5.2 Istorijat zakona obrnutog redosleda

Zakon obrnutog redosleda ("reverse-order law", skraćeno "ROL") za uopštene inverze proizvoda predstavlja zanimljivu klasu fundamentalnih problema u okviru teorije uopštenih inverza. Uporedo sa oživljavanjem interesovanja za same uopštene inverze tokom '60–ih, počelo se sa izučavanjem uslova pod kojima važi zakon obrnutog redosleda za proizvod dveju neinvertibilnih kompleksnih matrica A i B :

$$(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger}. \tag{1.4}$$

Grevil[14] [36] je 1966. prvi dao potrebne i dovoljne uslove pod kojima (1.4) važi. Naime, on je dokazao da

$$(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger} \Leftrightarrow A^{\dagger}ABB^{*}A^{*} = BB^{*}A^{*} \wedge BB^{\dagger}A^{*}AB = A^{*}AB, \tag{1.5}$$

odnosno

$$(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger} \Leftrightarrow \mathcal{R}(A^{*}AB) \subset \mathcal{R}(B) \wedge \mathcal{R}(BB^{*}A^{*}) \subset \mathcal{R}(A^{*}). \tag{1.6}$$

Treba pomenuti i rezultat do kojeg je došao 1968. Argirijade[15] [2]:

$$(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger} \Leftrightarrow A^{*}ABB^{*} \text{ je matrica ermitskog ranga} \tag{1.7}$$

Zakon obrnutog redosleda za proizvod tri matrice, oblika

$$(ABC)^{\dagger} = C^{\dagger}B^{\dagger}A^{\dagger}, \tag{1.8}$$

izučavali su 1986. Hartvig[16] [41] i Tian[17][81] 1992. Tian je u svom radu [82] izučavao i slučaj proizvoda n matrica:

$$(A_1A_2 \ldots A_n)^{\dagger} = A_n^{\dagger} \ldots A_2^{\dagger}A_1^{\dagger}. \tag{1.9}$$

Zakon obrnutog redosleda za težinski Mur-Penrouzov inverz proizvoda dve matrice u obliku

$$(AB)^{\dagger}_{M,L} = B^{\dagger}_{N,L}A^{\dagger}_{M,N}, \tag{1.10}$$

[14]Thomas Nall Eden Greville (1910–1998), američki matematičar
[15]E. Arghiriade, rumunski matematičar
[16]Robert E. Hartwig, savremeni matematičar
[17]Yongge Tian, savremeni kineski matematičar

razmatrali su 1998. Sun i Vei [77], dok se trostrukim proizvodom bavio Vang [98].

Izučavan je i zakon obrnutog redosleda i za ostale inverze, posebno za Drejzinov. Opet je Grevil [36] prvi pokazao da

$$(AB)^d = B^d A^d, \tag{1.11}$$

važi pod uslovom da A i B komutiraju. Potrebne i dovoljne uslove za zakon obrnutog redosleda za Drejzinov inverz proizvoda 2 i n matrica dali su redom H. Tian [80] 1999, odnosno Vang [97]. Đorđević [27] je proučavao zakon obrnutog redosleda za spoljašnji uopšteni inverz sa unapred definisanom slikom i jezgrom u obliku

$$(AB)^{(2)}_{K,L} = B^{(2)}_{T,S} A^{(2)}_{M,N}. \tag{1.12}$$

Zakon obrnutog redosleda za spoljašnji uopšteni inverz proizvoda n matrica sa unapred definisanom slikom i jezgrom još uvek nije izučen.

Izučavani su i opštiji zakoni obrnutog redosleda, gde su posmatrani tzv. $\theta-$ inverzi ($\theta \subset \{1, 2, 3, 4\}$); vredi pomenuti rezultate do kojih su došli Vei [103] [105], De Pjero i Vei [67], odnosno Verner [106]. Među skorašnjim radovima vredi pomenuti [21], koji se bavi $\{1, 3, 4\}-$inverzima u C^*-algebrama.

Pored zakona obrnutog redosleda, izučavan je i tzv. zakon direktnog redosleda ("forward order law") u obliku

$$(AB)^\dagger = A^\dagger B^\dagger, \tag{1.13}$$

koji je mnogo manje prirodan, jer on ne važi ni za običan inverz, osim u specijalnim slučajevima.

Glava 2

Razlaganje matrica i uopšteni inverzi

Pod razlaganjem ("splitting") kompleksne matrice A podrazumeva se njen zapis u formi $A = U - V$, gde matrice U i V zadovoljavaju određene uslove. Zavisno od tih nametnutih uslova, mogu se definisati različiti tipovi razlaganja, na primer:

- $U^{-1} \geq 0,\ V \geq 0$ regularno razlaganje,
- $U^{-1} \geq 0,\ U^{-1}V \geq 0,\ VU^{-1} \geq 0$ nenegativno razlaganje,
- $U^{-1} \geq 0,\ U^{-1}V \geq 0\ (VU^{-1} \geq 0)$ slabo nenegativno razlaganje prvi (drugi) tip,
- $\exists U^{-1},\ U^{-1}V \geq 0\ (VU^{-1} \geq 0)$ slabo razlaganje prvi (drugi) tip,
- $\rho(U^{-1}V) = \rho(VU^{-1}) < 1$ konvergentno razlaganje.

Ukoliko su nametnuti uslovi na određeni način povezani sa uopštenim inverzima, mogu se definisati još neka razlaganja:

Definicija 2.0.1 *Neka je $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, i neka $k = ind(A)$. Ako važi:*

$$\mathcal{R}(U) = \mathcal{R}(A^k),\ \ \mathcal{N}(U) = \mathcal{N}(A^k),$$

u pitanju je indeksno razlaganje.
Ako $ind(A) = 1$, indeksno razlaganje svodi se na odgovarajuće pravo ("proper") razlaganje.

Definicija 2.0.2 *Neka je* $A \in \mathbf{C}_r^{n\times n}$, $T \subset \mathbf{C}^n$, $\dim T = s \leq r$, $S \subset \mathbf{C}^m$, $\dim S = m - s$. *Ako važi:*

$$UT \oplus S = \mathbf{C}^m,$$

u pitanju je $\{T, S\}-$*razlaganje.*

Sama ideja razlaganja potekla je od regularne teorije razlaganja koju je 1960. uveo Varga[1] [95]. Prvobitna teorija odnosila se na kvadratne matrice i obične inverze. Iz tog perioda izdvajaju se dva odlična rada Vožnjickog[2] [107] [108], u kojima se između ostalog može naći i kraći istorijat problematike matričnih razlaganja. Rezultati sa običnim inverzima prošireni su na pravougaone matrice i uopštene inverze, pre svega Mur-Penrouzov inverz i spoljašnji inverz sa unapred definisanom slikom i jezgrom [75]. Drugi pravac uopštavanja bio je u smeru $g-$invertibilnih operatora [76].

Razlaganja matrica i operatora imaju primenu pre svega pri raznim reprezentacijama uopštenih inverza, a zatim i pri konstrukcijama raznih iterativnih procesa kojima se rešavaju singularni linearni sistemi.

2.1 Razlaganje matrica indukovano uopštenim inverzima

U ovoj sekciji uvodi se razlaganje jedne klase singularnih kvadratnih kompleksnih matrica indukovano njenim unutrašnjim inverzima. Razlaganje se uvodi na dva različita načina: korišćenjem Žordanove normalne forme matrice i korišćenjem koncepta kondijagonalizabilnosti matrice. Žordanova normalna forma matrice predstavlja klasičan rezultat linearne algebre (videti npr. [7], str. 35, ili [51], str. 304), dok je koncept kondijagonalizabilnosti uveden u radu Ikramova iz 2007 [45]. Korišćenjem uvedenog razlaganja dokazujemo na konstruktivan način specijalni slučaj Hartove teoreme [39].

---

[1]Richard S. Varga, američki matematičar

[2]Zbigniew I. Woźnicki, poljski matematičar

Hartova teorema

Neka je $\mathcal{A}$ Banahova algebra sa jedinicom 1. Element $a \in \mathcal{A}$ je regularan (regularan u fon Nojmanovom smislu) u $\mathcal{A}$ ako postoji $x \in \mathcal{A}$ tako da $axa = a$. Označimo sa $\mathcal{A}^{\sqcap}$ skup sastavljen od svih regularnih elemenata iz $\mathcal{A}$. Tada: $\mathcal{A}^{\sqcap} = \{a \in \mathcal{A} : a \in a\mathcal{A}a\}$. Koristićemo oznaku $\mathcal{A}^{\bullet}$ za skup sastavljen od svih idempotenata iz $\mathcal{A}$. Tada je $\{a \in \mathcal{A} : a \in a\mathcal{A}^{-1}a\} = \mathcal{A}^{\bullet}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}^{\bullet}$ [38].

Tvrđenje 2.1.1 (Hart [39]) *Neka je $\mathcal{A}$ Banahova algebra sa jedinicom 1. Tada važi:*

$$\mathcal{A}^{\sqcap} \cap cl(\mathcal{A}^{-1}) = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}^{\bullet}.$$

Dokaz ovog tvrđenja može se naći u [39], alternativno u [70], str. 181. Opštiji rezultati, koji se tiču Fredholmovih operatora mogu se naći u [69], a za Fredholmovu teoriju za homomorfizme Banahovih algebri u [26]. U ovom radu Teorema 2.1.3 predstavlja konstruktivan dokaz Hartove teoreme za jednu klasu singularnih kvadratnih kompleksnih matrica, zasnovan na matričnom razlaganju indukovanom unutrašnjim inverzima.

Kondijagonalizabilnost

Konjugovanje-po-komponentama matrice A je povezano sa adjungovanjem i transponovanjem na sledeći način: $\overline{A} = (A^*)^T = (A^T)^*$, i takođe $A^* = (\overline{A})^T$. Za matricu $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, njoj konjugovana-po-komponentama matrica je $\overline{A} = [\overline{a_{ij}}]_{n\times n}$.

Definicija 2.1.1. *Matrica $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ is kondijagonalizabilna ako se matrica $A_R = A\overline{A}$ (ili, što je isto, $A_L = \overline{A}A$) može diagonalizovati transformacijom sličnosti.*

Definicija 2.1.2. *Za matrice $A, B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ kažemo da su kon-slične ("consimilar") ako $A = SB\overline{S}^{-1}$ za nesingularnu matricu $S \in \mathbf{C}^{n\times n}$.*

Definicija 2.1.3. *Neka je $\sigma(A_L) = \{\lambda_1, ..., \lambda_m\}$ spektar od A_L. Kon-sopstvene vrednosti od A su m skalara $\mu_1, ..., \mu_m$, definisanih na sledeći način:*
Ako $\lambda_i \notin (-\infty, 0)$, tada se odgovarajuća kon-sopstvena vrednost μ_i

definiše kao: $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$*,* $Re(\mu_i) \geq 0$*; višestrukost od* μ_i *se uzima da je ista kao za* λ_i*.*
Ako $\lambda_i \in (-\infty, 0)$*, tada pridružujemo dve konjugovane čisto imaginarne kon-sopstvene vrednosti* $\mu_i = \pm\sqrt{\lambda_i}$*. Višestrukost svake od njih se uzima da je polovina od one za* λ_i*.*

Ako $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, tada je svaka sopstvena vrednost od A sa nenegativnim realnim delom u isto vreme i kon-sopstvena vrednost te matrice. Ako sopstvena vrednost λ ima negativan realan deo, tada je $\mu = -\lambda$ kon-sopstvena vrednost od A.

Tvrđenje 2.1.2 (Ikramov [45]). *Neka je* $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ *kondijagonalizabilna matrica. Tada se* A *može dovesti transformacijom kon-sličnosti na svoju kanonsku formu, koja predstavlja direktnu sumu* 1×1 *i* 2×2 *blokova. Blokovi* 1×1 *su realne kon-sopstvene vrednosti od* A*, dok svaki* 2×2 *blok odgovara paru konjugovano kompleksnih kon-sopstvenih vrednosti* μ*,* $\overline{\mu}$*, i ima formu*

$$\begin{pmatrix} 0 & \overline{\mu} \\ \mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Ako je A *singularna i* $k = \dim\ker A_L - \dim\ker A > 0$*, tada kanonska forma od* A *sadrži i* k *blokova oblika*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rezultati izloženi u nastavku objavljeni su u radu [96].

Ideja

Neka je $A \in \mathbf{C}_r^{n\times n}$ kvadratna kompleksna matrica čiji je rang jednak $r < n$. Matrica $B \in \mathbf{C}_k^{n\times n}$ naziva se unutrašnji, ili $\{1\}_k-$ uopšteni inverz za A, ako važi $ABA = A$. Poznato je da postoji neko k, $r \leq k < n$, tako da matrica A ima $\{1\}_k-$ inverz. Štaviše, postoji ceo skup unutrašnjih inverza, koji čine matrice čiji je rang od r do n, uključujući i granice:

$$A\{1\} = \bigcup_{k=r}^{n} A\{1\}_k.$$

Pozabavimo se sada matricama iz klase $A\{1\}_n$. One su invertibilne, i sa $A\{1\}_n^{-1}$ ćemo označavati skup njihovih "običnih" inverza. Ovaj rad se bavi pitanjem: Koliko "blizu" u smislu spektralne norme matrica A može biti skupu $A\{1\}_n^{-1}$?

Pomoćni rezultati

Lema 2.1.1. *Neka je data Žordanova matrica reda k (dimenzija $k\times k$), $k \in \mathbf{N}$:*

$$J_k(0) = \begin{pmatrix} 0 & I_{k-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Tada

$$J_k(0)\{1,3,4\} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{C} \\ I_{k-1} & 0 \end{pmatrix} = \{\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ I_{k-1} & 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbf{C}\}. \tag{2.2}$$

Dokaz. Svođenjem matricu $J_k(0)$ na njenu ermitsku normalnu formu (koristeći metod opisan, na primer, u [7], str. 24 ili [51], str. 94) dobijamo:

$$T = EJ_k(0)P = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ where } E = I_k,\ P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ I_{k-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Kako je P permutaciona matrica, važi $\det P = (-1)^{k+1} \neq 0$. Potražimo $\{1,3,4\}-$inverz matrice T po definiciji, u formi

$$T^{(1,3,4)} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

gde su A, B, C i D podmatrice od $T^{(1,3,4)}$ čije su dimenzije $(k-1) \times (k-1)$, $(k-1) \times 1$, $1 \times (k-1)$ i 1×1, redom. Lako se nalazi da $A = I_{k-1}$, $B = 0$, $C = 0$, dok matrica D ostaje proizvoljna - označimo je kompleksnim brojem α. Dakle:

$$T^{(1,3,4)} = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Kako su E i P nesingularne unitarne matrice, i pošto znamo da:

$$T^{(1,3,4)} = P^{-1} J_k^{(1,3,4)}(0) E^{-1},$$

imamo:

$$J_k^{(1,3,4)}(0) = PT^{(1,3,4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ I_{k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ I_{k-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

$\triangle$

Lema 2.1.2. *Postoji invertibilni element u skupu* $J_k(0)\{1,3,4\}$.

Dokaz. Ako $\alpha \neq 0$, onda det $J_k^{(1,3,4)}(0) = (-1)^{k+1}\alpha \neq 0$. To znači da u skupu $J_k(0)\{1,3,4\}$ postoji invertibilni element, čiji inverz označavamo sa $\widetilde{J_k}(0)$. Sada je očigledno:

$$\widetilde{J_k}(0) = \begin{pmatrix} 0 & I_{k-1} \\ \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

$\triangle$

Označimo sa $||\cdot||$ spektralnu normu elemenata iz $\mathbf{C}^{n\times n}$. Spektralna norma matrice A je kvadratni koren spektralnog radijusa od A^*A. Naredni rezultat je poznat.

Lema 2.1.3. *Neka su A i B dve kvadratne kompleksne matrice. Tada važi:*

a) Ako $W = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, *onda* $||W|| = ||A||$;

b) Ako $W = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, *onda* $||W|| = \max\{||A||, ||B||\}$.

Lema 2.1.4. *Spektralna norma matrice* $J_k(0) - \widetilde{J_k}(0)$ *data je sa:*

$$||J_k(0) - \widetilde{J_k}(0)|| = \frac{1}{|\alpha|}. \tag{2.4}$$

Dokaz. Označimo sa W razliku $J_k(0) - \widetilde{J_k}(0)$. Znamo da

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0_{(k-1)\times(k-1)} \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix},$$

što znači da

$$W^*W = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha\bar{\alpha}} & 0 \\ 0 & 0_{(k-1)\times(k-1)} \end{pmatrix},$$

pa $\sigma(W^*W) = \{0, \frac{1}{|\alpha|^2}\}$, odakle sledi $||W|| = \frac{1}{\alpha}$.

$\triangle$

Mur-Penrouzov inverz matrice $J_k(0)$ biće:

$$J_k^{\dagger}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{k-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Lema 2.1.5. *Spektralna norma matrice* ${J_k}^{(1,3,4)}(0) - {J_k}^{\dagger}(0)$ *data je sa:*

$$||{J_k}^{(1,3,4)}(0) - {J_k}^{\dagger}(0)|| = |\alpha|. \tag{2.5}$$

Dokaz. Označimo sa W razliku ${J_k}^{(1,3,4)}(0) - {J_k}^{\dagger}(0)$. Znamo da:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0_{(k-1)\times(k-1)} & 0 \end{pmatrix},$$

što znači

$$W^*W = \begin{pmatrix} 0_{(k-1)\times(k-1)} & 0 \\ 0 & \alpha\bar{\alpha} \end{pmatrix},$$

pa $\sigma(W^*W) = \{0, |\alpha|^2\}$, odakle sledi $||W|| = |\alpha|$.

$\triangle$

Iz Leme 2.1.4 and Leme 2.1.5 može se izvesti zanimljiv zaključak:

$$||J_k(0) - \widetilde{J_k}(0)|| \cdot ||{J_k}^{(1,3,4)}(0) - {J_k}^{\dagger}(0)|| = 1,$$

što znači da su zahtevi za istovremenim aproksimiranjem i $J_k(0)$ sa $\widetilde{J_k}(0)$, i $J_k^{\dagger}(0)$ sa $J_k^{(1,3,4)}(0)$ međusobno suprotstavljeni.

Lema 2.1.6. *Važi:*

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m \end{pmatrix}^{\dagger} = \begin{pmatrix} A_1^{\dagger} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^{\dagger} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m^{\dagger} \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

gde su A_i, $i = \overline{1, m}$, *kvadratne kompleksne matrice.*

Glavni rezultati

Teorema 2.1.1. *Svaku kompleksnu matricu $A \in \mathbf{C}_r^{n\times n}$, čija Žordanova normalna forma ne sadrži $J_1(0)$ blok, moguće je razložiti u sumu:*

$$A = \tilde{A} + N, \tag{2.7}$$

gde je $\tilde{A}$ invertibilna, $\tilde{A}^{-1} \in A\{1\}$, a N je nilpotentna matrica reda nilpotentnosti 2 (to znači da $N^2 = 0$).

Dokaz: Neka je $A \in \mathbf{C}_r^{n\times n}$ kompleksna matrica čija Žordanova normalna forma ne sadrži $J_1(0)$ blok; njena Žordanova normalna forma je

$$A = X \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_0 \end{pmatrix} X^{-1},$$

gde je X nesingularna, $J_1 \in \mathbf{C}_r^{r\times r}$ invertibilna, a J_0 nilpotentna, sastavljena od blokova $J_k(0),\ k > 1$, od kojih je svaki Žordanova matrica. Potražićemo $A^{(1)}$ u obliku

$$A^{(1)} = X \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} X^{-1}.$$

Jednačinu $AA^{(1)}A = A$ mora da zadovoljava svaki $\{1\}$- inverz, pa zaključujemo da:

$$J_1PJ_1 = J_1 \Rightarrow P = J_1^{-1}$$

$$J_1QJ_0 = 0 \Rightarrow QJ_0 = 0$$

$$J_0RJ_1 = 0 \Rightarrow J_0R = 0$$

$$J_0SJ_0 = J_0 \Rightarrow S = J_0^{(1)}$$

Zbog jasnoće, odabraćemo $Q = 0,\ R = 0$. Dakle:

$$X \begin{pmatrix} J_1^{-1} & 0 \\ 0 & J_0^{(1)} \end{pmatrix} X^{-1} \in A\{1\}. \tag{2.8}$$

Sada nalazimo $\{1,3,4\}-$ inverz bloka

$$J_0 = \begin{pmatrix} J_{k_1}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{k_m}(0) \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Može se pretpostaviti da on ima oblik

$$J_0^{(1,3,4)} = \begin{pmatrix} J_{k_1}^{(1,3,4)}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2}^{(1,3,4)}(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{k_m}^{(1,3,4)}(0) \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Ovaj poseban unutrašnji inverz za svaki blok $J_{k_i}(0), i = \overline{1,m}$, može se naći kako je opisano u Lemi 2.1.1. Proizvoljan kompleksni element koji se javlja u $i-$tom bloku označićemo sa α_i. Ako nametnemo prirodan uslov $\alpha_i \neq 0,\ i = \overline{1,m}$, tada Lema 2.1.2 povlači egzistenciju inverza svake od podmatrica $J_{k_i}^{(1,3,4)}$, što dalje implicira egzistenciju inverza matrice ${J_0}^{(1,3,4)}$:

$$\widetilde{J_0} = \begin{pmatrix} \widetilde{J_{k_1}}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \widetilde{J_{k_2}}(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \widetilde{J_{k_m}}(0) \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Pošto inverz $i-$te podmatrice zavisi od parametra α_i, $\tilde{J}_0$ zavisiće od kompleksnih nenula parametara $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

Ako označimo sa $\tilde{A}$ inverz od $A^{(1)}$, očigledno je:

$$\tilde{A} = X \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & \widetilde{J_0} \end{pmatrix} X^{-1}. \tag{2.12}$$

Neka $N = A - \tilde{A}$. Imamo:

$$N = X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_0 - \widetilde{J_0} \end{pmatrix} X^{-1}. \tag{2.13}$$

Blok-dijagonalna matrica $J_0 - \widetilde{J_0}$ sastavljena je od blokova:

$$J_{k_i}(0) - \widetilde{J_{k_i}}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_i^{-1} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

i sada se lako dobija da

$$N^2 = 0.$$

△

Primedba: Uslov iz prethodne teoreme koji se odnosi na blok $J_1(0)$, značajno umanjuje klasu matrica na koje je teorema primenljiva. Klasa svih matrica indeksa 1 (tu spadaju neinvertibilne ermitske i normalne matrice, kao i matrice ermitskog ranga) je primer klase na koju se prethodna teorema ne može primeniti.

Kontraprimer: Pozabavimo se matricom

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.1.1 je neprimenljiva na matricu A, i A se ne može razložiti korišćenjem metoda opisanog u Teoremi 2.1.1 kao suma:

$$A = \tilde{A} + N, \ \det \tilde{A} \neq 0, \ N^2 = 0.$$

Probajmo da nađemo to razlaganje na neki drugi način. Iskoristićemo sledeće zapažanje koje se lako dokazuje:

$$(\forall N \in \mathbf{C}^{2\times 2})\, N^2 = 0 \neq N \Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} t & s \\ -\frac{t^2}{s} & -t \end{pmatrix}, t \in \mathbf{C}, s \in \mathbf{C} \setminus \{0\}.$$

Dobijamo:

$$A = \tilde{A} + N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & s \\ -\frac{t^2}{s} & -t \end{pmatrix},$$

gde pretpostavljamo da $\det \tilde{A} = ad - bc \neq 0$. Ovo povlači $a = 1 - t$, $b = -s$, $c = \frac{t^2}{s}$ i $d = t$, i dalje:

$$A = \tilde{A} + N = \begin{pmatrix} 1-t & -s \\ \frac{t^2}{s} & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & s \\ -\frac{t^2}{s} & -t \end{pmatrix}, \ \det \tilde{A} = t,$$

tako da zaključujemo da mora biti $t \neq 0$. Zaista, našli smo željeno razlaganje!

Teorema 2.1.2. *Proizvoljna singularna kondijagonalizabilna kompleksna matrica $A \in \mathbf{C}_r^{n\times n}$ takva da $k = \dim\ker A_L - \dim\ker A > 0$ može se razložiti u sumu:*

$$A = \tilde{A} + N, \tag{2.15}$$

gde je $\tilde{A}$ invertibilna, $\tilde{A}^{-1} \in A\{1\}$, i N zadovoljava $N\overline{N} = \overline{N}N = 0$.

Dokaz: Pretpostavimo da matrica A zadovoljava uslove teoreme. Ona se tada, prema Tvrđenju 2.1.2, može predstaviti kao:

$$A = S \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_0 \end{pmatrix} \overline{S}^{-1} = SB\overline{S}^{-1}, \tag{2.16}$$

gde je

$$D_1 = diag\left\{\lambda_1, \dots, \lambda_p, \begin{pmatrix} 0 & \overline{\mu}_1 \\ \mu_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \overline{\mu}_q \\ \mu_q & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

invertibilna matrica, a

$$D_0 = diag\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

se sastoji od tačno k blokova, gde je $k = \dim\ker(A_L) - \dim\ker(A) > 0$. Označićemo sa $\lambda_i, i = \overline{1,p}$, nenegativne kon-sopstvene vrednosti od A, a sa μ_j i $\overline{\mu}_j, j = \overline{1,q}$, parove konjugovano kompleksnih kon-sopstvenih vrednosti. Potražimo $A\{1\}$ u obliku:

$$A^{(1)} = \overline{S} \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Zbog $AA^{(1)}A = A$, zaključujemo da:

$$D_1 M D_1 = D_1 \Rightarrow M = D_1^{-1}$$

$$D_1 N D_0 = 0 \Rightarrow N D_0 = 0$$

$$D_0 P D_1 = 0 \Rightarrow D_0 P = 0$$

$D_0 Q D_0 = D_0 \Rightarrow Q = D_0^{(1)}$

Stavimo $N = 0$, $P = 0$. Dakle,

$$\overline{S} \begin{pmatrix} D_1^{-1} & 0 \\ 0 & D_0^{(1)} \end{pmatrix} S^{-1} \in A\{1\}. \tag{2.17}$$

Potražimo sada $\{1, 3, 4\}-$ inverz blok-matrice

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 0 & & & \\ & & 1 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

u obliku

$$D_0^{(1,3,4)} = diag\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{(1,3,4)}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{(1,3,4)} \right\}. \tag{2.19}$$

Lako se vidi da

$$D_0^{(1,3,4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ \beta_1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & \beta_2 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & \beta_k & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Pod pretpostavkom da za proizvoljne kompleksne elemente iz $i-$tog bloka važi $\beta_i \neq 0, i = \overline{1, k}$, može se naći i

$$\widetilde{D_0} = (D_0^{(1,3,4)})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1^{-1} & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & \beta_2^{-1} & & & \\ & & 1 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \beta_k^{-1} \\ & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Označimo sa $\tilde{A}$ običan inverz od $A^{(1)}$. Očigledno je:

$$\tilde{A} = S \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & \widetilde{D_0} \end{pmatrix} \overline{S}^{-1}. \tag{2.22}$$

Imamo:

$$N = A - \tilde{A} = S \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_0 - \widetilde{D_0} \end{pmatrix} \overline{S}^{-1}. \tag{2.23}$$

Blok-dijagonalna matrica $D_0 - \widetilde{D_0}$ sastavljena je od blokova:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\beta_i{}^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

Sada se lako dobija da

$$N\overline{N} = \overline{N}N = 0.$$

$\triangle$

Naredni rezultat predstavlja konstruktivni dokaz specijalnog slučaja Hartove teoreme iz [39].

Teorema 2.1.3. *Pod pretpostavkama Teoreme 2.1.1, važi*

$$\inf_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\in\mathbf{C}^m \\ \alpha_i\neq 0,\, i=\overline{1,m}}} ||A - \tilde{A}|| = 0, \tag{2.25}$$

gde su α_i parametri od kojih $\tilde{A}$ zavisi.

Dokaz: Ako skraćeno označimo sa "inf" infimum po parametrima navedenim u formuli (25), imamo

$$\begin{aligned} \inf ||A - \tilde{A}|| &= \inf ||N|| = \inf ||X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_0 - \widetilde{J_0} \end{pmatrix} X^{-1}|| \leq \\ &\leq ||X|| ||X^{-1}|| \inf || \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_0 - \widetilde{J_0} \end{pmatrix} || = \\ &= ||X|| ||X^{-1}|| \inf(\max_{i=\overline{1,m}} \frac{1}{|\alpha_i|}) = 0, \end{aligned}$$

jer, prema Lemi 2.1.3 i 2.1.4, važi:

$$\begin{aligned}\inf ||J_0 - \widetilde{J_0}|| &= \inf(\max_{i=\overline{1,m}} ||J_{k_i}(0) - \widetilde{J_{k_i}}(0)||) = \inf(\max_{i=\overline{1,m}} \frac{1}{|\alpha_i|}) = \\ &= \inf_{\alpha_s \in \mathbf{C}\setminus\{0\}} \frac{1}{|\alpha_s|},\end{aligned}$$

što je jednako 0 kada $\alpha_s \to \infty$ u kompleksnoj ravni.

$\triangle$

Teorema 2.1.4. *Pod pretpostavkama Teoreme 2.1.1, važi*

$$\inf_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \in \mathbf{C}^m \\ \alpha_i \neq 0, i=\overline{1,m}}} ||\widetilde{A}^{-1} - A^\dagger|| = 0, \tag{2.26}$$

gde su α_i parametri od kojih $\tilde{A}$ zavisi.

Dokaz: Opet, ako označimo sa "inf" infimum po parametrima navedenim u formuli (26), imamo

$$\begin{aligned}\inf ||\widetilde{A}^{-1} - A^\dagger|| &= \inf ||X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_0^{(1,3,4)} - J_0^\dagger \end{pmatrix} X^{-1}|| \leq \\ &\leq ||X|| ||X^{-1}|| \inf || \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_0^{(1,3,4)} - J_0^\dagger \end{pmatrix} || = \\ &= ||X|| ||X^{-1}|| \inf(\max_{i=\overline{1,m}} |\alpha_i|) = 0,\end{aligned}$$

jer, po Lemi 2.1.5 i 2.1.6:

$$\begin{aligned}\inf ||J_0^{(1,3,4)} - J_0^\dagger|| &= \inf(\max_{i=\overline{1,m}} ||J_{k_i}^{(1,3,4)}(0) - J_{k_i}^\dagger(0)||) = \\ &= \inf(\max_{i=\overline{1,m}} |\alpha_i|) = \inf_{\alpha_s \in \mathbf{C}\setminus\{0\}} |\alpha_s|,\end{aligned}$$

što je jednako 0 kada $\alpha_s \to 0$ u kompleksnoj ravni.

$\triangle$

Upravo smo zaključili da je reč o dobroj aproksimaciji, ali parametar u jednom slučaju teži nuli, a u drugom beskonačnosti. Nameće se pitanje da li je moguće istovremeno aproksimirati i A sa $\tilde{A}$, i $A^\dagger$ sa $\tilde{A}^{-1}$. Naredne dve teoreme daju negativan odgovor na ovo pitanje.

Teorema 2.1.5. *Pod pretpostavkama Teoreme 2.1.1, imamo*

$$\inf_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in\mathbf{C}^m\\ \alpha_i\neq 0,\, i=\overline{1,m}}} ||A-\tilde{A}||\cdot||\tilde{A}^{-1}-A^\dagger|| \leq (||X||\cdot||X^{-1}||)^2. \quad (2.27)$$

Dokaz: Uz saglasnost da je "inf" infimum uzet po parametrima navedenim u formuli (27), a $h=||X||\cdot||X^{-1}||$, onda je

$$\begin{aligned}
\inf\ & ||A-\tilde{A}||\cdot||\tilde{A}^{-1}-A^\dagger|| \\
= \ & \inf ||X\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & J_0-\widetilde{J_0}\end{pmatrix}X^{-1}||\cdot||X\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & J_0^{(1,3,4)}-J_0^\dagger\end{pmatrix}X^{-1}|| \\
\leq \ & h^2\cdot\inf||J_0-\widetilde{J_0}||\cdot||J_0^{(1,3,4)}-J_0^\dagger|| \\
= \ & h^2\inf(\max_{i=\overline{1,m}}||J_{k_i}(0)-\widetilde{J_{k_i}}(0)||\cdot\max_{i=\overline{1,m}}||J_{k_i}^{(1,3,4)}(0)-J_{k_i}^\dagger(0)||) \\
= \ & h^2\inf(\max_{i=\overline{1,m}}1/|\alpha_i|\cdot\max_{j=\overline{1,m}}|\alpha_j|)=h^2\inf\frac{|\alpha_t|}{|\alpha_s|}=h^2,
\end{aligned}$$

pošto $|\alpha_t|\geq|\alpha_i|\geq|\alpha_s|, i=\overline{1,m}$ povlači $\frac{|\alpha_t|}{|\alpha_s|}\geq 1$; traženi infimum jednak je 1, i može se dostići za dobar izbor $\alpha=(z,z,\ldots,z)$, $z\in\mathbf{C}\backslash\{0\}$.

$\triangle$

Teorema 2.1.6. *Pod pretpostavkama Teoreme 2.1.1, važi*

$$\inf_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in\mathbf{C}^m\\ \alpha_i\neq 0,\, i=\overline{1,m}}} (||A-\tilde{A}||+||\tilde{A}^{-1}-A^\dagger||) \leq 2||X||\cdot||X^{-1}||. \quad (2.28)$$

Dokaz: Uz saglasnost da je "inf" infimum uzet po parametrima navedenim u formuli (28), a $h = ||X|| \cdot ||X^{-1}||$, onda je

$$\begin{array}{rl}\inf & (||A - \tilde{A}|| + ||\tilde{A}^{-1} - A^{\dagger}||) \\ = & \inf(||X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_0 - \widetilde{J_0} \end{pmatrix} X^{-1}|| + ||X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_0^{(1,3,4)} - J_0^{\dagger} \end{pmatrix} X^{-1}||) \\ \leq & h^2 \cdot \inf ||J_0 - \widetilde{J_0}|| \cdot ||J_0^{(1,3,4)} - J_0^{\dagger}|| \\ = & h^2 \inf(\max\limits_{i=\overline{1,m}} ||J_{k_i}(0) - \widetilde{J_{k_i}}(0)|| + \max\limits_{i=\overline{1,m}} ||J_{k_i}^{(1,3,4)}(0) - J_{k_i}^{\dagger}(0)||) \\ = & h^2 \inf(\max\limits_{i=\overline{1,m}} 1/|\alpha_i| + \max\limits_{j=\overline{1,m}} |\alpha_j|) \\ = & h^2 \inf(\dfrac{1}{|\alpha_t|} + |\alpha_s|) = 2h^2, \end{array}$$

pošto $|\alpha_t| \geq |\alpha_s|$ povlači $|\alpha_s| + \frac{1}{|\alpha_t|} \geq |\alpha_t| + \frac{1}{|\alpha_t|} \geq 2$; traženi infimum može se dostići za dobar izbor $\alpha = (1, 1, \ldots, 1)$.

$\triangle$

Rezultati analogni onima iz Teorema 2.1.3–2.1.6 važe, sa neznatno promenjenim dokazima, i pod uslovima Teoreme 2.1.2, umesto Teoreme 2.1.1.

Neke osobine razlaganja

Tvrđenje 2.1.3. *(Spektar matrice $\tilde{A}$) Ako $\sigma(A) = \sigma(J_1) \cup \{0\}$, tada $\sigma(N) = \{0\}$ i*

$$\sigma(\tilde{A}) = \sigma(J_1) \cup \bigcup_{k_i=1}^{m} \{\frac{1}{\sqrt[k_i]{\alpha_{k_i}}}\}, \tag{2.29}$$

gde se uzima tačno k_i vrednosti korena kompleksnog broja α_{k_i}.

Dokaz: Ako $\sigma(A) = \sigma(J_1) \cup \{0\}$, tada $\sigma(\tilde{A}) = \sigma(J_1) \cup \sigma(\widetilde{J_0})$. Jasno, $\sigma(\widetilde{J_0}) = \bigcup_{k_i=1}^{m} \sigma(\widetilde{J_{k_i}}(0))$, i sopstvene vrednosti od $\widetilde{J_{k_i}}(0)$ su $\frac{1}{\sqrt[k_i]{\alpha_{k_i}}}$, jer:

$$0 = \begin{vmatrix} -\sigma & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\sigma & 1 \\ \frac{1}{\alpha_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\sigma \end{vmatrix} =$$

$$= \quad (-1)^{k_i}\sigma^{k_i} + (-1)^{k_i+1}\frac{1}{\alpha_i} = (-1)^{k_i}(\sigma^{k_i} - \frac{1}{\alpha_i}),$$

i sada je lako izvesti traženi zaključak.

△

Tvrđenje 2.1.4 *(Osobine razlaganja)*

1. *Ako se pomnoži sa N sa leve (desne) strane formula $A = \tilde{A} + N$, dobija se $NA = N\tilde{A}$, $(AN = \tilde{A}N)$;*

2. *Pošto $\tilde{A}^{-1} \in A\{1\}$, mora da bude $A\tilde{A}^{-1}A = A$; ako se ova formula pomnoži sa leve (desne) strane sa $\tilde{A}^{-1}$, dobija se da su $A\tilde{A}^{-1}$ i $\tilde{A}^{-1}A$ redom projektori $P_{R(A),S}$, odnosno $P_{T,N(A)}$ (pod uslovima $R(A) \oplus S = \mathbf{C}^n$,$(T \oplus N(A) = \mathbf{C}^m)$); ovaj uslov je, prema Tvrđenju 10, str. 73, iz [7] ekvivalentan egzistenciji matrice $X \in A\{1,2\}$, gde $R(X) = T$, $N(X) = S$).*

3. *Zameni li se $A = \tilde{A}+N$ umesto prvog(drugog) "A" u $A\tilde{A}^{-1}A = A$, dobija se: $N\tilde{A}^{-1}A = NP_{T,N(A)} = 0$, $(A\tilde{A}^{-1}N = P_{R(A),S}N = 0)$.*

4. *Može se iskoristiti rezultat iz [18], str. 9 (Ako $S \in T\{1\}$, tada $STS \in T\{1,2\}$), čime se zaključuje da:*

$$\tilde{A}^{-1}A\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1}(\tilde{A} + N)\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1} + \tilde{A}^{-1}N\tilde{A}^{-1} \in A\{1,2\},$$

jer je $\tilde{A}^{-1} \in A\{1\}$.

Ako je razlaganje matrice A dobijeno korišćenjem metoda opisanog u Teoremi 2.1.2, prethodno tvrđenje ostaje da važi, uz neke neznatne izmene.

Glava 3

Zakon obrnutog redosleda za operatore

Posmatrajmo dve kvadratne kompleksne matrice A i B. Ukoliko su one invertibilne, tada je invertibilan i njihov proizvod, i važi:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \tag{3.1}$$

Gornja relacija naziva se zakon obrnutog redosleda ("reverse order law", ili "reverse order rule", skraćeno "ROL") za običan inverz.
Od interesa je uopštiti gornju relaciju tako da ona važi za neinvertibilne kvadratne i pravougaone matrice $A \in C^{m\times n}$ i $B \in C^{n\times p}$, i za neki uopšteni inverz umesto običnog. Prirodno uopštenje zakona obrnutog redosleda, za Mur-Penrouzov inverz umesto običnog, oblika

$$(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger}, \tag{3.2}$$

ne mora da važi, jer $A^{\dagger}A \neq I_n$ kad $r(A) < n$, odnosno $BB^{\dagger} \neq I_n$ kad $r(B) < n$. Zato je neophodno odrediti potrebne i dovoljne uslove pod kojima (3.2) važi.

Teorijski, $(AB)^{\dagger}$ se može zapisati u nekom od sledećih oblika:

1. $(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger}$,

2. $(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger} + X$,

3. $(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}YA^{\dagger}$,

gde su X i Y neke matrice u kojima figurišu A i B, odnosno neki njihovi inverzi.

Još je Grevil 1966. [36] dokazao da (3.2) važi ako i samo ako $\mathcal{R}(A^*AB) \subseteq \mathcal{R}(B)$ i $\mathcal{R}(BB^*A^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*)$. Ovo su vrlo jaki uslovi, te je od interesa potražiti određene slabije zakone obrnutog redosleda u alternativnim oblicima, kao npr.

$$(AB)^\dagger = B^\dagger(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger A^\dagger,$$

ili

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger - B^\dagger[(I - BB^\dagger)(I - A^\dagger A)]^\dagger A^\dagger.$$

Kada istražujemo Mur-Penrouzov inverze raznih matričnih proizvoda, zapažamo da su neki zakoni obrnutog redosleda ekvivalentni, iako imaju različite zapise. Na primer, Tian je pokazao:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \Leftrightarrow (ABB^\dagger)^\dagger = BB^\dagger A^\dagger \text{ i } (A^\dagger AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger A;$$

kao i

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \Leftrightarrow (AB)^\dagger = B^\dagger(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger A^\dagger \text{ i } (A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger = BB^\dagger A^\dagger A.$$

Ne samo to, primećuje se da su neki mešoviti zakoni obrnutog redosleda zapravo identiteti, na primer:

$$(AB)^\dagger = (A^\dagger AB)^\dagger(ABB^\dagger)^\dagger,$$

ili

$$(ABC)^\dagger = (A^\dagger ABC)^\dagger B(ABCC^\dagger)^\dagger,$$

a čim se pojave identitete, odmah postoji mogućnost za dalja uprošćavanja izraza i izvođenje novih i opštijih rezultata.

Pokazaćemo na primeru kako se konstruišu mešoviti zakoni obrnutog redosleda. Polazimo od identiteta

$$T = TT^\dagger T = TT^*(T^\dagger)^* = (T^\dagger)^*T^*T,$$

dalje:

$$AB = AA^\dagger ABB^\dagger B = A(A^\dagger ABB^\dagger)B,$$

i ako se uzme trostruki zakon obrnutog redosleda $(PQR)^\dagger = R^\dagger Q^\dagger P^\dagger$, dobija se mešoviti zakon obrnutog redosleda:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger (A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger A^\dagger.$$

Na sličan način polazeći od

$$AB = AA^\dagger ABB^\dagger B = (A^\dagger)^* A^* ABB^* (B^\dagger)^* = (A^\dagger)^* (A^* ABB^*)(B^\dagger)^*,$$

dobija se:

$$(AB)^\dagger = B^* (A^* ABB^*)^\dagger A^*.$$

Međutim, kada se radi sa $\theta-$inverzima $(\emptyset \neq \theta \subset \{1,2,3,4\})$, nemamo jedinstvene elemente za A^θ, B^θ i $(AB)^\theta$, već cele skupove. Zato je u tom slučaju potrebno ispitati uslove pod kojim važe sledeće četiri skupovne relacije:

1. $\{(AB)^\theta\} \cap \{B^\theta A^\theta\} \neq \emptyset$,
2. $\{(AB)^\theta\} \subseteq \{B^\theta A^\theta\}$,
3. $\{(AB)^\theta\} \supseteq \{B^\theta A^\theta\}$,
4. $\{(AB)^\theta\} = \{B^\theta A^\theta\}$.

Tian i Liu [90] su, pri ispitivanju tih uslova, koristili sledeće: ako se skupovi S_1 i S_2 sastoje od matrica istog formata, tada

1. $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ ako i samo ako $\min_{A\in S_1,\, B\in S_2} r(A-B) = 0$,
2. $S_1 \subseteq S_2$ ako i samo ako $\max_{A\in S_1} \min_{B\in S_2} r(A-B) = 0$.

Sve napred navedeno uz neophodne odgovarajuće izmene važi i za ograničene operatore na Hilbertovim prostorima. Glavna razlika je u tome što su obično potrebna dodatna razmatranja o postojanju Mur-Penrouzovog inverza određenih operatora (tj. zatvorenost njihove slike), za razliku od kompleksnih matrica čiji Mur-Penrouzov inverz uvek postoji. Zatim, skoro svi rezultati u kojima se pominje rang matrice **ne mogu** se proširiti na operatore, jer tamo pojam ranga nema smisla. Ponekad su moguća izvesna "zaobilazna" uopštenja. Zato ćemo, umesto metoda matričnih rangova koje je uglavnom korišćen u radovima [85][86][87][88][89], koristiti metod operatorskih matrica indukovanih odgovarajućim dekompozicijama prostora.

3.1 Metode dokazivanja

Rezultati koji će biti izloženi u poglavljima 3 i 4 predstavljaju uglavnom uopštenja Tianovih rezultata sa kompleksnih matrica na operatore na Hilbertovim prostorima.

Metod matričnih rangova

Tian je pri dokazivanju uglavnom koristio metod matričnih rangova, koji se ukratko zasniva na sledećem:

Data su dva matrična izraza, $p(A_1^\dagger, \ldots, A_k^\dagger)$ i $q(B_1^\dagger, \ldots, B_l^\dagger)$, iste veličine, sastavljena od odgovarajućih matrica i njihovih Mur–Penrouzovih inverza. Potom se određuju potrebni i dovoljni uslovi pod kojima

$$p(A_1^\dagger, \ldots, A_k^\dagger) = q(B_1^\dagger, \ldots, B_l^\dagger). \tag{3.3}$$

To je očigledno ekvivalentno sa

$$r(p(A_1^\dagger, \ldots, A_k^\dagger) - q(B_1^\dagger, \ldots, B_l^\dagger)) = 0.$$

Ako se može naći formula kojom se izražava rang matričnog izraza na levoj strani, tada je moguće odatle izvesti potrebne i dovoljne uslove tako da (3.3) važi. Ovaj metod se pokazao veoma efikasnim pri karakterizaciji raznih jednakosti za Mur-Penrouzove inverze matrica.

Kao primer, pokazaćemo kako je Tian u [85] dokazao Teoremu 2.2, tj. kako je dokazao da $(a) \Leftrightarrow (e) \Leftrightarrow (i)$, gde:

(a) $ABB^\dagger A^\dagger AB = AB$;

(e) $BB^\dagger A^\dagger A$ je idempotent;

(i) $r[A^*, B] = r(A) + r(B) - r(AB)$,

gde $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbf{C}^{n\times p}$, a $[A^*, B]$ je blok-matrica čije su komponente A^* i B.

U dokazu se koristi rezultat do kog su došli, u nešto izmenjenom obliku, Baksalari [Baksalary] i Stijan [Styan] [5]:

$$r(AB - ABB^\dagger A^\dagger AB) = r(BB^\dagger A^\dagger A - (BB^\dagger A^\dagger A)^2) = \tag{3.4}$$
$$= r[A^*, B] + r(AB) - r(A) - r(B). \tag{3.5}$$

Dakle, (a) važi ako i samo ako je $r(AB - ABB^\dagger A^\dagger AB) = 0$; zatim $BB^\dagger A^\dagger A$ je idempotent ako i samo ako $(BB^\dagger A^\dagger A)^2 = BB^\dagger A^\dagger A$. Na osnovu (3.4) sledi da su ova dva tvrđenja ekvivalentna, i da važe ako i samo ako: $r[A^*, B] = r(A) + r(B) - r(AB)$. Dakle, $(a) \Leftrightarrow (e) \Leftrightarrow (i)$.

Metod operatorskih matrica

Kako je koncept matričnih rangova neprimenljiv u slučaju linearnih operatora na Hilbertovim prostorima, bio je neophodan neki drugi moćni metod za dokazivanje. Metod koji je korišćen pri dokazivanju razultata predstavljenih u ovoj disertaciji zasniva se na narednih nekoliko lema: prve dve se bave formom operatora pri odgovarajućim dekompozicijama prostora, treća lema je veoma korisna pri dokazivanju egzistencije Mur-Penrouzovog inverza određenih složenijih operatora, dok četvrta lema uspostavlja vezu između slike operatora i činjenice da taj operator komutira sa određenim ermitskim operatorom.

Lema 3.1.1 *Neka je $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ operator sa zatvorenom slikom. Tada A ima matričnu dekompoziciju u odnosu na ortogonalnu dekompoziciju prostora $X = \mathcal{R}(A^*) \oplus \mathcal{N}(A)$ i $Y = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^*)$:*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix},$$

gde je A_1 invertibilno. Štaviše,

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix}.$$

Lema 3.1.2 *Neka operator $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ ima zatvorenu sliku. Neka su X_1 i X_2 zatvoreni uzajamno ortogonalni potprostori od X, tako da $X = X_1 \oplus X_2$. Neka su Y_1 i Y_2 zatvoreni i uzajamno ortogonalni potprostori od Y, tako da $Y = Y_1 \oplus Y_2$. Tada operator A ima sledeću matričnu reprezentaciju u odnosu na ortogonalnu sumu potprostora $X = X_1 \oplus X_2 = \mathcal{R}(A^*) \oplus \mathcal{N}(A)$ i $Y = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^*) = Y_1 \oplus Y_2$:*

(a)

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix},$$

gde $D = A_1A_1^* + A_2A_2^*$ *slika* $\mathcal{R}(A)$ *na sebe i* $D > 0$. *Takođe,*

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1} & 0 \\ A_2^*D^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix},$$

gde $D = A_1^*A_1 + A_2^*A_2$ *slika* $\mathcal{R}(A^*)$ *na sebe i* $D > 0$. *Takođe,*

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} D^{-1}A_1^* & D^{-1}A_2^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ovde A_i *označava različite operatore u svakom od navedenih slučajeva.*

Dokaz: Napomenimo da je jedan specijalan slučaj ovog rezultata dokazan u [29]. Ovde ćemo dokazati samo deo (a), pošto je dokaz za (b) analogan. U opštem slučaju, operator A ima sledeću reprezentaciju:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix},$$

tj.

$$A_1 = A_{|X_1} : X_1 \to \mathcal{R}(A),\ A_2 = A_{|X_2} : X_2 \to \mathcal{R}(A),$$
$$A_3 = A_{|X_1} : X_1 \to \mathcal{N}(A^*),\ A_4 = A_{|X_2} : X_2 \to \mathcal{N}(A^*).$$

Dalje,

$$A^* = \begin{bmatrix} A_1^* & A_3^* \\ A_2^* & A_4^* \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}.$$

Iz $A^*(\mathcal{N}(A^*)) = \{0\}$ sledi $A_3^* = 0$ i $A_4^* = 0$, pa $A_3 = 0$ i $A_4 = 0$. Dakle, $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Primetimo da

$$AA^* = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix},$$

gde $D = A_1A_1^* + A_2A_2^* : \mathcal{R}(A) \to \mathcal{R}(A)$. Iz $\mathcal{N}(AA^*) = \mathcal{N}(A^*)$ sledi da je D "jedan-jedan". Iz $\mathcal{R}(AA^*) = \mathcal{R}(A)$ sledi da je D "na". Dakle, operator D je invertibilan. Konačno, dobijamo oblik za Mur-Penrouzov inverz od A koristeći formulu $A^\dagger = A^*(AA^*)^\dagger$.

$\triangle$

Sledeći rezultat je poznat i može se naći u [46], ili [18] str. 127.

Lema 3.1.3 *Neka su $A \in \mathcal{L}(Y,Z)$ i $B \in \mathcal{L}(X,Y)$ operatori sa zatvorenom slikom. Tada AB ima zatvorenu sliku ako i samo ako $A^\dagger ABB^\dagger$ ima zatvorenu sliku.*

Prethodna lema je izuzetno bitna i korisna kada je potrebno dokazati egzistenciju Mur-Penrouzovog inverza nekog složenijeg izraza. S druge strane, naredna lema uspostavlja vezu između slika operatora i komutiranja tog operatora s određenim ermitskim operatorom.

Lema 3.1.4 *[31] Neka su X, Y Hilbertovi prostori, neka operator $C \in \mathcal{L}(X,Y)$ ima zatvorenu sliku, i neka je $D \in \mathcal{L}(Y)$ ermitski i invertibilan. Tada $\mathcal{R}(DC) = \mathcal{R}(C)$ ako i samo ako $[D, CC^\dagger] = 0$.*

Dokaz:
($\Rightarrow$:) Posmatramo ortogonalne dekompozicije $X = \mathcal{R}(C^*) \oplus \mathcal{N}(C)$ i $Y = \mathcal{R}(C) \oplus \mathcal{N}(C^*)$. Tada operatori C i D imaju sledeće matrične forme:

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(C^*) \\ \mathcal{N}(C) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(C) \\ \mathcal{N}(C^*) \end{bmatrix},$$

gde je C_1 invertibilan, i

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(C) \\ \mathcal{N}(C^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(C) \\ \mathcal{N}(C^*) \end{bmatrix},$$

gde $D_2 = D_3^*$. Sledi da

$$DC = \begin{bmatrix} D_1C_1 & 0 \\ D_3C_1 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(C^*) \\ \mathcal{N}(C) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(C) \\ \mathcal{N}(C^* \end{bmatrix}.$$

Zato $\mathcal{R}(DC) = \mathcal{R}(C)$ povlači $D_3 = 0$ i $D_2 = 0$, pa $D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_4 \end{bmatrix}$. Pošto je D ermitski i invertibilan, sledi da su takvi i D_1 i D_4. Kako je $C^\dagger = \begin{bmatrix} C_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, sledi da $DCC^\dagger = CC^\dagger D$ važi.
($\Leftarrow$:) Ako je D invertibilan i $DCC^\dagger = CC^\dagger D$, tada

$$\mathcal{R}(DC) = \mathcal{R}(DCC^\dagger) = \mathcal{R}(CC^\dagger D) = \mathcal{R}(CC^\dagger) = \mathcal{R}(C).$$

$\triangle$

3.2 Zakon obrnutog redosleda za Mur-Penrouzov inverz

U ovoj sekciji dokazujemo razne rezultate o zakonu obrnutog redosleda za Mur-Penrouzov inverz. Navedena tvrđenja predstavljaju uopštenja rezultata iz Tianovog rada [85], i objavljena su u radu D. S. Djordjević, N. Č. Dinčić, *Reverse order law for the Moore-Penrose inverse*, J. Math. Anal. Appl. 361 (2010), 252–261.

Teorema 3.2.1 *Neka su X, Y, Z Hilbertovi prostori, i neka su $A \in \mathcal{L}(Y, Z)$ i $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ operatori tako da A, B, AB imaju zatvorene slike. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(a) $ABB^\dagger A^\dagger AB = AB$;

(b) $B^\dagger A^\dagger ABB^\dagger A^\dagger = B^\dagger A^\dagger$;

(c) $A^\dagger ABB^\dagger = BB^\dagger A^\dagger A$;

(d) $A^\dagger ABB^\dagger$ *je idempotent;*

(e) $BB^\dagger A^\dagger A$ *je idempotent;*

(f) $B^\dagger (A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger A^\dagger = B^\dagger A^\dagger$;

(g) $(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger = BB^\dagger A^\dagger A$;

Dokaz: Pretpostavimo da, prema Lemi 3.1.1, operator B, u odnosu na odgovarajuće dekompozicije prostora, ima sledeću matričnu formu:

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B^*) \\ \mathcal{N}(B) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B) \\ \mathcal{N}(B^*) \end{bmatrix},$$

gde je B_1 invertibilan. Tada

$$B^\dagger = \begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B) \\ \mathcal{N}(B^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B^*) \\ \mathcal{N}(B) \end{bmatrix}.$$

Neka zatim, na osnovu Leme 3.1.2, operator A ima sledeću matričnu formu:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B) \\ \mathcal{N}(B^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix},$$

gde je $D = A_1A_1^* + A_2A_2^*$ invertibilan i pozitivan u $\mathcal{L}(\mathcal{R}(A))$. Tada

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1} & 0 \\ A_2^*D^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Primetimo sledeće:

$$BB^\dagger = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B) \\ \mathcal{N}(B^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B) \\ \mathcal{N}(B^*) \end{bmatrix},$$

$$AA^\dagger = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix},$$

i

$$A^\dagger A = \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1}A_1 & A_1^*D^{-1}A_2 \\ A_2^*D^{-1}A_1 & A_2^*D^{-1}A_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B) \\ \mathcal{N}(B^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B) \\ \mathcal{N}(B^*) \end{bmatrix}.$$

Na osnovu Leme 3.1.3 sledi da $A^\dagger ABB^\dagger$ ima zatvorenu sliku. Prema tome,

$$A^\dagger ABB^\dagger = \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1}A_1 & 0 \\ A_2^*D^{-1}A_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$BB^\dagger A^\dagger A = \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1}A_1 & A_1^*D^{-1}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Posmatrajmo sledeći lanac ekvivalencija, povezanih sa tvrđenjem (a):

$$\begin{aligned} & ABB^\dagger A^\dagger AB = AB \\ \Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1}A_1 & A_1^*D^{-1}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix} A_1A_1^*D^{-1}A_1B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_1. \tag{3.6}$$

Dakle, tvrđenje (a) je ekvivalentno sa (3.6). Adjungovanjem izraza (3.6) dobijamo ekvivalent

$$A_1^*D^{-1}A_1A_1^* = A_1^*. \tag{3.7}$$

Razmotrimo sad tvrđenje (b):

$$
\begin{aligned}
& B^\dagger A^\dagger ABB^\dagger A^\dagger = B^\dagger A^\dagger \\
\Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^* D^{-1} A_1 & 0 \\ A_2^* D^{-1} A_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^* D^{-1} & 0 \\ A_2^* D^{-1} & 0 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^* D^{-1} & 0 \\ A_2^* D^{-1} & 0 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix} B_1^{-1} A_1^* D^{-1} A_1 A_1^* D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^{-1} A_1^* D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & B_1^{-1} A_1^* D^{-1} A_1 A_1^* D^{-1} = B_1^{-1} A_1^* D^{-1} \Leftrightarrow (3.7).
\end{aligned}
$$

Dakle, (a) $\Leftrightarrow$ (3.6) $\Leftrightarrow$ (3.7) $\Leftrightarrow$ (b).

U slučaju tvrđenja (c) imamo:

$$
A^\dagger ABB^\dagger = BB^\dagger A^\dagger A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_1^* D^{-1} A_1 & 0 \\ A_2^* D^{-1} A_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^* D^{-1} A_1 & A_1^* D^{-1} A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\Leftrightarrow A_1^* D^{-1} A_2 = 0 \Leftrightarrow A_2^* D^{-1} A_1 = 0. \tag{3.8}
$$

Znači, ako (c) važi, tj. $A_2^* D^{-1} A_1 = 0$, tada očigledno $A_2 A_2^* D^{-1} A_1 = 0$, pa i (3.6) takođe važi zbog:

$$
(A_1 A_1^* + A_2 A_2^*) D^{-1} = I \Rightarrow A_1 A_1^* D^{-1} A_1 + A_2 A_2^* D^{-1} A_1 = A_1
$$

$$
\Leftrightarrow A_1 A_1^* D^{-1} A_1 = A_1.
$$

S druge strane, pretpostavimo da (3.6) važi. Tada $A_2 A_2^* D^{-1} A_1 = 0$, i imamo sledeće

$$
A_2 A_2^* D^{-1} A_1 = 0 \Rightarrow \mathcal{R}(D^{-1} A_1) \subset \mathcal{N}(A_2 A_2^*) = \mathcal{N}(A_2^*) \Rightarrow A_2^* D^{-1} A_1 = 0,
$$

čime je (3.8) zadovoljeno. Dakle, (c) takođe važi. Upravo smo dokazali da (c) $\Leftrightarrow$ (3.8) $\Leftrightarrow$ (3.6) $\Leftrightarrow$ (a).

Neposredan račun pokazuje da je (d) ekvivalentno sa

$$
\begin{cases} A_1^* D^{-1} A_1 A_1^* D^{-1} A_1 = A_1^* D^{-1} A_1 \\ A_2^* D^{-1} A_1 A_1^* D^{-1} A_1 = A_2^* D^{-1} A_1 \end{cases} \tag{3.9}
$$

Ako (3.6) važi, tada je očigledno zadovoljeno (3.9). S druge strane, pretpostavimo da (3.9) važi. Tada pomnožimo prvu jednakost iz (3.9) sa A_1 sa leve strane, a drugu jednačinu iz (3.9) sa A_2 sa leve strane. Suma dveju novodobijenih jednakosti daje nam (3.6).

Primetimo da je i (e) ekvivalentno sa (3.9). Dakle, (d) $\Leftrightarrow$ (3.9) $\Leftrightarrow$ (3.7) $\Leftrightarrow$ (e).

Da bismo dokazali (f), nastavićemo na sledeći način. Prema Lemi 3.1.3, operator $Q = A^\dagger ABB^\dagger$ ima zatvorenu sliku. Koristićemo formulu $Q^\dagger = Q^*(QQ^*)^\dagger = (Q^*Q)^\dagger Q^*$. Znači,

$$\begin{aligned}
(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger &= (BB^\dagger A^\dagger AA^\dagger ABB^\dagger)^\dagger BB^\dagger A^\dagger A = \\
&= (BB^\dagger A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger BB^\dagger A^\dagger A = \\
&= \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1}A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1}A_1 & A_1^*D^{-1}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (A_1^*D^{-1}A_1)^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1}A_1 & A_1^*D^{-1}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (A_1^*D^{-1}A_1)^\dagger A_1^*D^{-1}A_1 & (A_1^*D^{-1}A_1)^\dagger A_1^*D^{-1}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Dobijamo

$$\begin{aligned}
& B^\dagger(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger A^\dagger - B^\dagger A^\dagger = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} B_1^{-1}(A_1^*D^{-1}A_1)^\dagger A_1^*D^{-1} - B_1^{-1}A_1^*D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \\
& \Leftrightarrow (A_1^*D^{-1}A_1)^\dagger A_1^* = A_1^*. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Treba dokazati da (3.6) $\Leftrightarrow$ (3.10). Neka $P = A_1^*D^{-1}A_1$. Očigledno, $P^* = P$.

(3.6)$\Rightarrow$(3.10): Imamo sledeće:

$$\begin{gathered}
P^2 = A_1^*D^{-1}A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_1^*D^{-1}A_1 = P, \\
P = P^* = P^2 = P^\dagger, \\
(A_1^*D^{-1}A_1)^\dagger A_1^* = A_1^*D^{-1}A_1A_1^* = A_1^*.
\end{gathered}$$

(3.10)$\Rightarrow$(3.6): U ovom slučaju važi

$$\begin{gathered}
(A_1^*D^{-1}A_1)^\dagger A_1^* = A_1^*, \\
P^\dagger P = P, \\
PP^\dagger = (PP^\dagger)^* = (P^*)^\dagger P^* = P^\dagger P \\
P^\dagger = P^\dagger PP^\dagger = PP^\dagger = P^\dagger P = P \\
A_1^* = (A_1^*D^{-1}A_1)^\dagger A_1^* = A_1^*D^{-1}A_1A_1^*.
\end{gathered}$$

Upravo smo dokazali (f)$\Leftrightarrow$(3.6)$\Leftrightarrow$(a).

Prilikom dokazivanja (g)$\Leftrightarrow$(f), koriste se činjenice već dokazane u (f), tj. za $(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger$. Zato imamo

$$(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger - BB^\dagger A^\dagger A = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (A_1^* D^{-1} A_1)^\dagger A_1^* D^{-1} A_1 = A_1^* D^{-1} A_1, \\ (A_1^* D^{-1} A_1)^\dagger A_1^* D^{-1} A_2 = A_1^* D^{-1} A_2. \end{cases}$$

Lako se zaključuje da (g)$\Leftrightarrow$(f).

$\triangle$

Teorema 3.2.2 *Neka su X, Y, Z Hilbertovi prostori, i neka su $A \in \mathcal{L}(Y,Z)$, $B \in \mathcal{L}(X,Y)$ operatori tako da A, B, AB imaju zatvorene slike. Tada važe sledeća tvrđenja:*

(a) $AB(AB)^\dagger = ABB^\dagger A^\dagger \Leftrightarrow A^*AB = BB^\dagger A^*AB \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathcal{R}(A^*AB) \subseteq \mathcal{R}(B) \Leftrightarrow B^\dagger A^\dagger \in (AB)\{1,2,3\}$;

(b) $(AB)^\dagger AB = B^\dagger A^\dagger AB \Leftrightarrow ABB^* = ABB^*A^\dagger A \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathcal{R}(BB^*A^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*) \Leftrightarrow B^\dagger A^\dagger \in (AB)\{1,2,4\}$;

(c) *Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$*;*

(2) $AB(AB)^\dagger = ABB^\dagger A^\dagger$ *i* $(AB)^\dagger AB = B^\dagger A^\dagger AB$*;*

(3) $A^*AB = BB^\dagger A^*AB$ *i* $ABB^* = ABB^*A^\dagger A$*;*

(4) $\mathcal{R}(A^*AB) \subseteq \mathcal{R}(B)$ *i* $\mathcal{R}(BB^*A^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*)$*.*

Dokaz: Neka operatori A i B imaju iste matrične reprezentacije kao u Teoremi 3.2.1. Iz računskih razloga je korisno znati sledeće proizvode:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} A_1B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (AB)^\dagger = \begin{bmatrix} (A_1B_1)^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ B^\dagger A^\dagger &= \begin{bmatrix} B_1^{-1}A_1^*D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nađimo prvo ekvivalentne izraze za naša tvrđenja preko A_1, A_2 i B_1.

(a) 1. $AB(AB)^\dagger = ABB^\dagger A^\dagger \Leftrightarrow A_1B_1(A_1B_1)^\dagger = A_1A_1^*D^{-1}$. Ovde je $A_1B_1(A_1B_1)^\dagger$ ermitski, pa $[A_1A_1^*, D^{-1}] = 0$.

2. $A^*AB = BB^\dagger A^*AB \Leftrightarrow A_2^*A_1 = 0$.

3. Primetimo da je $\mathcal{R}(A^*AB) \subset \mathcal{R}(B)$ zadovoljeno ako i samo ako $BB^\dagger A^*AB = A^*AB$, pa 2.⇔3.

4. Ako proverimo Penrouzove jednačine, vidimo da: $B^\dagger A^\dagger \in (AB)\{1,2,3\} \Leftrightarrow A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_1$ i $[A_1A_1^*, D^{-1}] = 0$.

Sada dokazujemo: 1.⇔2., 4.⇒2. i 1.⇒4.

Dokažimo 1.⇔2. Primetimo da

$$A_1B_1(A_1B_1)^\dagger = A_1A_1^*D^{-1} \Leftrightarrow (A_1B_1)^\dagger = (A_1B_1)^\dagger A_1A_1^*D^{-1}.$$

Poslednji izraz dobijen je množenjem prvog izraza sa $(A_1B_1)^\dagger$ sa leve strane, odnosno množenjem drugog izraza sa A_1B_1 sa leve strane, i korišćenjem $A_1A_1^* = A_1B_1B_1^{-1}A_1^*$. Sada imamo lanac ekvivalencija:

$$\begin{aligned}
&(A_1B_1)^\dagger = (A_1B_1)^\dagger A_1A_1^*D^{-1}\\
&\Leftrightarrow (A_1B_1)^\dagger(A_1A_1^* + A_2A_2^*) = (A_1B_1)^\dagger A_1A_1^*\\
&\Leftrightarrow (A_1B_1)^\dagger A_2A_2^* = 0 \Leftrightarrow \mathcal{R}(A_2A_2^*) \subset \mathcal{N}((A_1B_1)^\dagger)\\
&\Leftrightarrow \mathcal{R}(A_2) \subset \mathcal{N}((A_1B_1)^*) \Leftrightarrow B_1^*A_1^*A_2 = 0 \Leftrightarrow A_1^*A_2 = 0,
\end{aligned}$$

Znači, upravo smo pokazali da 1. ⇔ 2.

Sada dokazujemo 1.⇒4. Pomnožimo li $A_1B_1(A_1B_1)^\dagger = A_1A_1^*D^{-1}$ sa A_1B_1 sa desne strane, sledi $A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_1$. Dakle, 4. važi.

Konačno, dokažimo 4.⇒2. Ukoliko važi da $A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_1$ i $[A_1A_1^*, D^{-1}] = 0$, tada $A_1A_1^*A_1 = DA_1 = A_1A_1^*A_1 + A_2A_2^*A_1$, pa zato $A_2A_2^*A_1 = 0$. Dakle, $\mathcal{R}(A_1) \subset \mathcal{N}(A_2A_2^*) = \mathcal{N}(A_2^*)$, pa $A_2^*A_1 = 0$. Znači, 2. važi.

Primetimo da je ekvivalencija 3.⇔4. dokazana i u [30].

(b) 1. $(AB)^\dagger AB = B^\dagger A^\dagger AB \Leftrightarrow (A_1B_1)^\dagger A_1B_1 = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1B_1$. Štavise, $(A_1B_1)^\dagger A_1B_1$ je ermitski, pa $[B_1B_1^*, A_1^*D^{-1}A_1] = 0$.

2. $ABB^* = ABB^*A^\dagger A \Leftrightarrow A_1B_1B_1^*A_1^*D^{-1}A_1 = A_1B_1B_1^*$ i $A_1B_1B_1^*A_1^*D^{-1}A_2 = 0$.

3. Primetimo da $\mathcal{R}(BB^*A^*) \subset \mathcal{R}(A^*)$ važi ako i samo ako $A^\dagger ABB^*A^* = BB^*A^*$, što je ekvivalentno sa $ABB^*A^\dagger A = ABB^*$. Dakle, 2.$\Leftrightarrow$3.

4. Penrouzove jednačine povlače: $B^\dagger A^\dagger \in (AB)\{1,2,4\} \Leftrightarrow A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_1$ i $[B_1B_1^*, A_1^*D^{-1}A_1] = 0$.

Dokazujemo 1. $\Rightarrow$ 4. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 1.

Neka 1. važi. Ako pomnožimo $(A_1B_1)^\dagger A_1B_1 = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1B_1$ sa A_1B_1 sa leve strane, dobijamo $A_1 = A_1A_1^*D^{-1}A_1$. Već znamo da $[B_1B_1^*, A_1^*D^{-1}A_1] = 0$ važi. Znači, 1. $\Rightarrow$ 4.

Neka 4. važi. Očigledno, $A_1B_1B_1^*A_1^*D^{-1}A_1 = A_1A_1^*D^{-1}A_1B_1B_1^* = A_1B_1B_1^*$. Znači, prva jednakost iz 2. važi. Druga jednakost iz 2. takođe važi, jer $A_1^*D^{-1}A_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_1$, kako je već dokazano u dokazu Teoreme 2.1. Opet koristimo $[B_1B_1^*, A_1^*D^{-1}A_1] = 0$. Dakle, 4. $\Rightarrow$ 2.

Da bismo dokazali 2.$\Rightarrow$1., množimo $A_1B_1B_1^*A_1^*D^{-1}A_1 = A_1B_1B_1^*$ sa $(A_1B_1)^\dagger$ sa leve strane. Sledi da $B_1^*A_1^*D^{-1}A_1 = (A_1B_1)^\dagger A_1B_1B_1^*$, pa $(A_1B_1)^\dagger A_1B_1 = B_1^*A_1^*D^{-1}A_1(B_1^*)^{-1}$, ili ekvivalentno, $(A_1B_1)^\dagger A_1B_1 = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1B_1$. Dakle, 2. $\Rightarrow$ 1.

Primetimo da je 3.$\Leftrightarrow$4. pokazano i u [30].

Konačno, deo (c) sledi iz (a) and (b).

$\triangle$

Teorema 3.2.3 *Neka su X, Y, Z Hilbertovi prostori, i neka su $A \in \mathcal{L}(Y,Z)$, $B \in \mathcal{L}(X,Y)$ operatori tako da A, B, AB imaju zatvorene slike. Tada važi:*

(a) $AB(AB)^\dagger A = ABB^\dagger \Leftrightarrow A^*ABB^\dagger = BB^\dagger A^*A \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathcal{R}(A^*AB) \subseteq \mathcal{R}(B) \Leftrightarrow B^\dagger A^\dagger \in (AB)\{1,2,3\}$;

(b) $B(AB)^\dagger AB = A^\dagger AB \Leftrightarrow A^\dagger ABB^* = BB^*A^\dagger A \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathcal{R}(BB^*A^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*) \Leftrightarrow B^\dagger A^\dagger \in (AB)\{1,2,4\}$;

(c) *Sledeća tri tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$;

(2) $AB(AB)^\dagger A = ABB^\dagger$ *i* $B(AB)^\dagger AB = A^\dagger AB$;

(3) $A^*ABB^\dagger = BB^\dagger A^*A$ *i* $A^\dagger ABB^* = BB^*A^\dagger A$.

Dokaz: Neka operatori A i B imaju iste matrične reprezentacije kao u Teoremi 3.2.1. Nađimo prvo ekvivalentne izraze preko A_1, A_2 i B_1 za naše pretpostavke.

(a)
1. $AB(AB)^\dagger A = ABB^\dagger \Leftrightarrow A_1B_1(A_1B_1)^\dagger A_1 = A_1$ i $A_1B_1(A_1B_1)^\dagger A_2 = 0$. Prva jednakost na desnoj strani ekvivalencije uvek važi, pa: $AB(AB)^\dagger A = ABB^\dagger \Leftrightarrow A_1B_1(A_1B_1)^\dagger A_2 = 0$.
2. $A^*ABB^\dagger = BB^\dagger A^*A \Leftrightarrow A_1^*A_2 = 0$.
3. $\mathcal{R}(A^*AB) \subset \mathcal{R}(B) \Leftrightarrow BB^\dagger A^*AB = A^*AB \Leftrightarrow A_2^*A_1 = 0$ (vidi dokaz Teoreme 3.2.2, deo (a) 2. i 3.).
4. $B^\dagger A^\dagger \in (AB)\{1,2,3\} \Leftrightarrow A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_1$ i $[A_1A_1^*, D^{-1}] = 0$ (vidi Teoremu 3.2.2 (a) 4.).

Da bismo dokazali 1.⇔2., primetimo da $A_1B_1(A_1B_1)^\dagger A_2 = 0 \Leftrightarrow \mathcal{R}(A_2) \subset \mathcal{N}((A_1B_1)(A_1B_1)^\dagger) = \mathcal{N}((A_1B_1)^\dagger) = \mathcal{N}((A_1B_1)^*) = \mathcal{N}(B_1^*A_1^*) = \mathcal{N}(A_1^*) \Leftrightarrow A_1^*A_2 = 0$.

Dokazujemo 2.⇔4. Ako $[A_1A_1^*, D^{-1}] = 0$, onda $A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_1 \Leftrightarrow A_1A_1^*A_1 = DA_1 \Leftrightarrow A_2A_2^*A_1 = 0 \Leftrightarrow A_1^*A_2A_2^* = 0 \Leftrightarrow \mathcal{R}(A_2A_2^*) \subset \mathcal{N}(A_1^*) \Leftrightarrow \mathcal{R}(A_2) \subset \mathcal{N}(A_1^*) \Leftrightarrow A_1^*A_2 = 0$. S druge strane, ako $A_1^*A_2 = 0$, tada je $A_1A_1^*D = A_1A_1^*A_1A_1^*$ ermitski, pa $A_1A_1^*$ komutira sa D; zato $[A_1A_1^*, D^{-1}] = 0$ i $A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_1$.

Na osnovu Teoreme 3.2.2 znamo da 3.⇔4.

(b)
1. $B(AB)^\dagger AB = A^\dagger AB \Leftrightarrow B_1(A_1B_1)^\dagger A_1 = A_1^*D^{-1}A_1$ i $A_2^*D^{-1}A_1 = 0$.
2. $A^\dagger ABB^* = BB^*A^\dagger A \Leftrightarrow [B_1B_1^*, A_1^*D^{-1}A_1] = 0$ i $A_1^*D^{-1}A_2 = 0$.
3. $\mathcal{R}(BB^*A^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*) \Leftrightarrow A_1B_1B_1^*A_1^*D^{-1}A_2 = 0$ i $A_1B_1B_1^*A_1^*D^{-1}A_1 = A_1B_1B_1^*$ (Teorema 3.2.2 (b) deo 2. i 3.).
4. $B^\dagger A^\dagger \in (AB)\{1,2,4\} \Leftrightarrow A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_1$ i $[B_1B_1^*, A_1^*D^{-1}A_1] = 0$ (Teorema 3.2.2 (b) deo 4.).

1.⇒4. Pomnožimo izraz $B_1(A_1B_1)^\dagger A_1 = A_1^*D^{-1}A_1$ sa A_1 sa leve strane, i sa B_1 sa desne, čime se dobija $A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_1$, kao i da je $(A_1B_1)^\dagger A_1B_1 = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1B_1$ ermitski. Dakle, $A_1^*D^{-1}A_1B_1B_1^*$ je ermitski, te sledi $[B_1B_1^*, A_1^*D^{-1}A_1] = 0$.

4.⇒1. Ako 4. važi, lako je videti da je $B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1B_1(A_1B_1)^\dagger$ Mur-Penrouzov inverz od A_1B_1 (proverom Penrouzovih jednačina). Odavde sledi $B_1(A_1B_1)^\dagger A_1 = A_1^*D^{-1}A_1$. Sada dobijamo da $A_1 = A_1A_1^*D^{-1}A_1$. Iz $(A_1A_1^* + A_2A_2^*)D^{-1}A_1 = A_1$ sledi da $A_2A_2^*D^{-1}A_1 = 0$, te zato $\mathcal{R}(D^{-1}A_1) \subset \mathcal{N}(A_2A_2^*) = \mathcal{N}(A_2^*)$, i $A_2^*D^{-1}A_1 = 0$.

2.⇒3. Ako 2. važi, tada je $A_1B_1B_1^*A_1^*D^{-1}A_2 = 0$ trivijalno zadovoljeno. Štaviše, $A_1B_1B_1^*A_1^*D^{-1}A_1 = A_1B_1B_1^*$ je ekvivalentno sa $A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_1$, što sledi iz $A_1^*D^{-1}A_2 = 0$.

3.⇒2. Na osnovu dokaza Teoreme 3.2.2, deo (b) 4., zaključuje se da $[B_1B_1^*, A_1^*D^{-1}A_1] = 0$. Sada, na uobičajeni način, dobijamo da $A_2A_2^*D^{-1}A_1 = 0$, pa $A_1^*D^{-1}A_2 = 0$.

2.⇔4. Očigledno.

Deo (c) sledi iz delova (a) i (b).

$\triangle$

Teorema 3.2.4 *Neka su X, Y, Z Hilbertovi prostori, i neka su $A \in \mathcal{L}(Y,Z)$, $B \in \mathcal{L}(X,Y)$ operatori tako da A, B, AB imaju zatvorene slike. Važe sledeća tvrđenja:*

(a) $(ABB^\dagger)^\dagger = BB^\dagger A^\dagger \Leftrightarrow B^\dagger(ABB^\dagger)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathcal{R}(A^*AB) \subseteq \mathcal{R}(B)$.

(b) $(A^\dagger AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger A \Leftrightarrow (A^\dagger AB)^\dagger A^\dagger = B^\dagger A^\dagger \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathcal{R}(BB^*A^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*)$.

(c) *Sledeća tri tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$;

(2) $(ABB^\dagger)^\dagger = BB^\dagger A^\dagger$ *i* $(A^\dagger AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger A$;

(3) $B^\dagger(ABB^\dagger)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ *i* $(A^\dagger AB)^\dagger A^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

Dokaz: Neka opet operatori A i B imaju iste matrične reprezentacije kao u Teoremi 3.2.1.

(a) Pošto je $\mathcal{R}(ABB^\dagger) = \mathcal{R}(AB)$ zatvoren, postoji $(ABB^\dagger)^\dagger$.

1. $(ABB^\dagger)^\dagger = BB^\dagger A^\dagger \Leftrightarrow A_1^\dagger = A_1^* D^{-1}$ (postojanje $A_1^\dagger$ sledi iz pretpostavki).
2. $B^\dagger (ABB^\dagger)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \Leftrightarrow A_1^\dagger = A_1^* D^{-1}$, pa 1.$\Leftrightarrow$2.
3. $\mathcal{R}(A^*AB) \subseteq \mathcal{R}(B) \Leftrightarrow A_1 A_1^* D^{-1} A_1 = A_1$ i $[A_1 A_1^*, D^{-1}] = 0$ (vidi Teoremu 2.2, (a) delovi 3. i 4.).

1.$\Rightarrow$3. Ako $A_1^\dagger = A_1^* D^{-1}$, tada $A_1^\dagger D = A_1^*$ i $A_1 A_1^\dagger = A_1 A_1^* D^{-1}$ je ermitski, pa $[A_1 A_1^*, D^{-1}] = 0$. Štavise, $A_1 A_1^\dagger A_2 A_2^* = 0$. Zaključujemo da $\mathcal{R}(A_2 A_2^*) \subset \mathcal{N}(A_1 A_1^\dagger) = \mathcal{N}(A_1^*)$, pa $A_1^* A_2 A_2^* = 0$ i $A_2^* A_1 = 0$. Sada, $(A_1 A_1^* + A_2 A_2^*) A_1 = A_1 A_1^* A_1$, te je zato $A_1 = D^{-1} A_1 A_1^* A_1 = A_1 A_1^* D^{-1} A_1$.

3.$\Rightarrow$1. Ako 3. važi, lako je videti da je $A_1^* D^{-1}$ Mur-Penrouzov inverz od A_1 (proverom Penrouzovih jednačina).

(b) Pošto je $\mathcal{R}((A^\dagger AB)^*) = \mathcal{R}(B^* A^\dagger A) = \mathcal{R}(B^* A^*) = \mathcal{R}((AB)^*)$ zatvoren, $(A^\dagger AB)^\dagger$ postoji. Primetimo da

$$B^\dagger A^\dagger A = \begin{bmatrix} B_1^{-1} A_1^* D^{-1} A_1 & B_1^{-1} A_1^* D^{-1} A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i $A^\dagger AB = \begin{bmatrix} A_1^* D^{-1} A_1 B_1 & 0 \\ A_2^* D^{-1} A_1 B_1 & 0 \end{bmatrix}$. Koristeći formulu $T^\dagger = (T^*T)^\dagger T^*$, sledi da je $A^\dagger AB$ jednako:

$$\begin{bmatrix} (B_1^* A_1^* D^{-1} A_1 B_1)^\dagger B_1^* A_1^* D^{-1} A_1 & (B_1^* A_1^* D^{-1} A_1 B_1)^\dagger B_1^* A_1^* D^{-1} A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. $(A^\dagger AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger A \Leftrightarrow$
   $(B_1^* A_1^* D^{-1} A_1 B_1)^\dagger B_1^* A_1^* D^{-1} A_1 = B_1^{-1} A_1^* D^{-1} A_1$
   i $(B_1^* A_1^* D^{-1} A_1 B_1)^\dagger B_1^* A_1^* D^{-1} A_2 = B_1^{-1} A_1^* D^{-1} A_2$.
2. $(A^\dagger AB)^\dagger A^\dagger = B^\dagger A^\dagger \Leftrightarrow B_1 (B_1^* A_1^* D^{-1} A_1 B_1)^\dagger B_1^* A_1^* = A_1^*$.
3. $\mathcal{R}(BB^*A^*) \subset \mathcal{R}(A^*) \Leftrightarrow A_1 A_1^* D^{-1} A_1 = A_1$ i $[B_1 B_1^*, A_1^* D^{-1} A_1] = 0$.

   1.$\Rightarrow$2. Pomnožimo prvu jednakost iz 1. sa A_1^* sa desne strane, a onda drugu jednakost iz 1. sa A_2^* sa desne strane. Sabiranjem dobijenih izraza dobijamo 2.

2.$\Rightarrow$1. Očigledno.

2.$\Rightarrow$3. Ako pomnožimo $B_1(B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^* = A_1^*$ sa $B_1^*A_1^*D^{-1}A_1$ sa leve, i sa $D^{-1}A_1B_1$ sa desne strane, dobijamo $A_1^*D^{-1}A_1 = A_1^*D^{-1}A_1A_1^*D^{-1}A_1$. Sada, $A_1^*D^{-1}A_1$ je ortogonalni projektor na potprostor $\mathcal{R}(A_1^*)$, tako da važi $A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_1$.

Kako je $(B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1 = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1B_1$ ermitski, dobijamo $[B_1B_1^*, A_1^*D^{-1}A_1] = 0$.

3.$\Rightarrow$2. Koristeći formulu $T^\dagger = (T^*T)^\dagger T^*$, proizilazi da je:

$$(B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^*D^{-1/2} = (D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger,$$

što znači da

$$B_1(B_1^*A_1^*D^{-1/2}D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^* = B_1(D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger D^{1/2}.$$

Pokažimo da 3. povlači $B_1(D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger D^{1/2} = A_1^*$. To se svodi na dokazivanje $(D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger = B_1^{-1}A_1^*D^{-1/2}$, tako što proverimo da zadnji izraz zadovoljava sve četiri Penrouzove jednačine pod uslovom da 3. važi. Dakle,

$$\begin{array}{cl}
(I) & D^{-1/2}A_1B_1B_1^{-1}A_1^*D^{-1/2}D^{-1/2}A_1B_1 = \\
= & D^{-1/2}A_1A_1^*D^{-1}A_1B_1 = D^{-1/2}A_1B_1, \\
(II) & B_1^{-1}A_1^*D^{-1/2}D^{-1/2}A_1B_1B_1^{-1}A_1^*D^{-1/2} = \\
= & B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1A_1^*D^{-1/2} = B_1^{-1}A_1^*D^{-1/2},
\end{array}$$

$$D^{-1/2}A_1B_1B_1^{-1}A_1^*D^{-1/2} = D^{-1/2}A_1A_1^*D^{-1/2} \text{ je ermitski,}$$

$$B_1^{-1}A_1^*D^{-1/2}D^{-1/2}A_1B_1 = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1B_1 \text{ je ermitski,}$$
$$\text{jer } [B_1B_1^*, A_1^*D^{-1}A_1] = 0.$$

(c) Sledi iz (a) i (b).

$\triangle$

Teorema 3.2.5 *Neka su X, Y, Z Hilbertovi prostori i neka su $A \in \mathcal{L}(Y, Z)$, $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ operatori tako da A, B, AB imaju zatvorene slike. Tada važi:*

(a) $B^\dagger = (AB)^\dagger A \Leftrightarrow \mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(A^*AB)$.

(b) $A^\dagger = B(AB)^\dagger \Leftrightarrow \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(BB^*A^*)$.

Dokaz:

(a) Matrične forme za A i B neka budu kao u Teoremi 3.2.1.

1. Lako se dobija da $B^\dagger = (AB)^\dagger A$ važi ako i samo ako je ispunjeno $I = (A_1B_1)^\dagger A_1B_1$ i $(A_1B_1)^\dagger A_2 = 0$. Dakle, 1. je ekvivalentno sa sledeća dva uslova: A_1 je "jedan-jedan" sa zatvorenom slikom, i $(A_1B_1)^\dagger A_2 = 0$.
2. $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(A^*AB)$ ako i samo ako $\mathcal{R}(A_1^*A_1B_1) = \mathcal{R}(B)$ i $A_2^*A_1B_1 = 0$. Znači, 2. je ekvivalentno sa sledeća dva uslova: A_1 je "jedan-jedan" sa zatvorenom slikom i $A_1^*A_2 = 0$.

Ekvivalencija 1.$\Leftrightarrow$2. sledi iz:

$$(A_1B_1)^\dagger A_2 = 0 \Leftrightarrow \mathcal{R}(A_2) \subset \mathcal{N}((A_1B_1)^\dagger) = \mathcal{N}((A_1B_1)^*)$$
$$\Leftrightarrow B_1^*A_1^*A_2 = 0 \Leftrightarrow A_1^*A_2 = 0.$$

(b) Iz (a) sledi $(B^*)^\dagger = A^*(B^*A^*)^\dagger$ ako i samo ako $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(A^*AB)$. Sada, zamenimo A^* sa B' i B^* sa A', da dobijemo da (b) važi.

$\triangle$

Teorema 3.2.6 *Neka su X, Y, Z Hilbertovi prostori i neka su $A \in \mathcal{L}(Y,Z)$, $B \in \mathcal{L}(X,Y)$ operatori tako da A, B, AB imaju zatvorene slike. Tada važi:*

(a) $(AB)^\dagger = (A^\dagger AB)^\dagger A^\dagger \Leftrightarrow \mathcal{R}(AA^*AB) = \mathcal{R}(AB)$;

(b) $(AB)^\dagger = B^\dagger(ABB^\dagger)^\dagger \Leftrightarrow \mathcal{R}(B^*B(AB)^*) = \mathcal{R}((AB)^*)$.

Dokaz:

(a) Primetimo da je

$$\mathcal{R}((A^\dagger AB)^*) = \mathcal{R}(B^*A^\dagger A) = B^*\mathcal{R}(A^\dagger A) = B^*\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}((AB)^*)$$

zatvoren, pa je i $\mathcal{R}(A^\dagger AB)$ zatvoren. Nađimo ekvivalentne oblike tvrđenja iz teoreme, koji će nam olakšati dokazivanje.

1. Označimo $T = A^\dagger AB$. Računamo $T^\dagger$, koristeći $T^\dagger = (T^*T)^\dagger T^*$:

$$\begin{bmatrix} (B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^*D^{-1}A_1 & (B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^*D^{-1}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sada se lako vidi da je $(AB)^\dagger = (A^\dagger AB)^\dagger A^\dagger$ ekvivalentno sa

$$(A_1B_1)^\dagger = (B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^*D^{-1} = (D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger D^{-1/2}.$$

2. Očigledno je da $AA^*AB = \begin{bmatrix} DA_1B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, pa 2. važi ako i samo ako $\mathcal{R}(DA_1B_1) = \mathcal{R}(A_1B_1)$.

1. $\Rightarrow$ 2. Iz treće Penrouzove jednačine za sledeći izraz $(A_1B_1)^\dagger = (D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger D^{-1/2}$, sledi da je $A_1B_1(D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger D^{-1/2}$ ermitski. Zato važe sledeće ekvivalencije:

$$\begin{array}{ll} & A_1B_1(D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger D^{-1/2} \text{ je ermitski} \\ \Leftrightarrow & D^{-1/2}A_1B_1(D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger D^{-1} \text{ je ermitski} \\ \Leftrightarrow & [D, D^{-1/2}A_1B_1(D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger] = 0 \\ \Leftrightarrow & D^{1/2}A_1B_1(D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger = D^{-1/2}A_1B_1(D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger D \\ \Leftrightarrow & DA_1B_1(D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger = A_1B_1(D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger D. \end{array}$$

Sada,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(DA_1B_1) &= \mathcal{R}(DA_1B_1(A_1B_1)^\dagger) = \mathcal{R}(A_1B_1(A_1B_1)^\dagger D) = \\ &= \mathcal{R}(A_1B_1). \end{aligned}$$

2. $\Rightarrow$ 1. Ako $\mathcal{R}(DA_1B_1) = \mathcal{R}(A_1B_1)$, tada primenimo Lemu 3.1.4 i dobijamo $[D, A_1B_1(A_1B_1)^\dagger] = 0$. Sada, iz prethodne implikacije

sledi da je $A_1B_1(D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger D^{-1/2}$ ermitski. Primetimo da je $(D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger D^{-1/2}A_1B_1$ ortogonalna projekcija na

$$\mathcal{R}((A_1B_1)^*D^{-1/2}) \subset \mathcal{R}((A_1B_1)^*),$$

pa $A_1B_1(D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger D^{-1/2}A_1B_1 = A_1B_1$. Konačno, lako se proverava da $(A_1B_1)^\dagger = (D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger D^{-1/2}$ važi.

(b) Prema (a), imamo sledeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned}
&(AB)^\dagger = (A^\dagger AB)^\dagger A^\dagger \Leftrightarrow \mathcal{R}(AA^*AB) = \mathcal{R}(AB)\\
&(B^*A^*)^\dagger = (A^*)^\dagger (B^*A^\dagger A)^\dagger \Leftrightarrow \mathcal{R}(AA^*AB) = \mathcal{R}(A)\\
&(\text{uzmimo sada } A' = B^* \text{ i } B' = A^*)\\
&(A'B')^\dagger = B'^\dagger (ABB'^\dagger)^\dagger \Leftrightarrow \mathcal{R}(BB'^*B'^*A'^*) = \mathcal{R}(B'^*A'^*).
\end{aligned}$$

$\triangle$

Većina navedenih rezultata može se uopštiti do C^*-algebri, što je objavljeno u radu [61] iz 2011.

3.3 Identiteti povezani sa zakonima obrnutog redosleda za Mur-Penrouzov inverz

U ovom poglavlju bavićemo se raznim zakonima obrnutog redosleda za Mur-Penrouzov inverz proizvoda dva ili tri operatora, koji su u stvari identiteti. Navedeni rezultati predstavljaju uopštenje rezultata koje su za kompleksne matrice dokazali Tian i Čeng [89] 2004, kao i jednog identiteta koji je objavio 1964. Kline u svom klasičnom radu [20].

Pomoćni rezultati

Lema 3.3.1 *Neka su W, X, Y i Z proizvoljni Hilbertovi prostori, neka su $P \in \mathcal{L}(X,Y)$, $Q \in \mathcal{L}(Y,Z)$ i $R \in \mathcal{L}(W,X)$ operatori takvi da P, Q, QP i PR imaju zatvorene slike. Ako su Q i R invertibilni, tada:*

(a) $(P(QP)^\dagger)^\dagger = QPP^\dagger$;

(b) $((PR)^\dagger P)^\dagger = P^\dagger PR$.

Dokaz: Proverimo sve četiri Penrouzove jednačine.

(a) Pošto je operator

$$P(QP)^\dagger QPP^\dagger = Q^{-1}QP(QP)^\dagger QPP^\dagger = Q^{-1}QPP^\dagger = PP^\dagger$$

ermitski, sledi da treća Penrouzova jednačina važi. Lako se proverava da su i ostale Penrouzove jednačine zadovoljene.

(b) Kako je operator

$$P^\dagger PR(PR)^\dagger P = P^\dagger PR(PR)^\dagger PRR^{-1} = P^\dagger PRR^{-1} = P^\dagger P$$

ermitski, zaključujemo da četvrta Penrouzova jednačina važi. Lako se pokazuje da su ostale Penrouzove jednačine zadovoljene.

Primetimo da se iz prethodnog razmatranja zaključuje da $P(QP)^\dagger$ i $(PR)^\dagger P$ imaju zatvorene slike.

$\triangle$

Glavni rezultati

Teorema 3.3.1 *Neka su X, Y, Z i W Hilbertovi prostori, i neka su $A \in \mathcal{L}(Z, W)$, $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$ i $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ operatori, tako da A, B, C, AB i ABC imaju zatvorene slike. Tada važi sledeće:*

(a) $(AB)^\dagger = (A^\dagger AB)^\dagger (ABB^\dagger)^\dagger$;

(b) $(AB)^\dagger = [(A^\dagger)^* B]^\dagger (B^\dagger A^\dagger)^* [A(B^\dagger)^*]^\dagger$;

(c) $(ABC)^\dagger = (A^\dagger ABC)^\dagger B (ABCC^\dagger)^\dagger$;

(d) $(ABC)^\dagger = [(AB)^\dagger ABC]^\dagger B^\dagger [ABC(BC)^\dagger]^\dagger$;

(e) $(ABC)^\dagger = [(ABB^\dagger)^\dagger ABC]^\dagger B [ABC(B^\dagger BC)^\dagger]^\dagger$;

(f) $(ABC)^\dagger = [(A^\dagger)^* BC]^\dagger (A^\dagger)^* B (C^\dagger)^* [AB(C^\dagger)^*]^\dagger$;

(g) $(ABC)^\dagger = \{[A(B^\dagger)^*]^\dagger ABC\}^\dagger B^* BB^* \{ABC[(B^\dagger)^* C]^\dagger\}^\dagger$;

(h) $(ABC)^\dagger = \{[(AB)^\dagger]^* C\}^\dagger [(AB)^\dagger]^* B^\dagger [(BC)^\dagger]^* \{A[(BC)^\dagger]^*\}^\dagger$.

Formulacija ove teoreme sadrži Mur-Penrouzove inverze određenih ograničenih linearnih operatora. Razlozi zbog kojih pomenuti operatori imaju zatvorene slike nalaze se u samom dokazu ove teoreme.

Dokaz: Neka, prema Lemama 3.1.1 i 3.1.2, operatori A, B i C imaju sledeće matrične reprezentacije u odnosu na odgovarajuće dekompozicije prostora:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B) \\ \mathcal{N}(B^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix},$$

gde je $D = A_1 A_1^* + A_2 A_2^*$ invertiblan i pozitivan u $\mathcal{L}(\mathcal{R}(A))$. Tada

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} A_1^* D^{-1} & 0 \\ A_2^* D^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Zatim,

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B^*) \\ \mathcal{N}(B) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B) \\ \mathcal{N}(B^*) \end{bmatrix},$$

gde je B_1 invertibilan, te zato:

$$B^\dagger = \begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B) \\ \mathcal{N}(B^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B^*) \\ \mathcal{N}(B) \end{bmatrix}.$$

Konačno,

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(C^*) \\ \mathcal{N}(C) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B^*) \\ \mathcal{N}(B) \end{bmatrix},$$

gde je $E = C_1^* C_1 + C_2^* C_2$ invertibilan i pozitivan u $\mathcal{L}(\mathcal{R}(C^*))$, i onda:

$$C^\dagger = \begin{bmatrix} E^{-1}C_1^* & E^{-1}C_2^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Primetimo da je

$$\mathcal{R}(A^\dagger AB) = A^\dagger A(\mathcal{R}(B)) = A^\dagger A(\mathcal{R}(BB^\dagger)) = \mathcal{R}(A^\dagger ABB^\dagger)$$

zatvoren, prema Lemi 3.1.3. Takođe, $\mathcal{R}(B^*A^*)$ je zatvoren. Opet na osnovu Leme 3.1.3 i

$$\begin{aligned} \mathcal{R}((ABB^\dagger)^*) &= \mathcal{R}((B^*)^\dagger B^*A^*) = \mathcal{R}((B^*)^\dagger B^*A^*(A^*)^\dagger) \\ &= \mathcal{R}((A^\dagger ABB^\dagger)^*), \end{aligned}$$

sledi da je $\mathcal{R}(ABB^\dagger)$ zatvoren. Sada, koristeći matrične forme za A i B, imamo:

$$A^\dagger AB = \begin{bmatrix} A_1^* D^{-1} A_1 B_1 & 0 \\ A_2^* D^{-1} A_1 B_1 & 0 \end{bmatrix},$$

Koristeći $(A^\dagger AB)^\dagger = ((A^\dagger AB)^*(A^\dagger AB))^\dagger (A^\dagger AB)^*$, sledi $A^\dagger AB$:

$$\begin{bmatrix} (B_1^* A_1^* D^{-1} A_1 B_1)^\dagger B_1^* A_1^* D^{-1} A_1 & (B_1^* A_1^* D^{-1} A_1 B_1)^\dagger B_1^* A_1^* D^{-1} A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$ABB^\dagger = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (ABB^\dagger)^\dagger = \begin{bmatrix} A_1^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $(AB)^\dagger = (A^\dagger AB)^\dagger (ABB^\dagger)^\dagger$ je ekvivalentno sa

$$(A_1 B_1)^\dagger = (B_1^* A_1^* D^{-1} A_1 B_1)^\dagger B_1^* A_1^* D^{-1} A_1 A_1^\dagger,$$

što je dalje ekvivalentno sa

$$(A_1 B_1)^\dagger = (D^{-1/2} A_1 B_1)^\dagger D^{-1/2} A_1 A_1^\dagger.$$

Poslednja jednakost sledi neposrednom proverom Penrouzovih jednačina, kao što sledi.

$$\begin{aligned} &A_1 B_1 (D^{-1/2} A_1 B_1)^\dagger D^{-1/2} A_1 A_1^\dagger A_1 B_1 \\ &= D^{1/2} D^{-1/2} A_1 B_1 (D^{-1/2} A_1 B_1)^\dagger D^{-1/2} A_1 B_1 = A_1 B_1, \end{aligned}$$

pa prva Penrouzova jednačina važi.

$$\begin{aligned} &(D^{-1/2} A_1 B_1)^\dagger D^{-1/2} A_1 A_1^\dagger A_1 B_1 (D^{-1/2} A_1 B_1)^\dagger D^{-1/2} A_1 A_1^\dagger \\ &= (D^{-1/2} A_1 B_1)^\dagger D^{-1/2} A_1 A_1^\dagger, \end{aligned}$$

te je i druga Penrouzova jednačina zadovoljena.

$$\begin{aligned} &A_1 B_1 (D^{-1/2} A_1 B_1)^\dagger D^{-1/2} A_1 A_1^\dagger \\ &= D^{1/2} D^{-1/2} A_1 B_1 (D^{-1/2} A_1 B_1)^\dagger D^{-1/2} A_1 B_1 B_1^{-1} A_1^\dagger = A_1 A_1^\dagger, \end{aligned}$$

poslednji operator je ermitski, pa važi i treća Penrouzova jednačina.

$$(D^{-1/2} A_1 B_1)^\dagger D^{-1/2} A_1 A_1^\dagger A_1 B_1 = (D^{-1/2} A_1 B_1)^\dagger D^{-1/2} A_1 B_1,$$

poslednji operator je ermitski, pa važi i četvrta Penrouzova jednačina.

(b) Primetimo da je

$$\mathcal{R}(((A^\dagger)^* B)^*) = \mathcal{R}(B^* A^\dagger) = \mathcal{R}(B^* A^*) = \mathcal{R}((AB)^*)$$

zatvoren, pa je i $\mathcal{R}((A^\dagger)^*B)$ zatvoren. Takođe,

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}(A(B^\dagger)^*) = \mathcal{R}(A((B^*B)^\dagger B^*)^*) = \mathcal{R}(AB(B^*B)^\dagger)\\&= AB(\mathcal{R}((B^*B)^\dagger)) = AB(\mathcal{R}(B^*)) = A(\mathcal{R}(B)) = \mathcal{R}(AB)\end{aligned}$$

je zatvoren. Opet, koristeći matrične forme za A i B, važi da je $(AB)^\dagger = [(A^\dagger)^*B]^\dagger(B^\dagger A^\dagger)^*[A(B^\dagger)^*]^\dagger$ ekvivalentno sa sledećim:

$$(A_1B_1)^\dagger = (D^{-1}A_1B_1)^\dagger D^{-1}A_1(B_1^{-1})^*(A_1(B_1^{-1})^*)^\dagger.$$

Poslednju jednakost dokazujemo proveravanjem Penrouzovih jednačina, kao što sledi.

$$\begin{aligned}&A_1B_1(D^{-1}A_1B_1)^\dagger D^{-1}A_1(B_1^{-1})^*(A_1(B_1^{-1})^*)^\dagger A_1B_1\\&= A_1B_1(D^{-1}A_1B_1)^\dagger D^{-1}A_1(B_1^{-1})^*(A_1(B_1^{-1})^*)^\dagger A_1(B_1^{-1})^*B_1^*B_1\\&= A_1B_1(D^{-1}A_1B_1)^\dagger D^{-1}A_1B_1 = A_1B_1,\end{aligned}$$

pa Penrouzova jednačina (1) važi.

$$\begin{aligned}&(D^{-1}A_1B_1)^\dagger D^{-1}A_1(B_1^{-1})^*(A_1(B_1^{-1})^*)^\dagger A_1[(B_1^{-1})^*B_1^*]\times\\&\times B_1(D^{-1}A_1B_1)^\dagger D^{-1}A_1(B_1^{-1})^*(A_1(B_1^{-1})^*)^\dagger\\&= (D^{-1}A_1B_1)^\dagger D^{-1}A_1(B_1^{-1})^*(A_1(B_1^{-1})^*)^\dagger,\end{aligned}$$

te je Penrouzova jednačina (2) zadovoljena.

$$\begin{aligned}&A_1B_1(D^{-1}A_1B_1)^\dagger D^{-1}A_1(B_1^{-1})^*(A_1(B_1^{-1})^*)^\dagger\\&= DD^{-1}A_1B_1(D^{-1}A_1B_1)^\dagger D^{-1}A_1B_1B_1^{-1}(B_1^{-1})^*(A_1(B_1^{-1})^*)^\dagger\\&= A_1(B_1^{-1})^*(A_1(B_1^{-1})^*)^\dagger,\end{aligned}$$

poslednji operator je ermitski, pa Penrouzova jednačina (3) važi.

$$\begin{aligned}&(D^{-1}A_1B_1)^\dagger D^{-1}A_1(B_1^{-1})^*(A_1(B_1^{-1})^*)^\dagger A_1B_1\\&= (D^{-1}A_1B_1)^\dagger D^{-1}A_1(B_1^{-1})^*(A_1(B_1^{-1})^*)^\dagger A_1(B_1^{-1})^*B_1^*B_1\\&= (D^{-1}A_1B_1)^\dagger D^{-1}A_1B_1,\end{aligned}$$

poslednji operator je ermitski, pa Penrouzova jednačina (4) važi.

(c) Primetimo da je

$$\begin{aligned}\mathcal{R}((A^\dagger ABC)^*) &= (BC)^*(\mathcal{R}(A^\dagger A)) = \\ &= (BC)^*(\mathcal{R}(A^*)) = \mathcal{R}((ABC)^*)\end{aligned}$$

zatvoren. Takođe,

$$\mathcal{R}(ABCC^\dagger) = AB(\mathcal{R}(CC^\dagger) = AB(\mathcal{R}(C)) = \mathcal{R}(ABC)$$

je zatvoren. Dokažimo da $(ABC)^\dagger = (A^\dagger ABC)^\dagger B(ABCC^\dagger)^\dagger$. Izračunaćemo prvo činioce koji se pojavljuju na desnoj strani. Označimo:

$$T = A^\dagger ABC = \begin{pmatrix} A_1^* D^{-1} A_1 B_1 C_1 & 0 \\ A_2^* D^{-1} A_1 B_1 C_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sada,

$$T^\dagger = (T^*T)^\dagger T^* = \begin{pmatrix} XA_1 & XA_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

gde

$$X = (C_1^* B_1^* A_1^* D^{-1} A_1 B_1 C_1)^\dagger C_1^* B_1^* A_1^* D^{-1}.$$

Neka S bude:

$$S = ABCC^\dagger = \begin{pmatrix} A_1 B_1 C_1 E^{-1} C_1^* & A_1 B_1 C_1 E^{-1} C_2^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lako se nalazi:

$$S^\dagger = S^*(SS^*)^\dagger = \begin{pmatrix} C_1 E^{-1} C_1^* B_1^* A_1^* (A_1 B_1 C_1 E^{-1} C_1^* B_1^* A_1^*)^\dagger & 0 \\ C_2 E^{-1} C_1^* B_1^* A_1^* (A_1 B_1 C_1 E^{-1} C_1^* B_1^* A_1^*)^\dagger & 0 \end{pmatrix}.$$

Dakle, tvrđenje (c) ekvivalentno je sa:

$$\begin{aligned}(A_1 B_1 C_1)^\dagger &= (C_1^* B_1^* A_1^* D^{-1} A_1 B_1 C_1)^\dagger C_1^* B_1^* A_1^* D^{-1} A_1 \\ &\times\ B_1 C_1 E^{-1} C_1^* B_1^* A_1^* (A_1 B_1 C_1 E^{-1} C_1^* B_1^* A_1^*)^\dagger,\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}(A_1 B_1 C_1)^\dagger &= (D^{-1/2} A_1 B_1 C_1)^\dagger D^{-1/2} A_1 B_1 C_1 E^{-1/2} \times \\ &\times\ (A_1 B_1 C_1 E^{-1/2})^\dagger.\end{aligned}$$

Radi jednostavnosti, uvedimo skraćenu oznaku $Q = A_1B_1C_1$. Prethodna formula je ekvivalentna sa:

$$Q^\dagger = (D^{-1/2}Q)^\dagger D^{-1/2}QE^{-1/2}(QE^{-1/2})^\dagger.$$

Dokazaćemo poslednju formulu proverom Penrouzovih jednačina na sledeći način.

$$\begin{aligned} & Q(D^{-1/2}Q)^\dagger D^{-1/2}QE^{-1/2}(QE^{-1/2})^\dagger Q \\ = \ & D^{1/2}D^{-1/2}Q(D^{-1/2}Q)^\dagger D^{-1/2}QE^{-1/2}(QE^{-1/2})^\dagger QE^{-1/2}E^{1/2} \\ = \ & Q, \end{aligned}$$

pa prva Penrouzova jednačina važi.

$$\begin{aligned} & (D^{-1/2}Q)^\dagger D^{-1/2}QE^{-1/2}(QE^{-1/2})^\dagger Q \times \\ \times \ & (D^{-1/2}Q)^\dagger D^{-1/2}QE^{-1/2}(QE^{-1/2})^\dagger \\ = \ & (D^{-1/2}Q)^\dagger D^{-1/2}QE^{-1/2}(QE^{-1/2})^\dagger QE^{-1/2}E^{1/2} \times \\ \times \ & (D^{-1/2}Q)^\dagger D^{-1/2}QE^{-1/2}(QE^{-1/2})^\dagger \\ = \ & (D^{-1/2}Q)^\dagger D^{-1/2}QE^{-1/2}(QE^{-1/2})^\dagger, \end{aligned}$$

te je i druga Penrouzova jednačina zadovoljena.

$$\begin{aligned} & Q(D^{-1/2}Q)^\dagger D^{-1/2}QE^{-1/2}(QE^{-1/2})^\dagger \\ & = D^{1/2}D^{-1/2}Q(D^{-1/2}Q)^\dagger D^{-1/2}QE^{-1/2}(QE^{-1/2})^\dagger \\ & = QE^{-1/2}(QE^{-1/2})^\dagger, \end{aligned}$$

poslednji operator je ermitski, pa i treća Penrouzova jednačina važi.

$$\begin{aligned} & (D^{-1/2}Q)^\dagger D^{-1/2}QE^{-1/2}(QE^{-1/2})^\dagger Q \\ & = (D^{-1/2}Q)^\dagger D^{-1/2}QE^{-1/2}(QE^{-1/2})^\dagger QE^{-1/2}E^{1/2} \\ & = (D^{-1/2}Q)^\dagger D^{-1/2}Q, \end{aligned}$$

poslednji operator je ermitski, pa četvrta Penrouzova jednačina važi.

(f) Primetimo da je operator

$$\mathcal{R}(((A^\dagger)^*BC)^*) = (BC)^*(\mathcal{R}(A^\dagger)) = (BC)^*(\mathcal{R}(A^*)) = \mathcal{R}((ABC)^*)$$

zatvoren, pa je i $\mathcal{R}((A^\dagger)^*BC)$ zatvoren. Takođe,

$$\mathcal{R}(AB(C^\dagger)^*) = AB(\mathcal{R}((C^\dagger)^*)) = AB(\mathcal{R}(C)) = \mathcal{R}(ABC)$$

je zatvoren. Jednostavan račun pokazuje da je

$$(ABC)^\dagger = [(A^\dagger)^*BC]^\dagger(A^\dagger)^*B(C^\dagger)^*[AB(C^\dagger)^*]^\dagger$$

ekvivalentno sa:

$$(A_1B_1C_1)^\dagger = (D^{-1}A_1B_1C_1)^\dagger D^{-1}A_1B_1C_1E^{-1}(A_1B_1C_1E^{-1})^\dagger.$$

Koristeći skraćeni zapis $Q = A_1B_1C_1$, poslednja formula je ekvivalentna sa

$$Q^\dagger = (D^{-1}Q)^\dagger D^{-1}QE^{-1}(QE^{-1})^\dagger.$$

proverićemo u nastavku Penrouzove jednačine.

$$\begin{aligned}&Q(D^{-1}Q)^\dagger D^{-1}QE^{-1}(QE^{-1})^\dagger Q\\&= DD^{-1}Q(D^{-1}Q)^\dagger D^{-1}QE^{-1}(QE^{-1})^\dagger QE^{-1}E = Q,\end{aligned}$$

pa prva Penrouzova jednačina važi.

$$\begin{aligned}&(D^{-1}Q)^\dagger D^{-1}QE^{-1}(QE^{-1})^\dagger QE^{-1}E(D^{-1}Q)^\dagger D^{-1}QE^{-1}(QE^{-1})^\dagger\\&= (D^{-1}Q)^\dagger D^{-1}Q(D^{-1}Q)^\dagger D^{-1}QE^{-1}(QE^{-1})^\dagger\\&= (D^{-1}Q)^\dagger D^{-1}QE^{-1}(QE^{-1})^\dagger,\end{aligned}$$

pa je zadovoljena i druga Penrouzova jednačina.

$$\begin{aligned}&Q(D^{-1}Q)^\dagger D^{-1}QE^{-1}(QE^{-1})^\dagger\\&= DD^{-1}Q(D^{-}Q)^\dagger D^{-1}QE^{-1}(QE^{-1})^\dagger = QE^{-1}(QE^{-1})^\dagger,\end{aligned}$$

poslednji operator je ermitski, pa važi i treća Penrouzova jednačina.

$$\begin{aligned}&(D^{-1}Q)^\dagger D^{-1}QE^{-1}(QE^{-1})^\dagger Q\\&= (D^{-1}Q)^\dagger D^{-1}QE^{-1}(QE^{-1})^\dagger QE^{-1}E\\&= (D^{-1}Q)^\dagger D^{-1}QE^{-1}E = (D^{-1}Q)^\dagger D^{-1}Q,\end{aligned}$$

poslednji operator je ermitski, pa važi i četvrta Penrouzova jednačina.

Do sada smo dokazali četiri identiteta. Sada ćemo iskoristiti (c), da pokažemo da su (d), (e) i (g) zadovoljeni. Takođe, upotrebićemo (f) da dokažemo da (h) važi.

(d) Jednostavan račun pokazuje da je (d) ekvivalentno sa:

$$(A_1B_1C_1)^\dagger = [(A_1B_1)^\dagger A_1B_1C_1]^\dagger B_1^{-1}[A_1B_1C_1(B_1C_1)^\dagger]^\dagger.$$

Ako stavimo:

$$A' = A_1B_1,\ B' = B_1^{-1},\ C' = B_1C_1,$$

tada se (d) svodi na već dokazani identitet (c) za operatore A', B' i C'. Radi kompletnosti, primetimo da su slike sledećih operatora zatvorene:

$$\begin{array}{l} \mathcal{R}(A') = \mathcal{R}(AB),\ \mathcal{R}(B') = \mathcal{R}(B^*),\ \mathcal{R}(C') = \mathcal{R}(BC), \\ \mathcal{R}(A'B') = \mathcal{R}(A),\ \mathcal{R}(B'C') = \mathcal{R}(C),\ \mathcal{R}(A'B'C') = \mathcal{R}(ABC). \end{array}$$

(e) Direktan račun pokazuje da je (e) ekvivalentno sa sledećim:

$$(A_1B_1C_1)^\dagger = [A_1^\dagger A_1B_1C_1]^\dagger B_1[A_1B_1C_1C_1^\dagger]^\dagger.$$

Poslednji identitet je već dokazan u (c).

(g) Nije teško proveriti da je

$$(ABC)^\dagger = \{[A(B^\dagger)^*]^\dagger ABC\}^\dagger B^*BB^*\{ABC[(B^\dagger)^*C]^\dagger\}^\dagger$$

ekvivalentno sa:

$$\begin{array}{rcl} (A_1B_1C_1)^\dagger & = & \{[A_1(B_1^*)^{-1}]^\dagger A_1B_1C_1\}^\dagger B_1^*B_1B_1^* \times \\ & \times & \{A_1B_1C_1[(B_1^*)^{-1}C_1]^\dagger\}^\dagger. \end{array}$$

Stavimo:

$$A'' := A_1(B_1^*)^{-1},\ B'' := B_1^*B_1B_1^*,\ C'' := (B_1^*)^{-1}C_1.$$

Dobili smo da su slike svih pomenutih operatora zatvorene:

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}(A'') = A_1(\mathcal{R}((B_1^*)^{-1})) = \mathcal{R}(AB),\ \mathcal{R}(B'') = \mathcal{R}(B^*),\\ &\mathcal{R}(C'') = \mathcal{R}(BC),\ \mathcal{R}(A''B'') = \mathcal{R}(A_1B_1B_1^*) = \mathcal{R}(AB),\\ &\mathcal{R}((B''C'')^*) = \mathcal{R}((B^*BC)^*) = C^*(\mathcal{R}(B^*B)) = \mathcal{R}((BC)^*),\\ &\mathcal{R}(A''B''C'') = \mathcal{R}(ABC).\end{aligned}$$

Dakle, uslovi identiteta (c) su zadovoljeni. Znači, (g) sledi iz (c).

(h) je ekvivalentno sa sledećim:

$$\begin{aligned}(A_1B_1C_1)^\dagger &= \{[(A_1B_1)^\dagger]^*C_1\}^\dagger[(A_1B_1)^\dagger]^*B_1^{-1} \times\\ &\times\ [(B_1C_1)^\dagger]^*\{A_1[(B_1C_1)^\dagger]^*\}^\dagger.\end{aligned}$$

Ako stavimo:

$$A''' := A_1B_1,\ B''' := B_1^{-1},\ C''' := B_1C_1,$$

tada se (h) svodi na već poznati identitet (f). Zbog kompletnosti, primetimo da su slike sledećih operatora zatvorene:

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}(A''') = \mathcal{R}(AB),\ \mathcal{R}(B''') = \mathcal{R}(B^*),\ \mathcal{R}(C''') = \mathcal{R}(BC),\\ &\mathcal{R}(A'''B''') = \mathcal{R}(A),\ \mathcal{R}(B'''C''') = \mathcal{R}(C),\\ &\mathcal{R}(A'''B'''C''' = \mathcal{R}(ABC).\end{aligned}$$

$\triangle$

Primedba: Egzistencija Mur-Penrouzovog inverza raznih operatora iz prethodne teoreme sledi iz zatvorenosti slika operatora $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{R}(B)$, $\mathcal{R}(C)$, $\mathcal{R}(AB)$, $\mathcal{R}(BC)$ i $\mathcal{R}(ABC)$. Ta činjenica je važna i detaljno je objašnjena. Isto važi i za naredne teoreme.

Naredne dve posledice neposredno slede iz Teoreme 3.3.1.

Posledica 3.3.1 *Neka su X, Y i Z Hilbertovi prostori, i neka su $A \in \mathcal{L}(Y, Z)$, $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ operatori, tako da A, B i AB imaju zatvorene slike. Ako $A^\dagger AB = B$ i $ABB^\dagger = A$, tada $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.*

Posledica 3.3.2 *Neka su P i Q dva ortogonalna projektora, tj. neka $P^2 = P = P^*$ i $Q^2 = Q = Q^*$. Tada je $(PQ)^\dagger$ idempotent.*

Štaviše, sve ostale posledice iz [89] su takođe tačne sa neznatnim izmenama u njihovoj formulaciji.

Ako su U, V operatori na istom prostoru, tada je $[U,V] = UV - VU$ uobičajena notacija za njihov komutator.

Teorema 3.3.2 *Neka su X, Y, Z Hilbertovi prostori, i neka su $A \in \mathcal{L}(Y,Z)$, $B \in \mathcal{L}(X,Y)$ operatori tako da A, B, AB imaju zatvorene slike. Neka su $M \in \mathcal{L}(Z)$ i $N \in \mathcal{L}(X)$ pozitivni i invertibilni operatori. Tada težinski Mur-Penrouzov inverz operatora AB u odnosu na težine M i N zadovoljava sledeća dva identiteta:*

(a) $(AB)^{\dagger}_{M,N} = (A^{\dagger}AB)^{\dagger}_{I,N}(ABB^{\dagger})^{\dagger}_{M,I}$;

(b) $(AB)^{\dagger}_{M,N} = [(A^{\dagger}_{M,I})^{*}B]^{\dagger}_{M^{-1},N}(B^{\dagger}_{I,N}A^{\dagger}_{M,I})^{*}[A(B^{\dagger}_{I,N})^{*}]^{\dagger}_{M,N^{-1}}$.

Dokaz: Koristeći sledeću poznatu relaciju između običnog i težinskog Mur-Penrouzovog inverza: $A^{\dagger}_{M,N} = N^{-1/2}(M^{1/2}AN^{-1/2})^{\dagger}M^{1/2}$, lako se dobija da je (a) ekvivalentno sa:

$$(M^{1/2}ABN^{-1/2})^{\dagger} = (A^{\dagger}ABN^{-1/2})^{\dagger}(M^{1/2}ABB^{\dagger})^{\dagger}. \tag{3.11}$$

Uvedimo oznake:

$$\tilde{A} = M^{1/2}A, \quad \tilde{B} = BN^{-1/2}.$$

Dokazujemo sledeće:

$$(M^{-1/2}\tilde{A})^{\dagger} = \tilde{A}^{\dagger}M^{1/2}.$$

Poslednje tvrđenje važi ako i samo ako je $M^{-1/2}\tilde{A}\tilde{A}^{\dagger}M^{1/2}$ ermitski, što je ekvivalentno sa $[M, \tilde{A}\tilde{A}^{\dagger}] = 0$. Koristeći Lemu 3.1.4, poslednji izraz je ekvivalentan sa $\mathcal{R}(M\tilde{A}) = \mathcal{R}(\tilde{A})$, što je tačno, zbog invertibilnosti ermitskog operatora M. Analogno dokazujemo da:

$$(\tilde{B}N^{1/2})^{\dagger} = N^{-1/2}\tilde{B}^{\dagger}.$$

Sada, (3.11) postaje:

$$(\tilde{A}\tilde{B})^{\dagger} = (\tilde{A}^{\dagger}\tilde{A}\tilde{B})^{\dagger}(\tilde{A}\tilde{B}\tilde{B}^{\dagger})^{\dagger},$$

što je već dokazani identitet u Teoremi 3.3.1(a).

Analogno dokazujemo tvrđenje (b).

△

Teorema 3.3.3 *Neka su X, Y, Z i W Hilbertovi prostori, i neka su $A \in \mathcal{L}(Z, W)$, $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$ i $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ operatori, tako da A, B, C, AB, BC, i ABC imaju zatvorene slike. Neka su $M \in \mathcal{L}(W)$ i $N \in \mathcal{L}(X)$ pozitivni i invertibilni operatori . Tada težinski Mur-Penrouzov inverz operatora ABC u odnosu na težine M i N zadovoljava sledeće identitete:*

(a) $(ABC)^{\dagger}_{M,N} = (A^{\dagger}ABC)^{\dagger}_{I,N} B (ABCC^{\dagger})^{\dagger}_{M,I}$;

(b) $(ABC)^{\dagger}_{M,N} = ((AB)^{\dagger}ABC)^{\dagger}_{I,N} B^{\dagger} (ABC(BC)^{\dagger})^{\dagger}_{M,I}$;

(c) $(ABC)^{\dagger}_{M,N} = ((ABB^{\dagger})^{\dagger}ABC)^{\dagger}_{I,N} B (ABC(B^{\dagger}BC)^{\dagger})^{\dagger}_{M,I}$;

(d) $(ABC)^{\dagger}_{M,N} = [(A^{\dagger}_{M,I})^{*}BC]^{\dagger}_{M^{-1},N} (A^{\dagger}_{M,I})^{*} B (C^{\dagger}_{I,N})^{*} \times$
$\times [AB(C^{\dagger}_{I,N})^{*}]^{\dagger}_{M,N^{-1}}$;

(e) $(ABC)^{\dagger}_{M,N} = \{[A(B^{\dagger})^{*}]^{\dagger}ABC\}^{\dagger}_{I,N} B^{*}BB^{*} \{ABC[(B^{\dagger})^{*}C]^{\dagger}\}^{\dagger}_{M,I}$;

(f) $(ABC)^{\dagger}_{M,N} = \{[(AB)^{\dagger}_{M,I}]^{*}C\}^{\dagger}_{M^{-1},N} [(AB)^{\dagger}_{M,I}]^{*} B^{\dagger} [(BC)^{\dagger}_{I,N}]^{*} \times$
$\times \{A[(BC)^{\dagger}_{I,N}]^{*}\}^{\dagger}_{M,N^{-1}}$.

Dokaz: Dokaz je u svim slučajevima sličan dokazu Teoreme 3.3.2. Prvo se transformišu svi težinski Mur-Penrouzovi inverzi u obične Mur-Penrouzove inverze, a onda se iskoristi sledeće:

$$\tilde{A} = M^{1/2}A, \quad \tilde{B} = B, \quad \tilde{C} = CN^{-1/2},$$

a zatim se upotrebi Lemu 3.1.4. Sada se svi slučajevi svode se na već dokazane identitete iz Teoreme 3.3.1.

△

Iz prethodnih teorema mogu se izvesti neki još opštiji identiteti.

Teorema 3.3.4 *Neka su X, Y i Z Hilbertovi prostori, i neka su $A \in \mathcal{L}(Y, Z)$ i $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ operatori, tako da A, B, i AB imaju zatvorene slike. Neka su $M \in \mathcal{L}(Z), N \in \mathcal{L}(X)$ i $P \in \mathcal{L}(Y)$ pozitivni i invertibilni* *operatori. Tada težinski Mur-Penrouzov inverz operatora AB u odnosu na težine M i N zadovoljava sledeći identitet:*

$$(AB)^{\dagger}_{M,N} = (A^{\dagger}_{I,P}AB)^{\dagger}_{P,N}(ABB^{\dagger}_{P,I})^{\dagger}_{M,P}.$$

Dokaz: Dokaz je sličan dokazu Teoreme 3.3.2. Prvo se transformišu svi težinski Mur-Penrouzovi inverzi u obične Mur-Penrouzove inverze, što daje:

$$(M^{1/2}ABN^{-1/2})^{\dagger} = [(AP^{-1/2})^{\dagger}ABN^{-1/2}]^{\dagger}[M^{1/2}AB(P^{1/2}B)^{\dagger}]^{\dagger}.$$

Ako se iskoriste smene: $\tilde{A} = M^{1/2}AP^{-1/2}$, $\tilde{B} = P^{1/2}BN^{-1/2}$, i na kraju Lemu 3.1.4, ovo tvrđenje svodi se na već dokazane identitete iz Teoreme 3.1.1(a).

$\triangle$

Teorema 3.3.5 *Neka su X, Y, Z i W Hilbertovi prostori, i neka su $A \in \mathcal{L}(Z, W)$, $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$ i $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ operatori, tako da A, B, C, AB, BC i ABC imaju zatvorene slike. Neka su $M \in \mathcal{L}(W)$, $N \in \mathcal{L}(X)$, $P \in \mathcal{L}(Y)$ i $Q \in \mathcal{L}(Z)$ pozitivni i invertibilni operatori. Tada težinski Mur-Penrouzov inverz operatora ABC u odnosu na operatore M i N zadovoljava sledeće identitete:*

(a) $(ABC)^{\dagger}_{M,N} = (A^{\dagger}_{I,P}ABC)^{\dagger}_{P,N}B(ABCC^{\dagger}_{Q,I})^{\dagger}_{M,Q}$;

(b) $(ABC)^{\dagger}_{M,N} = ((AB)^{\dagger}_{I,Q}ABC)^{\dagger}_{Q,N}B^{\dagger}_{P,Q}(ABC(BC)^{\dagger}_{P,I})^{\dagger}_{M,P}$;

(c) $(ABC)^{\dagger}_{M,N} = ((ABB^{\dagger}_{P,I})^{\dagger}_{M,P}ABC)^{\dagger}_{P,N}B(ABC(B^{\dagger}_{I,Q}BC)^{\dagger}_{Q,N})^{\dagger}_{M,Q}$.

Sada se vraćamo jednom klasičnom matričnom identitetu iz [20]. Naša naredna teorema pokazuje da rezultat iz [20] važi za ograničene linearne operatore na Hilbertovim prostorima.

Teorema 3.3.6 *Neka su X,Y i Z Hilbertovi prostori i neka su $A \in \mathcal{L}(Y, Z)$ i $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ operatori takvi da A i AB imaju zatvorene slike. Tada:*

$$(AB)^{\dagger} = (A^{\dagger}AB)^{\dagger}(AB(A^{\dagger}AB)^{\dagger})^{\dagger}. \tag{3.12}$$

Dokaz: Operatori koji se pominju u teoremi imaju Mur-Penrouzove inverze, što se vidi iz razmatranja u okviru dokaza Teoreme 3.3.1.

Koristeći metod opisan u Teoremi 3.3.1, zaključujemo da je $(AB)^\dagger = (A^\dagger AB)^\dagger(AB(A^\dagger AB)^\dagger)^\dagger$ ekvivalentno sledećem:

$$(A_1B_1)^\dagger = (D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger(A_1B_1(D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger)^\dagger,$$

što je, prema Lemi 3.3.1, dalje ekvivalentno sa:

$$(A_1B_1)^\dagger = (D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger D^{-1/2}A_1B_1(A_1B_1)^\dagger.$$

Neposrednom proverom sve četiri Penrouzove jednačine sledi dokaz.

$\triangle$

Izazov je ispitati da li slični/analogni rezultati važe za izvesne $\{i,j,k\}-$ inverze umesto Mur-Penrouzovog inverza, kao i da li analogna tvrđenja važe u prstenovima s involucijom i C^*-algebrama.

Glava 4

Zakoni obrnutog redosleda mešovitog tipa

Pod zakonom mešovitog tipa za Mur-Penrouzov inverz proizvoda podrazumevamo određene izraze koji su najčešće dobijeni iz nekog identiteta za Mur-Penrouzov inverz. Oni sami po sebi uglavnom nisu identiteti, tako da je od interesa znati uslove pod kojima važe, kao i druge zakone obrnutog redosleda koji su s njima ekvivalentni ili povezani na neki drugi način. Pokazaćemo na primeru kako se može konstruisati jedan zakon obrnutog redosleda mešovitog tipa. Polazimo od identiteta $T = TT^\dagger T$ koji važi za proizvoljnu matricu (ili operator) T. Očigledno je

$$AB = AA^\dagger ABB^\dagger B = A(A^\dagger ABB^\dagger)B$$

za dve proizvoljne matrice (dva operatora) A i B za koje proizvod AB ima smisla. Sada formalno primenimo na dobijeni izraz običan zakon obrnutog redosleda za Mur-Penrouzov inverz proizvoda tri matrice (operatora) u obliku $(PQR)^\dagger = R^\dagger Q^\dagger P^\dagger$, čime dobijamo sledeći zakon obrnutog redosleda mešovitog tipa za proizvod dveju matrica (operatora):

$$(AB)^\dagger = B^\dagger (A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger A^\dagger.$$

Više reči o njemu biće u narednoj sekciji.

4.1 Zakon obrnutog redosleda $(AB)^\dagger = B^\dagger(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger A^\dagger$

U ovoj sekciji predstavljamo skup tvrđenja ekvivalentnih zakonu obrnutog redosleda $(AB)^\dagger = B^\dagger(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger A^\dagger$ za običan i težinski Mur-Penrouzov inverz linearnih ograničenih operatora na Hilbertovim prostorima. Neki konačno dimenzionalni rezultati iz [86] prošireni su na beskonačno dimenzionalan slučaj. Koristiće se operatorske matrice, koje se prirodno javljaju u teoriji linearnih operatora sa zatvorenom slikom na Hilbertovim prostorima. Dakle, metod koji koristimo u dokazima je suštinski drugačiji od onog upotrebljenog u [86].

Ovaj zakon obrnutog redosleda prvi su izučavali Galperin [Galperin] i Voksmen [Waksman] [35] 1980, a zatim i Izumino [46] 1982.

Pomoćni rezultati

Koristićemo i sledeći rezultat do kog su došli Dam [Damm] i Vimer [Wimmer] [25], koji se lako može uopštiti sa kompleksnih matrica na linearne ograničene operatore na Hilbertovim prostorima.

Lema 4.1.1 *Neka su $H_i, (i = \overline{1,4})$ Hilbertovi prostori, i neka su $C \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, $X \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$ i $B \in \mathcal{L}(H_3, H_4)$ operatori sa zatvorenom slikom. Tada:*

$$C(BXC)^\dagger B = X^\dagger$$

ako i samo ako:

$$\mathcal{R}(B^*BX) = \mathcal{R}(X) \text{ and } \mathcal{N}(XCC^*) = \mathcal{N}(X).$$

Neka je $\mathcal{A}$ jedinična C^*–algebra sa jedinicom 1. Označimo skup svih projektora sa $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \{p \in \mathcal{A} : p^2 = p = p^*\}$. U radu Lija [Li] [53, Theorem 10.a] dokazani su sledeći rezultati.

Lema 4.1.2 [53] *Neka $p, q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(a) *pq je Mur-Penrouz invertibilan;*

(b) *qp je Mur-Penrouz invertibilan;*

(c) $(1-p)(1-q)$ *je Mur-Penrouz invertibilan;*

(d) $(1-q)(1-p)$ *je Mur-Penrouz invertibilan.*

Lema 4.1.3 [53] *Neka* $p, q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$. *Ako je* pq *je Mur-Penrouz invertibilan, tada:*

$$(qp)^\dagger = pq - p[(1-p)(1-q)]^\dagger q.$$

Koristićemo ove rezultate u slučaju Banahove algebre $\mathcal{A} = \mathcal{L}(X)$.

Glavni rezultati

U literaturi se može naći mnogo potrebnih i dovoljnih uslova pod kojima $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ važi. U Tianovom radu [84], uspostavljena je važna relacija:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \;\Leftrightarrow (AB)^\dagger = B^\dagger(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger A^\dagger \wedge (A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger = BB^\dagger A^\dagger A,$$

koja povezuje ovaj zakon sa osnovnim zakonom obrnutog redosleda. Dakle, potrebno je naći razne ekvivalentne uslove za koje je $(AB)^\dagger = B^\dagger(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger A^\dagger$ zadovoljeno. Naš glavni rezultat je naredna teorema, koja predstavlja uopštenje rezultata iz [86] na beskonačnodimenzionalni slučaj.

Teorema 4.1.1 *Neka su* X, Y *i* Z *Hilbertovi prostori, i neka su* $A \in \mathcal{L}(Y, Z)$ *i* $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ *operatori tako da* A, B *i* AB *imaju zatvorene slike. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(a1) $(AB)^\dagger = B^\dagger(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger A^\dagger$;

(a2) $(AB)^\dagger = B^*(A^*ABB^*)^\dagger A^*$;

(a3) $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger - B^\dagger((I - BB^\dagger)(I - A^\dagger A))^\dagger A^\dagger$;

(b1) $((A^\dagger)^* B)^\dagger = B^\dagger(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger A^*$;

(b2) $((A^\dagger)^* B)^\dagger = B^*((A^*A)^\dagger BB^*)^\dagger A^\dagger$;

(b3) $((A^\dagger)^* B)^\dagger = B^\dagger A^* - B^\dagger((I - BB^\dagger)(I - A^\dagger A))^\dagger A^*$;

(c1) $(A(B^\dagger)^*)^\dagger = B^*(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger A^\dagger$;

(c2) $(A(B^\dagger)^*)^\dagger = B^\dagger(A^*A(BB^*)^\dagger)^\dagger A^*$;

(c3) $(A(B^\dagger)^*)^\dagger = B^*A^\dagger - B^*((I-BB^\dagger)(I-A^\dagger A))^\dagger A^\dagger$;

(d1) $(B^\dagger A^\dagger)^\dagger = A(BB^\dagger A^\dagger A)^\dagger B$;

(d2) $(B^\dagger A^\dagger)^\dagger = (A^\dagger)^*((BB^*)^\dagger(A^*A)^\dagger)^\dagger(B^\dagger)^*$;

(d3) $(B^\dagger A^\dagger)^\dagger = AB - A((I-A^\dagger A)(I-BB^\dagger))^\dagger B$;

(e1) $(A^\dagger AB)^\dagger A^\dagger = B^\dagger(ABB^\dagger)^\dagger$;

(e2) $(A^\dagger AB)^\dagger A^* = B^\dagger((A^\dagger)^*BB^\dagger)^\dagger$;

(e3) $(A^\dagger A(B^\dagger)^*)^\dagger A^\dagger = B^*(ABB^\dagger)^\dagger$;

(e4) $(BB^\dagger A^\dagger)^\dagger B = A(B^\dagger A^\dagger A)^\dagger$;

(e5) $(A^*AB)^\dagger A^* = B^*(ABB^*)^\dagger$;

(e6) $((A^*A)^\dagger B)^\dagger A^\dagger = B^*((A^\dagger)^*BB^*)^\dagger$;

(e7) $(A^*A(B^\dagger)^*)^\dagger A^* = B^\dagger(A(BB^*)^\dagger)^\dagger$;

(e8) $B^\dagger((A^*)^\dagger(BB^*)^\dagger)^\dagger = ((A^*A)^\dagger(B^*)^\dagger)^\dagger A^\dagger$;

(e9) $(AA^*ABB^*B)^\dagger = B^\dagger(A^*ABB^*)^\dagger A^\dagger$;

(f1) $(A^\dagger AB)^\dagger = B^\dagger(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger$ *i* $(ABB^\dagger)^\dagger = (A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger A^\dagger$;

(f2) $(A^\dagger AB)^\dagger = B^*(A^\dagger ABB^*)^\dagger$ *i* $(ABB^\dagger)^\dagger = (A^*ABB^\dagger)^\dagger A^*$;

(f3) $(A^\dagger AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger A - B^\dagger((I-BB^\dagger)(I-A^\dagger A))^\dagger A^\dagger A$ *i*
$(ABB^\dagger)^\dagger = BB^\dagger A^\dagger - BB^\dagger((I-BB^\dagger)(I-A^\dagger A))^\dagger A^\dagger$;

(g1) $\mathcal{R}((AB)^\dagger) = \mathcal{R}(B^\dagger(A^\dagger ABB^\dagger)A^\dagger)$ *i*
$\mathcal{R}(((AB)^\dagger)^*) = \mathcal{R}((B^\dagger(A^\dagger ABB^\dagger)A^\dagger)^*)$;

(g2) $\mathcal{R}((AB)^\dagger) = \mathcal{R}(B^\dagger A^\dagger)$ *i* $\mathcal{R}((B^*A^*)^\dagger) = \mathcal{R}((A^*)^\dagger(B^*)^\dagger)$;

(g3) $\mathcal{R}(AA^*AB) = \mathcal{R}(AB)$ *i* $\mathcal{R}(B^*B(AB)^*) = \mathcal{R}((AB)^*)$.

Dokaz: Egzistencija Mur-Penrouzovih inverza raznih izraza koji se pojavljuju u tvrđenjima iz teoreme uglavnom sledi iz Leme 3.1.3, i odgovarajućih osobina jezgra i slike operatora (vidi Tvrđenje 1.4.1). Egzistencija Mur-Penrouzovog inverza proizvoda oblika $(I - BB^\dagger)(I - A^\dagger A)$ sledi na osnovu Leme 4.1.2.

Neka, prema Lemi 3.1.1, operator B ima sledeću matričnu formu u odnosu na odgovarajuće dekompozicije prostora:

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B^*) \\ \mathcal{N}(B) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B) \\ \mathcal{N}(B^*) \end{bmatrix},$$

gde je B_1 invertibilan. Tada

$$B^\dagger = \begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B) \\ \mathcal{N}(B^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B^*) \\ \mathcal{N}(B) \end{bmatrix}.$$

Neka dalje, na osnovu Leme 3.1.2, operator A ima sledeću matričnu formu:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B) \\ \mathcal{N}(B^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix},$$

gde je $D = A_1A_1^* + A_2A_2^*$ invertibilan i positivan operator u $\mathcal{L}(\mathcal{R}(A))$. Tada

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1} & 0 \\ A_2^*D^{-1} & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B) \\ \mathcal{N}(B^*) \end{bmatrix}.$$

Nađimo prvo ekvivalentni oblik tvrđenja (a1). Važi

$$S = A^\dagger ABB^\dagger = \begin{pmatrix} A_1^*D^{-1}A_1 & 0 \\ A_2^*D^{-1}A_1 & 0 \end{pmatrix},$$

i zato

$$S^\dagger = (S^*S)^\dagger S^* = \begin{pmatrix} (A_1^*D^{-1}A_1)^\dagger A_1^*D^{-1}A_1 & (A_1^*D^{-1}A_1)^\dagger A_1^*D^{-1}A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sledi da je

$$B^\dagger S^\dagger A^\dagger = \begin{pmatrix} B_1^{-1}(A_1^*D^{-1}A_1)^\dagger A_1^*D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zato,

$$(AB)^\dagger = B^\dagger (A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger B^\dagger$$

je ekvivalentno sa:

$$(A_1B_1)^\dagger = B_1^{-1}(A_1^* D^{-1} A_1)^\dagger A_1^* D^{-1} = B_1^{-1}(D^{-1/2}A_1)^\dagger D^{-1/2}. \quad (4.1)$$

Proverom Penrouzovih jednačina, (4.1) važi ako i samo ako

$$[B_1B_1^*, (D^{-1/2}A_1)^\dagger D^{-1/2}A_1] = 0 \wedge [D, D^{-1/2}A_1(D^{-1/2}A_1)^\dagger] = 0. \quad (4.2)$$

Dakle, tvrđenje (a1) je ekvivalentno sa (4.2).
Nađimo sada još ekvivalentnih tvrđenja uslovu (a1). Koristeći Lemu 3.1.4, dobijamo da je (4.2) ekvivalentno sa:

$$\mathcal{R}(DA_1) = \mathcal{R}(A_1) \ \text{ i } \ \mathcal{R}(B_1B_1^*A_1^*) = \mathcal{R}(A_1^*),$$

odnosno,

$$\mathcal{R}(DA_1) = \mathcal{R}(A_1) \ \text{ i } \ \mathcal{N}(A_1B_1B_1^*) = \mathcal{N}(A_1).$$

Primenimo li Lemu 4.1.1, za $X = A_1B_1$, $C = B_1^{-1}$, $B = D^{-1/2}$, jednakost:

$$(A_1B_1)^\dagger = B_1^{-1}(D^{-1/2}A_1)^\dagger D^{-1/2}$$

je ekvivalentna sa:

$$\mathcal{R}(D^{-1}A_1B_1) = \mathcal{R}(A_1B_1) \ \text{ i } \ \mathcal{N}(A_1B_1(B_1^*B_1)^{-1}) = \mathcal{N}(A_1B_1),$$

odnosno

$$\mathcal{R}(D^{-1}A_1B_1) = \mathcal{R}(A_1B_1) \ \text{ i } \ \mathcal{R}((B_1^*B_1)^{-1}(A_1B_1)^*) = \mathcal{R}((A_1B_1)^*).$$

Nađimo sada tvrđenja ekvivalentna sa (g3). Uslovi

$$\mathcal{R}(AA^*AB) = \mathcal{R}(AB) \quad \text{i} \quad \mathcal{R}(B^*B(AB)^*) = \mathcal{R}((AB)^*)$$

su ekvivalentni sa

$$\mathcal{R}(DA_1B_1) = \mathcal{R}(A_1B_1) \quad \text{i} \quad \mathcal{R}(B_1^*B_1(A_1B_1)^*) = \mathcal{R}((A_1B_1)^*)$$

što je dalje ekvivalentno sa (4.2). Dakle, $(g3) \Leftrightarrow (a1)$.

Analogno se mogu dokazati i ekvivalencije: $(b1) \Leftrightarrow (g3), (c1) \Leftrightarrow (g3)$ i $(d1) \Leftrightarrow (g3)$.

Za primer, dokažimo da $(c2) \Leftrightarrow (g3)$. Koristeći uvedenu notaciju, i

$$T = A^*A(BB^*)^\dagger = \begin{pmatrix} A_1^*A_1(B_1B_1^*)^{-1} & 0 \\ A_2^*A_1(B_1B_1^*)^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

lako se dobija, koristeći $T^\dagger = (T^*T)^\dagger T^*$, da je:

$$T^\dagger = \begin{pmatrix} (D^{1/2}A_1(B_1B_1^*)^{-1})^\dagger D^{-1/2}A_1 & (D^{1/2}A_1(B_1B_1^*)^{-1})^\dagger D^{-1/2}A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sada,

$$(A(B^\dagger)^*)^\dagger = B^\dagger(A^*A(BB^*)^\dagger)^\dagger A^*$$

ako i samo ako

$$(A_1(B_1^*)^{-1})^\dagger = B_1^{-1}(D^{1/2}A_1(B_1B_1^*)^{-1})^\dagger D^{1/2}.$$

Primenimo li Lemu 4.1.1, za $X = A_1(B_1^*)^{-1}$, $C = B_1^{-1}$, $B = D^{1/2}$, poslednja jednakost je ekvivalentna sa $\mathcal{R}(DA_1(B_1^*)^{-1}) = \mathcal{R}(A_1(B_1^*)^{-1})$ i $\mathcal{N}(A_1(B_1^*)^{-1}B_1^{-1}(B_1^*)^{-1}) = \mathcal{N}(A_1(B_1^*)^{-1})$, tj.

$$\mathcal{R}(DA_1B_1) = \mathcal{R}(A_1B_1) \text{ i } \mathcal{R}(B_1^{-1}A_1^*) = \mathcal{R}((A_1B_1)^*),$$

čime smo upravo dokazali da je (c2) ekvivalentno sa (g3).

Analogno dokazujemo i ekvivalencije $(a2) \Leftrightarrow (g3), (b2) \Leftrightarrow (g3)$ i $(d2) \Leftrightarrow (g3)$.

Prilikom dokazivanja ekvivalencija uključujući i $e-$tvrđenja, koriste se samo tehnike prikazane u prethodnom delu dokaza.

Tablica odgovarajućih tvrđenja data je u nastavku, kao svojevrsni pregled, ali i zbog kompletnosti:

(a1) $(A_1B_1)^\dagger = B_1^{-1}(D^{-1/2}A_1)^\dagger D^{-1/2}$;

(a2) $(A_1B_1)^\dagger = B_1^*(D^{1/2}A_1B_1B_1^*)^\dagger D^{1/2}$;

(b1) $(D^{-1}A_1B_1)^\dagger = B_1^{-1}(D^{-1/2}A_1)^\dagger D^{1/2}$;

(b2) $(D^{-1}A_1B_1)^\dagger = B_1^*(D^{-3/2}A_1B_1B_1^*)^\dagger D^{-1/2}$;

(c1) $(A_1(B_1^*)^{-1})^\dagger = B_1^*(D^{-1/2}A_1)^\dagger D^{-1/2}$;

(c2) $(A_1(B_1^*)^{-1})^\dagger = B_1^{-1}(D^{1/2}A_1(B_1B_1^*)^{-1})^\dagger D^{1/2}$;

(d1) $(B_1^{-1}A_1^*D^{-1})^\dagger = D^{1/2}(A_1^*D^{-1/2})^\dagger B_1$;

(d2) $(B_1^{-1}A_1^*D^{-1})^\dagger = D^{-1/2}((B_1B_1^*)^{-1}A_1^*D^{-3/2})^\dagger (B_1^*)^{-1}$;

(e1) $(D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger D^{-1/2} = B_1^{-1}A_1^\dagger$;

(e2) $(D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger D^{-1/2} = B_1^{-1}(D^{-1}A_1)^\dagger D^{-1}$;

(e3) $(D^{-1/2}A_1(B_1^*)^{-1})^\dagger = B_1^*A_1^\dagger D^{1/2}$;

(e4) $(B_1^{-1}A_1^*D^{-1/2})^\dagger = D^{-1/2}(A_1^*D^{-1})^\dagger B_1$;

(e5) $(D^{1/2}A_1B_1)^\dagger = B_1^*(A_1B_1B_1^*)^\dagger D^{-1/2}$;

(e6) $(D^{-1}A_1B_1B_1^*)^\dagger = (B_1^*)^{-1}(D^{-3/2}A_1B_1)^\dagger D^{-1/2}$;

(e7) $(D^{1/2}A_1(B_1^*)^{-1})^\dagger = B_1^{-1}(A_1(B_1B_1^*)^{-1})^\dagger D^{-1/2}$;

(e8) $(D^{-1}A_1(B_1B_1^*)^{-1})^\dagger = B_1(D^{-3/2}A_1(B_1^*)^{-1})^\dagger D^{-1/2}$;

(e9) $(DA_1B_1B_1^*B_1)^\dagger = B_1^{-1}(D^{1/2}A_1B_1B_1^*)^\dagger D^{-1/2}$.

Svako od ovih tvrđenja ekvivalentno je sa:

$$\mathcal{R}(D^\alpha A_1B_1) = \mathcal{R}(A_1B_1) \;\text{ i }\; \mathcal{N}(A_1B_1(B_1^*B_1)^\beta) = \mathcal{N}(A_1B_1),$$

za neko $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$. Preciznije, važi:

α	β	tvrđenje
1	1	a2, d1, e3, e6
1	-1	b1, c2, e1, e8
-1	1	b2, c1, e4, e5
-1	-1	a1, d2, e2, e7, e9

Koristeći Lemu 3.1.4, imamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(D^\alpha A_1B_1) = \mathcal{R}(A_1B_1) &\Leftrightarrow [D^\alpha, A_1B_1(A_1B_1)^\dagger] = 0\\ &\Leftrightarrow [D, A_1B_1(A_1B_1)^\dagger] = 0,\end{aligned}$$

i:

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}(A_1B_1(B_1^*B_1)^\beta) = \mathcal{N}(A_1B_1) \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\ &\mathcal{R}((B_1^*B_1)^\beta(A_1B_1)^*) = \mathcal{R}((A_1B_1)^*) \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\ &[(B_1^*B_1)^\beta, (A_1B_1)^*((A_1B_1)^*)^\dagger] = 0 \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\ &[(B_1^*B_1)^\beta, (A_1B_1)^\dagger A_1B_1] = 0 \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\ &[B_1^*B_1, (A_1B_1)^\dagger A_1B_1] = 0,\end{aligned}$$

što znači da je svako od tvrđenja iz tablice ekvivalentno sa (g3). Sada, dokazujemo ekvivalencije $(x3) \Leftrightarrow (x1)$, gde $x \in \{a, b, c, d, f\}$.
Prvo dokazujemo $(a3) \Leftrightarrow (a1)$:

$$(a3) \Leftrightarrow (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger - B^\dagger[(I - BB^\dagger)(I - A^\dagger A)]^\dagger A^\dagger.$$

Koristeći Lemu 4.1.2, za $P = BB^\dagger$ i $Q = A^\dagger A$, dobija se:

$$(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger = BB^\dagger A^\dagger A - BB^\dagger[(I - BB^\dagger)(I - A^\dagger A)]^\dagger A^\dagger A. \qquad (4.3)$$

Pomnožimo li (4.3) sa leve strane sa $B^\dagger$ a sa desne sa $A^\dagger$, dobija se:

$$B^\dagger(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger A^\dagger = B^\dagger A^\dagger - B^\dagger[(I - BB^\dagger)(I - A^\dagger A)]^\dagger A^\dagger = (AB)^\dagger,$$

čime je dokaz završen.
Analogno se pokazuje da $(b3) \Leftrightarrow (b1)$ i $(c3) \Leftrightarrow (c1)$; deo $(d3) \Leftrightarrow (d1)$ je veoma sličan - razlika je samo u tome što se uzima $Q = BB^\dagger$ i $P = A^\dagger A$.
Dokažimo sada $(f3) \Leftrightarrow (f1)$:

$$(f3.1) \Leftrightarrow (A^\dagger AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger A - B^\dagger((I - BB^\dagger)(I - A^\dagger A))^\dagger A^\dagger A.$$

Ako pomnožimo (4.3) sa leve strane sa $B^\dagger$, dobijamo:

$$B^\dagger(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger = B^\dagger A^\dagger A - B^\dagger((I - BB^\dagger)(I - A^\dagger A))^\dagger A^\dagger A = (A^\dagger AB)^\dagger,$$

tj. deo $(f1.1)$. Takođe,

$$(f3.2) \Leftrightarrow (ABB^\dagger)^\dagger = BB^\dagger A^\dagger - BB^\dagger((I - BB^\dagger)(I - A^\dagger A))^\dagger A^\dagger.$$

Ako (4.3) pomnožimo sa desne strane sa $A^\dagger$, imamo:

$$(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger A^\dagger = BB^\dagger A^\dagger - BB^\dagger((I-BB^\dagger)(I-A^\dagger A))^\dagger A^\dagger = (ABB^\dagger)^\dagger,$$

tj. deo $(f1.2)$. Time je ovaj deo dokaza završen.

Ispitajmo sada čemu su ekvivalentna tvrđenja (f1) i (f2).
Jednostavan račun pokazuje da je (f1) ekvivalentno sledećim dvema tvrđenjima:

$$(D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger D^{-1/2}A_i = B_1^{-1}(D^{-1/2}A_1)^\dagger D^{-1/2}A_i,\ i=1,2; \tag{4.4}$$
$$A_1^\dagger = (D^{-1/2}A_1)^\dagger D^{-1/2}. \tag{4.5}$$

Pretpostavimo da (f1) važi; ako zamenimo (4.5) u (4.4), zatim pomnožimo sa desne strane modifikovanu jednakost (4.4) sa A_i^*, i onda ih saberemo, dobićemo:

$$(D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger = B_1^{-1}A_1^\dagger D^{1/2},$$

što važi ako i samo ako:

$$[D, A_1A_1^\dagger] = 0 \ \text{ i } \ [B_1B_1^*, A_1^\dagger A_1] = 0,$$

što je, prema Lemi 3.1.4, ekvivalentno sa

$$\mathcal{R}(DA_1) = \mathcal{R}(A_1) \text{ i } \mathcal{R}(B_1B_1^*A_1^*) = \mathcal{R}(A_1^*),$$

tj. dobija se tvrđenje (a1). Lako se vidi da važi obratna implikacija.
Jednostavan račun pokazuje da je (f2) ekvivalentno sledećim dvema tvrđenjima:

$$(D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger D^{-1/2}A_i = B_1^*(D^{-1/2}A_1B_1B_1^*)^\dagger D^{-1/2}A_i,\ i=1,2; \tag{4.6}$$
$$A_1^\dagger = (D^{-1/2}A_1)^\dagger D^{-1/2}. \tag{4.7}$$

Pretpostavimo da (f2) važi; ako pomnožimo sa desne strane jednakosti iz (4.6) sa A_i^*, i saberemo ih, dobijamo:

$$(D^{-1/2}A_1B_1)^\dagger = B_1^*(D^{-1/2}A_1B_1B_1^*)^\dagger,$$

što, prema Lemi 4.1.1, važi ako i samo ako $\mathcal{N}(A_1B_1B_1^*B_1) = \mathcal{N}(A_1B_1)$. Slično kao u prethodnom delu dokaza, izraz (4.7) je ekvivalentan sa $\mathcal{R}(DA_1) = \mathcal{R}(A_1)$. Dakle, imamo da $(f2) \Rightarrow (a1)$. Obratna implikacija se lako dobija.
Da vidimo sada čemu su ekvivalentna tvrđenja (g1) i (g2).
Prvo (g1):

$$\begin{aligned}
& \mathcal{R}(B^\dagger(A^\dagger ABB^\dagger)A^\dagger) = \mathcal{R}((AB)^\dagger) = \mathcal{R}((AB)^*) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{R}(B_1^*A_1^*) = \mathcal{R}(B_1^{-1}(D^{-1/2}A_1)^\dagger D^{-1/2}) = \mathcal{R}(B_1^{-1}(D^{-1/2}A_1)^\dagger) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & B_1\mathcal{R}(B_1^*A_1^*) = \mathcal{R}(B_1B_1^*A_1^*) = \mathcal{R}((D^{-1/2}A_1)^\dagger) = \\
=\ & \mathcal{R}((D^{-1/2}A_1)^*) = \mathcal{R}(A_1^*),
\end{aligned}$$

odnosno, važi:

$$\mathcal{R}(B_1B_1^*A_1^*) = \mathcal{R}(A_1^*).$$

Drugi uslov: $\mathcal{R}(((AB)^\dagger)^*) = \mathcal{R}((B^\dagger(A^\dagger ABB^\dagger)A^\dagger)^*)$ postaje:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{N}(B^\dagger(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger A^\dagger) = \mathcal{N}((AB)^\dagger) = \mathcal{N}((AB)^*) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{N}(A_1^*) = \mathcal{N}(B_1^*A_1^*) = \mathcal{N}(B_1^{-1}(D^{-1/2}A_1)^\dagger D^{-1/2}) = \\
=\ & \mathcal{N}((D^{-1/2}A_1)^\dagger D^{-1/2}) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{R}(A_1) = \mathcal{R}(D^{-1/2}(A_1^*D^{-1/2})^\dagger) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & D^{1/2}\mathcal{R}(A_1) = \mathcal{R}(D^{1/2}A_1) = \mathcal{R}((A_1^*D^{-1/2})^\dagger) = \\
=\ & \mathcal{R}((A_1^*D^{-1/2})^*) = \mathcal{R}(D^{-1/2}A_1),
\end{aligned}$$

te imamo:

$$\mathcal{R}(DA_1) = \mathcal{R}(A_1).$$

Ova dva uslova ekvivalentna su sa (a1), čime smo upravo dokazali $(g1) \Leftrightarrow (a1)$.

Sada, (g2):

$$\begin{aligned}
& \mathcal{R}(B^\dagger A^\dagger) = \mathcal{R}((AB)^\dagger) = \mathcal{R}((AB)^*) \Leftrightarrow \\
& \mathcal{R}(B_1^*A_1^*) = \mathcal{R}(B_1^*A_1^*D^{-1}) = \mathcal{R}(B_1^{-1}A_1^*) \Leftrightarrow \\
& B_1\mathcal{R}(B_1^*A_1^*) = \mathcal{R}(B_1B_1^*A_1^*) = \mathcal{R}(A_1^*)
\end{aligned}$$

i

$$\mathcal{R}((B^*A^*)^\dagger) = \mathcal{R}((A^*)^\dagger(B^*)^\dagger) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}((AB)^\dagger) = \mathcal{N}(B^\dagger A^\dagger) = \mathcal{N}((AB)^*) \Leftrightarrow \\
&\mathcal{N}(B_1^* A_1^*) = \mathcal{N}(B_1^{-1} A_1^* D^{-1}) \Leftrightarrow \\
&\mathcal{N}(A_1^*) = \mathcal{N}(A_1^* D^{-1}) \Leftrightarrow \\
&\mathcal{R}(A_1) = \mathcal{R}(D^{-1} A_1);
\end{aligned}$$

ova dva uslova zajedno su ekvivalentna sa (a1), čime smo upravo pokazali da $(g2) \Leftrightarrow (a1)$.

$\triangle$

Formulišemo sada analogni rezultat za težinski Mur-Penrouzov inverz.

Teorema 4.1.2 *Neka su X, Y i Z Hilbertovi prostori, i neka su $A \in \mathcal{L}(Y,Z)$ i $B \in \mathcal{L}(X,Y)$ operatori takvi da A, B i AB imaju zatvorene slike. Neka su $M \in \mathcal{L}(Z)$ i $\mathcal{N} \in \mathcal{L}(X)$ pozitivno definitni invertibilni operatori. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(a1) $(AB)^\dagger_{M,N} = B^\dagger_{I,N}(A^\dagger_{M,I}ABB^\dagger_{I,N})^\dagger A^\dagger_{M,I}$;

(a2) $(AB)^\dagger_{M,N} = N^{-1}B^*(A^*MABN^{-1}B^*)^\dagger A^*M$;

(a3) $(AB)^\dagger_{M,N} = B^\dagger_{I,N}A^\dagger_{M,I} - B^\dagger_{I,N}((I-BB^\dagger_{I,N})(I-A^\dagger_{M,I}A))^\dagger A^\dagger_{M,I}$;

(b1) $((A^*)^\dagger_{I,M^{-1}}B)^\dagger_{M^{-1},N} = B^\dagger_{I,N}(A^\dagger_{M,I}ABB^\dagger_{I,N})^\dagger A^*$;

(b2) $((A^*)^\dagger_{I,M^{-1}}B)^\dagger_{M^{-1},N} = N^{-1}B^*((A^*MA)^\dagger(BN^{-1}B^*))^\dagger A^\dagger_{M,I}M^{-1}$;

(b3) $((A^*)^\dagger_{I,M^{-1}}B)^\dagger_{M^{-1},N} = B^\dagger_{I,N}A^* - B^\dagger_{I,N}((I-BB^\dagger_{I,N})(I-A^\dagger_{M,I}A))^\dagger A^*$;

(c1) $(A(B^*)^\dagger_{N^{-1},I})^\dagger_{M,N^{-1}} = B^*(A^\dagger_{M,I}ABB^\dagger_{I,N})^\dagger A^\dagger_{M,I}$;

(c2) $(A(B^*)^\dagger_{N^{-1},I})^\dagger_{M,N^{-1}} = NB^\dagger_{I,N}((A^*MA)(BN^{-1}B^*)^\dagger)^\dagger A^*M$;

(c3) $(A(B^*)^\dagger_{N^{-1},I})^\dagger_{M,N^{-1}} = B^*A^\dagger_{M,I} - B^*((I-BB^\dagger_{I,N})(I-A^\dagger_{M,I}A))^\dagger A^\dagger_{M,I}$;

(d1) $(B^\dagger_{I,N}A^\dagger_{M,I})^\dagger_{N,M} = A(BB^\dagger_{I,N}A^\dagger_{M,I}A)^\dagger B$;

(d2) $(B^\dagger_{I,N}A^\dagger_{M,I})^\dagger_{N,M} = M^{-1}(A^*)^\dagger_{I,M^{-1}}((BN^{-1}B^*)^\dagger \times$
$\times (A^*MA)^\dagger)^\dagger(B^*)^\dagger_{N^{-1},I}N$;

(d3) $(B^\dagger_{I,N}A^\dagger_{M,I})^\dagger_{N,M} = AB - A((I - A^\dagger_{M,I}A)(I - BB^\dagger_{I,N}))^\dagger B$;

(e1) $(A^\dagger_{M,I}AB)^\dagger_{I,N}A^\dagger_{M,I} = B^\dagger_{I,N}(ABB^\dagger_{I,N})^\dagger_{M,I}$;

(e2) $(A^\dagger_{M,I}AB)^\dagger_{I,N}A^* = B^\dagger_{I,N}((A^*)^\dagger_{I,M^{-1}}BB^\dagger_{I,N})^\dagger_{M^{-1},I}$;

(e3) $(A^\dagger_{M,I}A(B^*)^\dagger_{N^{-1},I})^\dagger_{I,N^{-1}}A^\dagger_{M,I} = B^*(ABB^\dagger_{I,N})^\dagger_{M,I}$;

(e4) $(BB^\dagger_{I,N}A^\dagger_{M,I})^\dagger_{I,M}B = A(B^\dagger_{I,N}A^\dagger_{M,I}A)^\dagger_{N,I}$;

(e5) $N(A^*MAB)^\dagger_{I,N}A^*M = B^*(ABN^{-1}B^*)^\dagger_{M,I}$;

(e6) $N((A^*MA)^\dagger B)^\dagger_{I,N}A^\dagger_{M,I} = B^*((A^*)^\dagger_{I,M^{-1}}BN^{-1}B^*)^\dagger_{M^{-1},I}M$;

(e7) $(A^*MA(B^*)^\dagger_{N^{-1},I})^\dagger_{I,N^{-1}}A^*M = NB^\dagger_{I,N}(A(BN^{-1}B^*)^\dagger)^\dagger_{M,I}$;

(e8) $NB^\dagger_{I,N}((A^*)^\dagger_{I,M^{-1}}(BN^{-1}B^*)^\dagger)^\dagger_{M^{-1},I}M =$
$= ((A^*MA)^\dagger(B^*)^\dagger_{N^{-1},I})^\dagger_{I,N^{-1}}A^\dagger_{M,I}$;

(e9) $(AA^*MABN^{-1}B^*B)^\dagger_{M,N} = B^\dagger_{I,N}(A^*MABN^{-1}B^*)^\dagger A^\dagger_{M,I}$;

(f1) $(A^\dagger_{M,I}AB)^\dagger_{I,N} = B^\dagger_{I,N}(A^\dagger_{M,I}ABB^\dagger_{I,N})^\dagger$ i
$(ABB^\dagger_{I,N})^\dagger_{M,I} = (A^\dagger_{M,I}ABB^\dagger_{I,N})^\dagger A^\dagger_{M,I}$;

(f2) $(A^\dagger_{M,I}AB)^\dagger_{I,N} = N^{-1}B^*(A^\dagger_{M,I}ABN^{-1}B^*)^\dagger$ i
$(ABB^\dagger_{I,N})^\dagger_{M,I} = (A^*MABB^\dagger_{I,N})^\dagger A^*M$;

(f3) $(A^\dagger_{M,I}AB)^\dagger_{I,N} = B^\dagger_{I,N}A^\dagger_{M,I}A - B^\dagger_{I,N} \times$
$\times ((I - BB^\dagger_{I,N})(I - A^\dagger_{M,I}A))^\dagger A^\dagger_{M,I}A$ i
$(ABB^\dagger_{I,N})^\dagger_{M,I} = BB^\dagger_{I,N}A^\dagger_{M,I} - BB^\dagger_{I,N} \times$
$\times ((I - BB^\dagger_{I,N})(I - A^\dagger_{M,I}A))^\dagger A^\dagger_{M,I}$;

(g1) $\mathcal{R}((AB)^\dagger_{M,N}) = \mathcal{R}(B^\dagger_{I,N}(A^\dagger_{M,I}ABB^\dagger_{I,N})^\dagger A^\dagger_{M,I})$ i
$\mathcal{R}(((AB)^\dagger_{M,N})^*) = \mathcal{R}((B^\dagger_{I,N}(A^\dagger_{M,I}ABB^\dagger_{I,N})^\dagger A^\dagger_{M,I})^*)$;

(g2) $\mathcal{R}((AB)^\dagger_{M,N}) = \mathcal{R}(B^\dagger_{I,N}A^\dagger_{M,I})$ i
$\mathcal{R}((B^*A^*)^\dagger_{N^{-1},M^{-1}}) = \mathcal{R}((A^*)^\dagger_{I,M^{-1}}(B^*)^\dagger_{N^{-1},I})$;

(g3) $\mathcal{R}(AA^*MAB) = \mathcal{R}(AB)$ *i* $\mathcal{R}((ABN^{-1}B^*B)^*) = \mathcal{R}((AB)^*)$.

Dokaz: Koristeći osnovnu relaciju između običnog i težinskog Mur-Penrouzovog inverza:

$$A^\dagger_{M,N} = N^{-1/2}(M^{1/2}AN^{-1/2})^\dagger M^{1/2},$$

i smene:

$$\tilde{A} = M^{1/2}A,\ \tilde{B} = BN^{-1/2},$$

sva tvrđenja iz ove teoreme svode se na tvrđenja upravo dokazane Teoreme 4.1.1. Dokažimo, na primer, $(e6) \Leftrightarrow (g2)$.

$$\begin{aligned}
(e6) \quad &\Leftrightarrow \quad N((A^*MA)^\dagger B)^\dagger_{I,N} A^\dagger_{M,I} = B^*((A^*)^\dagger_{I,M^{-1}} BN^{-1}B^*)^\dagger_{M^{-1},I} M \\
&\Leftrightarrow \quad N^{1/2}((A^*MA)^\dagger BN^{-1/2})^\dagger (M^{1/2}A)^\dagger M^{1/2} = \\
&= \quad B^*((A^*M^{-1/2})^\dagger BN^{-1}B^*)^\dagger M^{1/2} \\
&\Leftrightarrow \quad ((\tilde{A}^*\tilde{A})^\dagger \tilde{B})^\dagger \tilde{A}^\dagger = \tilde{B}^*((\tilde{A}^*)^\dagger \tilde{B}\tilde{B}^*)^\dagger,
\end{aligned}$$

što je u stvari (e6) iz Teoreme 4.1.1.
S druge strane, (g2) postaje:

$$\begin{aligned}
(g2.1) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{R}((AB)^\dagger_{M,N}) = \mathcal{R}(B^\dagger_{I,N} A^\dagger_{M,I}) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{R}(N^{-1/2}(M^{1/2}ABN^{-1/2})^\dagger M^{1/2}) = \\
&= \quad \mathcal{R}(N^{-1/2}(BN^{-1/2})^\dagger (M^{1/2}A)^\dagger M^{1/2}) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{R}(N^{-1/2}(\tilde{A}\tilde{B})^\dagger M^{1/2}) = \mathcal{R}(N^{-1/2}\tilde{B}^\dagger \tilde{A}^\dagger M^{1/2}) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{R}(N^{-1/2}(\tilde{A}\tilde{B})^\dagger) = \mathcal{R}(N^{-1/2}\tilde{B}^\dagger \tilde{A}^\dagger) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{R}((\tilde{A}\tilde{B})^\dagger) = \mathcal{R}(\tilde{B}^\dagger \tilde{A}^\dagger),
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
(g2.2) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{R}((B^*A^*)^\dagger_{N^{-1},M^{-1}}) = \mathcal{R}((A^*)^\dagger_{I,M^{-1}}(B^*)^\dagger_{N^{-1},I}) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{R}(M^{1/2}(N^{-1/2}B^*A^*M^{1/2})^\dagger N^{-1/2}) = \\
&= \quad \mathcal{R}(M^{1/2}(A^*M^{1/2})^\dagger (N^{-1/2}B^*)^\dagger N^{-1/2}) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{R}(M^{1/2}(\tilde{B}^*\tilde{A}^*)^\dagger N^{-1/2}) = \mathcal{R}(M^{1/2}(\tilde{A}^*)^\dagger (\tilde{B}^*)^\dagger N^{-1/2}) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{R}(M^{1/2}(\tilde{B}^*\tilde{A}^*)^\dagger) = \mathcal{R}(M^{1/2}(\tilde{A}^*)^\dagger (\tilde{B}^*)^\dagger) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{R}((\tilde{B}^*\tilde{A}^*)^\dagger) = \mathcal{R}((\tilde{A}^*)^\dagger (\tilde{B}^*)^\dagger),
\end{aligned}$$

što znači da važi (g2) iz Teoreme 4.1.1. Pošto smo Teoremu 4.1.1 već dokazali, dokaz ove naše teoreme neposredno sledi.

$\triangle$

4.2 Zakon obrnutog redosleda $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$

U ovom poglavlju bavimo se osnovnim zakonom obrnutog redosleda za Mur-Penrouzov inverz proizvoda dva operatora u obliku $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$, u smislu nalaženja raznih drugih zakona obrnutog redosleda s kojima je on ekvivalentan. Pokazaće se uska povezanost sa mešovitim zakonom obrnutog redosleda iz prethodnog poglavlja, i to je glavni razlog zbog kojeg je ovo poglavlje smeštenu u okviru ove glave. Ovde predstavljeni rezultati uglavnom su uopštenja Tianovih rezultata iz [87], mada su u nekim tvrđenjima uvedeni i novi parametri iz skupa prirodnih brojeva, čime se postiglo dalje uopštenje.

Pomoćni rezultati

Naredno tvrđenje sadrži neka poznata svojstva Mur-Penrouzovog inverza, posebno ona koja će biti korišćena u dokazima.

Lema 4.2.1 *Neka je H ograničen ermitski linearni operator. Tada:*

$$(\forall n \in N) \ \ (H^n)^\dagger = (H^\dagger)^n.$$

Dokaz: Za $n = 1$ zapravo imamo dobro poznati identitet za Mur-Penrouzov inverz. Za druge vrednosti n, lako je proveriti sve četiri Penrouzove jednačine koristeći sledeću činjenicu:

$$H = H^\dagger H^2 = H^2 H^\dagger,$$

koja sledi iz Tvrđenja 1.4.1 za proizvoljan ermitski operator H.

$\triangle$

Primedba: Prema Lemi 4.2.1, ako operator T ima formu:

$$T = \begin{pmatrix} - & - \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

gde "–" označava proizvoljan element, tada:

$$((T^*T)^\dagger)^n = (T^\dagger(T^\dagger)^*)^n = T^\dagger((T^\dagger)^*T^\dagger)^{n-1}(T^*)^\dagger = T^\dagger((TT^*)^\dagger)^{n-1}(T^\dagger)^*,$$

gde TT^* ima sledeći oblik:

$$TT^* = \begin{pmatrix} inv. & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

što nam omogućava pojednostavljenje računanja. Ovde se "inv" odnosi na invertibilni operator.
Ukoliko operator S ima formu:

$$S = \begin{pmatrix} - & 0 \\ - & 0 \end{pmatrix},$$

onda:

$$((SS^*)^\dagger)^n = ((S^\dagger)^* S^\dagger)^n = (S^\dagger)^*(S^\dagger(S^\dagger)^*)^{n-1}S^\dagger = (S^*)^\dagger((S^*S)^\dagger)^{n-1}S^\dagger,$$

gde S^*S ima sledeći oblik:

$$S^*S = \begin{pmatrix} inv. & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

što nam omogućava pojednostavljenje računanja.

Tvrđenje 4.2.1 *Neka su X i Y proizvoljni Hilbertovi prostori i neka je $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Za svako $m \in N$, važi:*

(a) $((AA^*)^\dagger)^m (AA^*)^m = ((A^*)^\dagger A^\dagger)^m (AA^*)^m = AA^\dagger$;

(b) $(AA^*)^m ((AA^*)^\dagger)^m = (AA^*)^m ((A^*)^\dagger A^\dagger)^m = AA^\dagger$;

(c) $((A^*A)^\dagger)^m (A^*A)^m = (A^\dagger (A^*)^\dagger)^m (A^*A)^m = A^\dagger A$;

(d) $(A^*A)^m ((A^*A)^\dagger)^m = (A^*A)^m (A^\dagger (A^*)^\dagger)^m = A^\dagger A$.

Dokaz:

$$\begin{aligned}(a)\ ((AA^*)^\dagger)^m (AA^*)^m &= ((AA^*)^\dagger)^{m-1}(AA^*)^\dagger AA^*(AA^*)^{m-1} = \\ &= ((AA^*)^\dagger)^{m-1}(A^*)^\dagger A^*(AA^*)^{m-1} = \\ &= ((AA^*)^\dagger)^{m-1}(AA^*)^{m-1} = \ldots = \\ &= (AA^*)^\dagger AA^* = (A^*)^\dagger A^* = (AA^\dagger)^* = AA^\dagger;\end{aligned}$$

koristeći Tvrđenje 1.4.1(2),(3), dobijamo željeni rezultat. Na potpuno analogan način dokazuju se preostala tri tvrđenja. Dokažimo, na primer, tvrđenje (c).

$$\begin{aligned}(c)\ ((A^*A)^\dagger)^m(A^*A)^m &= ((A^*A)^\dagger)^{m-1}(A^*A)^\dagger A^*A(A^*A)^{m-1} = \\ &= ((A^*A)^\dagger)^{m-1}A^\dagger A(A^*A)^{m-1} = \\ &= ((A^*A)^\dagger)^{m-1}(A^*A)^{m-1} = \ldots = \\ &= (A^*A)^\dagger A^*A = A^\dagger A.\end{aligned}$$

△

Lema 4.2.2 *Neka su X i Y proizvoljni Hilbertovi prostori i neka $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Za svako $m \in N$,*

$$((AA^*)^mA)^\dagger = A^\dagger((A^*)^\dagger A^\dagger)^m, \quad (A(A^*A)^m)^\dagger = (A^\dagger(A^*)^\dagger)^mA^\dagger.$$

Dokaz: Dokazujemo prvi identitet proveravanjem sve četiri Penrouzove jednačine, koristeći Tvrđenje 4.2.1 za jednostavnije računanje. Drugo tvrđenje dokazuje se analogno.

(I) $(AA^*)^mAA^\dagger((A^*)^\dagger A^\dagger)^m(AA^*)^mA = (AA^*)^mAA^\dagger AA^\dagger A = (AA^*)^mA$;

$$\begin{aligned}(II) \qquad & A^\dagger((A^*)^\dagger A^\dagger)^m(AA^*)^mAA^\dagger((A^*)^\dagger A^\dagger)^m \\ = \ & A^\dagger AA^\dagger AA^\dagger((A^*)^\dagger A^\dagger)^m = A^\dagger((A^*)^\dagger A^\dagger)^m;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(III)\ (AA^*)^mAA^\dagger((A^*)^\dagger A^\dagger)^m &= (AA^*)^{m-1}((A^*)^\dagger A^\dagger)^{m-1}(A^*)^\dagger A^\dagger = \\ &= AA^\dagger(A^*)^\dagger A^\dagger = AA^\dagger,\end{aligned}$$

što predstavlja ermitski operator;

$$(IV)\ \ A^\dagger((A^*)^\dagger A^\dagger)^m(AA^*)^mA = A^\dagger AA^\dagger A = A^\dagger A,$$

što je ermitski operator.

△

Glavni rezultati

Sledeća teorema predstavlja uopštenje glavnog rezultata iz [87] za beskonačno dimenzionalan slučaj.

Teorema 4.2.1 *Neka su X, Y i Z Hilbertovi prostori, i neka su $A \in \mathcal{L}(Y,Z)$ i $B \in \mathcal{L}(X,Y)$ ograničeni linearni operatori, tako da A, B i AB imaju zatvorene slike. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(a) $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$;

(b) $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger ABB^\dagger A^\dagger$;

(c) $((A^\dagger)^* B)^\dagger = B^\dagger A^*$;

(d) $(A(B^\dagger)^*)^\dagger = B^* A^\dagger$;

(e) $(ABB^\dagger)^\dagger = BB^\dagger A^\dagger$ *i* $(A^\dagger AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger A$;

(f) $(AB)^\dagger = B^\dagger (A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger A^\dagger$ *i* $(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger = BB^\dagger A^\dagger A$;

(g) $(AB)^\dagger = (A^\dagger AB)^\dagger A^\dagger$ *i* $(A^\dagger AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger A$;

(h) $(AB)^\dagger = B^\dagger (ABB^\dagger)^\dagger$ *i* $(AAB^\dagger)^\dagger = BB^\dagger A^\dagger$;

(i) $(AB)^\dagger = (A^* AB)^\dagger A^*$ *i* $(A^* AB)^\dagger = B^\dagger (A^* A)^\dagger$;

(j) $(AB)^\dagger = B^* (ABB^*)^\dagger$ *i* $(ABB^*)^\dagger = (BB^*)^\dagger A^\dagger$;

(k) $(AB)^\dagger = B^* (A^* ABB^*)^\dagger A^*$ *i* $(A^* ABB^*)^\dagger = (BB^*)^\dagger (A^* A)^\dagger$;

(l) $(AB)^\dagger = B^* B(AA^* ABB^* B)^\dagger AA^*$ *i*
$(AA^* ABB^* B)^\dagger = (BB^* B)^\dagger (AA^* A)^\dagger$;

(m) $(AB)^\dagger = B^* BB^* ((A^* A)^2 (BB^*)^2)^\dagger A^* AA^*$ *i*
$((A^* A)^2 (BB^*)^2)^\dagger = ((BB^*)^2)^\dagger ((A^* A)^2)^\dagger$;

(n) $\{B^{(1,3)} A^{(1,3)}\} \subseteq \{(AB)^{(1,3)}\}$ *i* $\{B^{(1,4)} A^{(1,4)}\} \subseteq \{(AB)^{(1,4)}\}$.

Dokaz: Prvo treba prokomentarisati egzistenciju Mur-Penrouzovog inverza raznih operatora koji se pojavljuju u gornjim formulama. Egzistencija $(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger$ neposredno sledi prema Lemi 3.1.3. Lako se pokazuje da $((A^\dagger)^* B)^\dagger$ i $(A(B^\dagger)^*)^\dagger$ postoje. Pošto je

$$\mathcal{R}(B^*A^*A) = B^*(\mathcal{R}(A^*A)) = B^*(\mathcal{R}(A^*)) = \mathcal{R}((AB)^*)$$

zatvoren, sledi postojanje $(A^*AB)^\dagger$, $(A^\dagger AB)^\dagger$ kao i $(A^*ABB^*)^\dagger$, jer:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(A^*ABB^*) &= A^*A(\mathcal{R}(BB^*)) = A^*A(\mathcal{R}(B)) = \mathcal{R}(A^*AB) = \\ &= \mathcal{R}((B^*A^*A)^*).\end{aligned}$$

Na potpuno analogan način može se pokazati egzistencija $(ABB^\dagger)^\dagger$ i $(ABB^*)^\dagger$.

Prvo navodimo delove dokaza koji ne zavise od dekompozicija prostora koje ćemo kasnije koristiti.
$(a) \Leftrightarrow (n)$: Ovaj deo je već dokazan kao Corollary 6.2.4 u [30].
$(a) \Leftrightarrow (e)$: Već dokazano kao Theorem 2.4.c) u [31].
$(f) - (m) \Rightarrow (a)$: Sve ove implikacije dokazuju se na isti način: drugi deo tvrđenja zameni se u prvi, a onda se iskoriste uobičajeni identiteti (vidi Tvrđenje 1.4.1 i Lemu 4.2.2) ukoliko je potrebno. Kao rezultat dobija se tvrđenje (a). Kao ilustraciju, prikazaćemo dva specifična slučaja:
$(j) \Rightarrow (a)$: $(AB)^\dagger = B^*(ABB^*)^\dagger = B^*(BB^*)^\dagger A^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.
$(m) \Rightarrow (a)$: Ovde ćemo koristiti Lemu 4.2.1 za $n = 2$.

$$\begin{aligned}(AB)^\dagger &= B^*BB^*((A^*A)^2(BB^*)^2)^\dagger = \\ &= B^*BB^*((BB^*)^2)^\dagger((A^*A)^2)^\dagger A^*AA^* = \\ &= B^*BB^*(BB^*)^\dagger(BB^*)^\dagger(A^*A)^\dagger(A^*A)^\dagger A^*AA^* = \\ &= B^*BB^\dagger(BB^*)^\dagger(A^*A)^\dagger A^\dagger AA^* = \\ &= B^*(BB^*)^\dagger(A^*A)^\dagger A^* = B^\dagger A^\dagger.\end{aligned}$$

$(a) \Rightarrow (b)$: $B^\dagger A^\dagger = (AB)^\dagger = (AB)^\dagger AB(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger ABB^\dagger A^\dagger$.
$(a) \Rightarrow (g)$: $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = B^\dagger A^\dagger AA^\dagger = (A^\dagger AB)^\dagger A^\dagger$, prema već dokazanom tvrđenju (e).
$(a) \Rightarrow (h)$: $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = B^\dagger BB^\dagger A^\dagger = B^\dagger(A^\dagger BB^\dagger)^\dagger$, prema već dokazanom tvrđenju (e).

U ostatku dokaza koristićemo sledeću dekompoziciju prostora i operatorske forme.
Koristeći Lemu 3.1.1, zaključujemo da operator B ima sledeću matričnu formu:
$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B^*) \\ \mathcal{N}(B) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B) \\ \mathcal{N}(B^*) \end{bmatrix},$$
gde je B_1 invertibilan. Tada
$$B^\dagger = \begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B) \\ \mathcal{N}(B^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B^*) \\ \mathcal{N}(B) \end{bmatrix}.$$
Prema Lemi 3.1.2 sledi da operator A ima sledeću matričnu formu:
$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B) \\ \mathcal{N}(B^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix},$$
gde je $D = A_1A_1^* + A_2A_2^*$ invertibilan i pozitivan $\mathcal{L}(\mathcal{R}(A))$. Tada
$$A^\dagger = \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1} & 0 \\ A_2^*D^{-1} & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B) \\ \mathcal{N}(B^*) \end{bmatrix}.$$

$(a) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d)$: Neposredni račun pokazuje da su tvrđenja (a), (c) i (d) ekvivalentna sa: $(A_1B_1)^\dagger = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}$, $(D^{-1}A_1B_1)^\dagger = B_1^{-1}A_1^*$ i $(A_1(B_1^*)^{-1})^\dagger = B_1^*A_1^*D^{-1}$, redom. Svako od njih je ekvivalentno sa:
$$A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_1, \quad [A_1A_1^*, D^{-1}] = 0, \quad [B_1B_1^*, A_1^*D^{-1}A_1] = 0. \qquad (4.8)$$
Dokazivanje $(a) \Rightarrow (f)$ i $(a) \Rightarrow (i) - (j)$ je veoma slično, te ćemo pokazati samo slučaj $(a) \Rightarrow (i)$. Korišćenjem gore opisane dekompozicije, lako se zaključuje da (i) postaje:
$$\begin{aligned} (A_1B_1)^\dagger &= (D^{1/2}A_1B_1)^\dagger D^{1/2}, \\ (D^{1/2}A_1B_1)^\dagger D^{-1/2}A_i &= B_1^{-1}A_1^*D^{-2}A_i, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$
Sada ćemo pokazati da (a) povlači prvo tvrđenje, proveravanjem sve četiri Penrouzove jednačine. Za prvu i drugo jednačinu to je jasno. Proverimo treću i četvrtu:
$$\begin{aligned} (III)\ D^{1/2}A_1B_1(A_1B_1)^\dagger D^{-1/2} &= D^{1/2}A_1B_1B_1^{-1}A_1^*D^{-1}D^{-1/2} = \\ &= D^{1/2}A_1A_1^*D^{-1}D^{-1/2}, \end{aligned}$$

što je, prema premisi (a), ermitski operator.

$$\begin{aligned}(IV)\ (A_1B_1)^\dagger D^{-1/2}D^{1/2}A_1B_1 &= B_1^{-1}A_1^*D^{-1}D^{-1/2}D^{1/2}A_1B_1 = \\ &= B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1B_1.\end{aligned}$$

Zbog kompletnosti, navešćemo ekvivalentne forme za (f) i (j) :

$$(f):\ (A_1B_1)^\dagger = B_1^{-1}(D^{-1/2}A_1)^\dagger D^{-1/2},$$
$$(D^{-1/2}A_1)^\dagger D^{-1/2}A_i = A_1^*D^{-1}A_i,\ \ i=1,2;$$

i

$$(j):\ (A_1B_1)^\dagger = B_1^*(A_1B_1B_1^*)^\dagger,$$
$$(D^{1/2}A_1B_1)^\dagger D^{-1/2}A_i = (B_1B_1^*)^{-1}A_1^*D^{-1}.$$

Dokaz $(a) \Rightarrow (k)-(m)$ ćemo ovde izostaviti, jer će u narednoj Teoremi 4.2.2 biti dokazan opštiji slučaj.
Preostao je jedino još deo:
$(b) \Rightarrow (a)$: Ako iskoristimo uobičajene matrične forme za A i B, u stvari treba dokazati da:

$$(A_1B_1)^\dagger = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1A_1^*D^{-1} \Rightarrow (A_1B_1)^\dagger = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}.$$

Uvedimo skraćeni zapis: $W = A_1^*D^{-1}A_1$.

Za izraz $(A_1B_1)^\dagger = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1A_1^*D^{-1}$ odgovarajuće Penrouzove jednačine su:

1. $A_1 = A_1W^2$;

2. $W^3A_1^* = WA_1^*$;

3. $[A_1WA_1^*, D^{-1}] = 0$;

4. $[B_1B_1^*, W^2] = 0$.

Odgovarajuće Penrouzove jednačine za $(A_1B_1)^\dagger = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}$ su:

1. $A_1 = A_1W$;

2. $WA_1^* = A_1^*$;

3. $[A_1 A_1^*, D^{-1}] = 0$;

4. $[B_1 B_1^*, W] = 0$.

Operator W je ermitski, štaviše - pozitivan ($W = T^*T$, gde je $T = D^{-1/2}A_1$). Zato je $I + W$ invertibilan, te važi sledeće:

$$\begin{aligned} A_1 = A_1 W^2 \ &\Leftrightarrow \ A_1(I - W^2) = 0 \Leftrightarrow A_1(I - W)(I + W) = 0 \\ &\Rightarrow \ A_1(I - W) = 0, \end{aligned}$$

odnosno sledi da:

$$A_1 = A_1 W.$$

Koristeći upravo dokazanu činjenicu, dokaz sledi neposredno.

$\triangle$

Naredna teorema predstavlja jedno moguće uopštenje nekih tvrđenja iz prethodne teoreme.

Teorema 4.2.2 *Neka su X, Y i Z Hilbertovi prostori, i neka su $A \in \mathcal{L}(Y, Z)$ i $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ ograničeni linearni operatori, tako da A, B i AB imaju zatvorene slike. Neka su m i n proizvoljni prirodni brojevi. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(a) $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$;

(l') $(AB)^\dagger = (B^*B)^n((AA^*)^m AB(B^*B)^n)^\dagger (AA^*)^m$ *i*
$((AA^*)^m AB(B^*B)^n)^\dagger = (B(B^*B)^n)^\dagger((AA^*)^m A^*)^\dagger$;

(m') $(AB)^\dagger = B^*(BB^*)^n((A^*A)^{m+1}(BB^*)^{n+1})^\dagger(A^*A)^m A^*$ *i*
$((A^*A)^{m+1}(BB^*)^{n+1})^\dagger = ((BB^*)^\dagger)^{n+1}((A^*A)^\dagger)^{m+1}$.

Dokaz: Pokažimo prvo egzistenciju operatora: $((A^*A)^{m+1}(BB^*)^{n+1})^\dagger$ i $((AA^*)^m AB(B^*B)^n)^\dagger$. Prema Lemi 3.1.3, ako su P i Q operatori sa zatvorenom slikom, tada je PQ operator sa zatvorenom slikom ako i samo ako $P^\dagger PQQ^\dagger$ ima zatvorenu sliku. Stavimo

$$P = (A^*A)^m, \ \ Q = (BB^*)^n.$$

Oni imaju zatvorenu sliku kao stepeni ermitskih operatora sa zatvorenom slikom A^*A i BB^*. (Ermitski operator $H \in \mathcal{L}(X)$ ima zatvorenu sliku ako i samo ako $0 \notin acc(\sigma(H))$. Na osnovu teoreme o preslikavanju spektra, ako ermitski operator H ima zatvorenu sliku, tada i H^n ima zatvorenu sliku, za proizvoljan prirodan broj n.) Izračunajmo $P^\dagger PQQ^\dagger$:

$$\begin{aligned} P^\dagger PQQ^\dagger &= ((A^*A)^m)^\dagger (A^*A)^m (BB^*)^n ((BB^*)^n)^\dagger = \\ &= ((A^*A)^\dagger)^m (A^*A)^m (BB^*)^n ((BB^*)^\dagger)^n = A^\dagger ABB^\dagger, \end{aligned}$$

on ima zatvorenu sliku prema Lemi 3.1.3. Dakle, dokazali smo da $(A^*A)^{m+1}(BB^*)^{n+1}$ ima zatvorenu sliku, što povlači egzistenciju Mur-Penrouzovog inverza tog operatora.
Stavimo sada

$$P = (AA^*)^m A, \;\; Q = B(B^*B)^n.$$

Računajući $P^\dagger PQQ^\dagger$:

$$\begin{aligned} P^\dagger PQQ^\dagger &= ((AA^*)^m A)^\dagger (AA^*)^m AB(B^*B)^n (B(B^*B)^n)^\dagger = \\ &= A^\dagger ((A^*)^\dagger A^\dagger)^m (AA^*)^m AB(B^*B)^n (B^\dagger (B^*)^\dagger)^n B^\dagger = \\ &= A^\dagger ABB^\dagger, \end{aligned}$$

zaključujemo koristeći Lemu 3.1.3 da je to operator sa zatvorenom slikom, pa $(AA^*)^m AB(B^*B)^n$ ima zatvorenu sliku, a samim tim i Mur-Penrouzov inverz.
Sada možemo krenuti s dokazom.

$$\begin{aligned} (l') \Rightarrow (a): \; (AB)^\dagger &= (B^*B)^n ((AA^*)^m AB(B^*B)^n)^\dagger (AA^*)^m = \\ &= (B^*B)^n (B(B^*B)^n)^\dagger ((AA^*)^m A)^\dagger (AA^*)^m = \\ &= (B^*B)^n ((B^*B)^\dagger)^n B^\dagger A^\dagger ((AA^*)^\dagger)^m (AA^*)^m = \\ &= B^\dagger A^\dagger, \end{aligned}$$

gde koristimo sledeću činjenicu: ako je H ermitski, onda $H^2 H^\dagger = H = H^\dagger H^2$.

$(a) \Rightarrow (l')$: Korišćenjem dekompozicije:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

implikacija postaje:

$$\begin{aligned}(A_1B_1)^\dagger &= B_1^{-1}A_1^*D^{-1}\\ &\Rightarrow \left\{\begin{array}{c}(A_1B_1)^\dagger = (B_1^*B_1)^n(D^mA_1B_1(B_1^*B_1)^n)^\dagger D^m,\\ (D^mA_1B_1(B_1^*B_1)^n)^\dagger = (B_1^*B_1)^{-n}B_1^{-1}A_1^*D^{-(m+1)}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Lako možemo pokazati $(D^mA_1B_1(B_1^*B_1)^n)^\dagger = (B_1^*B_1)^{-n}(A_1B_1)^\dagger D^{-m}$, neposrednom proverom sve četiri Penrouzove jednačine pod uslovom $(A_1B_1)^\dagger = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}$.
Drugi deo je jasan:

$$\begin{aligned}&(D^mA_1B_1(B_1^*B_1)^n)^\dagger = (B_1B_1^*)^{-n}(A_1B_1)^\dagger D^{-m} =\\ =\ &(B_1^*B_1)^{-l}B_1^{-1}A_1^*D^{-(m+1)},\end{aligned}$$

čime smo kompletirali ovaj deo dokaza.

$(m') \Rightarrow (a)$:

$$\begin{aligned}(AB)^\dagger &= B^*(BB^*)^n((A^*A)^{m+1}(BB^*)^{n+1})^\dagger(A^*A)^mA^* =\\ &= (B^*B)^nB^*((BB^*)^\dagger)^{n+1}((A^*A)^\dagger)^{m+1}A^*(AA^*)^m =\\ &= (B^*B)^nB^*(BB^*)^\dagger((BB^*)^\dagger)^n((A^*A)^\dagger)^m(A^*A)^\dagger A^*(AA^*)^m =\\ &= (B^*B)^{n-1}B^*BB^\dagger((BB^*)^\dagger)^n((A^*A)^\dagger)^mA^\dagger AA^*(AA^*)^{m-1} =\\ &= (B^*B)^{n-1}B^*((BB^*)^\dagger)^n((A^*A)^\dagger)^mA^*(AA^*)^{m-1} =\\ &= \dots\\ &= B^*(BB^*)^\dagger(A^*A)^\dagger A^* = B^\dagger A^\dagger.\end{aligned}$$

$(a) \Rightarrow (m')$: Ovde takođe koristimo sledeće dekompozicije:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

ali u računu ima određenih koraka koji zahtevaju objašnjenje.
Označimo $T = (A^*A)^{m+1}(BB^*)^{n+1}$. Lakše je računati na sledeći način:

$$T = A^*(AA^*)^mAB(B^*B)^nB^* = \begin{pmatrix} A_1^*D^mA_1(B_1B_1^*)^{n+1} & 0\\ A_2^*D^mA_1(B_1B_1^*)^{n+1} & 0\end{pmatrix};$$

sada $T^\dagger$ postaje,

$$\begin{pmatrix} (D^{m+1/2}A_1(B_1B_1^*)^{n+1})^\dagger D^{-1/2}A_1 & (D^{m+1/2}A_1(B_1B_1^*)^{n+1})^\dagger D^{-1/2}A_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Ostaje da se nađe $((A^*A)^\dagger)^{m+1}$. To se može izračunati na sledeći način:

$$(A^*A)^\dagger = A^\dagger(A^\dagger)^* = \begin{pmatrix} A_1^*D^{-1}A_1 & A_1^*D^{-1}A_2 \\ A_2^*D^{-1}A_1 & A_2^*D^{-1}A_2 \end{pmatrix}.$$

Lako je dokazati indukcijom da za svaki prirodan broj k:

$$((A^*A)^\dagger)^k = \begin{pmatrix} A_1^*D^{-(k+1)}A_1 & A_1^*D^{-(k+1)}A_2 \\ A_2^*D^{-(k+1)}A_1 & A_2^*D^{-(k+1)}A_2 \end{pmatrix}.$$

Jasno je, takođe:

$$(A^*A)^{k+1} = A^*(AA^*)^kA = \begin{pmatrix} A_1^*D^kA_1 & A_1^*D^kA_2 \\ A_2^*D^kA_1 & A_2^*D^kA_2 \end{pmatrix}.$$

Sada imamo sve potrebne izraze za računanje (m') preko $A_1,\ A_2$ i B_1. Dakle, treba dokazati da $(A_1B_1)^\dagger = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}$ povlači:

$$\begin{cases} (A_1B_1)^\dagger = B_1^*(B_1B_1^*)^n(D^{m+1/2}A_1B_1B_1^*(B_1B_1^*)^n)^\dagger D^{m+1/2}, \\ (D^{m+1/2}A_1(B_1B_1^*)^{n+1})^\dagger D^{-1/2}A_i = (B_1^*B_1)^{-(n+1)}A_1^*D^{-(m+2)}A_i, \end{cases}$$

gde $i = 1, 2$. Može se dokazati da je prvi deo tačan neposrednom proverom sve četiri Penrouzove jednačine za

$$(D^{m+1/2}A_1B_1B_1^*(B_1B_1^*)^n)^\dagger = (B_1B_1^*)^{-n}(B_1^*)^{-1}(A_1B_1)^\dagger D^{-(m+1/2)},$$

pod pretpostavkom $(A_1B_1)^\dagger = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}$.

Sada, drugi deo:

$$\begin{aligned} & (D^{m+1/2}A_1(B_1B_1^*)^{n+1})^\dagger D^{-1/2}A_i \\ = \ & (B_1B_1^*)^{-n}(B_1^*)^{-1}(A_1B_1)^\dagger D^{-(m+1/2)}D^{-1/2}A_i = \\ = \ & (B_1B_1^*)^{-n}(B_1^*)^{-1}B_1^{-1}A_1^*D^{-1}D^{-(m+1/2)}D^{-1/2}A_i = \\ = \ & (B_1B_1^*)^{-(n+1)}A_1^*D^{-(m+2)}A_i. \end{aligned}$$

△

Primedba: Ako stavimo $m = 0,\ n = 0$ u tvrđenje (l'), dobijamo (k) iz Teoreme 4.2.1, ako $m = 1,\ n = 1$ dobijamo (m). Takođe, stavimo li $m = 1,\ n = 1$ u (m'), dobija se (l). Pretpostavljamo da su moguća druga i dalja uopštenja.

Naredni rezultat je neposredna posledica Teoreme 4.2.1 i Teoreme 4.2.2.

Posledica 4.2.1 *Neka su X i Y Hilbertovi prostori, i neka je $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ ograničen linearan operator sa zatvorenom slikom. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(a) $(A^2)^\dagger = (A^\dagger)^2$, *odnosno, A je tzv. "bi-dagger";*

(b) $((A^\dagger)^* A)^\dagger = A^\dagger A^*$;

(c) $(A(A^\dagger)^*)^\dagger = A^* A^\dagger$;

(d) $(A^2 A^\dagger)^\dagger = A(A^\dagger)^2$ *i* $(A^\dagger A^2)^\dagger = (A^\dagger)^2 A$;

(e) $(A^2)^\dagger = A^\dagger(A^\dagger A^2 A^\dagger)^\dagger A^\dagger$ *i* $(A^\dagger A^2 A^\dagger)^\dagger = A(A^\dagger)^2 A$;

(f) $(A^2)^\dagger = (A^\dagger A^2)^\dagger A^\dagger$ *i* $(A^\dagger A^2)^\dagger = (A^\dagger)^2 A$;

(g) $(A^2)^\dagger = A^\dagger(A^2 A^\dagger)^\dagger$ *i* $(A^2 A^\dagger)^\dagger = A(A^\dagger)^2$;

(h) $(A^2)^\dagger = (A^* A^2)^\dagger A^*$ *i* $(A^* A^2)^\dagger = A^\dagger(A^* A)^\dagger$;

(i) $(A^2)^\dagger = A^*(A^2 A^*)^\dagger$ *i* $(A^2 A^*)^\dagger = (AA^*)^\dagger A^\dagger$;

(j) $(A^2)^\dagger = A^*(A^* A^2 A^*)^\dagger A^*$ *i* $(A^* A^2 A^*)^\dagger = (AA^*)^\dagger (A^* A)^\dagger$;

(k) $(A^2)^\dagger = A^* A(AA^* A^2 A^* A)^\dagger AA^*$ *i*
$(AA^* A^2 A^* A)^\dagger = (AA^* A)^\dagger (AA^* A)^\dagger$;

(l) $(A^2)^\dagger = A^* AA^*((A^* A)^2 (AA^*)^2)^\dagger A^* AA^*$ *i*
$((A^* A)^2 (AA^*)^2)^\dagger = ((AA^*)^2)^\dagger ((A^* A)^2)^\dagger$;

(m) $(A^2)^\dagger = (A^* A)^n ((AA^*)^m A^2 (A^* A)^n)^\dagger (AA^*)^m$ *i*
$((AA^*)^m A^2 (A^* A)^n)^\dagger = (A(A^* A)^n)^\dagger ((AA^*)^m A^*)^\dagger$;

(n) $(A^2)^\dagger = A^*(AA^*)^n ((A^* A)^{m+1} (AA^*)^{n+1})^\dagger (A^* A)^m A^*$ *i*
$((A^* A)^{m+1} (AA^*)^{n+1})^\dagger = ((AA^*)^\dagger)^{n+1} ((A^* A)^\dagger)^{m+1}$.

Zbog potpunosti, ponovićemo neke od rezultata, već dokazane u [31] kao $(c)-$delovi Teorema 2.2, 2.3 i 2.4. (vidi 3.2.2, 3.2.3 i 3.2.4).

Teorema 4.2.3 *Neka su X, Y i Z Hilbertovi prostori, i neka su $A \in \mathcal{L}(Y,Z)$ i $B \in \mathcal{L}(X,Y)$ ograničeni linearni operatori, tako da A, B i AB imaju zatvorene slike. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(a) $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$;

(b1) $AB(AB)^\dagger = ABB^\dagger A^\dagger$ *i* $(AB)^\dagger AB = B^\dagger A^\dagger AB$;

(b2) $A^*AB = BB^\dagger A^*AB$ *i* $ABB^* = ABB^*A^\dagger A$;

(b3) $\mathcal{R}(A^*AB) \subseteq \mathcal{R}(B)$ *i* $\mathcal{R}(BB^*A^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*)$;

(c1) $AB(AB)^\dagger A = ABB^\dagger$ *i* $A^\dagger AB = B(AB)^\dagger AB$;

(c2) $[A^*A, BB^\dagger] = 0$ *i* $[A^\dagger A, BB^*] = 0$;

(d1) $(ABB^\dagger)^\dagger = BB^\dagger A^\dagger$ *i* $(A^\dagger AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger A$;

(d2) $B^\dagger(ABB^\dagger)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ *i* $(A^\dagger AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

Naredna teorema uspostavlja vezu između osnovnog zakona obrnutog redosleda $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ i mešovitog zakona obrnutog redosleda $(AB)^\dagger = B^\dagger(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger A^\dagger$. Ovaj zakon obrnutog redosleda mešovitog tipa detaljno je razmatran u poglavlju 4.1.

Teorema 4.2.4 *Neka su X, Y i Z Hilbertovi prostori, i neka su $A \in \mathcal{L}(Y,Z)$ i $B \in \mathcal{L}(X,Y)$ ograničeni linearni operatori, tako da A, B i AB imaju zatvorene slike. Tada $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ važi ako i samo ako $(AB)^\dagger = B^\dagger(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger A^\dagger$, i AB zadovoljava neki od sledećih uslova:*

(a) $ABB^\dagger A^\dagger AB = AB$;

(b) $B^\dagger A^\dagger ABB^\dagger A^\dagger = B^\dagger A^\dagger$;

(c) $[A^\dagger A, BB^\dagger] = 0$;

(d) $A^\dagger ABB^\dagger$ *je idempotent;*

(e) $BB^\dagger A^\dagger A$ *je idempotent;*

(f) $B^\dagger(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger A^\dagger = B^\dagger A^\dagger$;

(g) $(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger = BB^\dagger A^\dagger A$.

Dokaz: Tvrđenja $(a) - (g)$ su međusobno ekvivalentna, kao što je dokazano u Teoremi 2.1. (3.2.1) iz [31]. Na osnovu ovog rezultata i tvrđenja (f) Teoreme 4.2.1, lako je izvesti traženi zaključak.

$\triangle$

4.3 Zakon obrnutog redosleda za Mur-Penrouzov inverz proizvoda tri operatora

U ovom poglavlju predstavljamo neke nove rezultate koji se tiču zakona obrnutog redosleda za Mur-Penrouzov inverz raznih proizvoda tri ograničena linearna operatora na Hilbertovim prostorima. Kao posledice dobijamo neke od rezultata do kojih je za kompleksne matrice došao Tian [88].

Glavni rezultati

U ovoj sekciji dokazujemo rezultate o zakonu obrnutog redosleda za Mur-Penrouzov inverz raznih proizvoda tri ograničena linearna operatora na Hilbertovim prostorima. Neka su X_1, X_2, X_3, X_4 proizvoljni Hilbertovi prostori, a $A_k \in \mathcal{L}(X_{k+1}, X_k)$, $k = 1, 2, 3$, operatori sa zatvorenim slikama. Takođe, neka $M = A_1A_2A_3$.

Teorema 4.3.1 *Neka su X_k, $k = \overline{1,4}$, proizvoljni Hilbertovi prostori, i neka su $A_k \in \mathcal{L}(X_{k+1}, X_k)$ ograničeni operatori. Ako operatori A_1, A_3, M, i $A_1^\dagger M A_3^\dagger$ imaju zatvorene slike, tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(a) $M^\dagger = A_3^\dagger(A_1^\dagger M A_3^\dagger)^\dagger A_1^\dagger$;

(b) $\mathcal{R}(A_1A_1^*M) = \mathcal{R}(M)$ *i* $\mathcal{R}(A_3^*A_3M^*) = \mathcal{R}(M^*)$.

Dokaz: Neka, prema Lemi 3.1.1, operator A_1 ima sledeću matričnu formu u odnosu na dekompoziciju prostora:

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A_1^*) \\ \mathcal{N}(A_1) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A_1) \\ \mathcal{N}(A_1^*) \end{bmatrix},$$

gde je A_{11} invertibilan. Tada

$$A_1^\dagger = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A_1) \\ \mathcal{N}(A_1^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A_1^*) \\ \mathcal{N}(A_1) \end{bmatrix}.$$

Prema Lemi 3.1.2 neka operatori $A_k, k = 2, 3$, imaju sledeće matrične forme:

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{k1} & 0 \\ A_{k2} & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A_k^*) \\ \mathcal{N}(A_k) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A_{k-1}^*) \\ \mathcal{N}(A_{k-1}) \end{bmatrix},$$

gde je $D_k = A_{k1}^* A_{k1} + A_{k2}^* A_{k2}$ invertibilan i pozitivan u $\mathcal{L}(\mathcal{R}(A_k^*))$. Tada

$$A_k^\dagger = \begin{bmatrix} D_k^{-1} A_{k1}^* & D_k^{-1} A_{k2}^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uvešćemo skraćeni zapis $M_1 = A_{11} A_{21} A_{31}$, te operator M ima sledeću matričnu formu:

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nađimo prvo ekvivalentni oblik za tvrđenje (a). Važi

$$W = A_1^\dagger M A_3^\dagger = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} M_1 D_3^{-1} A_{31}^* & A_{11}^{-1} M_1 D_3^{-1} A_{32}^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

te zato

$$W^\dagger = W^*(WW^*)^\dagger = \begin{pmatrix} A_{31} D_3^{-1/2} (A_{11}^{-1} M_1 D_3^{-1/2})^\dagger & 0 \\ A_{32} D_3^{-1/2} (A_{11}^{-1} M_1 D_3^{-1/2})^\dagger & 0 \end{pmatrix}.$$

Sledi da

$$A_3^\dagger W^\dagger A_1^\dagger = \begin{pmatrix} D_3^{-1/2} (A_{11}^{-1} M_1 D_3^{-1/2})^\dagger A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dakle,

$$M^\dagger = A_3^\dagger (A_1^\dagger M A_3^\dagger)^\dagger A_1^\dagger$$

je ekvivalentno sa:

$$M_1^\dagger = D_3^{-1/2} (A_{11}^{-1} M_1 D_3^{-1/2})^\dagger A_{11}^{-1},$$

ili, drugim rečima:

$$(A_{11}^{-1} M_1 D_3^{-1/2})^\dagger = D_3^{1/2} M_1^\dagger A_{11}.$$

Proverom Penrouzovih jednačina, zaključuje se da poslednja formula važi ako i samo ako

$$[A_{11} A_{11}^*, M_1 M_1^\dagger] = 0 \quad \text{i} \quad [D_3, M_1^\dagger M_1] = 0. \tag{4.9}$$

Znači, tvrđenje (a) je ekvivalentno sa (4.9).

Nađimo sada ekvivalentnu formu tvrđenju (b). Uslovi

$$\mathcal{R}(A_1A_1^*M) = \mathcal{R}(M) \quad \text{i} \quad \mathcal{R}(A_3^*A_3M^*) = \mathcal{R}(M^*)$$

ekvivalentni su sa

$$\mathcal{R}(A_{11}A_{11}^*M_1) = \mathcal{R}(M_1) \quad \text{i} \quad \mathcal{R}(D_3M_1^*) = \mathcal{R}(M_1^*).$$

Prema Lemi 3.1.4, poslednje tvrđenje ekvivalentno je sa (4.9).

Dakle, (b) je ekvivalentno sa (a).

△

Teorema 4.3.2 *Neka su X_k, $k = \overline{1,4}$, proizvoljni Hilbertovi prostori, i neka su $A_k \in \mathcal{L}(X_{k+1}, X_k)$ ograničeni operatori. Ako operatori A_1, A_3, M i $A_1^*MA_3^*$ imaju zatvorene slike, tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(a) $M^\dagger = A_3^*(A_1^*MA_3^*)^\dagger A_1^*$;

(b) $\mathcal{R}(A_1A_1^*M) = \mathcal{R}(M)$ *i* $\mathcal{R}(A_3^*A_3M^*) = \mathcal{R}(M^*)$.

Dokaz: Tvrđenje (b) ekvivalentno je sa (4.9) (vidi prethodnu teoremu).

Dokazaćemo da je i (a) ekvivalentno sa (4.9). Koristićemo oznake iz prethodne teoreme. Neka $V = A_1^*MA_3^*$. Lako se nalazi

$$V^\dagger = V^*(VV^*)^\dagger = \begin{bmatrix} A_{31}D_3^{-1/2}(A_{11}^*M_1D_3^{1/2})^\dagger & 0 \\ A_{32}D_3^{-1/2}(A_{11}^*M_1D_3^{1/2})^\dagger & 0 \end{bmatrix}.$$

Sada,

$$M^\dagger = A_3^*(A_1^*MA_3^*)^\dagger A_1^*$$

ako i samo ako

$$M_1^\dagger = D_3^{1/2}(A_{11}^*M_1D_3^{1/2})^\dagger A_{11}^*,$$

ili, ekvivalentno:

$$(A_{11}^*MD_3^{1/2})^\dagger = D_3^{-1/2}M_1^\dagger(A_{11}^*)^{-1}.$$

Proverom Penrouzovih jednačina dobijamo da je poslednje tvrđenje ekvivalentno sa (4.9).

Dakle, (a) je ekvivalentno sa (b).

△

Teorema 4.3.3 *Neka su X_k, $k = \overline{1,4}$, proizvoljni Hilbertovi prostori, i neka su $A_k \in \mathcal{L}(X_{k+1}, X_k)$ ograničeni operatori. Ako operatori A_1, A_3, M i $(A_1A_1^*)^\dagger M(A_3^*A_3)^\dagger$ imaju zatvorene slike, tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(a) $M^\dagger = (A_3^*A_3)^\dagger[(A_1A_1^*)^\dagger M(A_3^*A_3)^\dagger]^\dagger(A_1A_1^*)^\dagger$;

(b) $\mathcal{R}((A_1A_1^*)^2M) = \mathcal{R}(M)$ *i* $\mathcal{R}((A_3^*A_3)^2M^*) = \mathcal{R}(M^*)$.

Dokaz: Koristeći oznake i metod opisan u Teoremi 4.3.1, zaključujemo da je tvrđenje (a) ekvivalentno sledećem:

$$M_1^\dagger = D_n^{-1}((A_{11}A_{11}^*)^{-1}M_1D_3^{-1})^\dagger(A_{11}A_{11}^*)^{-1},$$

odnosno, ekvivalentno $((A_{11}A_{11}^*)^{-1}M_1D_3^{-1})^\dagger = D_3M_1^\dagger A_{11}A_{11}^*$. Koristeći Penrouzove jednačine, zaključujemo da poslednja jednakost važi ako i samo ako

$$[M_1M_1^\dagger, (A_{11}A_{11}^*)^2] = 0 \quad \text{i} \quad [D_3^2, M_1^\dagger M_1] = 0.$$

Koristeći Lemu 3.1.4 sledi da poslednji uslovi važe ako i samo ako

$$\mathcal{R}((A_{11}A_{11}^*)^2M_1) = \mathcal{R}(M_1) \quad \text{i} \quad \mathcal{R}(D_3^2M_1^*) = \mathcal{R}(M_1^*).$$

Sada se odmah vidi da je (a) ekvivalentno sa (b).

△

Primedba: Jednakost

$$M^\dagger = (A_3^*A_3)^\dagger[(A_1A_1^*)^\dagger M(A_3^*A_3)^\dagger]^\dagger(A_1A_1^*)^\dagger$$

se može zapisati u ekvivalentnom obliku:

$$M^\dagger = (A_3^*A_3)^\dagger[(A_3^\dagger A_2^*A_1^\dagger)^\dagger]^*(A_1A_1^*)^\dagger.$$

Ove dve forme su ekvivalentne, jer:

$$\begin{aligned}(A_1A_1^*)^\dagger M(A_3^*A_3)^\dagger &= (A_1A_1^*)^\dagger A_1A_2A_3(A_3^*A_3)^\dagger \\ &= (A_1^*)^\dagger A_2(A_3^*)^\dagger = (A_3^\dagger A_2^*A_1^\dagger)^*.\end{aligned}$$

Prethodnu teoremu moguće je uopštiti na sledeći način.

Tvrđenje 4.3.1 *Pod pretpostavkama Teoreme 4.3.3, sledeća tvrđenja su ekvivalentna (k i l su prirodni brojevi):*

(a) $M^\dagger = ((A_3^*A_3)^\dagger)^l[((A_1A_1^*)^\dagger)^kM((A_3^*A_3)^\dagger)^l]^\dagger((A_1A_1^*)^\dagger)^k$;

(b) $\mathcal{R}((A_1A_1^*)^{2k}M) = \mathcal{R}(M)$ i $\mathcal{R}((A_3^*A_3)^{2l}M^*) = \mathcal{R}(M^*)$.

Dokaz: Koristeći metod opisan u Teoremi 4.3.1, zaključujemo da je tvrđenje ove teoreme ekvivalentno sa:

$$\begin{aligned} M_1^\dagger &= D_3^{-l}((A_{11}A_{11}^*)^{-k}M_1D_3^{-l})^\dagger(A_{11}A_{11}^*)^{-k} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{R}((A_{11}A_{11}^*)^{2k}M_1) = \mathcal{R}(M_1) \wedge \mathcal{R}(D_3^{2l}M_1^*) = \mathcal{R}(M_1^*). \end{aligned}$$

Nije teško videti da su oba člana prethodne ekvivalencije zapravo ekvivalentni sa:

$$[(A_{11}A_{11}^*)^{2k}, M_1M_1^\dagger] = 0 \wedge [D_3^{2l}, M_1^\dagger M_1] = 0,$$

čime smo upotpunili dokaz.

$\triangle$

Teorema 4.3.4 *Neka su X_k, $k = \overline{1,4}$, proizvoljni Hilbertovi prostori, i neka su $A_k \in \mathcal{L}(X_{k+1}, X_k)$ ograničeni operatori. Ako operatori A_1, A_3, M i $A_1A_1^*MA_3^*A_3$ imaju zatvorene slike, tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(a) $M^\dagger = A_3^*A_3(A_1A_1^*MA_3^*A_3)^\dagger A_1A_1^*$;

(b) $\mathcal{R}((A_1A_1^*)^2M) = \mathcal{R}(M)$ *i* $\mathcal{R}((A_3^*A_3)^2M^*) = \mathcal{R}(M^*)$.

Dokaz: Koristeći ranije uvedenu notaciju, zaključujemo da je tvrđenje (a) ekvivalentno sledećem:

$$M_1^\dagger = D_3(A_{11}A_{11}^*M_1D_3)^\dagger A_{11}A_{11}^*,$$

što je dalje ekvivalentno sa $(A_{11}A_{11}^*M_1D_3)^\dagger = D_3^{-1}M_1^\dagger(A_{11}A_{11}^*)^{-1}$. Koristeći Penrouzove jednačine, zaključujemo da je poslednje tvrđenje ekvivalentno sa

$$[(A_{11}A_{11}^*)^2, M_1M_1^\dagger] = 0 \quad \text{i} \quad [D_3^2, M_1^\dagger M_1] = 0.$$

Na osnovu Leme 3.1.4 zaključujemo da je poslednje tvrđenje ekvivalentno sa

$$\mathcal{R}((A_{11}A_{11}^*)^2M) = \mathcal{R}(M) \quad \text{i} \quad \mathcal{R}(D_3^2M^*) = \mathcal{R}(M^*).$$

Zaključujemo da je (b) ekvivalentno sa (a).

$\triangle$

Prethodnu teoremu moguće je uopštiti na sledeći način.

Tvrđenje 4.3.2 *Pod pretpostavkama Teoreme 4.3.4, sledeća tvrđenja su ekvivalentna (k i l su prirodni brojevi):*
(a) $M^\dagger = (A_3^*A_3)^l[(A_1A_1^*)^kM(A_3^*A_3)^l]^\dagger(A_1A_1^*)^k$,
(b) $\mathcal{R}((A_1A_1^*)^{2k}M) = \mathcal{R}(M)$ *i* $\mathcal{R}((A_3^*A_3)^{2l}M^*) = \mathcal{R}(M^*)$.

Dokaz: Koristeći metod opisan u Teoremi 4.3.1, zaključujemo da je tvrđenje ove teoreme ekvivalentno sledećem:

$$\begin{aligned} M_1^\dagger &= D_3^l((A_{11}A_{11}^*)^kMD_3^l)^\dagger(A_{11}A_{11}^*)^k \\ &\Leftrightarrow \mathcal{R}((A_{11}A_{11}^*)^{2k}M_1) = \mathcal{R}(M_1) \wedge \mathcal{R}(D_3^{2l}M_1^*) = \mathcal{R}(M_1^*). \end{aligned}$$

Lako se vidi da su oba člana prethodne ekvivalencije u stvari ekvivalentni sa:

$$[(A_{11}A_{11}^*)^{2k}, M_1M_1^\dagger] = 0 \wedge [D_3^{2l}, M_1^\dagger M_1] = 0,$$

čime smo završili dokaz.

△

Teorema 4.3.5 *Neka su X_k, $k = \overline{1,4}$, proizvoljni Hilbertovi prostori, i neka su $A_k \in \mathcal{L}(X_{k+1}, X_k)$ ograničeni operatori. Ako operatori A_1, A_3, M, $(A_1A_1^*A_1)^\dagger M(A_3A_3^*A_3)^\dagger$ imaju zatvorene slike, tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*
(a) $M^\dagger = (A_3A_3^*A_3)^\dagger((A_1A_1^*A_1)^\dagger M(A_3A_3^*A_3)^\dagger)^\dagger(A_1A_1^*A_1)^\dagger$;
(b) $\mathcal{R}((A_1A_1^*)^3M) = \mathcal{R}(M)$ *i* $\mathcal{R}((A_3^*A_3)^3M^*) = \mathcal{R}(M^*)$.

Dokaz: Koristimo metod i oznake iz Teoreme 4.3.1. Označimo:

$$\begin{aligned} T &= (A_1A_1^*A_1)^\dagger M(A_3A_3^*A_3)^\dagger \\ &= \begin{pmatrix} (A_{11}A_{11}^*A_{11})^{-1}M_1D_3^{-2}A_{31}^* & (A_{11}A_{11}^*A_{11})^{-1}M_1D_3^{-2}A_{32}^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

i zato:

$$T^\dagger = T^*(TT^*)^\dagger = \begin{pmatrix} A_{31}D_3^{-1/2}((A_{11}A_{11}^*A_{11})^{-1}M_1D_3^{-3/2})^\dagger & 0 \\ A_{32}D_3^{-1/2}((A_{11}A_{11}^*A_{11})^{-1}M_1D_3^{-3/2})^\dagger & 0 \end{pmatrix}.$$

Dalje, računamo na sledeći način:

$$S = A_3A_3^*A_3 = \begin{pmatrix} A_{31}D_3 & 0 \\ A_{32}D_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S^\dagger = (S^*S)^\dagger S^* = \begin{pmatrix} D_3^{-2}A_{31}^* & D_3^{-2}A_{32}^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tvrđenje (a) ekvivalentno je sledećem

$$M^\dagger = (A_3A_3^*A_3)^\dagger((A_1A_1^*A_1)^\dagger M(A_3A_3^*A_3)^\dagger)^\dagger(A_1A_1^*A_1)^\dagger,$$

što je isto kao i:

$$M_1^\dagger = D_3^{-3/2}((A_{11}A_{11}^*A_{11})^{-1}M_1D_3^{-3/2})^\dagger(A_{11}A_{11}^*A_{11})^{-1},$$

ili, drugim rečima:

$$((A_{11}A_{11}^*A_{11})^{-1}M_1D_3^{-3/2})^\dagger = D_3^{3/2}M_1^\dagger A_{11}A_{11}^*A_{11}.$$

Prema Penrouzovim jednačinama, sledi da poslednje tvrđenje važi ako i samo ako:

$$[(A_{11}A_{11}^*A_{11})^2, M_1M_1^\dagger] = 0 \quad \text{i} \quad [D_3^3, M_1^\dagger M_1] = 0.$$

Prema Lemi 3.1.4, to je ekvivalentno sa

$$\mathcal{R}((A_1A_1^*A_1)^2M) = \mathcal{R}(M) \quad \text{i} \quad \mathcal{R}(D_3^3M_1^*) = \mathcal{R}(M_1^*),$$

što je ekvivalentno sa (b).

△

Primedba: Jednakost

$$M^\dagger = (A_3A_3^*A_3)^\dagger((A_1A_1^*A_1)^\dagger M(A_3A_3^*A_3)^\dagger)^\dagger(A_1A_1^*A_1)^\dagger$$

često se piše u ekvivalentnom obliku:

$$M^\dagger = (A_3A_3^*A_3)^\dagger((A_1^*A_1)^\dagger A_2(A_3A_3^*)^\dagger)^\dagger(A_1A_1^*A_1)^\dagger.$$

Ekvivalentnost proističe iz:

$$\begin{aligned} (A_1A_1^*A_1)^\dagger A_1 &= A_1^\dagger(A_1^*)^\dagger A_1^\dagger A_1 = A_1^\dagger(A_1^*)^\dagger = (A_1^*A_1)^\dagger, \\ A_3(A_3A_3^*A_3)^\dagger &= A_3A_3^\dagger(A_3^*)^\dagger A_3^\dagger = (A_3A_3^*)^\dagger. \end{aligned}$$

Prethodnu teoremu moguće je uopštiti na sledeći način.

Tvrđenje 4.3.3 *Pod pretpostavkama Teoreme 4.3.5, sledeća tvrđenja su ekvivalentna (k je prirodan broj):*
(a) $M^\dagger = (A_3A_3^*A_3)^\dagger[((A_1A_1^*A_1)^\dagger)^k M(A_3A_3^*A_3)^\dagger]^\dagger((A_1A_1^*A_1)^\dagger)^k$,
(b) $\mathcal{R}((A_1A_1^*)^{3k}M) = \mathcal{R}(M)$ *i* $\mathcal{R}((A_3^*A_3)^3M^*) = \mathcal{R}(M^*)$.

Dokaz: Koristićemo metod opisan u Teoremi 4.3.1, sa odgovarajućim neophodnih izmenama.

Prvo računamo desnu stranu. Polazeći od sledećeg:

$$S = A_3A_3^*A_3 = \begin{pmatrix} A_{31}D_3 & 0 \\ A_{32}D_3 & 0 \end{pmatrix},$$

lako je naći:

$$S^\dagger = (S^*S)^\dagger S^* = \begin{pmatrix} D_3^{-2}A_{31}^* & D_3^{-2}A_{32}^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Označimo sada $W = ((A_1A_1^*A_1)^\dagger)^k M(A_3A_3^*A_3)^\dagger$; lako se računa:

$$W = \begin{pmatrix} (A_{11}A_{11}^*A_{11})^{-k}M_1D_3^{-2}A_{31}^* & (A_{11}A_{11}^*A_{11})^{-k}M_1D_3^{-2}A_{32}^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a zatim i $W^\dagger = W^*(WW^*)^\dagger$:

$$W^\dagger = \begin{pmatrix} A_{31}D_3^{-1/2}((A_{11}A_{11}^*A_{11})^{-k}M_1D_3^{-3/2})^\dagger & 0 \\ A_{32}D_3^{-1/2}((A_{11}A_{11}^*A_{11})^{-k}M_1D_3^{-3/2})^\dagger & 0 \end{pmatrix}.$$

Dakle,

$$M^\dagger = A_3A_3^*A_3W^\dagger(A_1A_1^*A_1)^k$$

je ekvivalentno sa:

$$M_1^\dagger = D_3^{-\frac{3}{2}}((A_{11}A_{11}^*A_{11})^{-k}M_1D_3^{-\frac{3}{2}})^\dagger(A_{11}A_{11}^*A_{11})^{-k},$$

odnosno:

$$((A_{11}A_{11}^*A_{11})^{-k}M_1D_3^{-\frac{3}{2}})^\dagger = D_3^{3/2}M_1^\dagger(A_{11}A_{11}^*A_{11})^k.$$

Ako proverimo Penrouzove jednačine (3) i (4) za poslednju jednakost, sledi da su one zadovoljene ako i samo ako važi sledeće :

$$[(A_{11}A_{11}^*)^{3k}, M_1M_1^\dagger] = 0 \wedge [D_3^3, M_1^\dagger M_1] = 0.$$

S druge strane, uslovi

$$\mathcal{R}((A_1A_1^*)^{3k}M) = \mathcal{R}(M) \wedge \mathcal{R}((A_3^*A_3)^3M^*) = \mathcal{R}(M^*)$$

su, prema Lemi 4, ekvivalentni istom uslovu, čime smo završili dokaz.

$\triangle$

Prethodno tvrđenje se može dokazati i u nešto izmenjenom obliku:

Tvrđenje 4.3.4 *Pod pretpostavkama Teoreme 4.3.5, sledeća tvrđenja su ekvivalentna (l je prirodan broj):*
(a) $M^\dagger = ((A_3A_3^*A_3)^\dagger)^l[(A_1A_1^*A_1)^\dagger M((A_3A_3^*A_3)^\dagger)^l]^\dagger(A_1A_1^*A_1)^\dagger$,
(b) $\mathcal{R}((A_1A_1^*)^3M) = \mathcal{R}(M)$ *i* $\mathcal{R}((A_3^*A_3)^{3l}M^*) = \mathcal{R}(M^*)$.

Dokaz: Dokaz ovog tvrđenja je veoma sličan dokazu prethodnog, s tim što se koriste sledeće dekompozicije prostora i njima odgovarajuće matrične forme operatora:

$$A_3 = \begin{bmatrix} A_{31} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A_3^*) \\ \mathcal{N}(A_3) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A_3) \\ \mathcal{N}(A_3^*) \end{bmatrix},$$

gde je A_{31} invertibilan, i

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{k1} & A_{k2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A_{k+1}) \\ \mathcal{N}(A_{k+1}^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A_k) \\ \mathcal{N}(A_k^*) \end{bmatrix}, k = \overline{1,2},$$

gde je $D_k = A_{k1}A_{k1}^* + A_{k2}A_{k2}^*$ invertibilan i pozitivan u $\mathcal{L}(\mathcal{R}(A_{k+1}^*))$. Sada na potpuno analogan način kao u prethodnom delu dokaza imamo da je:

$$M^\dagger = ((A_3A_3^*A_3)^\dagger)^l((A_1A_1^*A_1)^\dagger M((A_3A_3^*A_3)^\dagger)^l)^\dagger(A_1A_1^*A_1)^\dagger,$$

što je ekvivalentno sa:

$$M_1^\dagger = (A_{31}A_{31}^*A_{31})^{-l}(D_1^{\frac{3}{2}}M_1(A_{31}A_{31}^*A_{31})^{-l})^\dagger D_1^{\frac{3}{2}}.$$

Nadalje dokaz ide analogno kao u prethodnom tvrđenju.

$\triangle$

Teorema 4.3.6 *Neka su* X_k, $k = \overline{1,4}$, *proizvoljni Hilbertovi prostori, i neka su* $A_k \in \mathcal{L}(X_{k+1}, X_k)$ *ograničeni operatori. Ako su* A_1, A_3, M *i* $(A_1A_1^*A_1)^*M(A_3A_3^*A_3)^*$ *operatori sa zatvorenim slikama, tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*
(a) $M^\dagger = (A_3A_3^*A_3)^*((A_1A_1^*A_1)^*M(A_3A_3^*A_3)^*)^\dagger(A_1A_1^*A_1)^*$;
(b) $\mathcal{R}((A_1^*A_1A_1^*)^2M) = \mathcal{R}(M)$ *i* $\mathcal{R}((A_3^*A_3)^3M^*) = \mathcal{R}(M^*)$.

Dokaz: Neposredan račun, analogan onom iz Teoreme 4.3.1, daje:

$$M_1^\dagger = D_3^{3/2}(A_{11}^*A_{11}A_{11}^*M_1D_3^{3/2})^\dagger(A_{11}^*A_{11}A_{11}^*),$$

ili ekvivalentno,

$$(A_{11}^*A_{11}A_{11}^*M_1D_3^{3/2})^\dagger = D_3^{-3/2}M_1^\dagger(A_{11}^*A_{11}A_{11}^*)^{-1},$$

što, prema Lemi 3.1.4, važi ako i samo ako:

$$[(A_{11}^*A_{11}A_{11}^*)^2, M_1M_1^\dagger] = 0 \quad \text{i} \quad [D_3^3, M_1^\dagger M_1] = 0.$$

Ovim smo pokazali da je (a) ekvivalentno sa (b).

△

Prethodnu teoremu moguće je uopštiti na sledeći način.

Tvrđenje 4.3.5 *Pod pretpostavkama Teoreme 4.3.6, sledeća tvrđenja su ekvivalentna (k je prirodan broj):*
(a) $M^\dagger = (A_3A_3^*A_3)^*[((A_1A_1^*A_1)^*)^kM(A_3A_3^*A_3)^*]^\dagger((A_1A_1^*A_1)^*)^k$,
(b) $\mathcal{R}((A_1A_1^*)^{3k}M) = \mathcal{R}(M)$ *i* $\mathcal{R}((A_3^*A_3)^3M^*) = \mathcal{R}(M^*)$.

Dokaz: Biće korišćen metod opisan u Teoremi 4.3.1, sa neophodnim izmenama.

Izračunajmo prvo desnu stranu. Počećemo od sledećeg:

$$S = A_3A_3^*A_3 = \begin{pmatrix} A_{31}D_3 & 0 \\ A_{32}D_3 & 0 \end{pmatrix},$$

što znači da:

$$S^* = \begin{pmatrix} D_3A_{31}^* & D_3A_{32}^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kao i:

$$S^\dagger = (S^*S)^\dagger S^* = \begin{pmatrix} D_3^{-2}A_{31}^* & D_3^{-2}A_{32}^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Označimo sada:

$$\begin{aligned} W &= ((A_1A_1^*A_1)^*)^k M(A_3A_3^*A_3)^* \\ &= \begin{pmatrix} ((A_{11}A_{11}^*A_{11})^*)^k M_1 D_3 A_{31}^* & ((A_{11}A_{11}^*A_{11})^*)^k M_1 D_3 A_{32}^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

i nalazimo $W^\dagger$, koristeći $W^\dagger = W^*(WW^*)^\dagger$:

$$W^\dagger = \begin{pmatrix} A_{31}D_3^{-1/2}(((A_{11}A_{11}^*A_{11})^*)^k M_1 D_3^{3/2})^\dagger & 0 \\ A_{32}D_3^{-1/2}(((A_{11}A_{11}^*A_{11})^*)^k M_1 D_3^{3/2})^\dagger & 0 \end{pmatrix}.$$

Dakle,

$$M^\dagger = (A_3A_3^*A_3)^* W^\dagger ((A_1A_1^*A_1)^*)^k$$

je ekvivalentno sa:

$$M_1^\dagger = D_3^{3/2}(((A_{11}A_{11}^*A_{11})^*)^k M_1 D_3^{3/2})^\dagger ((A_{11}A_{11}^*A_{11})^*)^k,$$

odnosno,

$$(((A_{11}A_{11}^*A_{11})^*)^k M_1 D_3^{3/2})^\dagger = D_3^{-3/2} M_1^\dagger ((A_{11}A_{11}^*A_{11})^*)^{-k}.$$

Ako proverimo zadnju formulu preko Penrouzovih jednačina (3) i (4), one su zadovoljene ako i samo kao važi sledeće:

$$[(A_{11}A_{11}^*)^{3k}, M_1M_1^\dagger] = 0 \wedge [D_3^3, M_1^\dagger M_1] = 0.$$

S druge strane, uslovi

$$\mathcal{R}((A_1A_1^*)^{3k}M) = \mathcal{R}(M) \wedge \mathcal{R}((A_3^*A_3)^3 M^*) = \mathcal{R}(M^*)$$

su ekvivalentni, prema Lemi 3.1.4, istom izrazu, čime smo završili dokaz.

$\triangle$

Prethodno tvdđenje važi i za nešto izmenjenom obliku:

Tvrđenje 4.3.6 *Pod pretpostavkama Teoreme 4.3.6, sledeća tvrđenja su ekvivalentna (l je prirodan broj):*
(a) $M^\dagger = ((A_3A_3^*A_3)^*)^l[(A_1A_1^*A_1)^*M((A_3A_3^*A_3)^*)^l]^\dagger(A_1A_1^*A_1)^*$,
(b) $\mathcal{R}((A_1A_1^*)^3M) = \mathcal{R}(M)$ *i* $\mathcal{R}((A_3^*A_3)^{3l}M^*) = \mathcal{R}(M^*)$.

Dokaz: Koristiće se pristup kao u prethodnom tvrđenju, ali sa drugačijim dekompozicijama prostora:

$$A_3 = \begin{bmatrix} A_{31} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A_3^*) \\ \mathcal{N}(A_3) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A_3) \\ \mathcal{N}(A_3^*) \end{bmatrix},$$

gde je A_{31} invertibilan, i

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{k1} & A_{k2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A_{k+1}) \\ \mathcal{N}(A_{k+1}^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A_k) \\ \mathcal{N}(A_k^*) \end{bmatrix}, \ k = \overline{1,2},$$

gde je $D_k = A_{k1}A_{k1}^* + A_{k2}A_{k2}^*$ invertibilan i pozitivan u $\mathcal{L}(\mathcal{R}(A_{k+1}^*))$, tada potpuno analogno prethodnom delu dokaza dobija se:

$$M^\dagger = ((A_3A_3^*A_3)^*)^l W^\dagger (A_1A_1^*A_1)^*,$$

ťo je ekvivalentno sa:

$$M_1^\dagger = ((A_{31}A_{31}^*A_{31})^*)^l (D_1^{\frac{3}{2}} M_1(((A_{31}A_{31}^*A_{31})^*)^l))^\dagger D_1^{\frac{3}{2}}.$$

Ostatak dokaza je potpuno analogan prethodnom.

△

Teorema 4.3.7 *Neka su X_k, $k = \overline{1,4}$, proizvoljni Hilbertovi prostori, i neka su $A_k \in \mathcal{L}(X_{k+1}, X_k)$ ograničeni operatori. Ako operatori A_1, A_3, M i $((A_1A_1^*)^2)^\dagger M((A_3^*A_3)^2)^\dagger$ imaju zatvorene slike, tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*
(a) $M^\dagger = ((A_3^*A_3)^\dagger)^2[((A_1A_1^*)^2)^\dagger M(A_3^*A_3)^2)^\dagger]^\dagger((A_1A_1^*)^\dagger)^2$;
(b) $\mathcal{R}((A_1A_1^*)^4M) = \mathcal{R}(M)$ *i* $\mathcal{R}((D_3)^4M^*) = \mathcal{R}(M^*)$.

Dokaz: Neposredan račun, analogan onom iz Teoreme 4.3.1, pokazuje da je (a) ekvivalentno sa:

$$M_1^\dagger = D_3^{-2}((A_{11}A_{11}^*)^2 M_1 D_3^{-2})^\dagger (A_{11}A_{11}^*)^{-2},$$

odnosno

$$((A_{11}A_{11}^*)^{-2}M_1D_3^{-2})^\dagger = D_3^2M_1^\dagger(A_{11}A_{11}^*)^2,$$

što, prema Penrouzovim jednačinama, važi ako i samo ako:

$$[(A_{11}A_{11}^*)^4, M_1M_1^\dagger] = 0 \quad \text{i} \quad [D_3^4, M_1^\dagger M_1] = 0.$$

Prema Lemi 3.1.4, poslednje tvrđenje ekvivalentno je sa (b).

△

Primedba: Na potpuno isti način kao u prethodnim tvrđenjima, jednakost

$$M^\dagger = ((A_3^*A_3)^\dagger)^2[((A_1A_1^*)^2)^\dagger M(A_3^*A_3)^2)^\dagger]^\dagger((A_1A_1^*)^\dagger)^2$$

se često zamenjuje svojim ekvivalentnim oblikom:

$$M^\dagger = ((A_3^*A_3)^\dagger)^2((A_1^*A_1A_1^*)^\dagger A_2(A_3^*A_3A_3^*)^\dagger)^\dagger((A_1A_1^*)^\dagger)^2.$$

Dokaz je analogan kao u prethodnim slučajevima.

Prethodnu teoremu možemo uopštiti na sledeći način.

Tvrđenje 4.3.7 *Pod pretpostavkama Teoreme 4.3.7, sledeća tvrđenja su ekvivalentna (k i l su prirodni brojevi):*
(a) $M^\dagger = ((A_3^*A_3)^\dagger)^{2l}[((A_1A_1^*)^{2k})^\dagger M(A_3^*A_3)^{2l})^\dagger]^\dagger((A_1A_1^*)^\dagger)^{2k}$,
(b) $\mathcal{R}((A_1A_1^*)^{4k}M) = \mathcal{R}(M)$ *i* $\mathcal{R}((A_3^*A_3)^{4l}M^*) = \mathcal{R}(M^*)$.

Dokaz: Neposredan račun, analogan onom iz Teoreme 4.3.1, daje:

$$M_1^\dagger = D_3^{-2l}((A_{11}^*A_{11}A_{11}^*)^{-2k}A_{11}^{-1}M_1D_3^{-2l})^\dagger(A_{11}A_{11}^*)^{-2k},$$

odnosno

$$((A_{11}A_{11}^*)^{-2k}M_1D_3^{-2l})^\dagger = D_3^{2l}M_1^\dagger(A_{11}A_{11}^*)^{2k},$$

što prema Lemi 3.1.4, važi ako i samo ako:

$$[(A_{11}A_{11}^*)^{4k}, M_1M_1^\dagger] = 0 \wedge [D_3^{4l}, M_1^\dagger M_1] = 0.$$

△

Teorema 4.3.8 *Neka su X_k, $k = \overline{1,4}$, proizvoljni Hilbertovi prostori, i neka su $A_k \in \mathcal{L}(X_{k+1}, X_k)$ ograničeni operatori. Ako su A_1, A_3, M i $(A_1A_1^*)^2M(A_3^*A_3)^2$ operatori sa zatvorenim slikama, tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(a) $M^\dagger = (A_3^*A_3)^2((A_1A_1^*)^2M(A_3^*A_3)^2)^\dagger(A_1A_1^*)^2$;

(b) $\mathcal{R}((A_1A_1^*)^4M) = \mathcal{R}(M)$ i $\mathcal{R}((A_3^*A_3)^4M^*) = \mathcal{R}(M^*)$.

Dokaz: Neposredan račun, analogan onom iz Teoreme 4.3.1, pokazuje da je (a) ekvivalentno sledećem:

$$M_1^\dagger = D_3^2((A_{11}A_{11}^*)^2M_1D_3^2)^\dagger(A_{11}A_{11}^*)^2,$$

ili, ekvivalentno,

$$((A_{11}A_{11}^*)^2M_1D_3^2)^\dagger = D_3^{-2}M_1^\dagger(A_{11}A_{11}^*)^{-2},$$

što je, prema Penrouzovim jednačinama, ekvivalentno sa

$$[(A_{11}A_{11}^*)^4, M_1M_1^\dagger] = 0 \quad \text{i} \quad [D_3^4, M_1^\dagger M_1] = 0.$$

Prema Lemi 3.1.4, poslednje tvrđenje ekvivalentno je sa (b).

$\triangle$

Prethodna teorema može se uopštiti na sledeći način.

Tvrđenje 4.3.8 *Pod uslovima Teoreme 4.3.8, sledeća tvrđenja su ekvivalentna (k i l su prirodni brojevi):*

(a) $M^\dagger = ((A_3^*A_3)^*)^{2l}(((A_1A_1^*)^*)^{2k}M((A_3^*A_3)^*)^{2l})^\dagger((A_1A_1^*)^*)^{2k}$,

(b) $\mathcal{R}((A_1A_1^*)^{4k}M) = \mathcal{R}(M)$ *i* $\mathcal{R}((A_3^*A_3)^{4l}M^*) = \mathcal{R}(M^*)$.

Dokaz: Neposredan račun, analogan onom iz Teoreme 4.3.1, daje:

$$M_1^\dagger = D_3^{2l}((A_{11}A_{11}^*)^{2k}M_1D_3^{2l})^\dagger(A_{11}A_{11}^*)^{2k},$$

ili, ekvivalentno,

$$((A_{11}A_{11}^*)^{2k}M_1D_3^{2l})^\dagger = D_3^{-2l}M_1^\dagger(A_{11}A_{11}^*)^{-2k},$$

što, prema Lemi 3.1.4, važi ako i samo ako:

$$[(A_{11}A_{11}^*)^{4k}, M_1M_1^\dagger] = 0 \wedge [D_3^{4l}, M_1^\dagger M_1] = 0.$$

$\triangle$

Neke ekvivalencije

Rezultati predstavljeni u prethodnoj sekciji povezani su na način opisan u narednim teoremama.

Teorema 4.3.9 *Neka su X_k, $k = \overline{1,4}$, proizvoljni Hilbertovi prostori, i neka su $A_k \in \mathcal{L}(X_{k+1}, X_k)$ ograničeni operatori, takvi da postoje Mur-Penrouzovi inverzi odgovarajućih proizvoda operatora. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(a) $M^\dagger = A_3^\dagger (A_1^\dagger M A_3^\dagger)^\dagger A_1^\dagger$;

(b) $M^\dagger = A_3^* (A_1^* M A_3^*)^\dagger A_1^*$;

(c) $A_3^\dagger (A_1^\dagger M A_3^\dagger)^\dagger A_1^\dagger = (A_3^* A_3)^\dagger ((A_1 A_1^*)^\dagger M (A_3^* A_3)^\dagger)^\dagger (A_1 A_1^*)^\dagger$;

(d) $A_3^* (A_1^\dagger M A_3^\dagger)^\dagger A_1^* = A_3^* A_3 M^\dagger A_1 A_1^*$;

(e) $A_3^* (A_1^* M A_3^*)^\dagger A_1^* = A_3^* A_3 (A_1 A_1^* M A_3^* A_3)^\dagger A_1 A_1^*$;

(f) $\mathcal{R}(A_1 A_1^* M) = \mathcal{R}(M)$ *i* $\mathcal{R}(A_3^* A_3 M^*) = \mathcal{R}(M^*)$.

Dokaz: Prema Teoremama 4.3.1 i 4.3.2 sledi da $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (f)$. Koristeći metod opisan u tim dvema teoremama, lako zaključujemo da:

$$(c) \Leftrightarrow D_3^{-\frac{1}{2}} (A_{11}^{-1} M_1 D_3^{-\frac{1}{2}})^\dagger A_{11}^{-1} = D_3^{-1} ((A_{11} A_{11}^*)^{-1} M_1 D_3^{-1})^\dagger (A_{11} A_{11}^*)^{-1};$$

dok, s druge strane:

$$(e) \Leftrightarrow D_3^{\frac{1}{2}} (A_{11}^* M_1 D_3^{\frac{1}{2}})^\dagger A_{11}^* = D_3 (A_{11} A_{11}^* M_1 D_3)^\dagger A_{11} A_{11}^*.$$

Dokažimo $(e) \Leftrightarrow (f)$. Imamo sledeće:

$$(e) \Leftrightarrow (A_{11}^* M_1 D_3^{1/2})^\dagger = D_3^{1/2} (A_{11} A_{11}^* M_1 D_3^{1/2})^\dagger A_{11}.$$

Označimo $X = A_{11}^* M_1 D_3^{1/2}$, $B = A_{11}$ i $C = D_3^{1/2}$. Prema Lemi 4.1.1, važe sledeća dva lanca ekvivalencije-prvi:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{R}(A_{11}^* A_{11} A_{11}^* M_1 D_3^{1/2}) = \mathcal{R}(A_{11}^* M_1 D_3^{1/2}) \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{R}(A_{11}^* A_{11} A_{11}^* M_1 D_3^{1/2}) = \mathcal{R}(A_{11}^* M_1 D_3^{1/2}) \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{R}(A_{11} A_{11}^* M_1 D_3^{1/2}) = \mathcal{R}(M_1 D_3^{1/2}) \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{R}(A_{11} A_{11}^* M_1) = \mathcal{R}(M_1),
\end{aligned}$$

i drugi:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{N}(A_{11}^* M_1 D_3^{3/2}) = \mathcal{N}(A_{11}^* M_1 D_3^{1/2}) \\
\Leftrightarrow \quad & \mathcal{R}(D_3^{3/2} M_1^* A_{11}) = \mathcal{R}(D_3^{1/2} M_1^* A_{11}) \\
\Leftrightarrow \quad & \mathcal{R}(D_3 M_1^* A_{11}) = \mathcal{R}(M_1^* A_{11}) \\
\Leftrightarrow \quad & \mathcal{R}(D_3 M_1^*) = \mathcal{R}(M_1^*).
\end{aligned}$$

Dakle, polazni izraz je ekvivalentan sa:

$$\mathcal{R}(A_{11} A_{11}^* M_1) = \mathcal{R}(M_1) \wedge \mathcal{R}(D_3 M_1^*) = \mathcal{R}(M_1^*).$$

Poslednji izraz je, prema Lemi 3.1.4, ekvivalentan sa (f), te smo upravo dokazali $(e) \Leftrightarrow (f)$. (U dokazu smo koristili očiglednu činjenicu - da $\mathcal{R}(PQ) = \mathcal{R}(SQ) \Rightarrow \mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(Q)$ ako je operator Q invertibilan.) Na potpuno analogan način može se dokazati $(c) \Leftrightarrow (f)$.

S druge strane,

$$(d) \Leftrightarrow (A_{11}^{-1} M_1 D_3^{-1/2})^\dagger = D_3^{1/2} M_1^\dagger A_{11},$$

što je očigledno ekvivalentno sa (f).

$\triangle$

Teorema 4.3.10 *Neka su X_k, $k = \overline{1,4}$, proizvoljni Hilbertovi prostori, i neka su $A_k \in \mathcal{L}(X_{k+1}, X_k)$ ograničeni operatori, takvi da postoje Mur-Penrouzovi inverzi odgovarajućih proizvoda operatora. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(a) $M^\dagger = (A_3^* A_3)^\dagger ((A_1 A_1^*)^\dagger M (A_3^* A_3)^\dagger)^\dagger (A_1 A_1^*)^\dagger$;

(b) $M^\dagger = A_3^* A_3 (A_1 A_1^* M A_3^* A_3)^\dagger A_1 A_1^*$;

(c) $A_3^\dagger (A_1^\dagger M A_3^\dagger)^\dagger A_1^\dagger = A_3^* (A_1^* M A_3^*)^\dagger A_1^*$;

(d) $\mathcal{R}((A_1 A_1^*)^2 M) = \mathcal{R}(M)$ *i* $\mathcal{R}((A_3^* A_3)^2 M^*) = \mathcal{R}(M^*)$.

Dokaz: Prema Teoremama 4.3.3 i 4.3.4 sledi da $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (d)$. Koristeći metod opisan u tim dvema teoremama, lako zaključujemo da:

$$(c) \Leftrightarrow D_3^{-\frac{1}{2}} (A_{11}^{-1} M_1 D_3^{-\frac{1}{2}})^\dagger A_{11}^{-1} = D_3^{\frac{1}{2}} (A_{11}^* M_1 D_3^{\frac{1}{2}})^\dagger A_{11}^*.$$

Koristeći metod opisan u dokazu Teoreme 4.3.9 (faza $(e) \Leftrightarrow (f)$), lako se zaključuje da $(c) \Leftrightarrow (e)$.

$\triangle$

Teorema 4.3.11 *Neka su X_k, $k = \overline{1,4}$, proizvoljni Hilbertovi prostori, i neka su $A_k \in \mathcal{L}(X_{k+1}, X_k)$ ograničeni operatori, takvi da postoje Mur-Penrouzovi inverzi odgovarajućih proizvoda operatora. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(a) $M^\dagger = (A_3A_3^*A_3)^\dagger((A_1A_1^*A_1)^\dagger M(A_3A_3^*A_3)^\dagger)^\dagger(A_1A_1^*A_1)^\dagger$;

(b) $M^\dagger = (A_3A_3^*A_3)^*((A_1A_1^*A_1)^* M(A_3A_3^*A_3)^*)^\dagger(A_1A_1^*A_1)^*$;

(c) $A_3^\dagger(A_1^\dagger MA_3^\dagger)^\dagger A_1^\dagger = A_3^*A_3(A_1A_1^*MA_3^*A_3)^\dagger A_1A_1^*$;

(d) $(A_1^\dagger MA_3^\dagger)^\dagger = A_3A_3^*A_3(A_1A_1^*MA_3^*A_3)^\dagger A_1A_1^*A_1$;

(e) $\mathcal{R}((A_1A_1^*)^3M) = \mathcal{R}(M)$ *i* $\mathcal{R}((A_3^*A_3)^3M^*) = \mathcal{R}(M^*)$.

Dokaz: Iz Teorema 4.3.5 i 4.3.6 sledi da $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (e)$. Koristeći metod opisan u tim dvema teoremama, lako zaključujemo da:

$$(c) \Leftrightarrow D_3^{-1/2}(A_{11}^{-1}M_1D_3^{-1/2})^\dagger A_{11}^{-1} = D_3(A_{11}A_{11}^*M_1D_3)^\dagger A_{11}A_{11}^*;$$

dok je tvrđenje (d) ekvivalentno sa:

$$A_{3i}D_3(A_{11}A_{11}^*M_1D_3)^\dagger A_{11}A_{11}^*A_{11} = A_{3i}D_3^{-1/2}(A_{11}^{-1}M_1D_3^{-1/2})^\dagger, \quad i = 1,2.$$

Korišćenjem metoda opisanog u dokazu Teoreme 4.3.9 (deo $(e) \Leftrightarrow (f)$), lako se zaključuje da $(c) \Leftrightarrow (e)$ i $(d) \Leftrightarrow (e)$.

△

Teorema 4.3.12 *Neka su X_k, $k = \overline{1,4}$, proizvoljni Hilbertovi prostori, i neka su $A_k \in \mathcal{L}(X_{k+1}, X_k)$ ograničeni operatori, takvi da postoje Mur-Penrouzovi inverzi odgovarajućih proizvoda operatora. Sledaća tvrđenja su ekvivalentna:*

(a) $M^\dagger = ((A_3^*A_3)^\dagger)^2(((A_1A_1^*)^2)^\dagger M((A_3^*A_3)^2)^\dagger)^\dagger((A_1A_1^*)^\dagger)^2$;

(b) $M^\dagger = (A_3^*A_3)^2((A_1A_1^*)^2M(A_3^*A_3)^2)^\dagger(A_1A_1^*)^2$;

(c) $\mathcal{R}((A_1A_1^*)^4M) = \mathcal{R}(M)$ *i* $\mathcal{R}((A_3^*A_3)^4M^*) = \mathcal{R}(M^*)$.

Dokaz: Iz teorema 4.3.7 i 4.3.8 sledi da $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c)$.

△

Literatura

[1] I. A. Adetunde, N. Oladejo, and D. Apio, *On the generalisized inverse of a matrix*, Am. J. of Sci. Res. **7** (2010), 77–89.

[2] E. Arghiriade, *Sur l'inverse generalisee d'un operateur lineaire dans les espaces de Hilbert*, Atti. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **45** (1968), no. 8, 471–477.

[3] F. V. Atkinson, *The normal solvability of linear equations in normed spaces (na ruskom)*, Mat. Sb. (N.S.) **28** (1951), no. 70, 3–14.

[4] ———, *On relatively regular operators*, Acta Sci. Math. Szeged **15** (1953), 38–56.

[5] J. K. Baksalary and G. P. H. Styan, *Around a formula for the rank for a matrix product with some statistical applications*, R. S. Rees (Ed.), Graphs, Matrices, and Desighns: Festschrift in Honor of Norman J. Pullman on his Sixtieth birthday, Marcel Dekker, New York, 1993.

[6] D. T. Barwick and J. D. Gilbert, *On generalizations of the reverse order law*, SIAM J. Appl. Math. **27** (1974), no. 2, 326–330.

[7] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville, *Generalized inverses: theory and applications*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 2003.

[8] J. Benítez, X. Liu, and J. Zhong, *Some results on matrix partial orderings and reverse order law*, ELA **20** (2010), 254–273.

[9] A. Bjerhammar, *A generalized matrix algebra*, Trans. Roy. Inst. Tech. Stockholm **124** (1951), 32.

[10] ______, *Application of calculus of matrices to method of least squares with special reference to geodetic calculations*, Trans. Roy. Inst. Tech. Stockholm **49** (1951), 86.

[11] ______, *Rectangular reciprocal matrices, with special reference to geodetic calculations*, Bull. Géodésique (1951), 118–220.

[12] E. Boasso, *On the Moore-Penrose inverse in C^*-algebras*, Extracta Mathematicae **21** (2006), no. 2, 93–106.

[13] R. Bouldin, *The pseudoinverse of a product*, SIAM J. Appl. Math. **24** (1973), no. 4, 489–495.

[14] E. Bounitzky, *Sur la fonction de Green des équations differentielles linéaires ordinaires*, J. Math. Pures Appl. **5** (1909), no. 6, 65–125.

[15] S. L. Campbell (ed.), *Recent application of generalized inverses*, Pitman, London, 1982.

[16] S. L. Campbell and C. D. Meyer Jr, *Generalized inverses of linear transformations*, Pitman, London, 1979.

[17] C. Cao, X. Zhang, and X. Tang, *Reverse order law of group inverses of products of two matrices*, Appl. Math. Comput. **19** (2004), no. 2, 489–495.

[18] S. R. Caradus, *Generalized inverses and operator theory*, Queen's Paper in Pure and Applied Mathematics, Queen's University, Kingston, Ontario, 1978.

[19] X. Chen and Y.-L. Chen, *Establishing identities for the weighted Moore-Penrose inverse of a matrix product*, Linear Algebra Appl. (2010).

[20] R. E. Cline, *Note on the generalized inverse of the product of matrices*, SIAM Review **6** (1964), no. 1, 57–58.

[21] D. S. Cvetković-Ilić, *Reverse order laws for $\{1,3,4\}-$generalized inverses in C^*-algebras*, Appl. Math. Letters **24** (2011), no. 2, 210–213.

[22] D. S. Cvetković-Ilić and R. Harte, *Reverse order laws in C^*-algebras*, Linear Algebra Appl. **434** (2011), no. 5, 1388–1394.

[23] D. S. Cvetković-Ilić, X. Liu, and J. Zhong, *On the (p, q) outer generalized inverse in Banach algebra*, App. Math. Comput. **209** (2009), no. 2, 191–196.

[24] D. S. Cvetković-Ilić and V. Pavlović, *A comment on some recent results concerning the reverse order law for $\{1, 3, 4\}-$inverses*, App. Math. Comp. **217** (2010), 105–109.

[25] T. Damm and H. K. Wimmer, *A cancellation property of the Moore-Penrose inverse of triple product*, J. Aust. Math. Soc. **86** (2009), 33–44.

[26] N. C. Dinčić, *Matrix splittings and generalized inverses*, Publ. Math. Debrecen **74** (2009), no. 3-4, 233–247.

[27] D. S. Djordjević, *Regular and T-Fredholm elements*, Publ. Inst. Math. (Beograd)(N.S.) **56** (1994), no. 70, 90–94.

[28] ______, *Unified approach to the reverse order rule for generalized inverses*, Acta Sci. Math. (Szeged) **67** (2001), 761–776.

[29] ______, *Further results on the reverse order law for generalized inverses*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **29** (2007), no. 4, 1242–1246.

[30] D. S. Djordjević and J. J. Koliha, *Characterizations of Hermitian, normal and EP operators*, Filomat **21** (2007), no. 1, 39–54.

[31] D. S. Djordjević and V. Rakočević, *Lectures on generalized inverses*, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš, Niš, 2008.

[32] D. S. Djordjević and N. Č. Dinčić, *Reverse order law for the Moore-Penrose inverse*, J. Math. Anal. Appl. **361** (2010), no. 1, 252–261.

[33] M. P. Drazin, *Pseudo-inverses in associative rings and semigroups*, The American Mathematical Monthly **65** (1958), 506–514.

[34] I. Erdelyi, *On the "reverse order law" related to the generalized inverse of matrix products*, Journal of the Association for Computing Machinery **13** (1966), no. 3, 439–443.

[35] I. Fredholm, *Sur une classe d'équationes fonctionelles*, Acta Math. **27** (1903), 365–390.

[36] A. M. Galperin and Z. Waksman, *On pseudo-inverses of operator products*, Linear Algebra Appl. **33** (1980), 123–131.

[37] T. N. E. Greville, *Note on the generalized inverse of a matrix product*, SIAM Review **8** (1966), no. 4, 518–521.

[38] C. W. Groetsch, *Generalized inverses of linear operators: representation and application*, Dekker, New York, 1977.

[39] R. Harte, *Weyl and Browder theory*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **85** (1985), no. 2, 151–176.

[40] ———, *Regular boundary elements*, Proc. Amer. Math. Soc. **99** (1987), no. 2, 328–330.

[41] R. E. Hartwig, *An application of the Moore-Penrose inverse to antisymmetric relations*, Proceedings of the American Mathematical Society **78** (1980), no. 2, 181–186.

[42] ———, *The reverse order law revisited*, Linear Algebra Appl. **76** (1986), 241–246.

[43] D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integraleichungen*, B. G. Teubner, Leipzig and Berlin, 1912, reprint of six articles which appeared originally in the Göttingen Nachrichten (1904), 49–51; (1904) 213–259; (1905) 307–338; (1906) 157–227; (1906) 439–480; (1910) 355–417.

[44] T. Hongjiong, *On the reverse order law* $(AB)^D = B^D A^D$, J. Math. Research & Exposition **19** (1999), no. 2, 355–358.

[45] W. A. Hurwitz, *On the pseudo-resolvent to the kernel of an integral equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **13** (1912), 405–418.

[46] K. D. Ikramov, *On condiagonalizable matrices*, Linear Algebra Appl. **424** (2007), no. 2-3, 339–345.

[47] S. Izumino, *The product of operators with closed range and an extension of the reverse order law*, Tôhoku Math. Journ. **34** (1982), 43–52.

[48] J. J. Koliha, D. Djordjević, and D. S. Cvetković-Ilić, *Moore-Penrose inverse in rings with involution*, Linear Algebra Appl. **426** (2007), 371–381.

[49] J. J. Koliha and V. Rakočević, *Invertibility of the sum of idempotents*, Linear and Multilinear Algebra **50** (2002), 285–292.

[50] ______, *Invertibility of the difference of idempotents*, Linear and Multilinear Algebra **51** (2003), 97–110.

[51] ______, *Range projections and the Moore-Penrose inverse in rings with involution*, Linear and Multilinear Algebra **55** (2007), 103–112.

[52] Lj. Kočinac, *Linearna algebra i analitička geometrija*, 2 ed., Prosveta, Niš, 1997.

[53] S. Lanczos, *Linear systems in self-adjoint form*, Amer. Math. Monthly **65** (1958), 665–679.

[54] Y. Li, *The Moore-Penrose inverses of products and differences of projections in a C^*-algebra*, Linear Algebra Appl. **428** (2008), 1169–1177.

[55] D. Liu and H. Yang, *Further results on the reverse order law for $\{1,3\}-$inverse and $\{1,4\}-$inverse of a matrix product*, Journal of Inequalities and Applications (2010).

[56] ______, *The reverse order law for $\{1,3,4\}-$inverse of the product of two matrices*, Appl. Math. Comput. **215** (2010), 4293–4303.

[57] Q. Liu and M. Wei, *Reverse order law for least squares $g-$inverses of multiple matrix products*, Linear and Multilinear Algebra **56** (2008), no. 5, 491–506.

[58] X. Liu, J. Benítez, and J. Zhong, *Some results on partial ordering and reverse order law of elements of $C^{*}-$algebras*, J. Math. Anal. Appl. **370** (2010), no. 1, 295–301.

[59] S. K. Mitra and P. Bhimasankaram, *A characterisation of Moore-Penrose inverse and related results*, The Indian Journal of Statistics A **33** (1971), no. 4, 411–416.

[60] E. H. Moore, *On the reciprocal of the general algebraic matrix (Abstract)*, Bull. Amer. Math. Soc. **26** (1920), 394–395.

[61] E. H. Moore and R. W. Barnard, *General analysis, Memoires of the American Philosophical Society I*, American Philosophical Society, Philadelphia, PA, 1935.

[62] D. Mosić and D. S. Djordjević, *Reverse order law for the Moore-Penrose inverse in $C^{*}-$algebras*, Electronic Journal of Linear Algebra **22** (2011), 92–111.

[63] F. J. Murray and J. von Neumann, *On rings of operators*, Ann. of Math. **37** (1936), 116–229.

[64] M. Z. Nashed (ed.), *Generalized inverses and applications*, Academic Press, New York, 1979.

[65] H. Neudecker and L. Shuangzhe, *Moore-Penrose inverse of a matrix product*, Econometric Theory **8** (1992), no. 4, 584.

[66] H. Ogawa, *An operator pseudo-inversion lemma*, SIAM Journal on Applied Mathematics **48** (1988), no. 6, 1527–1531.

[67] R. Penrose, *A generalized inverse for matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **51** (1955), 406–413.

[68] A. R. De Pierro and M. Wei, *Reverse order law for reflexive generalized inverses of products of matrices*, Linear Algebra Appl. **277** (1998), 299–311.

[69] V. Rakočević, *Moore-Penrose inverse in Banach algebras*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **88** (1988), no. 1, 57–60.

[70] ———, *A note on regular elements in Calkin algebras*, Collect. Math. **43** (1994), no. 1, 37–42.

[71] ———, *Funkcionalna analiza*, Naučna knjiga, Beograd, 1994.

[72] ———, *On Harte's theorem for regular boundary elements*, Filomat **9** (1995), no. 3, 899–910.

[73] C. R. Rao and S. K. Mitra, *Generalized inverses of matrices and its applications*, John Wiley, New York, 1971.

[74] W. Reid, *Generalized Green's matrices for compatible systems of differential equations*, Amer. J. Math. **53** (1931), 443–459.

[75] C. L. Siegel, *Über die analytische Theorie der quadratischen Formen III*, Ann. of Math. **38** (1937), 212–291.

[76] P. S. Stanimirović and D. S. Djordjević, *New type of matrix splitting and its applications*, Acta Math. Hungarica **92** (2001), no. 1–2, 121–135.

[77] ———, *Splittings of operators and generalized inverses*, Publ. Math. Debrecen **59** (2001), no. 1–2, 147–159.

[78] W. Sun and Y. Wei, *Inverse order rule for weighted generalized inverse*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **19** (1998), no. 3, 772–775.

[79] ———, *Triple reverse-order law for weighted generalized inverses*, Appl. Math. Comput. **125** (2002), 221–229.

[80] Y. Takane, Y. Tian, and H. Yanai, *On reverse-order laws for least-square $g-$inverses and minimum norm $g-$inverses of a matrix product*, Aequationes Math. **73** (2007), 56–70.

[81] H. Tian, *On the reverse order laws* $(AB)^D = B^D A^D$, J. Math. Research and Exposition **19** (1999), 355–358.

[82] Y. Tian, *The Moore-Penrose inverse of a triple matrix product*, Math. Practice Theory **1** (1992), 64–70, in chinese.

[83] ———, *Reverse order laws for the generalized inverses of multiple matrix products*, Linear Algebra Appl. **211** (1994), 85–100.

[84] ———, *Reverse-order laws for Moore-Penrose inverses*, arXiv:math/0003224v1 (2000).

[85] ———, *On mixed-type reverse-order laws for the Moore-Penrose inverse of a matrix product*, IJMMS **58** (2004), 3103–3116.

[86] ———, *Using rank formulas to characterize equalities for Moore-Penrose inverses of a matrix products*, Appl. Math. Comput. **147** (2004), 581–600.

[87] ———, *The reverse-order law* $(AB)^\dagger = B^\dagger(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger A^\dagger$ *and its equivalent equalities*, J. Math. Kyoto Univ. **45** (2005), no. 4, 841–850.

[88] ———, *The equivalence between* $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ *and other mixed-type reverse-order laws*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology **37** (2006), no. 3, 331–339.

[89] ———, *Some mixed-type reverse-order laws for the Moore-Penrose inverse of a triple matrix product*, Rocky Mountain Journal of Mathematics **37** (2007), no. 4, 1327–1347.

[90] Y. Tian and S. Cheng, *Some identities for Moore-Penrose inverses of matrix products*, Linear and Multilinear Algebra **52** (2004), no. 6, 405–420.

[91] Y. Tian and Y. Liu, *On a group of mixed-type reverse-order laws for generalized inverses of a triple matrix product with applications*, ELA **16** (2007), 73–89.

[92] Y.-Y. Tseng, *The characteristic value problem of hermitian functional operators in a non-Hilbert spaces*, University of Chicago, University of Chicago Libraries, 1936, Ph. D. in mathematics, University of Chicago, 1933.

[93] ______, *Generalized inverses of unbounded operators between two unitary spaces*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) **67** (1949), 431–434.

[94] ______, *Properties and classification of generalized inverses of closed operators*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) **67** (1949), 607–610.

[95] ______, *Sur les solutions des équations opératrices fonctionnelles entre les espaces unitaires. Solutions extrémales. Solutions virtuelles*, C. R. Acad. Sci. Paris **228** (1949), 640–641.

[96] R. S. Varga, *Matrix iterative analysis*, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 27, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[97] G. Wang, *The reverse order law for the Drazin inverses of multiple matrix products*, Linear Algebra Appl. **348** (2002), 265–272.

[98] G. Wang and J. Gao, *Reverse order laws for weighted Moore-Penrose inverse of a triple matrix product*, J. Shangai Normal Univ. **29** (2000), 1–8, in chinese.

[99] G. Wang, Y. Wei, and S. Qiao, *Generalized inverses: theory and applications*, Science Press, Beijing/New York, 2004.

[100] G. Wang and B. Zheng, *The reverse order law for the generalized inverse $A^{(2)}_{T,S}$*, Appl. Math. Comput. **157** (2004), 295–305.

[101] M. Wang, M. Wei, and Z. Jia, *Mixed-type reverse-order law of $(AB)^{(13)}$*, Linear Algebra Appl. **430** (2009), no. 5-6, 1691–1699.

[102] J. F. Ward, T. L. Boullion, and T. O. Lewis, *Weighted pseudoinverses with singular weights*, SIAM Journal on Applied Mathematics **21** (1971), no. 3, 480–482.

[103] M. Wei, *Reverse order laws for generalized inverses of multiple matrix products*, Linear Algebra Appl. **293** (1999), 273–288.

[104] M. Wei and W. Guo, *Reverse order laws for least-square $g-$inverses and minimum norm $g-$inverses of products of two matrices*, Linear Algebra Appl. **342** (2002), 117–132.

[105] Y. Wei, *Equivalent conditions for generalized inverse of products*, Linear Algebra Appl. **266** (1997), 347–363.

[106] H. J. Werner, *When is B^-A^- a generalized inverse of AB?*, Linear Algebra Appl. **210** (1994), 255–263.

[107] Z. I. Woźnicki, *Matrix splitting principles*, Novi Sad J. Math. **28** (1998), no. 3, 197–209.

[108] ______, *Matrix splitting principles*, IJMMS **28** (2001), no. 5, 251–284.

[109] Z. Xiong and B. Zheng, *The reverse order laws for* $\{1,2,3\}-$ *and* $\{1,2,4\}-$*inverses of a two-matrix products*, Appl. Math. Letters **21** (2008), 649–655.

[110] Z-P. Xiong and C-F. Jiang, *The mixed-type reverse order laws for weighted generalized inverses of a triple matrix product*, J. Appl. Math. Comput. **29** (2009), 53–66.

[111] B. Zheng and Z. Xiong, *A new equivalent condition of the reverse order law for* $g-$*inverses of multiple matrix products*, ELA **17** (2008), 1–8.

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Небојша Ч. Динчић
Ментор, **МН**:	Драган С. Ђорђевић
Наслов рада, **НР**:	УОПШТЕНИ ИНВЕРЗИ ПРОИЗВОДА ОПЕРАТОРА
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2011.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	iv+126 стр.
Научна област, **НО**:	математика
Научна дисциплина, **НД**:	математичка анализа
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	функционална анализа
УДК	517.98 517.983.24 512.643
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	

Извод, **ИЗ**:	У овој дисертацији изложени су оригинални резултати који се могу поделити у две целине. Најпре се на два различита начина уводи разлагање елемената из класе квадратних сингуларних комплексних матрица индуковано уопштеним инверзима, које се потом користи у конструктивном доказу Хартове теореме. Наредну целину чине резултати који се односе на разне законе обрнутог редоследа за Мур-Пенроузов инверз производа два или више ограничених оператора на Хилбертовим просторима. Испитивани су услови под којима они важе, релације међу њима као и разни идентитети повезани са законима обрнутог редоследа. Поправљени су резултати који важе за комплексне матрице, с тим што се при доказивању користи метод операторских матрица у односу на одговарајућа разлагања простора, уместо метода матричних рангова који је овде непримењљив.
Датум прихватања теме, **ДП**:	29. март 2010.
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**: Председник:	
Члан:	
Члан, ментор:	

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	**monograph**
Type of record, **TR**:	**textual**
Contents code, **CC**:	**doctoral dissertation**
Author, **AU**:	**Nebojša Č. Dinčić**
Mentor, **MN**:	**Dragan S. Đorđević**
Title, **TI**:	GENERALIZED INVERSES OF THE OPERATOR PRODUCTS
Language of text, **LT**:	**Serbian**
Language of abstract, **LA**:	**English**
Country of publication, **CP**:	**Serbia**
Locality of publication, **LP**:	**Serbia**
Publication year, **PY**:	**2011**
Publisher, **PB**:	**author's reprint**
Publication place, **PP**:	**Niš, Višegradska 33.**
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	**iv+126 p.**
Scientific field, **SF**:	**mathematics**
Scientific discipline, **SD**:	**mathematical analysis**
Subject/Key words, **S/KW**:	**functional analysis**
UC	**517.98** **517.983.24** **512.643**
Holding data, **HD**:	**library**
Note, **N**:	

Abstract, **AB**:		In this thesis, some original results are presented. They can be divided into two parts. First, a decomposition of the elements belonging in the class of the complex singular square matrix is presented on two different ways, using the generalized inverses, and then it is used in a constructive proof of the Harte's theorem. The next part consists of the results related to the various reverse order laws for the Moore-Penrose inverse of the products of two or more bounded Hilbert space operators. The conditions under which those laws holds are investigated, and the relations between them and the various identities associated with the laws of the reverse order are presented. Those results extends the ones valid for complex matrices, provided that the method of proving is based on the operator matrices with respect to the corresponding decomposition of spaces, instead of the matrix rank method, which is inapplicable here.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:		March 29th, 2010.
Defended on, **DE**:		
Defended Board, **DB**:	President:	
	Member:	
	Member, Mentor:	

Nebojša Dinčić

Curriculum Vitae

✉ ndincic@hotmail.com

Obrazovanje

2007- **Doktorske studije iz matematike**, *Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet, Odsek za matematiku i informatiku*, Niš, Srbija.

2001-2006 **Osnovne studije iz matematike, smer Računarstvo i informatika**, *Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet, Odsek za matematiku i informatiku*, Niš, Srbija.

1997–2001 **Srednja škola**, *Gimnazija "Svetozar Marković"*, Surdulica, Srbija.
Nosilac Vukove nagrade

Radno iskustvo

2011- **asistent**, *Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet, Odsek za matematiku i informatiku*, Niš, Srbija.

2010- **istraživač saradnik**, *Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet, Odsek za matematiku i informatiku*, Niš, Srbija.
Projekat Ministarstva nauke broj 174007

2007-2010 **istraživač pripravnik**, *Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet, Odsek za matematiku i informatiku*, Niš, Srbija.
Projekat Ministarstva nauke broj 144003

Oblasti interesovanja

Funkcionalna analiza: Teorija operatora, Uopšteni inverzi, Zakon obrnutog redosleda za uopštene inverze

Objavljeni naučni radovi

1 N. Č. Dinčić: Matrix splittings and generalized inverses, Publ. Math. Debrecen 74 (3-4), (2009), 233–247

2 D. S. Djordjević, N. Č. Dinčić: Reverse order law for the Moore-Penrose inverse, J. Math. Anal. Appl. 361(1), (2010), 252–261

Универзитет у Нишу
УНИВЕРЗИТЕТСКА БИБЛИОТЕКА •НИКОЛА ТЕСЛА• Ниш

Универзитет у Нишу
Универзитетска библиотека

Овај текст је део Дигиталног репозиторијума, јавно је доступан, и може се слободно користити за личне потребе, у образовне и научне сврхе. Ако користите текст, наведите извор.

Комерцијална употреба текста није дозвољена.

University of Niš
University Library

This text is a part of the Digital repository of public domain. Permission is granted for personal, educational and scientific use. If you do use the document, indicate the source.

No permission is granted for commercial use.

Новембар 2011 УБН © UBN November 2011