Универзитет у Нишу
Природно-Математички факултет у Нишу
Департман за математику

Александра М. Петровић

НУМЕРИЧКЕ МЕТОДЕ EULER-ОВОГ ТИПА ЗА СТОХАСТИЧКЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ СА КАШЊЕЊЕМ

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Ниш, 2024.

University of Niš
Faculty of science and mathematics
Department of mathematics

Aleksandra M. Petrović

NUMERICAL EULER-TYPE METHODS FOR STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DELAY

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2024.

Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	др Марија Милошевић, редовни професор, Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет у Нишу
Наслов:	Нумеричке методе Euler-овог типа за стохастичке диференцијалне једначине са кашњењем
Резиме:	У општем случају, стохастичке диференцијалне једначине (СДЈ) нису експлицитно решиве, због чега је од значаја проучавање нумеричких метода апроксимације њихових решења. Предмет истраживања ове докторске дисертације су нумеричке методе Ојлеровог (Euler) типа за неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем (и прелазима Маркова). Већи део резултата је добијен под претпоставком да су коефицијенти преноса и дифузије разматраних једначина суперлинеарног раста. Проучаване су експлицитне класична и сечена метода Ојлер-Марујаме (ОМ), као и семиимплицитна Ојлерова метода. Одређена је класа једначина за које експлицитне методе конвергирају у L^p-смислу за $p > 0$ и ред L^q-конвергенције сечене методе ОМ за $q > 2$. Поред класа једначина за које класична и сечена метода ОМ конвергирају, одређене су и оне за које поменуте методе дивергирају у строгом L^p-смислу на коначном временском интервалу. Доказана је и L^p-дивергенција семиимплицитне Ојлерове методе за класу неутралних СДЈ са временски зависним кашњењем. Технике примењиване у доказима условљене су типом разматране једначине, као и претпоставкама које важе за њене коефицијенте и неутрални члан. Разматрања су употпуњена примерима и нумеричким симулацијама.
Научна област:	Математика
Научна дисциплина:	Стохастичка анализа
Кључне речи:	Неутралне стохастичке диференцијалне једначине, временски зависно кашњење, процес Маркова, L^q-конвергенција, класична и сечена метода Ојлер-Марујаме, семиимплицитна Ојлерова метода, услов Хасминског, L^p-дивергенција, суперлинеарни раст
УДК:	519.216, 517.91
CERIF класификација:	P 001 Математика
Тип лиценце Креативне заједнице:	

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	dr Marija Milošević, Full Professor, University of Niš, Faculty of Sciences and Mathematics in Niš
Title:	Numerical Euler-type methods for stochastic differential equations with delay
Abstract:	In general case, stochastic differential equations (SDEs) are not explicitly solvable, such that studying numerical methods of approximation to their solutions is of great importance. The subject of the doctoral dissertation are numerical Euler-type methods for neutral SDEs with time-dependent delay (and Markovian switching). Most of the results are obtained assuming that the drift and diffusion coefficients of the considered equations grow superlinearly. The explicit numerical methods, such as the classical and truncated Euler-Maruyama (EM) methods, as well as semi-implicit Euler method, were studied. Classes of equations for which the explicit methods converge in the L^p-sense for $p > 0$ and order of L^q-convergence of the truncated EM method for $q > 2$ are determined. Beside the classes of equations for which the classical and truncated EM methods converge, those for which the mentioned methods diverge in a strong L^p-sense on a finite time interval are also determined. Also, the L^p-divergence of the semi-implicit Euler method for a class of neutral SDEs with time-dependent delay is proved. The techniques applied in proofs are influenced by the type of considered equation and the assumptions on its coefficients, as well as on the neutral term. Considerations are completed by examples and numerical simulations.
Scientific Field:	Mathematics
Scientific Discipline:	Stochastic analysis
Key Words:	Neutral stochastic differential equations, time-dependent delay, Markov process, L^q-convergence, classical and truncated Euler–Maruyama methods, semi-implicit Euler method, Khasminskii condition, L^p-divergence, super-linear growth
UDC:	519.216, 517.91
CERIF Classification:	P 001 Mathematics
Creative Commons License Type:	**CC BY-NC-ND**

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	Монографска
Тип записа, **ТЗ**:	Текстуални / графички
Врста рада, **ВР**:	Докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Александра М. Петровић
Ментор, **МН**:	Марија Г. Милошевић
Наслов рада, **НР**:	Нумеричке методе Euler-овог типа за стохастичке диференцијалне једначине са кашњењем
Језик публикације, **ЈП**:	Српски
Језик извода, **ЈИ**:	Српски / енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2024.
Издавач, **ИЗ**:	Ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	3 поглавља, 169 страна, 68 цитата, 3 табеле, 6 слика
Научна област, **НО**:	Математика
Научна дисциплина, **НД**:	Стохастичка анализа
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	Неутралне стохастичке диференцијалне једначине, временски зависно кашњење, процес Маркова, $L^{\text{ч}}$-конвергенција, класична и сечена метода Ојлер-Марујаме, семиимплицитна Ојлерова метода, услов Хасминског, L^{p}-дивергенција, суперлинеарни раст
УДК	519.216 517.91
Чува се, **ЧУ**:	Библиотека
Важна напомена, **ВН**:	

Извод, **ИЗ**:	У општем случају, стохастичке диференцијалне једначине (СДЈ) нису експлицитно решиве, због чега је од значаја проучавање нумеричких метода апроксимације њихових решења. Предмет истраживања ове докторске дисертације су нумеричке методе Ојлеровог (Euler) типа за неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем (и прелазима Маркова). Већи део резултата је добијен под претпоставком да су коефицијенти преноса и дифузије разматраних једначина суперлинеарног раста. Проучаване су експлицитне методе, и то класична и сечена метода Ојлер-Марујаме (ОМ), као и семиимплицитна Ојлерова метода. Одређена је класа једначина за које експлицитне методе конвергирају у L^p-смислу за $p > 0$ и ред L^q-конвергенције сечене методе ОМ за $q > 2$. Поред класа једначина за које класична и сечена метода ОМ конвергирају, одређене су и оне за које поменуте методе дивергирају у строгом L^p-смислу на коначном временском интервалу. Доказана је и L^p-дивергенција семиимплицитне Ојлерове методе за класу неутралних СДЈ са временски зависним кашњењем. Технике примењиване у доказима условљене су типом разматране једначине, као и претпоставкама које важе за њене коефицијенте и неутрални члан. Разматрања су употпуњена примерима и нумеричким симулацијама.
Датум прихватања теме, **ДП**:	30.08.2021.
Датум одбране, **ДО**:	

Чланови комисије, **КО**:	Председник:	
	Члан:	
	Члан, ментор:	

Прилог 4/2

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	Monograph
Type of record, **TR**:	Textual / graphic
Contents code, **CC**:	Doctoral dissertation
Author, **AU**:	Aleksandra M. Petrović
Mentor, **MN**:	Marija G. Milošević
Title, **TI**:	Numerical Euler-type methods for stochastic differential equations with delay
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	Serbian / English
Country of publication, **CP**:	Serbia
Locality of publication, **LP**:	Serbia
Publication year, **PY**:	2024
Publisher, **PB**:	Author's reprint
Publication place, **PP**:	Niš, Višegradska 33.
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	3 chapters, 169 pages, 68 references, 3 tables, 6 graphs
Scientific field, **SF**:	Mathematics
Scientific discipline, **SD**:	Stochastic analysis
Subject/Key words, **S/KW**:	Neutral stochastic differential equations, time-dependent delay, Markov process, L^q-convergence, classical and truncated Euler–Maruyama methods, semiimplicit Euler method, Khasminskii condition, L^p-divergence, super-linear growth
UC	519.216 517.91
Holding data, **HD**:	Library
Note, **N**:	

Abstract, **AB**:	In general case, stochastic differential equations (SDEs) are not explicitly solvable, such that studying numerical methods of approximation to their solutions is of great importance. The subject of the doctoral dissertation are numerical Euler-type methods for neutral SDEs with time-dependent delay (and Markovian switching). Most of the results are obtained assuming that the drift and diffusion coefficients of the considered equations grow super-linearly. The explicit numerical methods, such as the classical and truncated Euler-Maruyama (EM) methods, as well as semiimplicit Euler method, were studied. Classes of equations for which the explicit methods converge in the L^p-sense for $p > 0$ and order of L^q-convergence of the truncated EM method for $q > 2$ are determined. Beside the classes of equations for which the classical and truncated EM methods converge, those for which the mentioned methods diverge in a strong L^p-sense on a finite time interval are also determined. Also, the L^p-divergence of the semi-implicit Euler method for a class of neutral SDEs with time-dependent delay is proved. The techniques applied in proofs are influenced by the type of considered equation and the assumptions on its coefficients, as well as on the neutral term. Results are completed by examples and numerical simulations.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	August 30, 2021.
Defended on, **DE**:	
Defended Board, **DB**: President:	
Member:	
Member, Mentor:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1

Предговор

Стохастичко моделирање има важну улогу у многим гранама науке и индустрије где се, као основни алат, користе стохастичке диференцијалне једначине (СДЈ) како би се описали бројни процеси који се јављају у научним истраживањима и у реалном животу. Међутим, сложена структура самих процеса условљава и комплексну структуру једначина коришћених за њихово моделирање. Тако су, на пример, за описивање динамичких система који зависе не само од својих садашњих, већ и од прошлих стања система, најпогодније неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем. Са друге стране, како код већине појава из реалног живота долази до наглих промена у структурама система као последица кварова компонената, разних катастрофа, наглих поремећаја животне средине, јавила се потреба за СДЈ са прелазима Маркова које најадекватније опиcују такве хибридне системе. Због своје широке примене, поменути типови једначина постали су предмет проучавања многих аутора. Постоје бројни радови у којима се разматрају различите особине ових једначина, као што су егзистенција и јединственост решења [29, 30], стабилност и ограниченост момената [2, 3, 13, 26, 30, 31, 32, 62, 63, 66] и апроксимације решења [23, 33, 38, 42, 43, 59], између осталих.

Специфична структура неутралних СДЈ са временски зависним кашњењем (и прелазима Маркова) је узрок томе што је класа ових једначина чија се решења могу експлицитно одредити врло уска. Проблем одређивања тачних решења ових једначина довео је до развоја различитих експлицитних и имплицитних нумеричких метода, помоћу којих се генеришу одговарајућа апроксимативна решења. Међу првим ауторима који су се бавили апроксимацијом решења СДЈ био је Марујама, који је 1955. године у раду [40] дефинисао Ојлерову методу (Euler method) следећи приступ коришћен у случају детерминистичких диференцијалних једначина, која је данас позната као метода Ојлер–Марујаме (Euler–Maruyama method).

Због погодности у погледу прорачуна и имплементације, метода Ојлер–Марујаме се издвојила у односу на друге методе, и као таква се често користи за генерисање апроксимативних решења различитих типова СДЈ [24, 25, 28, 42, 65]. Међутим, рад [7] открива велику класу СДЈ за које метода Ојлер–Марујаме дивергира. Значајне предности експлицитних нумеричких метода у односу на имплицитне нумеричке методе навела је аутора рада [39] да конструише нову методу, назвавши је сеченом методом Ојлер–Марујаме (truncated Euler–Maruyama method). У наредном раду [14], разматрани су услови под којима су тачно решење и апроксимативно решење добијено овом методом блиски у L^p-смислу. То је била мотивација за многе ауторе да даље истражују ову тему (видети [56, 68]). Међутим, поред интересовања за проучавањем класа СДЈ чија апроксимативна решења конвергирају у одређеном смислу (у вероватноћи, L^p-смислу итд.) ка тачном решењу, од значаја су и оне једначине за које је познато да апроксимативно решење дивергира под одређеним условима. На тај начин се одређује класа једначина за коју се сигурно зна да разматрана метода не дели својство ограничености момената са њиховим тачним решењима. Поменути рад [7] је дао негативан одговор на питање које је дуго било отворено, а то је да ли метод Ојлер–Марујаме конвергира у L^p-смислу за СДЈ чији коефицијенти су са високим степеном нелинеарности. Наиме, у том раду је одређена класа СДЈ за коју разлика између тачног и апроксимативног решења Ојлер–Марујаме у крајњој тачки коначног временског интервала дивергира, што представља мотивацију за даље истраживање услова под којима апроксимативна решења разних типова СДЈ, добијена различитим нумеричким методама, дивергирају. Тиме се сужавају класе СДЈ у којима треба трагати за оним једначинама за које одговарајуће нумеричке методе конвергирају у L^p-смислу. Неки од постојећих резултата о дивергенцији различитих нумеричких метода на коначним и бесконачим временским интервалима могу се наћи у [8, 10, 11, 12, 16, 41, 46, 54], као и у Глави 3 ове дисертације. С обзиром на постојећу литературу (видети на пример радове [42, 44, 45, 48] између осталих) где је доказана конвергенција у вероватноћи нумеричких решења ка тачном решењу, предмет даљег истраживања може бити конвергенција у вероватноћи нумеричких метода разматраних у Глави 3 под условима када оне дивергирају у L^p-смислу.

У једном делу ове дисертације одређују се класе неутралних СДЈ са временски зависним кашњењем за које апроксимативна решења добијена класичном и сеченом методом Ојлер–Марујаме наслеђују својства тачног решења, док се у другом делу дисертације разматрају услови дивергенције како имплицитних, тако и поменутих експлицитних нумеричких метода за неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем (и прелазима Маркова).

Дисертација садржи резултате који су изложени у три главе.

Глава 1 садржи основне појмове и резултате теорије стохастичких процеса. Дефинисани су различити типови СДЈ и наведене су основне теореме егзистенције и јединствености решења ових једначина. На крају главе представљена је конструкција нумеричке методе Ојлер–Марујаме за различите типове СДЈ, с обзиром на то да ова метода представља основу или мотивацију за увођење алтернативних нумеричких метода.

У Глави 2 се разматра сечена метода Ојлер–Марујаме за неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем чији коефицијенти преноса и дифузије могу бити са високим степеном нелинеарности, док неутрални члан задовољава услов контрактивности. Како се сечена метода Ојлер–Марујаме за наведену класу једначина на одређени начин ослања на класичну методу Ојлер–Марујаме за исти тип једначина са коефицијентима преноса и дифузије који задовољавају глобални Липшицов услов, први део ове главе посвећен је класичној методи Ојлер–Марујаме. Разматрана је оцена момената тачног решења и апроксимативног решења Ојлер–Марујаме за неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем чији су коефицијенти глобално Липшиц непрекидни. Такође, доказана је и конвергенција ове методе у L^p-смислу за $p > 0$, на коначном временском интервалу. Поменути резултати објављени су у раду [49], A. Petrović, M. Milošević, *The truncated Euler–Maruyama method for highly nonlinear neutral stochastic differential equations with time-dependent delay*, Filomat, **35** (2021), no. 7, 2457–2484.

У другом делу ове главе представљена је конструкција сечене методе Ојлер–Марујаме и доказане су њене основне особине. Такође, оцењени су p-ти моменти апроксимативног решења и L^p-блискост апроксимативног и тачног решења разматраних једначина. Ови резултати објављени су у раду [49]. Поред тога, представљена је и стопа L^q-конвергенције, за $q > 2$, сеченог решења Ојлер–Марујаме, што је представљено у раду [50], A. Petrović, *Convergence rate of the truncated Euler–Maruyama method for highly nonlinear neutral stochastic differential equations with time-dependent delay*, Open Mathematics, **22** (2024). no. 1. Сви резултати овог дела дисертације доказани су под локалним Липшицовим условом за коефицијенте преноса и дифузије разматраних једначина, условом контрактивности за неутрални члан и условом Хасминског, поред осталих услова који се намећу.

Глава 3 садржи резултате о L^p-дивергенцији, за $p > 0$, две експлицитне и једне имплицитне нумеричке методе Ојлеровог типа, за класе неутралних СДЈ са временски зависним кашњењем (и прелазима Маркова). Иако је основна мотивација за разматрање дивергенције нумеричких метода проистекла из радова [7] и [46], свака од разматраних класа једначина у овој дисертацији захтева потпуно различите технике приликом доказивања главних резултата. Један део ове главе садржи резултате из рада [51], A. Petrović, M. Milošević, *Strong and weak divergence of the backward Euler method for neutral stochastic differential equations with time-dependent delay*, Stochastic Analysis and Applications, doi.org/ 10.1080/07362994.2024.2396093 где је доказана строга и слаба дивергенција семиимплицитне Ојлерове методе за класу неутралних СДЈ са временски зависним кашњењем, чији је коефицијент преноса суперлинеарног раста, док коефицијент дифузије расте највише суперлинеарно. Такође, у овој глави је разматрана класа неутралних СДЈ са временски зависним кашњењем и прелазима Маркова за коју постоји јединствено глобално решење са особином да су апсолутни моменти првог реда коначни, док су моменти првог реда нумеричког решења добијени методом Ојлер–Марујаме бесконачни. Добијени резултати представљени су у раду [52], A. Petrović, M. Milošević, *Divergence of the Euler–Maruyama method for neutral stochastic differential equations with unbounded delay* *and Markovian switching*, који је у припреми. На крају главе су наведени резултати који се односе на сечену методу Ојлер–Марујаме за неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем, у смислу да је одређена класа ових једначина за коју поменута метода дивергира у L^p-смислу. Ти резултати садржани су у раду [53], A. Petrović, M. Milošević, *Divergence of the truncated Euler–Maruyama method for neutral stochastic differential equations with time-dependent delay*, који је у припреми. Може се закључити да су класе једначина за које семиимплицитна Ојлерова метода и сечена метода Ојлер–Марујаме дивергирају у L^p-смислу уже од класа једначина за коју метода Ојлер–Марујаме дивергира.

Теоријски резултати ове дисертације су илустровани примерима и нумеричким симулацијама, при чему се у примерима примењује приступ Хасминског.

У Закључку су изложени неки од отворених проблема и могући правци даљих истраживања.

⋆⋆⋆

Користим прилику да изразим велику и искрену захвалност свом ментору, проф. др Марији Милошевић и свом професору, проф. др Миљани Јовановић, на несебичној подршци, стрпљењу, мотивацији и огромном знању које су ми пружале током доктроских студија. Своју захвалност дугујем члановима комисије проф. др Јасмини Ђорђевић, доц. др Душану Ђорђевићу и доц. др Ани Меркле, на сугестијама и примедбама које су значајно утицали на квалитет ове дисертације.

Од срца се захваљујем најдражима за безусловну љубав, одрицање, подстрек и веру у мене и мој рад.

Садржај

Глава 1

Основни појмови и резултати

Моделирање многих појава у реалном животу често захтева увођење случајних параметара. Такви модели настају због недостатка информација о вредностима параметара који се појављују. Поставља се питање како радити са неким параметрима чије су вредности непознате. Једна од могућности за превазилажење овог проблема могла би бити замена правих, али непознатих параметара, неком врстом просечних вредности и рад са одговарајућим детерминистичким моделом уз наду да је то довољно "добра" апроксимација полазног проблема. Друга могућност је да се користи приступ стохастичке анализе и да се непознати параметри посматрају као случајне величине. Такав приступ се развијао веома брзо и сада представља важан алат у многим областима као што су вештачка интелигенција, механика, стохастички динамички системи, економија, итд.

1.1 Основни појмови теорије стохастичких процеса

Ради разумевања главних резултата, у овом поглављу су представљени основни појмови теорије стохастичких процеса. Уводе се стандардне ознаке и дефиниције, а потом се наводе неке познате теореме.

Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ простор вероватноће и $T \subset \mathbb{R}$ непразан скуп. Фамилија неопадајућих σ-алгебри $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ (у односу на релацију $\subset$), које су под-σ-алгебре σ-алгебре $\mathcal{F}$, назива се *филтрација (филтер)* σ-алгебре $\mathcal{F}$. Ако је филтрација $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ непрекидна здесна ($\mathcal{F}_t = \cap_{s>t, s\in T}\mathcal{F}_s$ за $\forall t \in T$) и ако σ-алгебра $\mathcal{F}_{\min\{t,t\in T\}}$ садржи све догађаје чија је мера P једнака нули, онда се каже да филтрација $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ задовољава *уобичајене услове.* У наставку ће се подразумевати да филтрација $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ задовољава уобичајене услове.

Нека се у сваком тренутку t временског интервала $T \subset [0, \infty)$ посматра нека карактеристика x физичког система, а да је при томе та карактеристика случајна. У том смислу, $x(t)$ је случајна променљива за свако $t \in T$. То значи да се фамилија свих случајних променљивих $\{x(t), t \in T\}$ може сматрати случајном величином која се мења током времена, односно, случајном функцијом времена. Тада је $\{x(t), t \in T\}$ случајни или стохастички процес. У наставку се наводи и формална дефиниција стохастичог процеса.

Дефиниција 1.1.1 *Нека је дат простор вероватноће* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *и непразан скуп* T. *Фамилија случајних променљивих* $\{x(t), t \in T\}$, *дефинисаних на овом простору вероватноће, назива се стохастички (случајни) процес, а скуп* T *се назива индексни (параметарски) скуп.*

Сходно претходној дефиницији, за свако фиксирано $t \in T$, добија се случајна променљива $x(\omega, t) : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$, тј. $\mathcal{F}$-мерљива функција, где је $\mathcal{B}^d$ Борелова σ-алгебра над $\mathbb{R}^d$. Са друге стране, за свако фиксирано $\omega \in \Omega$, $x(\omega, \cdot)$ представља функцију реалног аргумента $t \in T$, која се назива *трајекторија* или *реализација* која одговара исходу $\omega \in \Omega$. У даљем разматрању, стохастичи процеси ће представљати фамилије једнодимензионалних или вишедимензионалних реалних случајних променљивих. Поред тога, параметарски скуп T биће интервал $[0, \infty)$ или интервал облика $[0, \tilde{T}] \subset [0, \infty)$, при чему је $\tilde{T}$ произвољан позитиван број. Такође, уобичајено је да се $t \in T$ интерпретира као време.

У наставку се наводе дефиниције које се односе на особине стохастичких процеса, а које ће бити од значаја за разумевање главних резултата ове дисертације.

Дефиниција 1.1.2 *Нека је* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *простор вероватноће и на њему задат стохастички процес* $x = \{x(t), t \in T\}$. *Ако је случајна променљива* $x(t)$, *за свако* $t \in T$, *интеграбилна (квадратно-интеграбилна), тј. ако постоји коначно математичко очекивање* $E(x(t))$ *(тј.* $E|x(t)|^2 < \infty$*), тада је процес* x *интеграбилан (квадратно-интеграбилан).*

Дефиниција 1.1.3 *Нека је* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *простор вероватноће са филтрацијом* $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ *и на њему задат стохастички процес* $x = \{x(t), t \in T\}$. *Процес* x *је* $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$*-адаптиран ако је случајна променљива* $x(t)$ $\mathcal{F}_t$*-мерљива, за сваку вредност параметра* $t \in T$.

Дефиниција 1.1.4 *Нека је* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *простор вероватноће са филтрацијом* $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ *и на њему задат стохастички процес* $x = \{x(t), t \in T\}$. *Процес* x *је процес Маркова ако је, за свако* $s, t \in T$, *за које је* $s < t$, *и сваки Борелов скуп* $B \in \mathcal{B}^d$

$$P\{x(t) \in B | \mathcal{F}_s\} = P\{x(t) \in B | x(s)\} \quad с.и,$$

где је с.и. скраћеница за појам "скоро извесно".

Дефиниција 1.1.5 *Нека је* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *простор вероватноће са филтрацијом* $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ *и на њему задат* $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$*-адаптиран интеграбилан стохастички процес* $x = \{x(t), t \in T\}$. *Процес* x *је мартингал у односу на* $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ *ако је, за свако* $s, t \in T$, *за које је* $s < t$, $E[x(t)|\mathcal{F}_s] = x(s)$ *с.и.*

На крају овог поглавља се уводе важни појмови и ознаке који ће бити коришћени кроз целу дисертацију.

- Са $C(D;\mathbb{R}^d)$ је означена фамилија непрекидних функција $f:D\to\mathbb{R}^d$.
- За фиксирано $\tau>0$, $C([-\tau,0];\mathbb{R}^d)$ је фамилија непрекидних функција $\phi:[-\tau,0]\to\mathbb{R}^d$, са супремум нормом $||\phi||=\sup_{-\tau\leq\theta\leq 0}|\phi(\theta)|$ за свако $\phi\in C([-\tau,0];\mathbb{R}^d)$. Нормирани простор $(C([-\tau,0];\mathbb{R}^d),||\cdot||)$ је Банахов.
- Са $C^{2,1}(D\times\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$ означена је фамилија фунција $V:D\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, таквих да је V два пута непрекидно диференцијабилна по првом аргументу x и једном диференцијабилна по другом аргументу t.
- Са $C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];\mathbb{R}^d)$ представљена је фамилија ограничених, $\mathcal{F}_0$-мерљивих случајних променљивих са вредностима у $C([-\tau,0];\mathbb{R}^d)$.
- За реалне бројеве a и b, дефинише се

$$a\vee b=\max\{a,b\},\quad a\wedge b=\min\{a,b\}.$$

На комплетном простору вероватноће $(\Omega,\mathcal{F},P)$ дефинисана је класа случајних променљивих

$$L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)=\{X:\Omega\to\mathbb{R}^d|X \text{ је } \mathcal{F}\text{-мерљива случајна променљива}, E|X|^p<\infty\},$$

где је $p\geq 1$. За стандардно дефинисано сабирање вектора и множење вектора скаларом, нормирани простор $(L^p(\Omega;\mathbb{R}^d),_p||\cdot||)$, у односу на норму дефинисану са $_p||X||=(E|X|^p)^{1/p}$, је комплетан метрички простор, тј. он је Банахов простор.

Ако је $(\Omega,\mathcal{F},P)$ комплетан простор вероватноће са филтрацијом $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$, реални бројеви a и b такви да је $[a,b]\subset T$ и p позитиван реалан број, тада је:

$$-\ \mathcal{L}^p([a,b];\mathbb{R}^d)=\Big\{x=\{x(t),t\in[a,b]\}\ \Big|\ x \text{ је } \{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}\text{-адаптиран процес са вредностима у } \mathbb{R}^d\ \therefore\ \int_a^b|x(t)|^p dt<\infty \text{ с.и.}\Big\};$$

$$-\ \mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^d)=\Big\{\{x(t),t\geq 0\}\ \Big|\ (\forall T>0)(\{x(t),t\in[0,T]\}\in\mathcal{L}^p([0,T];\mathbb{R}^d))\Big\};$$

$$-\ \mathcal{M}^p([a,b];\mathbb{R}^d)=\Big\{\{x(t),t\in[a,b]\}\in\mathcal{L}^p([a,b];\mathbb{R}^d)\ \Big|\ E\int_a^b|x(t)|^p dt<\infty\Big\};$$

$$-\ \mathcal{M}^p(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^d)=\Big\{\{x(t),t\geq 0\}\ \Big|\ (\forall T>0)\big(\{x(t),t\in[0,T]\}\in\mathcal{M}^p([0,T];\mathbb{R}^d)\big)\Big\}.$$

1.2 Брауново кретање

Појам *Брауновог кретања* први пут се јавио у биологији и користио за описивање хаотичног кретања честица полена растворених у води. Касније је примећено да се иста правила могу применити и на друге појаве.

На пример, у физици Брауново кретање се проучава са аспекта молекуларно-кинетичке теорије топлоте, што је представљено у раду А. Ајнштајна из 1905. године. Такође, Л. Башелије, који се први бавио проучавањем квантитативних особина Брауновог кретања, у свом раду из 1900. године је помоћу Брауновог кретања описао непредвидиве промене у кретању цена акција и он се сматра зачетником пробабилистичког приступа финансијама.

Строгу математичку формулацију Брауновог кретања увео је Норберт Винер 1923. године. Захваљујући његовим резултатима [57, 58], Брауново кретање се сматра математичким појмом, а не само физичком појавом, и често се назива Винеров процес.

Дефиниција 1.2.1 *Нека је дат простор вероватноће* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *са филтрацијом* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *и на њему задат* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$*-адаптиран стохастички процес* $B = \{B(t), t \geq 0\}$. *Стохастички процес* B *је (једнодимензионално) Брауново кретање са параметром* $\sigma > 0$ *ако је*

1) $B(0) = 0$ *с.и;*

2) за свако $0 \leq s < t$, *прираштај* $B(t) - B(s)$ *независан од* $\mathcal{F}_s$;

3) за свако $0 \leq s < t$, *случајна променљива* $B(t) - B(s)$ *има* $\mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s))$ *расподелу.*

Брауново кретање са параметром $\sigma = 1$ *се назива стандардно Брауново кретање.*

Дефиниција 1.2.2 *Нека је* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *простор вероватноће са филтрацијом* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *и на њему задат* m*-димензионалан процес* $B=\{(B_1(t), \ldots, B_m(t)), t\geq 0\}$. *Процес* B *је (*m*-димензионално) Брауново кретање са параметрима* $\sigma_1, \ldots, \sigma_m > 0$ *ако су процеси* $B_1=\{B_1(t), t \geq 0\}, \ldots, B_m=\{B_m(t), t \geq 0\}$ *једнодимензионална Браунова кретања са параметрима* $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$, *редом, и ако су стохастички процеси* $B_1, \ldots, B_m$ *независни.* m*-димензионално Брауново кретање је стандардно ако је* $\sigma_1 = \cdots = \sigma_m = 1$.

Међу важнијим особинама Брауновог кретања издвајају се следеће:

- процес је другог реда, тј. $E|B(t)|^2 < \infty$, $t \geq 0$;
- процес је Маркова;
- средње квадратно је непрекидан;
- с.и. је непрекидан, тј. скоро све његове трајекторије су непрекидне функције;
- скоро све трајекторије су недиференцијабилне функције у свакој тачки;
- процес $\{B(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ је мартингал;
- скоро све трајекторије су неограничене варијације на сваком сегменту $[a, b] \subset [0, \infty)$.

1.3 Стохастички интеграл Итоа

У овом поглављу представљена је конструкција стохастичког интеграла у односу на процес Брауновог кретања. Како су, за скоро свако $\omega \in \Omega$, трајекторије Брауновог кретања B скоро свуда недиференцијабилне функције, стохастички интеграл се не може дефинисати на уобичајен начин. Међутим, може се дефинисати интеграл за широку класу стохастичких процеса користећи стохастичку природу Брауновог кретања. Овај интеграл је први дефинисао К. Ито 1949. године, те је данас познат као стохастички интеграл Итоа. Стохастичи интеграл Итоа је један од централних појмова у овој дисертацији с обзиром на то да фигурише у интегралном облику стохастичких диференцијалних једначина.

1.3.1 Конструкција стохастичког интеграла Итоа

Нека је фиксиран комплетан простор вероватноће $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ са филтрацијом $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ која задовољава уобичајене услове и нека је на њему дат стандардан процес Брауновог кретања B који је $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-адаптиран. Такође, за произвољан скуп $S \subset \mathbb{R}^d$, дефинише се његова карактеристична функција $I_S : \mathbb{R}^d \to \{0, 1\}$ као

$$I_S(s) = \begin{cases} 1, & s \in S, \\ 0, & s \in \mathbb{R}^d \backslash S. \end{cases}$$

Дефиниција 1.3.1 *Реалан стохастички процес $x = \{x(t), t \in [a, b]\}$ је прост (једноставан) процес ако постоји партиција сегмента $[a, b]$, таква да је $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ и ограничене $\mathcal{F}_{t_i}-$мерљиве случајне променљиве ξ_i, $0 \leq i \leq k-1$, такве да је*

$$x(t) = \xi_0 I_{[t_0,t_1]}(t) + \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i I_{(t_i,t_{i+1}]}(t), \quad t \in [a, b]. \tag{1.3.1}$$

Нека је $\mathcal{M}^0([a, b]; \mathbb{R})$ фамилија свих простих стохастичких процеса на датом простору вероватноће. Јасно је да је $\mathcal{M}^0([a, b]; \mathbb{R}) \subset \mathcal{M}^2([a, b]; \mathbb{R})$. Стохастички интеграл Итоа се конструише корак по корак. Најпре се дефинише стохастички интеграл простог стохастичког процеса из класе $\mathcal{M}^0([a, b]; \mathbb{R})$, а затим се дефиниција проширује на класу $\mathcal{M}^2([a, b]; \mathbb{R})$.

Дефиниција 1.3.2 *За произвољан процес $x \in \mathcal{M}^0([a, b]; \mathbb{R})$ облика (1.3.1) се дефинише стохастички интеграл Итоа у односу на Брауново кретање B са*

$$\int_a^b x(t)dB(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \xi_i (B(t_{i+1}) - B(t_i)). \tag{1.3.2}$$

Претходни интеграл Итоа процеса $x \in \mathcal{M}^0([a, b]; \mathbb{R})$ представља с.и. јединствено одређену случајну променљиву због чињенице да је, за сваки избор $t \in [a, b]$, репрезентација (1.3.1) с.и. јединствена. Такође, стохастички интеграл (1.3.2) припада класи $L^2(\Omega; \mathbb{R})$, што показује следећа теорема.

Теорема 1.3.1 *Нека су $x, y \in \mathcal{M}^0([a,b];\mathbb{R})$. Основне особине стохастичког интеграла Итоа су:*

1) *$\int_a^b x(t)dB(t)$ је $\mathcal{F}_b$-мерљива случајна променљива;*

2) *важи да је $E\int_a^b x(t)dB(t) = 0$;*

3) *важи стохастичка изометрија Итоа, односно*
$$E\left|\int_a^b x(t)dB(t)\right|^2 = E\int_a^b |x(t)|^2\,dt;$$

4) *ако су c_1 и c_2 реалне константе, онда је процес $c_1x + c_2y \in \mathcal{M}^0([a,b];\mathbb{R})$ и важи да је*
$$\int_a^b (c_1x(t) + c_2y(t))dB(t) = c_1\int_a^b x(t)dB(t) + c_2\int_a^b y(t)dB(t).$$

За даљу конструкцију стохастичког интеграла Итоа од значаја је следећа лема.

Лема 1.3.1 *Нека је $x \in \mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$. Тада постоји низ једноставних процеса $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}^0([a,b];\mathbb{R}^d)$, такав да је*
$$\lim_{n\to\infty} E\int_a^b |x(t) - y_n(t)|^2 dt = 0. \tag{1.3.3}$$

Нека је $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}^0([a,b];\mathbb{R}^d)$. Тада, на основу (1.3.3) и делова 3) и 4) у Теореми 1.3.1, следи да је
$$\begin{aligned} E\left|\int_a^b y_n(t)dB(t) - \int_a^b y_m(t)dB(t)\right|^2 &= E\left|\int_a^b [y_n(t) - y_m(t)]dB(t)\right|^2 \\ &= E\int_a^b |y_n(t) - y_m(t)|^2 dt \to 0, \quad n, m \to \infty, \end{aligned}$$

тј. $\{\int_a^b y_n(t)dB(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ је Кошијев низ у $(L^2(\Omega,\mathbb{R}),_2||\cdot||)$. Дакле, како је $(L^2(\Omega,\mathbb{R}),_2||\cdot||)$ Банахов простор, закључује се да гранична вредност низа $\{\int_a^b y_n(t)dB(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ постоји, што омогућава проширење дефиниције интеграла Итоа за процесе $x \in \mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$ у смислу следеће дефиниције.

Дефиниција 1.3.3 *Нека је стохастички процес $x \in \mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$ и нека је низ једноставних процеса $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}^0([a,b];\mathbb{R}^d)$ такав да задовољава релацију (1.3.3). Стохастички интеграл Итоа процеса x у односу на Брауново кретање B се дефинише као*
$$\int_a^b x(t)dB(t) = \lim_{n\to\infty}\int_a^b y_n(t)dB(t),$$
где је претходна гранична вредност посматрана у простору $(L^2(\Omega;\mathbb{R}),_2||\cdot||)$.

Овако дефинисаним стохастичким интегралом процеса $x \in \mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$, у односу на Брауново кретање, је с.и. јединствено одређена случајна променљива која не зависи од конкретног низа простих стохастичких процеса $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ који апроксимира процес x. Заиста, ако би постојао још један низ простих стохастичких процеса $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ који конвергира ка x у смислу $\lim_{n\to\infty} E\int_a^b |x(t)-z_n(t)|^2 dt = 0$, тада низ $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, дефинисан са $q_{2n-1} = y_n$ и $q_{2n} = z_n$, $n \in \mathbb{N}$, такође конвергира ка x у истом смислу. Дакле, низ $\{\int_a^b q_n(t)dB(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ је конвергентан у $L^2(\Omega;\mathbb{R})$, из чега следи да су граничне вредности (у $L^2(\Omega;\mathbb{R})$) низова $\{\int_a^b y_n(t)dB(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{\int_a^b z_n(t)dB(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ с.и. једнаке.

Тврђење аналогно Теореми 1.3.1 важи и за процесе $x, y \in \mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$. Особина 3) ове теореме се такође назива *стохастичка изометрија Итоа.* Још неке основне особине интеграла Итоа су наведене у наредној теореми, при чему су особине 3) и 4) уопштења особина 2) и 3) Теореме 1.3.1. На тај начин се Теорема 1.3.1 проширује на процесе из класе $\mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$.

Теорема 1.3.2 *Нека су дати реални бројеви $a<c<b$ и нека је $x \in \mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$.*

1) *Важи да је $\{x(t), t\in[a,c]\} \in \mathcal{M}^2([a,c];\mathbb{R})$ и $\{x(t), t\in[c,b]\} \in \mathcal{M}^2([c,b];\mathbb{R})$, при чему је*

$$\int_a^b x(t)dB(t) = \int_a^c x(t)dB(t) + \int_c^b x(t)dB(t).$$

2) *Ако је Y произвољна реална $\mathcal{F}_a$-мерљива случајна променљива, онда је стохастички процес $Yx = \{Yx(t), t\in[a,b]\} \in \mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$, такав да је*

$$\int_a^b Yx(t)dB(t) = Y\int_a^b x(t)dB(t).$$

3) *Важи да је $E\left(\int_a^b x(t)dB(t)\middle|\,\mathcal{F}_a\right) = 0$.*

4) *Важи стохастичка изометрија Итоа, односно*

$$E\left(\left|\int_a^b x(t)dB(t)\right|^2\middle|\,\mathcal{F}_a\right) = E\left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\middle|\,\mathcal{F}_a\right) = \int_a^b E\Big(\,|x(t)|^2\Big|\,\mathcal{F}_a\Big)dt.$$

Особина 1) Теореме 1.3.2 омогућава увођење појма неодређеног стохастичког интеграла Итоа, који је тема наредног одељка.

1.3.2 Неодређени стохастички интеграл Итоа

У овом одељку дефинише се неодређени стохастички интеграл Итоа и наводе се особине овог интеграла. Такође, дефиниција неодређеног стохастичког интеграла Итоа проширује се на вишедимензионални случај.

Дефиниција 1.3.4 *Нека је* $x \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$, *при чему је* $T > 0$. *Стохастички процес* $I = \{I(t), t \in [0,T]\}$, *дефинисан са*

$$I(t) = \int_0^t x(s)dB(s), \quad t \in [0,T],$$

се назива неодређени стохастички интеграл Итоа.

Битне особине неодређеног стохастичког интеграла Итоа представљене су следећом теоремом.

Теорема 1.3.3 *Ако је стохастички процес* $x \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$, *онда његов неодређени стохастички интеграл Итоа:*

1) *представља квадратно-интеграбилан мартингал у односу на филтрацију* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ *и важи*

$$E \sup_{0\le t\le T} \left| \int_0^t x(s)dB(s) \right|^2 \le 4E \int_0^T |x(s)|^2 ds;$$

2) *има непрекидну модификацију.*

Надаље се под неодређеним стохастичким интегралом Итоа сматра његова непрекидна модификација. У оквиру наредног разматрања је од значаја појам времена заустављања који се дефинише на следећи начин.

Дефиниција 1.3.5 *Нека је* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *простор вероватноће са филтрацијом* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$. *Случајна променљива* $\tau : \Omega \to [0,\infty]$ *се назива* $\{\mathcal{F}_t\}$*-време заустављања (време заустављања) ако је*

$$\{\omega \in \Omega \,|\, \tau(\omega) \le t\} \in \mathcal{F}_t, \ t \in [0,T].$$

Нека су τ и ρ два времена заустављања у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}$, при чему је $\tau \le \rho$ с.и. Стохастички интервал $[[\tau,\rho]]$ се дефинише са

$$[[\tau,\rho]] = \big\{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \,|\, \tau(\omega) \le t \le \rho(\omega)\big\}.$$

Аналогно, могу се дефинисати стохастички интервали $[[\tau,\rho[[,]]\tau,\rho]]$ и $]]\tau,\rho[[$. Тада је стохастички процес $\{I_{[[0,\tau]]}(t), t \ge 0\}$ ограничен, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}$-адаптиран процес који је непрекидан здесна. Штавише, за свако $t \ge 0$ је

$$\big\{\omega \in \Omega \,|\, I_{[[0,\tau]]}(t,\omega) \le r\big\} = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{F}_t, & r < 0, \\ \{\omega \in \Omega \,|\, \tau(\omega) < t\} \in \mathcal{F}_t, & 0 \le r < 1, \\ \Omega \in \mathcal{F}_t, & r \ge 1. \end{cases}$$

Према томе, $I_{[[0,\tau]]}(t)$ је $\mathcal{F}_t$-мерљива случајна променљива. Такође, ако је за неки реалан број $T > 0$ стохастички процес $x \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$, онда је и процес $\{x(t)I_{[[0,\tau]]}(t), t \in [0,T]\} \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$.

У наставку се уводи дефиниција стохастичког интеграла са временом заустављања. Због тога је неопходна следећа лема.

Лема 1.3.2 *Нека је дат комплетан простор вероватноће* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *са филтрацијом* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *која задовољава уобичајене услове и на њему* $\{\mathcal{F}_t\}$*-време заустављања* τ*.*

1) *Стохастички процес* $\{I_{[[0,\tau]]}(t), t \geq 0\}$ *је ограничен,* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}-$*адаптиран процес који је непрекидан здесна.*

2) *Ако је за неки реалан број* $T > 0$ *процес* $x \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$*, онда је и процес* $\{x(t)I_{[[0,\tau]]}(t), t \in [0,T]\} \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$*.*

Дефиниција 1.3.6 *Нека је* $(\Omega,\mathcal{F},P)$ *комплетан простор вероватноће са филтрацијом* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *која задовољава уобичајене услове и на њему два* $\{\mathcal{F}_t\}$*-времена заустављања* τ *и* ρ *за која је* $0 \leq \rho \leq \tau \leq T$ *с.и. за неку позитивну реалну константу* T*. За стохастички процес* $x \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$*, стохастички интеграл Итоа у односу на време заустављања* τ *дефинише се са*

$$\int_0^\tau x(s)dB(s) = \int_0^T x(s)I_{[[0,\tau]]}(s)dB(s).$$

Осим тога, дефинише се и интеграл

$$\int_\rho^\tau x(s)dB(s) = \int_0^\tau x(s)dB(s) - \int_0^\rho x(s)dB(s).$$

Особине, аналогне онима из Теорема 1.3.1 и 1.3.2, важе и за стохастичке интеграле у односу на време заустављања.

Теорема 1.3.4 *Нека је дат комплетан простор вероватноће* $(\Omega,\mathcal{F},P)$ *са филтрацијом* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *која задовољава уобичајене услове и на њему два* $\{\mathcal{F}_t\}$*-времена заустављања* τ *и* ρ *за која је* $0 \leq \rho \leq \tau \leq T$*, за неку позитивну реалну константу* T*, стандардно једнодимензионално Брауново кретање* $B = \{B(t), t \geq 0\}$ *и два независна, стандардна, једнодимензионална Браунова кретања* $B_1 = \{B_1(t), t \geq 0\}$ *и* $B_2 = \{B_2(t), t \geq 0\}$*. Тада, за стохастичке процесе* $x, y \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$*, важи:*

1) $\int_\rho^\tau x(s)dB(s) = \int_0^T x(s)I_{[[\rho,\tau]]}dB(s)$;

2) $E\int_\rho^\tau x(s)dB(s) = 0$;

3) $E\left|\int_\rho^\tau x(s)dB(s)\right|^2 = E\int_\rho^\tau |x(s)|^2\,ds$;

4) $E\left(\int_\rho^\tau x(s)dB(s)\middle|\,\mathcal{F}_\rho\right) = 0$;

5) $E\left(\left|\int_\rho^\tau x(s)dB(s)\right|^2\middle|\,\mathcal{F}_\rho\right) = E\left(\int_\rho^\tau |x(s)|^2\,ds\middle|\,\mathcal{F}_\rho\right)$;

6) $E\left(\int_\rho^\tau x(s)dB(s)\int_\rho^\tau y(s)dB(s)\middle|\,\mathcal{F}_\rho\right) = E\left(\int_\rho^\tau x(s)y(s)ds\middle|\,\mathcal{F}_\rho\right)$;

7) $E\left(\int_\rho^\tau x(s)dB_1(s)\int_\rho^\tau y(s)dB_2(s)\Big|\mathcal{F}_\rho\right)=0.$

Дефиниција стохастичког интеграла Итоа се на природан начин проширује и на вишедимензионалан случај. Нека је $T>0$ реална константа и нека је на комплетном простору вероватноће $(\Omega,\mathcal{F},P)$ са филтрацијом $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, која задовољава уобичајене услове, дато m-димензионално Брауново кретање $B=\{B(t)=(B_1(t),\ldots,B_m(t))^T, t\geq 0\}, m\in\mathbb{N}$.

Дефиниција 1.3.7 *Нека је $x=[x_{ij}]_{d\times m}\in\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$, при чему су стохастички процеси $x_{ij}\in\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$, $i\in\{1,\ldots,d\}$, $j\in\{1,\ldots,m\}$. Неодређени стохастички интеграл Итоа процеса x је стохастички процес са вредностима у $\mathbb{R}^d$, одређен са*

$$\int_0^t x(s)dB(s)=\int_0^t\begin{bmatrix}x_{11}(s) & \cdots & x_{1m}(s)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{d1}(s) & \cdots & x_{dm}(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dB_1(s)\\ \vdots\\ dB_m(s)\end{bmatrix},\ t\in[0,T],$$

при чему је његова i-та компонента, $i\in\{1,\ldots,d\}$, сума једнодимензионалних стохастичких интеграла

$$\sum_{j=1}^m\int_0^t x_{ij}(s)dB_j(s).$$

Вишедимензионални стохастички интеграл задовољава особине аналогне онима у једнодимензионалном случају. Лако је увидети да за произвољан реалан број $T>0$ релација $x\in\mathcal{M}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{d\times m})$ повлачи $x\in\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$, као и да релација $x\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{d\times m})$ повлачи $x\in\mathcal{L}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$. Дефиниција интеграла Итоа се може проширити и на класу стохастичких процеса $x\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{d\times m})$. Следећа лема омогућава такво проширење.

Лема 1.3.3 *Нека је $x\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{d\times m})$ и нека је за сваки природан број n дефинисана случајна променљива*

$$\tau_n=n\wedge\inf\left\{t\geq 0\,\middle|\,\int_0^t|x(s)|^2ds\geq n\right\}.$$

Тада:

1) *су случајне променљиве τ_n времена заустављања;*

2) *важи $\tau_n\uparrow\infty$ с.и;*

3) *стохастички процес $\{I_{[[0,\tau_n]]}(t)x(t), t\geq 0\}\in\mathcal{M}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{d\times m})$, тако да је*

$$I_n(t)=\int_0^t I_{[[0,\tau_n]]}(s)x(s)dB(s),\quad t\geq 0;\tag{1.3.4}$$

4) за свако $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, за које је $n_1 \leq n_2$, и за свако $0 \leq t \leq \tau_{n_1}$, важи $I_{n_2}(t) = I_{n_1}(t)$ с.и.

Дефиниција 1.3.8 *Нека је процес $x \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{d\times m})$. Тада је неодређени стохастички интеграл Итоа $\{\int_0^t x(s)dB(s), t \geq 0\}$ у односу на m-димензионално Брауново кретање $B = \{B(t), t \geq 0\}$ стохастички процес дефинисан на основу Леме 1.3.3 са*

$$\int_0^t x(s)dB(s) := I_n(t), \quad 0 \leq t \leq \tau_n,$$

при чему је интеграл $I_n(t)$ дефинисан са (1.3.4).

1.3.3 Формула Итоа за стохастичко диференцирање

Формула Итоа за стохастичко диференцирање има кључну улогу у стохастичкој анализи и њеним применама. Пре њеног навођења, дефинише се стохастички диференцијал стохастичког процеса. Надаље d и m представљају произвољне природне бројеве. За произвољну реалну матрицу $A = [a_{ij}]_{k\times\ell}$, ознака A^T представља транспоновану матрицу од A, односно $A^T = [a_{ji}]_{\ell\times k}$. Симбол $|\cdot|$ представља Еуклидску норму реалних вектора или следећу матричну норму

$$|A| = [trag(AA^T)]^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{\ell} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Дефиниција 1.3.9 *Нека је $(\Omega,\mathcal{F},P)$ комплетан простор вероватноће са филтрацијом $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ и на њему задат стандардан m-димензионални процес Брауновог кретања $B = \{B(t), t \geq 0\}$ који је $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-адаптиран. Стохастички процес $x = \{[x_1(t), \ldots, x_d(t)]^T, t \geq 0\}$ са вредностима у $\mathbb{R}^d$, који је $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-адаптиран, је стохастички процес Итоа ако постоје $f = [f_1, \ldots, f_d]^T \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ и $g = [g_{ij}]_{d\times m} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{d\times m})$, тако да је*

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t g(s)dB(s), \quad t \geq 0.$$

Процес x тада има стохастички диференцијал $dx(t)$ дат са

$$dx(t) = f(t)dt + g(t)dB(t), \quad t \geq 0. \tag{1.3.5}$$

Потребно је нагласити да се стохастички интеграл Итоа најчешће не може експлицитно одредити на основу његове дефиниције. Ово је случај и код класичне интеграције, где се за одређивање вредности интеграла примењују правила интегралног рачуна. У наставку ће бити наведена стохастичка верзија диференцирања сложене функције, позната као формула Итоа за стохастичо диференцирање. Формула Итоа није корисна само за одређивање интеграла Итоа, већ игра кључну улогу у стохастичкој анализи и решавању стохастичких диференцијалних једначина. Поред тога, примењује се у контексту оцене блискости тачног и апроксимативних решења различитих типова стохастичких диференцијалних једначина, што ће бити представљено у Глави 2 ове дисертације.

Теорема 1.3.5 (Формула Итоа) *Нека је $x = \{x(t), t \geq 0\}$ d-димензионални процес Итоа са стохастичким диференцијалом (1.3.5) и $V \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$. Тада је стохастички процес $\{V(x(t), t), t \geq 0\}$ такође процес Итоа који има стохастички диференцијал облика*

$$\begin{aligned} dV(x(t), t) =& V_t'(x(t), t)dt + V_x'(x(t), t)f(t)dt + \frac{1}{2} trag\Big[g^T(t)V_{xx}''(x(t), t)g(t)\Big]dt \\ &+ V_x'(x(t), t)g(t)dB(t), \quad с.и. \end{aligned}$$

1.4 Елементарне и интегралне неједнакости

У овом поглављу се најпре наводе познате елементарне неједнакости, Коши–Шварцова неједнакост, као и интегрална неједнакост Грунвал–Белмана, које ће бити примењиване у доказима главних резултата ове дисертације, изложених у Главама 2 и 3. Поред тога, наводе се познате неједнакости Чебишева, Хелдера, Буркхолдер–Дејвис–Гандија и Дуба, које су такође значајне за доказивање главних резултата. На крају поглавља су наведени појмови и резултати из теорије мера који имају посебно место у анализи главних резултата ове дисертације.

Елементарне неједнакости које ће бити коришћене су:

$$|a+b|^p \leq \Big[1 + \epsilon^{\frac{1}{p-1}}\Big]^{p-1} \left(|a|^p + \frac{|b|^p}{\epsilon}\right), \quad \epsilon > 0,\ a, b \in \mathbb{R},\ p \geq 2, \tag{1.4.1}$$

$$a^{p-1}b \leq \frac{(p-1)\epsilon a^p}{p} + \frac{b^p}{p\epsilon^{p-1}}, \quad \epsilon, a, b > 0,\ p \geq 2, \tag{1.4.2}$$

$$a^{p-2}b^2 \leq \frac{(p-2)\epsilon a^p}{p} + \frac{2b^p}{p\epsilon^{\frac{p-2}{2}}}, \quad \epsilon, a, b > 0,\ p \geq 2, \tag{1.4.3}$$

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b, \quad a, b > 0,\ \alpha \in [0,1], \tag{1.4.4}$$

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^p \leq (n^{(p-1)} \vee 1) \sum_{k=1}^n a^p, \quad n \in \mathbb{N},\ a_k > 0,\ k = 1, 2, \dots, n,\ p > 0, \tag{1.4.5}$$

$$(a+b)^p \leq (1+\theta)^{p-1}(a^p + \theta^{p-1}b^p), \quad a, b \geq 0,\ \theta > 0,\ p \geq 2. \tag{1.4.6}$$

Теорема 1.4.1 (Коши–Шварц) *Ако су дате две n-торке реалних бројева $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$, тада важи да је*

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k y_k|\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right).$$

Теорема 1.4.2 (Грунвал–Белман) *Нека је $T > 0$, $c \geq 0$, $u(\cdot)$ ограничена ненегативна Борелова функција дефинисана на $[0,T]$ и $v(\cdot)$ ненегативна интеграбилна функција на $[0,T]$. Ако је*

$$u(t) \leq c + \int_0^t v(s)u(s)ds, \qquad t \in [0,T],$$

тада је

$$u(t) \leq ce^{\int_0^t v(s)ds}, \qquad t \in [0,T].$$

Теорема 1.4.3 (Чебишев) *Нека је за $r \in \mathbb{N}$, $E|X|^r < \infty$. Тада, за свако $\epsilon > 0$, важи да је*

$$P\left\{|X| > \epsilon\right\} \leq \frac{E|X|^r}{\epsilon^r} \tag{1.4.7}$$

Теорема 1.4.4 (Буркхолдер–Дејвис–Гандија) *Нека је стохастички процес $x \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{d\times d_1})$. Тада, за сваки позитиван број p, постоје позитивне константе c_p и C_p такве да је*

$$c_p E\left(\int_0^t |x(s)|^2 ds\right)^{p/2} \leq E \sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s x(u)dB(u)\right|^p \leq C_p E\left(\int_0^t |x(s)|^2 ds\right)^{p/2}.$$

Специјално, за $p \in (0,2)$ је $c_p = (p/2)^p$ и $C_p = (32/p)^{p/2}$, за $p = 2$ је $c_p = 1$ и $C_p = 4$, а за $p > 2$ је $c_p = 1/(2p)^{p/2}$ и $C_p = [p^{p+1}/2(p-1)^{p-1}]^{p/2}$.

Постоји неколико верзија Дубове неједнакости које се односе на мартингале и субмартингале. Наводи се само она која ће се користити у наставку.

Теорема 1.4.5 (Дуб) *Нека је $p > 1$, $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ непрекидан здесна мартингал и нека је $E|x(t)|^p < \infty$, за свако $t \in [0,\infty)$. Ако је $[a,b] \subset [0,\infty)$ ограничен интервал, тада важи*

$$E \sup_{a\leq t\leq b} |x(t)|^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E|x(b)|^p.$$

Дефиниција 1.4.1 *Нека је $(G, \mathcal{G}, \mu)$ простор мере. Мера μ је σ-коначна ако скуп G може бити прекривен помоћу највише пребројиво много мерљивих скупова коначне мере.*

Дефиниција 1.4.2 *Нека је дат простор мере $(G, \mathcal{G}, \mu)$ и функција $f : G \to \mathbb{R}$ (или $f : G \to \mathbb{C}$). Функција f је G-интеграбилна ако је $\mathcal{G}$-мерљива и*

$$\int_G |f| d\mu < \infty.$$

Теорема 1.4.6 (Хелдер) *Нека је дат простор мере $(G, \mathcal{G}, \mu)$ и нека су функције $f, g : G \to \mathbb{R}^d$ (или $f, g : G \to \mathbb{C}^d$) мерљиве. Ако су p и q реални бројеви такви да је $1 < p, q < \infty$ и $1/p + 1/q = 1$, тада је*

$$\int_G |fg| d\mu \leq \left(\int_G |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_G |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.4.8}$$

Специјалан случај ове теореме за $p = q = 2$ је неједнакост Коши–Шварц–Буњаковског.

Теорема 1.4.7 (Фубини) *Нека су $(F, \mathcal{F}, \mu)$ и $(G, \mathcal{G}, \nu)$ простори σ-коначних мера и нека је функција f $F \times G$-интеграбилна. Тада је*

$$\int_{F\times G} f d(\mu \times \nu) = \int_F \left(\int_G f d\nu \right) d\mu = \int_G \left(\int_F f d\mu \right) d\nu.$$

Теорема 1.4.8 (Тонели) *Нека су $(F, \mathcal{F}, \mu)$ и $(G, \mathcal{G}, \nu)$ простори σ-коначних мера и нека је функција f $F \times G \to \mathbb{R}$ ненегативна и $(\mu \times \nu)$-мерљива. Тада је*

$$\int_{F\times G} f d(\mu \times \nu) = \int_F \left(\int_G f d\nu \right) d\mu = \int_G \left(\int_F f d\mu \right) d\nu.$$

Теорема Фубинија, као и њена последица (Теорема Тонелија), примењује се у доказима главних резултата ове дисертације, при чему се мења редослед интеграције код математичког очекивања Лебеговог интеграла.

1.5 Стохастичке диференцијалне једначине различитих типова

СДЈ су посебно корисне у ситуацијама када су присутни случајни или недетерминистички утицаји на системе који се разматрају. Због различитих особина система, као и спољашњих утицаја на систем, настала је потреба за разматрањем различитих типова СДЈ. Многе појаве из механике, физике, биологије и финансија, као и многих других области науке и праксе се математички моделирају помоћу СДЈ, што указује на њихов велики значај. Оне су предмет разматрања великог броја аутора (видети, на пример, [19, 30, 36]). Битни проблеми у оквиру проучавања СДЈ су егзистенција и јединственост решења, оцене момената и асимптотско понашање решења, као и апроксимације решења.

У овом поглављу дефинисани су различити типови СДЈ и наведене су неке основне особине за сваки тип једначина. Штавише, дефинисана су решења тих једначина, као и довољни услови њихове егзистенције и јединствености. Потребно је нагласити да то нису једини услови егзистенције и јединствености решења. Одређивање алтернативних услова егзистенције и јединствености решења, а тиме и нових класа СДЈ чија решења постоје и јединствена су, представља значајну и актуелну тему у оквиру стохастичке анализе.

Надаље, нека је дат комплетан простор вероватноће $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ са филтрацијом $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ која задовољава уобичајене услове и m-димензионално стандардно Брауново кретање $B(t) = (B^1(t), B^2(t), ..., B^m(t))^T$, $t \geq 0$, које је $\{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}$-адаптирано.

1.5.1 Стохастичке диференцијалне једначине

У овом одељку се разматра основни облик СДЈ, код којих промена стања система који се њима моделирају зависи од тренутног стања тих система и времена. Дакле, од значаја је d-димензионална СДЈ облика

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dB(t), \quad t \in [0, T], \tag{1.5.1}$$

са почетним условом $x_0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$, независним од Брауновог кретања B, док су коефицијент преноса $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ и коефицијент дифузије $g : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}$ Борел-мерљиве функције.

Решење $x = \{x(t), t \in [0, T]\}$ СДЈ је *строго* ако су простор вероватноће, филтрација, Брауново кретање и коефицијенти једначине унапред задати и фиксирани, а на основу њих се одређује решење $x = \{x(t), t \in [0, T]\}$.

Решење $x = \{x(t), t \in [0, T]\}$ СДЈ је *слабо* ако су фиксирани само коефицијенти ове једначине, а дозвољена је конструкција одговарајућег простора вероватноће, филтрације и Брауновог кретања, тако да процес $x = \{x(t), t \in [0, T]\}$ буде решење дате једначине.

У наставку, простор вероватноће $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ је фиксиран, јер су од интереса само строга решења разматраних једначина.

Дефиниција 1.5.1 *За d-димензионални стохастички процес $x = \{x(t), t \in [0, T]\}$ каже се да је решење СДЈ (1.5.1) са почетним условом x_0 ако:*

1) је процес x с.и. непрекидан и $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$-адаптиран;

2) $\{f(t, x(t)), t \in [0, T]\} \in \mathcal{L}^1([0, T]; \mathbb{R}^d)$, $\{g(t, x(t)), t \in [0, T]\} \in \mathcal{L}^2([0, T]; \mathbb{R}^{d\times m})$;

3) за свако $t \in [0, T]$ важи

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds + \int_0^t g(s, x(s))dB(s) \quad \text{с.и.}$$

Решење $\{x(t), t \in [0, T]\}$ СДЈ (1.5.1) је јединствено ако је било које друго решење $\{\widetilde{x}(t), t \in [0, T]\}$ стохастички еквивалентно са њим, тј. ако је

$$P\{x(t) = \widetilde{x}(t) \text{ за свако } t \in [0, T]\} = 1.$$

Наредном теоремом су представљени довољни услови егзистенције и јединствености решења СДЈ (1.5.1).

Теорема 1.5.1 (Теорема 2.3.1, Лема 2.3.2, [30]) *Нека су* $f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *и* $g : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}$ *Борел-мерљиве функције које задовољавају глобални Липшицов услов и услов линеарног раста, тј. постоје позитивне константе* L *и* $\bar{L}$*, тако да, за свако* $x, y \in \mathbb{R}^d$ *и* $t \in [0,T]$*, важи да је*

$$\begin{aligned}
&|f(t,x) - f(t,y)|^2 \vee |g(t,x) - g(t,y)|^2 \leq \bar{L}|x-y|^2,\\
&|f(t,x)|^2 \vee |g(t,x)|^2 \leq L(1+|x|^2).
\end{aligned}$$

Тада постоји јединствено, с.и. непрекидно, строго решење $x \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^d)$ *СДЈ (1.5.1), за које важи да је*

$$E \sup_{0\leq t\leq T} |x(t)|^2 < \infty.$$

1.5.2 Функционалне стохастичке диференцијалне једначине

У пракси се јавила потреба за моделима који описују системе чија будућа стања зависе, не само од тренутног стања, већ и од прошлих стања тих система. Овакви модели се, у многим случајевима, описују *функционалним* СДЈ.

Разматра се d-димензионална функционална СДЈ

$$dx(t) = F(x_t)dt + G(x_t)dB(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.5.2}$$

при чему је

$$x_t = \{x(t+\theta), \theta \in [-\tau, 0]\} \tag{1.5.3}$$

стохастички процес са вредностима у $C([-\tau,0];\mathbb{R}^d)$, $\tau > 0$ и

$$F : C([-\tau,0];\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d, \quad G : C([-\tau,0];\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^{d\times m},$$

су Борел-мерљиви функционали.

Због зависности од прошлости, почетни услов x_0 једначине (1.5.2) се мора задати на читавом интервалу $[-\tau, 0]$, тј.

$$x_0 = \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}, \tag{1.5.4}$$

где је $\xi \in C([-\tau,0];\mathbb{R}^d)$ $\mathcal{F}_0$-мерљива случајна променљива и важи да је $E||\xi||^2 < \infty$.

На основу дефиниције стохастичког диференцијала Итоа, једначина (1.5.2) се може представити у еквивалентном интегралном облику

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F(x_s)ds + \int_0^t G(x_s)dB(s), \quad t \in [0,T]. \tag{1.5.5}$$

У наставку је дата дефиниција решења једначине (1.5.2) које задовољава почетни услов (1.5.4).

Дефиниција 1.5.2 *За d-димензионални стохастички процес $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ каже се да је решење функционалне СДЈ (1.5.2) са почетним условом (1.5.4) ако је:*

1) с.и. непрекидан и $\{x(t), t \in [0,T]\}$ је $\{\mathcal{F}\}_{t\in[0,T]}$-адаптиран процес;

2) $\int_0^T |F(x_t)|dt < \infty$ с.и. и $\int_0^T |G(x_t)|^2 dt < \infty$ с.и.

3) $x_0 = \xi$ с.и. и за свако $t \in [0,T]$ важи интегрални облик (1.5.5) с.и.

Решење $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ је јединствено ако је било које друго решење $\{\widetilde{x}(t), t \in [-\tau, T]\}$ стохастички еквивалентно са њим, тј. ако је

$$P\{x(t) = \widetilde{x}(t) \text{ за свако } t \in [-\tau, T]\} = 1. \tag{1.5.6}$$

Довољни услови егзистенције и јединствености решења једначине (1.5.2) са почетним условом (1.5.4), представљени су следећом теоремом.

Теорема 1.5.2 (Теорема 5.2.2, Лема 5.2.3, [30]) *Нека постоје позитивне константе $\bar{L}$ и L тако да важе услови:*

- *(униформни Липшицов услов) за свако $\varphi, \phi \in C\left([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d\right)$,*

$$|F(\varphi) - F(\phi)|^2 \vee |G(\varphi) - G(\phi)|^2 \leq \bar{L}||\varphi - \phi||^2; \tag{1.5.7}$$

- *(услов линеарног раста) за свако $\varphi \in C\left([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d\right)$,*

$$|F(\varphi)|^2 \vee |G(\varphi)|^2 \leq L(1 + ||\varphi||^2). \tag{1.5.8}$$

Тада постоји јединствено, с.и. непрекидно решење $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ једначине (1.5.10) са почетним условом (1.5.4). Такође, решење припада класи $\mathcal{M}^2\left([-\tau, T]; \mathbb{R}^d\right)$, тј. ако важи $E||\xi||^2 < \infty$, онда је

$$E \sup_{-\tau \leq t \leq T} |x(t)|^2 < \infty. \tag{1.5.9}$$

1.5.3 Неутралне функционалне стохастичке диференцијалне једначине

Природно уопштење једначина са особином зависности од прошлости представљају *неутралне* функционалне СДЈ у којима се, поред непознатог процеса x, под диференцијалом јавља и функционал чији је аргумент са кашњењем. У том смислу, разматра се следећа d-димензионална неутрална функционална СДЈ

$$d\left[x(t) - U(x_t)\right] = F(x_t)dt + G(x_t)dB(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.5.10}$$

са почетним условом (1.5.4), при чему је $\tau > 0$,

$$U : C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d,\ F : C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d,\ G : C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^{d\times m},$$

су Борел-мерљиви функционали и x_t је дато у (1.5.3). Притом се функционал U често назива неутрални члан.

Једначина (1.5.10) се може представити у еквивалентном интегралном облику

$$x(t) - U(x_t) = x_0 - U(x_0) + \int_0^t F(x_s)ds + \int_0^t G(x_s)dB(s), \quad t \in [0, T]. \tag{1.5.11}$$

Дефиниција решења СДЈ (1.5.10) са почетним условом (1.5.4) може се формулисати на следећи начин.

Дефиниција 1.5.3 *За d-димензионални стохастички процес $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ се каже да је решење СДЈ (1.5.10) са почетним условом (1.5.4) ако је:*

1) с.и. непрекидан и $\{x(t), t \in [0, T]\}$ је $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$-адаптиран процес;

2) $\int_0^T |F(x_t)|dt < \infty$ с.и. и $\int_0^T |G(x_t)|^2 dt < \infty$ с.и.;

3) $x_0 = \xi$ с.и. и за свако $t \in [0, T]$ важи интегрални облик (1.5.11) с.и.

Решење $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ је јединствено ако је било које друго решење $\{\widetilde{x}(t), t \in [-\tau, T]\}$ стохастички еквивалентно са њим, тј. ако важи (1.5.6).

Довољни услови егзистенције и јединствености решења неутралне функционалне СДЈ (1.5.10), сходно Теореми 1.5.2, су униформни Липшицов услов (1.5.7) и услов линеарног раста (1.5.8), с обзиром на то да се за $U(\cdot) \equiv 0$ једначина (1.5.10) своди на једначину (1.5.2). Међутим, остаје питање који услов би требало да задовољава функционал U. Одговор даје следећа теорема егзистенције и јединствености решења једначине (1.5.10).

Теорема 1.5.3 (Теорема 6.2.2, [30]) *Нека функционали F и G задовољавају униформни Липшицов услов (1.5.7) и услов линеарног раста (1.5.8) и нека постоји константа $k \in (0, 1)$ тако да, за свако $\varphi, \phi \in C\big([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d\big)$, важи да је*

$$|U(\varphi) - U(\phi)| \le k||\varphi - \phi||. \tag{1.5.12}$$

Тада постоји јединствено, с.и. непрекидно решење $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ једначине (1.5.10) са почетним условом (1.5.4). Такође, решење припада класи $\mathcal{M}^2\left([-\tau, T]; \mathbb{R}^d\right)$, тј. ако је $E||\xi||^2 < \infty$, онда важи (1.5.9).

У претходној теореми, униформни Липшицов услов (1.5.7) се може ослабити, односно заменити локалним Липшицовим условом, а да тврђење теореме остане исто. Тачније, важи следећа теорема.

Теорема 1.5.4 (Теорема 6.2.5, [30]) *Нека важе услови (1.5.8) и (1.5.12) и нека функционали F и G задовољавају локални Липшицов услов, тј. нека за сваки природан број n, постоји позитивна константа L_n, тако да, за свако $\varphi, \phi \in C\left([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d\right)$, за које је $||\varphi|| \vee ||\phi|| \leq n$, важи да је*

$$|F(\varphi) - F(\phi)|^2 \vee |G(\varphi) - G(\phi)|^2 \leq L_n ||\varphi - \phi||^2. \tag{1.5.13}$$

Тада постоји јединствено, с.и. непрекидно решење $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ једначине (1.5.10) са почетним условом (1.5.4). Такође, решење припада класи $\mathcal{M}^2\left([-\tau, T]; \mathbb{R}^d\right)$, тј. ако је $E||\xi||^2 < \infty$, онда важи (1.5.9).

1.5.4 Неутралне стохастичке диференцијалне једначине са константним кашњењем

Неутралне СДЈ са константним кашњењем могу се сматрати специјалном класом неутралних функционалних СДЈ. Неутрална СДЈ са константним кашњењем је облика

$$d[x(t) - u(x(t - \tau))] = f(x(t), x(t-\tau))dt + g(x(t), x(t-\tau))dB(t), \ t \in [0, T], \tag{1.5.14}$$

са почетним условом (1.5.4), при чему је $\tau > 0$ и

$$f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times m}, \quad u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

су Борел-мерљиве функције. Ако се F, G и U дефинишу као

$$F(\phi) = f(\phi(0), \phi(-\tau)), \ G(\phi) = g(\phi(0), \phi(-\tau)), \ U(\phi) = u(\phi(-\tau)),$$

за $\phi \in C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d)$, једначина (1.5.14) је облика (1.5.10). Стога, под условима Теореме 1.5.4 следи да једначина (1.5.14) има јединствено решење, односно важи следећа теорема.

Теорема 1.5.5 *Нека функције f и g задовољавају локални Липшицов услов, тј. нека за свако $R \geq 1$ постоји константа $K_R > 0$, тако да, за свако $x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^d$, за које је $|x| \vee |y| \vee |\bar{x}| \vee |\bar{y}| \leq R$, важи да је*

$$|f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y})|^2 \vee |g(x, y) - g(\bar{x}, \bar{y})|^2 \leq K_R\big(|x - \bar{x}|^2 + |y - \bar{y}|^2\big), \tag{1.5.15}$$

и нека важи услов линеарног раста, тј. нека постоји константа $K > 0$, тако да, за свако $x, y \in \mathbb{R}^d$, важи да је

$$|f(x, y)|^2 \vee |g(x, y)|^2 \leq K(1 + |x|^2 + |y|^2). \tag{1.5.16}$$

Штавише, нека постоји константа $k \in (0, 1)$, тако да је за свако $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$|u(x) - u(y)| \leq k|x - y|. \tag{1.5.17}$$

Тада постоји јединствено решење једначине (1.5.14).

Услови Теореме 1.5.5 се могу ослабити на следећи начин.

Теорема 1.5.6 (Теорема 6.3.1, [30]) *Нека постоји константа $K > 0$, тако да, за свако $x, y \in \mathbb{R}^d$, важи да је*

$$|f(x,y)|^2 \vee |g(x,y)|^2 \vee |u(x)|^2 \leq K(1 + |x|^2 + |y|^2), \tag{1.5.18}$$

и нека, за свако $R \geq 1$ постоји константа $K_R > 0$, тако да, за свако $y \in \mathbb{R}^d$ и $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^d$, за које је $|x| \vee |\tilde{x}| \leq R$, важи да је

$$|f(x,y) - f(\tilde{x},y)|^2 \vee |g(x,y) - g(\tilde{x},y)|^2 \leq K_R|x - \tilde{x}|^2. \tag{1.5.19}$$

Тада постоји јединствено решење једначине (1.5.14).

1.5.5 Неутралне стохастичке диференцијалне једначине са временски зависним кашњењем

Због посебног облика зависности од прошлости, описане функцијом кашњења, ова класа једначина се често проучава посебно. Поред раније уведених ознака и основних претпоставки, уводи се и Борел-мерљива функција $\delta : [0,T] \to [0,\tau]$. Како је, са аспекта примена, природно разматрати СДЈ на коначном временском интервалу, разматра се следећа неутрална СДЈ са временски зависним кашњењем

$$\begin{aligned} &d[x(t) - u(x(t-\delta(t)))] \\ &\quad = f(x(t), x(t-\delta(t)))dt + g(x(t), x(t-\delta(t)))dB(t), \quad t \in [0,T], \end{aligned} \tag{1.5.20}$$

са почетним условом (1.5.4), при чему је $\tau > 0$, и

$$f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}, \quad u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

су Борел-мерљиве функције. Ако се функционали F, G и U дефинишу на следећи начин:

$$F(\phi) = f(\phi(0), \phi(-\delta(t))),\ G(\phi) = g(\phi(0), \phi(-\delta(t))),\ U(\phi) = u(\phi(-\delta(t))),$$

за $\phi \in C([-\tau, 0]; R^d)$ и $t \in [0,T]$, тада се једначина (1.5.20) своди на једначину (1.5.10). Стога, услови (1.5.15), (1.5.16) и (1.5.17) гарантују егзистенцију и јединственост решења једначине (1.5.20). Са друге стране, ако је $\inf_{0\leq t\leq T} \delta(t) > 0$, може се показати да услови (1.5.18) и (1.5.19) гарантују егзистенцију и јединственост решења једначине (1.5.20). Ове резултате обједињује следећа теорема.

Теорема 1.5.7 (Теорема 6.3.2, [30]) *Ако важе услови (1.5.15), (1.5.16) и (1.5.17), тада постоји јединствено решење једначине (1.5.20). Са друге стране, ако за функцију кашњења $\delta(t)$ важи $\inf_{0\leq t\leq T} \delta(t) > 0$, тада услови (1.5.18) и (1.5.19) гарантују егзистенцију и јединственост решења једначине (1.5.20).*

Битно је напоменути да се највећи део ове дисертације односи на особине метода апроксимације решења једначина овог типа. Разматрају се једнодимензионалне и d-димензионалне неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем, са акцентом на довољним условима конвергенције и дивергенције неколико нумеричких метода Ојлеровог типа, што ће бити представљено у наредним главама дисертације. Притом се, у зависности од разматраног контекста разматрају случајеви када је $t\in[0,T]$ и $t\in[0,\infty)$.

Сходно томе, од значаја је и d-димензионална неутрална СДЈ са временски зависним кашњењем и вредностима параметра t у интервалу $[0,\infty)$, односно једначина облика

$$d[x(t)-u(x(t-\delta(t)))]=f(x(t),x(t-\delta(t)))dt+g(x(t),x(t-\delta(t)))dB(t), \qquad (1.5.21)$$

за $t\geq 0$, са почетним условом (1.5.4), где су f, g и u Борел-мерљиве функције.

Једноставности ради, у наставку се обједињују претпоставке уведене у овом поглављу, чија је формулација кључна за доказ главних резултата дисертације.

$\mathcal{H}_1'$: (*Глобални Липшицов услов*) Постоји константа $K_1>0$, тако да, за свако $x,y,\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^d$, важи да је

$$|f(x,y)-f(\bar{x},\bar{y})|^2\vee|g(x,y)-g(\bar{x},\bar{y})|^2\leq K_1\big(|x-\bar{x}|^2+|y-\bar{y}|^2\big).$$

$\mathcal{H}_1$: (*Локални Липшицов услов*) Нека за свако $R\geq 1$ постоји константа $K_R>0$, тако да, за свако $x,y,\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^d$ за које је $|x|\vee|y|\vee|\bar{x}|\vee|\bar{y}|\leq R$, важи да је

$$|f(x,y)-f(\bar{x},\bar{y})|^2\vee|g(x,y)-g(\bar{x},\bar{y})|^2\leq K_R\big(|x-\bar{x}|^2+|y-\bar{y}|^2\big).$$

$\mathcal{H}_2$: Постоји константа $k\in(0,1)$ тако да, за свако $x,y\in\mathbb{R}^d$, важи да је

$$|u(x)-u(y)|\leq k|x-y|. \qquad (1.5.22)$$

Штавише, претпоставља се да је $u(0)=0$ што, заједно са (1.5.22), имплицира

$$|u(x)|\leq k|x|. \qquad (1.5.23)$$

1.5.6 Неутралне стохастичке диференцијалне једначине са временски зависним кашњењем и прелазима Маркова

Како СДЈ описују многе појаве из реалног живота, из практичних проблема је проистекло велико интересовање бројних аутора за описивање хибридних система. Наиме, уочено је да се неки системи мењају у складу са различитим законима у току неког временског интервала и да у случајним моментима прелазе са једног режима рада у други. То је основна мотивација за проучавање *неутралних СДЈ са временски зависним кашњењем и прелазима Маркова,* које представљају посебну класу хибридних система.

Поред већ уведених ознака, нека је $r = \{r(t), t \geq 0\}$ непрекидан здесна процес Маркова, дефинисан на датом простору вероватноће, са коначним скупом стања $S = \{1, 2, ..., N\}$ и генератором $\Gamma = (\gamma_{ij})_{N\times N}$, дефинисаним са

$$P\{r(t+\Delta) = j | r(t) = i\} = \begin{cases} \gamma_{ij}\Delta + o(\Delta) & i \neq j, \\ 1 + \gamma_{ii}\Delta + o(\Delta) & i = j, \end{cases}$$

при чему је $\Delta > 0$. У последњем изразу, $\gamma_{ij} \geq 0$ је интензитет прелаза из стања i у стање j када је $i \neq j$, док је

$$\gamma_{ii} = -\sum_{j\neq i} \gamma_{ij}.$$

Претпоставља се да је процес Маркова r независан у односу на Брауново кретање B. Познато је да се процес Маркова r може представити као стохастички интеграл у односу на Пуасонову случајну меру ν као

$$dr(t) = \int_R \tilde{h}(r(t-), \ell)\nu(dt, d\ell), \quad t \geq 0,$$

са почетним условом $r(0) = i_0 \in S$, где је $\nu(dt, d\ell)$ Пуасонова случајна мера са интензитетом $dt \times m(d\ell)$, при чему је m Лебегова мера на $\mathbb{R}$, док се експлицитна дефиниција за $\tilde{h}$ може наћи у [1].

Разматра се једнодимензионална неутрална СДЈ са временски зависним кашњењем и прелазима Маркова

$$\begin{aligned} &d[x(t) - u(x(t-\delta(t)), r(t))] \\ &\quad = f(x(t), x(t-\delta(t)), r(t))dt + g(x(t), x(t-\delta(t)), r(t))dB(t), \ t \in [-\tau, T] \end{aligned} \tag{1.5.24}$$

и почетним условима

$$x_0 = \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\} \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; \mathbb{R}), \tag{1.5.25}$$

$$r(0) = i_0 \in S, \tag{1.5.26}$$

при чему су

$$f : \mathbb{R}^2 \times S \to \mathbb{R}, \quad g : \mathbb{R}^2 \times S \to \mathbb{R}, \quad u : \mathbb{R} \times S \to \mathbb{R}$$

Борел-мерљиве функције и $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ је једнодимензионалан процес.

Дефиниција 1.5.4 *За стохастички процес $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ се каже да је решење једначине (1.5.24) са почетним условима (1.5.25) и (1.5.26) ако је:*

1) с.и. непрекидан и $\{x(t), t \in [0, T]\}$ је $\{\mathcal{F}\}_{t\in[0,T]}$-адаптиран процес;

2) $\int_0^T |f(x(t), x(t-\delta(t)), r(t))| dt < \infty$ *с.и*, $\int_0^T |g(x(t), x(t-\delta(t)), r(t)))|^2 dt < \infty$ *с.и.*

3) $x_0 = \xi$ *с.и. и за свако* $t \in [0, T]$ *важи интегрални облик једначине (1.5.24) с.и.*

Решење $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ *је јединствено ако је било које друго решење* $\{\widetilde{x}(t), t \in [-\tau, T]\}$ *стохастички еквивалентно са њим, тј. ако важи (1.5.6).*

У оквиру следеће теореме су представљени довољни услови егзистенције и јединствености решења једначине (1.5.24).

Теорема 1.5.8 *Нека постоји константа* $K > 0$ *и, за свако* $R \geq 1$, *константа* $K_R > 0$, *тако да важи:*

- *(локални Липшицов услов) за свако* $x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}$, *за које је* $|x| \vee |y| \vee |\bar{x}| \vee |\bar{y}| \leq R$ *и* $i \in S$,

$$|f(x, y, i) - f(\bar{x}, \bar{y}, i)|^2 \vee |g(x, y, i) - g(\bar{x}, \bar{y}, i)|^2 \leq K_R(|x - \bar{x}|^2 + |y - \bar{y}|^2);$$

- *(услов линеарног раста) за свако* $x, y \in \mathbb{R}$ *и* $i \in S$,

$$|f(x, y, i)|^2 \vee |g(x, y, i)|^2 \leq K(1 + |x|^2 + |y|^2).$$

Штавише, нека постоји константа $\beta \in (0, 1)$, *тако да је, за свако* $x, y \in \mathbb{R}$ *и* $i \in S$,

$$|u(x, i) - u(y, i)| \leq \beta |x - y|.$$

Тада постоји јединствено, с.и. непрекидно решење $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ *једначине (1.5.24) са почетним условима (1.5.25) и (1.5.26). Такође, решење припада класи* $\mathcal{M}^2([-\tau, T]; \mathbb{R})$, *тј. ако важи* $E||\xi||^2 < \infty$, *онда важи* (1.5.9).

Потребно је нагласити да се у постојећој литератури могу наћи различита уопштења или екстензије наведених теорема егзистенције и јединствености решења за различите типове СДЈ. Један од праваца уопштења је замена услова линеарног раста за коефицијенте преноса и дифузије условима који дозвољавају да коефицијенти буду са високим степеном нелинеарности. Такви су, на пример, уопштени услови Хасминског, под којима су бројни аутори разматрали квалитативна и квантитативна својства тачних и апроксимативних решња СДЈ различитих типова (видети, на пример, [35, 38]). У том смислу ће, у оквиру наредних глава, након увођења одговарајућих ознака и претпоставки, бити наведене теореме које се експлицитно примењују у доказима главних резултата и примерима и гарантују првенствено егзистенцију и јединственост глобалних решења неутралних СДЈ са временским зависним кашњењем (и прелазима Маркова) под уопштеним условима Хасминског.

1.6 Метода Ојлер–Марујаме

Као моћан алат за моделирање бројних појава из реалног живота, СДЈ су постале врло актуелна тема и предмет проучавања бројних аутора. Међутим, због своје сложене структуре, експлицитна решења ових једначина је у већини случајева тешко одредити. Због тога је од значаја разматрање различитих нумеричких метода помоћу којих се генеришу апроксимативна решења једначина које се проучавају. Као експлицитна нумеричка метода, метода Ојлер–Марујаме, привукла је пажњу многих аутора [6, 14, 15, 22, 38, 39, 43, 56, 59]. Ова метода је најпре примењивана за апроксимацију тачног решења обичних диференцијалних једначина, да би се касније њена примена проширила и на СДЈ. Поред тога што не захтева додатне услове који ће гарантовати егзистенцију и јединственост апроксимативног решења добијеног овом методом, као што је то случај са имплицитним методама, предност методе Ојлер–Марујаме у односу на остале методе се огледа у томе што су, најчешће, за доказивање особина апроксимативних решења, довољни услови егзистенције и јединствености тачног решења разматране једначине.

Разматрана је СДЈ облика (1.5.1), односно

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \tag{1.6.1}$$

са почетним условом $x(0)$, за коју важе услови Теореме 1.5.1. На произвољној партицији интервала $[0, T]$,

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T, \quad \delta_n = \max_{0 \leq k \leq n-1} (t_{k+1} - t_k),$$

дискретно апроксимативно решење Ојлер–Марујаме, које одговара једначини (1.6.1), је дефинисано као низ случајних променљивих $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$, при чему је $Y_0 = X_0$ и за свако $k \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$Y_k = Y_0 + \sum_{j=1}^{k} f(t_{j-1}, Y_{j-1})(t_j - t_{j-1}) + \sum_{j=1}^{k} g(t_{j-1}, Y_{j-1})(B(t_j) - B(t_{j-1})).$$

Непрекидно апроксимативно решење $y_n = \{y_n(t), t \in [0, T]\}$, Марујама [40] је дефинисао линеарном интерполацијом вредности дискретног апроксимативног решења, односно

$$y_n = Y_k + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}(Y_{k+1} - Y_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}],\, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Применом приступа који је коришћен у детерминистичком случају, Марујама је у свом раду [40] међу првима проучавао и средње-квадратну конвергенцију Ојлерове методе. Овај резултат је побољшан у радовима Канагаве [20, 21]. Применом основне идеје из рада Марујаме, у раду [20] је разматрана једначина (1.6.1) под условима

$$\begin{aligned} &|f(t, x(t)) - f(s, y(s))|^2 + |g(t, x(t)) - g(s, y(s))|^2 \leq L_2(|x - y|^2 + |t - s|^2), \\ &|f(t, x(t))|^2 + |g(t, x(t))|^2 \leq L_2, \end{aligned}$$

и $E|x_0|^2 < \infty$. Уз незнатне разлике у односу на [40], Канагава је у свом раду доказао да апроксимативно решење $\{y_n n \in \mathbb{N}\}$ конвергира у L^p-смислу, $p \geq 2$, ка тачном решењу x једначине (1.6.1), тј.

$$E \sup_{0\leq t\leq T} |y_n(t) - x(t)|^p \to 0,\ n \to \infty.$$

Ред конвергенције, за произвољно $\epsilon > p/2$ је

$$E \sup_{0\leq t\leq T} |y_n(t) - x(t)|^p = O\left(\delta_n^{p/2}(\log \delta_n)^\epsilon\right).$$

Канагава је у наредном раду [21] побољшао резултат из [20] апроксимирајући решење x једначине (1.6.1) низом решења $\{x^n, n \in \mathbb{N}\}$, при чему је

$$\begin{aligned}
&dx^n(t) = f(t_k, x^n(t_k))dt + g(t_k, x^n(t_k))dB(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}],\ k \in \{0, 1, \dots, n-1\},\\
&x^n(0) = x_0.
\end{aligned}$$

Тада је, за $p \geq 2$, грешка L^p-апроксимације оцењена као $O(\delta_n^{p/2})$ када $n \to \infty$ и $\delta_n \to 0$. Исти резултат су раније доказали Гихман и Скороход [4] за $p = 2$.

Разматрање методе Ојлер–Марујаме је затим проширено на аутономне функционалне СДЈ облика (1.5.2), односно

$$\begin{aligned}
&dx(t) = F(x_t)dt + G(x_t)dB(t), \quad t \in [0, T],\\
&x_0 = \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}.
\end{aligned} \tag{1.6.2}$$

Мао је у свом раду [34], за $N = \tau/\Delta, \Delta \in (0, 1)$, дефинисао дискретно решење Ојлер–Марујаме $\{\bar{y}(k\Delta), k \geq -N\}$ на следећи начин

$$\begin{aligned}
&\bar{y}(k\Delta) = \xi(k\Delta), \quad -N \leq k \leq 0,\\
&\bar{y}((k+1)\Delta) = \bar{y}(k\Delta) + F(\bar{y}_{k\Delta})\Delta + G(\bar{y}_{k\Delta})(B((k+1)\Delta) - B(k\Delta)), \quad k \geq 0,
\end{aligned}$$

где је $\bar{y}_{k\Delta} = \{\bar{y}_{k\Delta}(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}$ стохастички процес са вредностима у $C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d)$, дефинисан као

$$\bar{y}_{k\Delta}(\theta) = \bar{y}((k+i)\Delta) + \frac{\theta - i\Delta}{\Delta}(\bar{y}((k+i+1)\Delta) - \bar{y}((k+i)\Delta)), \tag{1.6.3}$$

за $\theta \in [i\Delta, (i+1)\Delta]$, $i \in \{-N, -(N-1), \dots, -1\}$. Затим је дефинисао непрекидно решење Ојлер–Марујаме $y = \{y(t), t \geq 0\}$ као

$$\begin{aligned}
&y(t) = \xi(t), \quad t \in [-\tau, 0],\\
&y(t) = \xi(0) + \int_0^t F(\bar{y}_s)ds + \int_0^t G(\bar{y}_s)dB(s), \quad t \geq 0,
\end{aligned}$$

где је $\bar{y}_t = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{y}_{k\Delta} I_{[k\Delta,(k+1)\Delta)}(t)$, $t \geq 0$.

У раду [34], Мао је доказао средње-квадратну конвергенцију апроксимативног решења $y = \{y(t), t \in [-\tau, T]\}$ ка тачном решењу $x = \{x(t), t \in$

$[-\tau, T]\}$ једначине (1.6.2), односно средње-квадратна блискост поменутих решења оцењена је са

$$E \sup_{0 \le t \le T} |x(t) - y(t)|^2 \le O(\Delta),$$

за свако $T > 0$. Захтевани услови су:

- $E||\xi||^p < \infty$, за неко $p > 2$;
- постоји константа $\lambda > 0$ тако да је

$$E|\xi(t) - \xi(s)|^2 \le \lambda(t - s), \quad -\tau \le s \le t \le 0;$$

- постоји непрекидна здесна неопадајућа функција $\mu : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^+$ тако да, за свако $\varphi, \psi \in C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d)$, важи да је

$$|F(\varphi) - F(\psi)|^2 \vee |G(\varphi) - G(\psi)|^2 \le \int_{-\tau}^{0} |\varphi(\theta) - \psi(\theta)|^2 d\mu(\theta); \tag{1.6.4}$$

- важи глобални Липшицов услов (1.6.4) који имплицира услов линеарног раста

$$|F(\varphi)|^2 \vee |G(\varphi)|^2 \le K||\varphi||^2,$$

за $K = 2\left(|F(0)|^2 \vee |G(0)|^2\right) \vee (\mu(0) - \mu(-\tau))$.

Мао је наставио проучавање особина методе Ојлер–Марујаме за СДЈ са временски зависним кашњењем, облика

$$\begin{aligned} &dx(t) = f(x(t), x(t - \delta(t)))dt + g(x(t), x(t - \delta(t)))dB(t), \quad t \in [0, T], \\ &x_0 = \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}, \end{aligned} \tag{1.6.5}$$

где је $\delta : [0, +\infty) \to [0, \tau]$ функција кашњења која задовољава услов

$$|\delta(u) - \delta(v)| \le \eta(u - v), \quad 0 \le v \le u < \infty,$$

за неко $\eta > 0$. У [37] је, за дати корак Δ, Мао дефинисао дискретно решење Ојлер–Марујаме као

$$\begin{aligned} y(s + k\Delta) &= \xi(k\Delta), \quad -\tau\Delta \le k \le 0, \\ y(s + (k+1)\Delta) &= y(s + k\Delta) + f(y(s + k\Delta), y(s + k\Delta - In[\delta(s + k\Delta)/\Delta]\Delta))\Delta \\ &\quad + g(y(s + k\Delta), y(s + k\Delta - In[\delta(s + k\Delta)/\Delta]\Delta))\Delta B_k, \quad k \ge 0, \end{aligned}$$

где је $\Delta B_k = B((k+1)\Delta) - B(k\Delta)$ и $In[x]$ је цео део броја x. Затим је дефинисао непрекидно решење Ојлер–Марујаме као

$$\begin{aligned} y(s + u) &= \xi(u), \quad -\tau \le u \le 0 \\ y(t) &= y(s) + \int_s^t f(z_1(r), z_2(r))dr + \int_s^t g(z_1(r), z_2(r))dB(r), \quad t \ge s, \end{aligned}$$

где је

$$z_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(s+k\Delta) I_{[s+k\Delta, s+(k+1)\Delta)}(t),$$
$$z_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(s+k\Delta - In[\delta(s+k\Delta)/\Delta]\Delta) I_{[s+k\Delta, s+(k+1)\Delta)}(t).$$

Под претпоставком да су коефицијенти f и g Липшиц непрекидни, $f(0,0)=0$, $g(0,0)=0$, као и $E||\xi||^2 < \infty$, Мао је доказао да је ред средње-квадратне конвергенције решења Ојлер–Марујаме $y = \{y(t), t \geq -\tau\}$ ка тачном решењу $x = \{x(t), t \geq -\tau\}$ једначине (1.6.5) једнак $1/2$, као и да је тачно решење једначине (1.6.5) експоненцијално стабилно у средње квадратном-смислу ако и само ако то важи за решење Ојлер–Марујаме. И поред тога што СДЈ са временски зависним кашњењем представљају специјалну класу функционалних СДЈ, техника доказивања поменутих резултата је потпуно другачија од оне која је примењивана у [34]. Те разлике проистичу из различитих облика зависности од прошлости присутних у самим једначинама.

Примену методе Ојлер–Марујаме, Ву и Мао у свом раду [59] проширују на неутралне функционалне СДЈ облика (1.5.10), односно

$$d\,[x(t) - U(x_t)] = F(x_t)dt + G(x_t)dB(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.6.6}$$
$$x_0 = \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}.$$

Поменути аутори су за корак $\Delta \in (0,1)$, изабран тако да постоје природни бројеви $N > \tau$, $M > T$ за које је $\Delta = \tau/N = T/M$, дефинисали дискретно решење Ојлер–Марујаме $\bar{y}(k\Delta), k \in \{-N, -(N-1), \ldots, M\}$ са

$$\begin{aligned}
&\bar{y}(k\Delta) = \xi(k\Delta), \quad -N \leq k \leq 0,\\
&\bar{y}((k+1)\Delta) = \bar{y}(k\Delta) + u(\bar{y}_{k\Delta}) - u(\bar{y}_{(k-1)\Delta}) + F(\bar{y}_{k\Delta})\Delta\\
&\qquad\qquad + G(\bar{y}_{k\Delta})(B((k+1)\Delta) - B(k\Delta)), \quad k \in \{0,1,\ldots,M\},
\end{aligned}$$

при чему је $\bar{y}_{k\Delta} = \{\bar{y}_{k\Delta}(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}$ стохастички процес са вредностима у $C([-\tau,0];\mathbb{R}^d)$, дефинисан у (1.6.3), док је $\bar{y}(-(N+1)\Delta) = \xi(-N\Delta)$ да би $\bar{y}_{-\Delta}$ било добро дефинисано. Са друге стране, непрекидно решење Ојлер–Марујаме $y = \{y(t), t \in [-\tau, T]\}$ је дефинисано као

$$\begin{aligned}
y(t) =& \xi(t), \quad t \in [-\tau, 0],\\
y(t) =& \xi(0) + u\left(\bar{y}_{(k-1)\Delta} + \frac{t-k\Delta}{\Delta}(\bar{y}_{k\Delta} - \bar{y}_{(k-1)\Delta})\right) - u(\bar{y}_{-\Delta})\\
&+ \int_0^t F(\bar{y}_s)ds + \int_0^t G(\bar{y}_s)dB(s), \quad t \in [k\Delta, (k+1)\Delta], k \in \{0,1,\ldots,M-1\},
\end{aligned}$$

где је

$$\bar{y}_t = \sum_{k=0}^{M-2} \bar{y}_{k\Delta} I_{[k\Delta,(k+1)\Delta)}(t) + \bar{y}_{(M-1)\Delta} I_{[(M-1)\Delta, M\Delta]}(t), \quad t \in [0,T].$$

Претпоставке које се уводе су:

- $E||\xi||^p < \infty$, $p \geq 2$;

- постоји константа $\lambda > 0$ тако да је

$$E \sup_{-\tau \leq s \leq t \leq 0,\ t-s \leq \Delta} |\xi(t) - \xi(s)|^2 \leq \lambda\Delta;$$

- важи Липшицов услов (1.5.7), који имплицира услов линеарног раста (1.5.8);

- постоји $k \in (0,1)$, тако да је, за свако $\varphi, \psi \in C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d)$,

$$|u(\varphi) - u(\psi)| \leq k||\varphi - \psi||, \quad u(0) = 0.$$

Главни резултат у раду [59] је средње-квадратна блискост решења x и y оцењена са

$$E \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - y(t)|^2 \leq C(\ell)\Delta^{\frac{\ell-1}{\ell}},$$

за сваки природан број $\ell > 1$, где је $C(\ell)$ позитивна константа која зависи од ℓ и не зависи од Δ.

Потребно је истакнути да се начин формирања непрекидног апроксимативног решења Ојлер–Марујаме на основу дискретног, који је предложио Мао разликује од изворног начина Марујаме. Наиме, први начин представља стохастичку екстензију дискретног решења Ојлер–Марујаме која је прецизнија апроксимација од детерминистичке екстензије коју је увео Марујама. Једна од главних предности методе Ојлер–Марујаме је што је експлицитна нумеричка метода чија примена не захтева додатне услове егзистенције и јединствености одговарајућег нумеричког решења. Као таква, она је релативно једноставна за имплементацију и одговарајуће симулације се карактеришу великом брзином. Међутим, ред конвергенције ове методе је највише 1/2. Под одређеним условима (као што су услов линеарног раста коефицијената преноса и дифузије) ова метода конвергира и одговарајуће нумеричко решење у великој мери наслеђује квалитативна и квантитативна својства тачног решења разматране једначине (ограниченост момената, стабилност и слично).

На другој страни, под одређеним условима, на пример када су коефицијенти преноса и дифузије са високим степеном нелинеарности, ова метода испољава одређене недостатке у смислу да дивергира или конвергира, али нумеричко решење не наслеђује нека својства тачног решења.

У сваком случају, метода Ојлер–Марујаме је од великог теоријског значаја јер су многе друге методе уведене као њене модификације или уопштења са циљем да се реши проблем одређивања апроксимативних решења која у великој мери наслеђују својства тачног решења. Поред бројних радова и књига у којима се такве методе проучавају, то је мотивација и за резултате представљене у овој дисертацији, која се бави нумеричким методама Ојлеровог типа за неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем (и прелазима Маркова).

Као што је већ поменуто, поред бројних предности методе Ојлер–Марујаме, временом су откривене велике класе СДЈ за које ова метода дивергира. На пример, у раду [7] аутори су доказали да апроксимативно решење Ојлер–Марујаме, које одговара СДЈ чији су коефицијенти преноса и дифузије суперлинеарног раста, дивергира у L^p-смислу на коначном временском интервалу $[0, T]$. То је била мотивација за конструкцију нових експлицитних нумеричких метода, које представљају модификацију класичне методе Ојлер–Марујаме, а које имају боља својства од ње под одређеним условима. На пример, укроћена (tamed) метода Ојлер–Марујаме дефинисана је у раду [9] за апроксимацију решења СДЈ чији коефицијент преноса задовољава једнострани Липшицов услов, док је коефицијент дифузије суперлинеарног раста. Ова метода је затим побољшана у раду [55], док је укроћена Милштајнова метода дефинисана у [5]. Такође, заустављена (stopped) метода Ојлер–Марујаме је разматрана у раду [27] за нелинеарне СДЈ.

Посебну пажњу аутора је привукла сечена метода Ојлер–Марујаме, дефинисана у раду [39]. Поред саме дефиниције решења, Мао је у поменутом раду доказао строгу конвергенцију апроксимативног решења, добијеног овом методом, ка тачном решењу СДЈ, чији коефицијенти задовољавају локални Липшицов услов и услов Хасминског. Сечена метода Ојлер–Марујаме је дефинисана у Глави 2 ове дисртације за неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем. Такође, оцењује се момент реда p сеченог решења Ојлер–Марујаме, а затим се оцењује L^p-блискост овог нумеричког решења и тачног решења разматране једначине.

Поред поменутих експлицитних метода, од значаја су и имплицитне методе које су допринеле добијању апроксимативних решења СДЈ различитих типова. На пример, апроксимативно решење добијено семиимплицитном Ојлеровом методом, под одређеним условима, наслеђује својства тачног решења у већој мери него апроксимативно решење Ојлер–Марујаме (видети [17, 18, 44, 60, 61, 67]). Конструкција такве семиимплицитне методе представљена је у Глави 3 ове дисретације. Пред тога, одређена је класа неутралних СДЈ са временски зависним кашњењем за коју ова метода дивергира.

Глава 2

Конвергенција метода Ојлеровог типа за неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем

Класична метода Ојлер–Марујаме се примењује у контексту различитих типова СДЈ и погодна је за прорачуне и имплементацију. Међутим, у раду [7] је откривена велика класа СДЈ за које ова метода дивергира. Добијени резултати о дивергенцији ове методе, као и бројне предности експлицитних метода, били су мотивација за настанак нове нумеричке методе. Тако је у раду [39], Мао конструисао *сечену методу Ојлер–Марујаме* и разматрао услове под којима су тачно и апроксимативно решење добијено овом методом блиски у L^p-смислу. У наредном раду [14] истог аутора, одређен је ред L^q-конвергенције ове методе за $q \geq 2$ и доказано је да је он произвољно близак вредности $q/2$. Од тада се ова метода проучава у радовима многих аутора (видети на пример [6, 56, 65, 68]), као и у наставку ове главе дисертације.

Главни предмет разматрања ове главе је сечена метода Ојлер-Марујаме за неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем облика (1.5.21), односно

$$d[x(t)-u(x(t-\delta(t)))]=f(x(t),x(t-\delta(t)))dt+g(x(t),x(t-\delta(t)))dB(t),\ t \geq 0, \quad (2.0.1)$$

са почетним условом

$$x_0 = \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}, \quad (2.0.2)$$

где је $\xi \in C([-\tau,0];\mathbb{R}^d)$ $\mathcal{F}_0$-мерљива случајна променљива. Како се поменута метода за наведени тип једначина са коефицијентима преноса и дифузије са високим степеном нелинеарности на одређени начин ослања на класичну методу Ојлер–Марујаме за исти тип једначина са коефицијентима преноса и дифузије који задовољавају глобални Липшицов услов, први део ове главе је посвећен класичној методи Ојлер–Марујаме.

2.1 Метода Ојлер–Марујаме за неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем

Јасно је да ако коефицијенти f и g једначине (1.5.21) задовољавају глобални Липшицов услов $\mathcal{H}_1'$, тада, за свако $x, y \in \mathbb{R}^d$, важи да је

$$|f(x,y)|^2 \leq \tilde{K}_1(1 + |x|^2 + |y|^2), \tag{2.1.1}$$

где је $\tilde{K}_1 = 2K_1 \vee 2|f(0,0)|^2$, као и

$$|g(x,y)|^2 \leq \bar{K}_1(1 + |x|^2 + |y|^2), \tag{2.1.2}$$

за $\bar{K}_1 = 2K_1 \vee 2|g(0,0)|^2$. Дакле, следи да за функције f и g важи услов линеарног раста са константом $K = \tilde{K}_1 \vee \bar{K}_1$. Стога, глобални Липшицов услов имплицира, не само локални Липшицов услов, већ и услов линеарног раста. Сходно томе, може се закључити да глобални Липшицов услов заједно са Претпоставком $\mathcal{H}_2$, гарантује егзистенцију и јединственост решења једначине (2.0.1), односно важи следећа теорема.

Теорема 2.1.1 *Нека важе Претпоставке $\mathcal{H}_1'$ и $\mathcal{H}_2$. Тада, за сваки почетни услов $\xi \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^d)$ постоји јединствено, с.и. непрекидно решење $\{x(t), t \geq -\tau\}$ једначине (2.0.1).*

Међутим, намеће се питање да ли под датим условима, заједно са L^p-ограниченошћу почетног услова, важи и ограниченост момената реда $p \geq 2$ тачног решења једначине (2.0.1), као што је то био случај у претходним теоремама егзистенције и јединствености решења. Како је L^p-оцена решења једначине (2.0.1) под поменутим условима битна за доказивање L^p-конвергенције решења Ојлер–Марујаме ка тачном решењу једначине (2.0.1), у наставку се разматра тај проблем.

2.1.1 Оцене момената тачног и апроксимативног решења Ојлер–Марујаме

У овом одељку су представљени резултати који су објављени у раду [49]. Пре навођења довољних услова за ограниченост момената тачног решења једначине (2.0.1), наводе се следеће две леме.

Лема 2.1.1 *Нека је $p \geq 2$ произвољан реалан број и нека важи Претпоставка $\mathcal{H}_2$. Тада је, за свако $t \geq 0$,*

$$|x(t) - u(x(t - \delta(t)))|^p \leq (1+k)^p \sup_{-\tau \leq s \leq t} |x(s)|^p.$$

Доказ. Нека је $\epsilon > 0$ произвољан реалан број. На основу елементарне неједнакости (1.4.1), као и претпоставке (1.5.23), за произвољно $t \geq 0$, добија се

$$\begin{aligned}|x(t)-u(x(t-\delta(t)))|^p &\leq \left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}\left(|x(t)|^p+\frac{|u(x(t-\delta(t)))|^p}{\epsilon}\right)\\ &\leq \left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}\left(|x(t)|^p+k^p\frac{|x(t-\delta(t))|^p}{\epsilon}\right)\\ &\leq \left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}\left(1+\frac{k^p}{\epsilon}\right)\sup_{-\tau\leq s\leq t}|x(s)|^p.\end{aligned}$$

Тражена неједнакост следи за $\epsilon=k^{p-1}$. □

Лема 2.1.2 *Нека је $p\geq 2$ произвољан реалан број и нека важи Претпоставка $\mathcal{H}_2$. Тада је, за свако $t\geq 0$,*

$$\sup_{0\leq s\leq t}|x(s)|^p\leq \frac{k}{1-k}\sup_{-\tau\leq s\leq 0}|\xi(s)|^p+\frac{1}{(1-k)^p}\sup_{0\leq s\leq t}|x(s)-u(s-\delta(s))|^p.$$

Доказ. Нека је $\epsilon>0$ произвољан реалан број. Применом неједнакости (1.4.1) и претпоставке (1.5.23), следи да је, за свако $s\geq 0$,

$$\begin{aligned}|x(s)|^p &= |u(x(s-\delta(s)))+x(s)-u(x(s-\delta(s)))|^p\\ &\leq \left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}\left(\frac{|u(x(s-\delta(s)))|^p}{\epsilon}+|x(s)-u(x(s-\delta(s)))|^p\right)\\ &\leq \left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}\left(\frac{k^p}{\epsilon}|x(s-\delta(s))|^p+|x(s)-u(x(s-\delta(s)))|^p\right).\end{aligned}$$

Избором $\epsilon=\left[\frac{k}{1-k}\right]^{p-1}$ добија се да је

$$|x(s)|^p\leq k|x(s-\delta(s))|^p+\frac{1}{(1-k)^{p-1}}|x(s)-u(x(s-\delta(s)))|^p,\quad s\geq 0.$$

Стога, за произвољно $t\geq s$, важи да је

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq s\leq t}|x(s)|^p &\leq k\sup_{0\leq s\leq t}|x(s-\delta(s))|^p+\frac{1}{(1-k)^{p-1}}\sup_{0\leq s\leq t}|x(s)-u(x(s-\delta(s)))|^p\\ &\leq k\sup_{-\tau\leq s\leq t}|x(s)|^p+\frac{1}{(1-k)^{p-1}}\sup_{0\leq s\leq t}|x(s)-u(x(s-\delta(s)))|^p\\ &\leq k\sup_{-\tau\leq s\leq 0}|\xi(s)|^p+k\sup_{0\leq s\leq t}|x(s)|^p\\ &\quad+\frac{1}{(1-k)^{p-1}}\sup_{0\leq s\leq t}|x(s)-u(x(s-\delta(s)))|^p,\end{aligned}$$

те тврђење леме директно следи. □

Сада се може представити теорема која се односи на ограниченост момента реда p тачног решења једначине (2.0.1) чији коефицијенти f и g задовољавају глобални Липшицов услов $\mathcal{H}_1'$. Такође, претпоставља се да важи Претпоставка $\mathcal{H}_2$, што, заједно са $\mathcal{H}_1'$, гарантује егзистенцију и јединственост поменутог решења.

Теорема 2.1.2 *Нека важе Претпоставке $\mathcal{H}_1'$ и $\mathcal{H}_2$, и нека је*

$$E \sup_{-\tau \le s \le 0} |\xi(s)|^p < \infty. \tag{2.1.3}$$

Тада је, за свако $p \ge 2$,

$$E \sup_{-\tau \le t \le T} |x(t)|^p \le C, \quad T \ge 0,$$

где је $C = C(\xi, p, k, K, T)$ генерисана константа.

Доказ. Нека је $t \in [0, T]$ произвољно и нека је R_0 довољно велики природан број такав да је

$$||x_0|| \vee 1 = ||\xi|| \vee 1 < R_0. \tag{2.1.4}$$

За сваки природан број $R \ge R_0$, дефинише се време заустављања

$$\tau_R = \inf\{t \in [0, T] : |x(t)| \ge R\}, \tag{2.1.5}$$

где је $\inf \emptyset = 0$. Тада је низ времена заустављања $\{\tau_R\}_{R \ge R_0}$ растући и важи

$$\lim_{R \to +\infty} \tau_R = +\infty, \text{ с.и.}$$

Са друге стране, применом формуле Итоа на функцију $V(x, t) = |x|^p$, добија се да је

$$\begin{aligned}
&|x(t \wedge \tau_R) - u(x(t \wedge \tau_R - \delta(t \wedge \tau_R)))|^p \\
&\quad \le |\xi(0) - u(\xi(-\delta(0)))|^p \\
&\qquad + p \int_0^{t \wedge \tau_R} |x(s) - u(x(s - \delta(s)))|^{p-1} |f(x(s), x(s - \delta(s)))| ds \\
&\qquad + \frac{p(p-1)}{2} \int_0^{t \wedge \tau_R} |x(s) - u(x(s - \delta(s)))|^{p-2} |g(x(s), x(s - \delta(s)))|^2 ds \\
&\qquad + p \int_0^{t \wedge \tau_R} |x(s) - u(x(s - \delta(s)))|^{p-2} \\
&\qquad\qquad \times (x(s) - u(x(s - \delta(s))))^T g(x(s), x(s - \delta(s))) dB(s).
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Нека је $\epsilon > 0$ произвољан реалан број. На основу елементарних неједнакости (1.4.2) и (1.4.5), као и оцене (2.1.1) и Леме 2.1.1, следи да је, за свако $s \in [0, t \wedge \tau_R]$,

$$\begin{aligned}
&|x(s) - u(x(s - \delta(s)))|^{p-1} |f(x(s), x(s - \delta(s)))| \\
&\quad \le \frac{(p-1)\epsilon}{p} |x(s) - u(x(s - \delta(s)))|^p + \frac{1}{p\epsilon^{p-1}} |f(x(s), x(s - \delta(s)))|^p \\
&\quad \le \frac{(p-1)\epsilon}{p} (1 + k)^p \sup_{-\tau \le r \le s} |x(r)|^p + \frac{K^{\frac{p}{2}}}{p\epsilon^{p-1}} \left(1 + |x(s)|^2 + |x(s - \delta(s))|^2\right)^{\frac{p}{2}} \\
&\quad \le \frac{(p-1)\epsilon}{p} (1 + k)^p \sup_{-\tau \le r \le s} |x(r)|^p + \frac{(3K)^{\frac{p}{2}}}{3p\epsilon^{p-1}} \left(1 + 2 \sup_{-\tau \le r \le s} |x(r)|^p\right) \\
&\quad \le \left[\frac{(p-1)\epsilon}{p} (1 + k)^p + \frac{(3K)^{\frac{p}{2}}}{3p\epsilon^{p-1}}\right] \left(1 + 2 \sup_{-\tau \le r \le s} |x(r)|^p\right).
\end{aligned}$$

Одабиром $\epsilon = \frac{\sqrt{3K}}{1+k}$, може се закључити да је, за свако $s \in [0, t \wedge \tau_R]$,

$$|x(s) - u(x(s-\delta(s)))|^{p-1}|f(x(s), x(s-\delta(s)))| \\ \leq \sqrt{3K}(1+k)^{p-1}\frac{3p-2}{3p}\left(1 + 2\sup_{-\tau\leq r\leq s}|x(r)|^p\right). \tag{2.1.7}$$

Примењујући елементарне неједнакости (1.4.3) и (1.4.5), оцену (2.1.2) и Лему 2.1.1, на сличан начин се, за свако $s \in [0, t \wedge \tau_R]$, добија оцена

$$\begin{aligned} &|x(s) - u(x(s-\delta(s)))|^{p-2}|g(x(s), x(s-\delta(s)))|^2 \\ &\quad \leq \frac{(p-2)\epsilon}{p}|x(s) - u(x(s-\delta(s)))|^p + \frac{2}{p\epsilon^{\frac{p-2}{2}}}|g(x(s), x(s-\delta(s)))|^p \\ &\quad \leq \left[\frac{(p-2)\epsilon}{p}(1+k)^p + \frac{2(3K)^{\frac{p}{2}}}{3p\epsilon^{\frac{p-2}{2}}}\right]\left(1 + 2\sup_{-\tau\leq r\leq s}|x(r)|^p\right). \end{aligned}$$

За $\epsilon = \frac{3K}{(1+k)^2}$ следи да је

$$|x(s) - u(x(s-\delta(s)))|^{p-2}|g(x(s), x(s-\delta(s)))|^2 \\ \leq 3K(1+k)^{p-2}\frac{3p-4}{3p}\left(1 + 2\sup_{-\tau\leq r\leq s}|x(r)|^p\right). \tag{2.1.8}$$

Такође, на основу Леме 2.1.1, важи да је

$$|\xi(0) - u(\xi(-\delta(0)))|^p \leq (1+k)^p \sup_{-\tau\leq s\leq 0}|\xi(s)|^p. \tag{2.1.9}$$

Заменом (2.1.7), (2.1.8) и (2.1.9) у (2.1.6), добија се да је

$$\begin{aligned} &E\sup_{0\leq s\leq t}|x(s\wedge\tau_R) - u(x(s\wedge\tau_R - \delta(s\wedge\tau_R)))|^p \\ &\quad \leq (1+k)^p E\sup_{-\tau\leq s\leq 0}|\xi(s)|^p + D\int_0^t \left(1 + 2E\sup_{-\tau\leq r\leq s}|x(r\wedge\tau_R)|^p\right)ds \\ &\qquad + pE\sup_{0\leq s\leq t}\Bigg|\int_0^{s\wedge\tau_R}|x(r) - u(x(r-\delta(r)))|^{p-2} \\ &\qquad\qquad \times (x(r) - u(x(r-\delta(t))))^T g(x(r), x(r-\delta(r)))dB(r)\Bigg|, \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

где је

$$D = \sqrt{3K}(1+k)^{p-1}\left(p - \frac{2}{3}\right) + (p-1)\left(\frac{3}{2}p - 2\right)K(1+k)^{p-2}.$$

Са друге стране, неједнакости Буркхолдер–Дејвис–Гандија, (2.1.8) и Теорема Фубинија, дају

$$
\begin{aligned}
pE&\sup_{0\le s\le t}\bigg|\int_0^{s\wedge\tau_R}|x(r)-u(x(r-\delta(r)))|^{p-2}\\
&\qquad\qquad\times(x(r)-u(r-\delta(t)))^Tg(x(r),x(r-\delta(r)))dB(r)\bigg|\\
&\le 4p\sqrt{2}E\left(\int_0^t|x(s\wedge\tau_R)-u(x(s\wedge\tau_R-\delta(s\wedge\tau_R)))|^{2p-2}\right.\\
&\qquad\qquad\left.\times|g(x(s\wedge\tau_R),x(s\wedge\tau_R-\delta(s\wedge\tau_R)))|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le 4p\sqrt{2}E\left(\sup_{0\le s\le t}|x(s)-u(x(s-\delta(s)))|^p\right.\\
&\qquad\qquad\left.\times\int_0^t|x(s)-u(x(s-\delta(s)))|^{p-2}|g(x(s),x(s-\delta(s)))|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le\frac{1}{2}E\sup_{0\le s\le t}|x(s\wedge\tau_R)-u(x(s\wedge\tau_R-\delta(s\wedge\tau_R)))|^p\\
&\quad+16p^2E\int_0^t|x(s\wedge\tau_R)-u(x(s\wedge\tau_R-\delta(s\wedge\tau_R)))|^{p-2}\\
&\qquad\qquad\times|g(x(s\wedge\tau_R),x(s\wedge\tau_R-\delta(s\wedge\tau_R)))|^2ds,\\
&\le\frac{1}{2}E\sup_{0\le s\le t}|x(s\wedge\tau_R)-u(x(s\wedge\tau_R-\delta(s\wedge\tau_R)))|^p\\
&\quad+48Kp^2(1+k)^{p-2}\frac{3p-4}{3p}\int_0^t\left(1+2E\sup_{-\tau\le r\le s}|x(r\wedge\tau_R)|^p\right)ds.
\end{aligned}
$$

На основу претходне релације, оцена (2.1.10) се може деље оценити као

$$
\begin{aligned}
E&\sup_{0\le s\le t}|x(s\wedge\tau_R)-u(x(s\wedge\tau_R-\delta(s\wedge\tau_R)))|^p\\
&\le 2(1+k)^pE\sup_{-\tau\le s\le 0}|\xi(s)|^p\\
&\quad+2\left(D+48Kp^2(1+k)^{p-2}\frac{3p-4}{3p}\right)\int_0^t\left(1+2E\sup_{-\tau\le r\le s}|x(r\wedge\tau_R)|^p\right)ds.
\end{aligned}
$$

Сада је, на основу Леме 2.1.2,

$$
\begin{aligned}
E&\sup_{0\le s\le t}|x(s\wedge\tau_R)|^p\\
&\le\left(\frac{k}{1-k}+\frac{2(1+k)^p}{(1-k)^p}\right)E\sup_{-\tau\le s\le 0}|\xi(s)|^p\\
&\quad+\frac{2}{(1-k)^p}\left(D+16Kp(1+k)^{p-2}(3p-4)\right)\int_0^t\left(1+2E\sup_{-\tau\le r\le s}|x(r\wedge\tau_R)|^p\right)ds.
\end{aligned}
$$

Сходно томе, следи да је

$$
\begin{aligned}
1 + 2E \sup_{-\tau \leq s \leq t} |x(s \wedge \tau_R)|^p &\leq 1 + 2E \sup_{-\tau \leq s \leq 0} |\xi(s)|^p + 2E \sup_{0 \leq s \leq t} |x(s \wedge \tau_R)|^p \\
&\leq C_1 + C_2 \int_0^t \left(1 + 2E \sup_{-\tau \leq r \leq s} |x(r \wedge \tau_R)|^p \right) ds,
\end{aligned}
$$

где је

$$
\begin{aligned}
C_1 &= 1 + 2 \left(1 + \frac{k}{1-k} + \frac{2(1+k)^p}{(1-k)^p} \right) E \sup_{-\tau \leq s \leq 0} |\xi(s)|^p \\
C_2 &= \frac{4}{(1-k)^p} \left(D + 16Kp(1+k)^{p-2}(3p-4) \right).
\end{aligned}
$$

Коначно, применом Грунвал–Белманове леме, добија се да је

$$
E \sup_{-\tau \leq t \leq T} |x(t \wedge \tau_R)|^p \leq 1 + 2E \sup_{-\tau \leq t \leq T} |x(t \wedge \tau_R)|^p \leq C_1 e^{C_2 T} \equiv C.
$$

Када $R \to +\infty$, претходна неједнакост постаје

$$
E \sup_{-\tau \leq t \leq T} |x(t)|^p \leq C.
$$

□

2.1.2 Апроксимативно решење Ојлер–Марујаме за неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем

Резултати који се наводе у овом одељку објављени су у раду [49]. Односе се на L^p-ковергенцију апроксимативних решења, генерисаних методом Ојлер–Марујаме, ка тачном решењу једначине (2.0.1) под глобалним Липшицовим условом за њене коефицијенте f и g.

Најпре ће бити конструисано апроксимативно решење Ојлер–Марујаме које одговара једначини (2.0.1), а затим ће бити изведена L^p-оцена момената овог нумеричког решења.

Нека је $T > 0$ произвољно. Без губљења општости, претпоставља се да је T/τ рационалан број. У супротном, T се може заменити већим бројем како би се то постигло. Нека је зато величина корака $\Delta \in (0,1)$ садржана цео број пута у τ и T, односно $\Delta = \tau/M = T/N$, за неке природне бројеве $M > \tau$ и $N > T$. Најпре се дефинише апроксимативно решење Ојлер–Марујаме Y које одговара једначини (2.0.1), на еквидистантној партицији $t_k = k\Delta$, $k \in \{-(M+1), -M, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, N\}$ временског интервала $[-\tau, T]$. Како би ово решење било добро дефинисано, дефинише се

$$
\delta(-\Delta) = \delta(0), \qquad Y(-(M+1)\Delta) = \xi(-M\Delta). \tag{2.1.11}
$$

Нека је $I_\Delta[u]$ функција која реалном броју u/Δ придружује његов цео део, за $u \in [0, \tau]$. Тада $I_\Delta[\delta(t_k)]$ представља цео део броја $\delta(t_k)/\Delta$. Дискретно апроксимативно решење Ојлер–Марујаме се дефинише као

$$
Y(t_k) = \xi(t_k), \qquad k \in \{-M, -(M-1), \ldots, 0\}, \tag{2.1.12}
$$

док је, за $k \in \{0, 1, \dots, N\}$,

$$\begin{aligned} Y(t_{k+1}) = & \, Y(t_k) + u(Y(t_k - I_\Delta[\delta(t_k)]\Delta)) - u(Y(t_{k-1} - I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta)) \\ & + f(Y(t_k), Y(t_k - I_\Delta[\delta(t_k)]\Delta))\Delta \\ & + g(Y(t_k), Y(t_k - I_\Delta[\delta(t_k)]\Delta))\Delta B_k, \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

где је $\Delta B_k = B(t_{k+1}) - B(t_k)$. Међутим, за потребе предстојећих разматрања, погодније је непрекидно апроксимативно решење Ојлер–Марујаме. У том смислу, уводе се следећи степенасти процеси

$$z_1(t) = \sum_{k=0}^{N-1} Y(t_k) I_{[t_k, t_{k+1})}(t), \;\; z_2(t) = \sum_{k=-1}^{N-1} Y(t_k - I_\Delta[\delta(t_k)]\Delta) I_{[t_k, t_{k+1})}(t), \tag{2.1.14}$$

за $t \in [0, T]$, где је $I_{[t_k, t_{k+1})}(t)$ карактеристична функција интервала $[t_k, t_{k+1})$. У циљу апроксимације аргумента неутралног члана u, дефинише се линеарна комбинација случајних променљивих $z_2(t_{k-1}) = Y(t_{k-1} - I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta)$ и $z_2(t_k) = Y(t_k - I_\Delta[\delta(t_k)]\Delta)$ као

$$\bar{Z}_k(t) = z_2(t_{k-1}) + \frac{t - t_k}{\Delta}(z_2(t_k) - z_2(t_{k-1})), \tag{2.1.15}$$

за свако $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, која се може представити у еквивалентном облику

$$\bar{Z}_k(t) = \left(1 - \frac{t - t_k}{\Delta}\right) z_2(t_{k-1}) + \frac{t - t_k}{\Delta} z_2(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \, k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Ради погодности, уводи се ознака

$$z_3(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{Z}_k(t) I_{[t_k, t_{k+1})}(t), \quad t \in [0, T]. \tag{2.1.16}$$

На основу претходног, може се дефинисати непрекидно решење Ојлер–Марујаме $\{y(t), t \in [-\tau, T]\}$, тако да је $y(t) = \xi(t)$, $t \in [-\tau, 0]$, док је, за $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} y(t) = & \, \xi(0) + u(z_3(t)) - u(Y(-\Delta - I_\Delta[\delta(-\Delta)]\Delta)) \\ & + \int_0^t f(z_1(s), z_2(s)) ds + \int_0^t g(z_1(s), z_2(s)) dB(s). \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

Јасно је да се, за $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k \in \{0, 1, \dots, N\}$, једначина (2.1.17) може представити као

$$\begin{aligned} y(t) = & \, Y(t_k) + u(\bar{Z}_k(t)) - u(Y(t_{k-1} - I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta)) \\ & + \int_{t_k}^t f(z_1(s), z_2(s)) ds + \int_{t_k}^t g(z_1(s), z_2(s)) dB(s). \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

Такође, може се закључити да је $y(t_k)=Y(t_k)$ за свако $k \in \{-M, -(M-1), \dots, 0, 1, \dots, N-1, N\}$, тј. дискретно и непрекидно апроксимативно решење Ојлер–Марујаме се поклапају у тачкама партиције t_k, $k \in \{-M, -(M-1), \dots, 0, 1, \dots, N-1, N\}$.

Имајући у виду да за $t \in [0, T]$ постоји јединствен број $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, тако да $t \in [t_k, t_{k+1})$, на основу (2.1.16) следи да је, за $p \geq 2$,

$$\begin{aligned}
|z_3(t)|^p &= |\bar{Z}_k(t)|^p \\
&= \left| \left(1 - \frac{t-t_k}{\Delta}\right) z_2(t_{k-1}) + \frac{t-t_k}{\Delta} z_2(t_k) \right|^p \\
&\leq \left(\left(1 - \frac{t-t_k}{\Delta}\right) |z_2(t_{k-1})| + \frac{t-t_k}{\Delta} |z_2(t_k)| \right)^p \\
&\leq \left(\left(1 - \frac{t-t_k}{\Delta}\right) \sup_{-\tau \leq s \leq t} |y(s)| + \frac{t-t_k}{\Delta} \sup_{-\tau \leq s \leq t} |y(s)| \right)^p .
\end{aligned}$$

На тај начин се закључује да је

$$|z_3(t)|^p \leq \sup_{-\tau \leq s \leq t} |y(s)|^p. \tag{2.1.19}$$

Теорема 2.1.2 даје довољне услове ограничености момента реда p тачног решења једначине (2.0.1). У наставку се доказује да, под истим условима, апроксимативно решење Ојлер–Марујаме (2.1.18) разматране једначине наслеђује исто својство.

Лема 2.1.3 *Нека важе претпоставке $\mathcal{H}_1'$, $\mathcal{H}_2$ и (2.1.3). Тада, за свако $p \geq 2$, важи да је*

$$E \sup_{-\tau \leq t \leq T} |y(t)|^p \leq H, \qquad T \geq 0, \tag{2.1.20}$$

где је $H = H(\xi, k, K, p, T)$ позитивна константа независна од Δ.

Доказ. Нека су $\epsilon > 0, T \geq 0$ и $t \in [0, T]$ произвољни. За сваки природан број $R \geq R_0$, дефинише се време заустављања

$$\rho_R = \inf\{t \in [0, T] : |y(t)| \vee |z_1(t)| \vee |z_3(t)| \geq R\}, \quad \inf \emptyset = 0, \tag{2.1.21}$$

где R_0 задовољава релацију (2.1.4). Стога је низ времена заустављања $\{\rho_R\}_{R \geq R_0}$ растући и важи да је

$$\lim_{R \to +\infty} \rho_R = +\infty \quad \text{с.и.}$$

На основу елементарне неједнакости (1.4.1) и претпоставке (1.5.23), следи да је

$$\begin{aligned}
|y(t \wedge \rho_R)|^p &= |y(t \wedge \rho_R) - u(z_3(t \wedge \rho_R)) + u(z_3(t \wedge \rho_R))|^p \\
&\leq \left[1 + \epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1} \left(|y(t \wedge \rho_R) - u(z_3(t \wedge \rho_R))|^p + \frac{|u(z_3(t \wedge \rho_R))|^p}{\epsilon} \right) \\
&\leq \left[1 + \epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1} \left(|y(t \wedge \rho_R) - u(z_3(t \wedge \rho_R))|^p + k^p \frac{|z_3(t \wedge \rho_R)|^p}{\epsilon} \right).
\end{aligned}$$

Одабиром $\epsilon = \left[\frac{k}{1-k}\right]^{p-1}$ и примењујући релацију (2.1.19), може се закључити да је

$$
\begin{aligned}
|y(t\wedge\rho_R)|^p &\le \frac{1}{(1-k)^{p-1}}|y(t\wedge\rho_R)-u(z_3(t\wedge\rho_R))|^p + k|z_3(t\wedge\rho_R)|^p\\
&\le \frac{1}{(1-k)^{p-1}}|y(t\wedge\rho_R)-u(z_3(t\wedge\rho_R))|^p + k\sup_{-\tau\le s\le t}|y(s\wedge\rho_R)|^p,
\end{aligned}
$$

тако да је

$$
\begin{aligned}
\sup_{-\tau\le s\le t}|y(s\wedge\rho_R)|^p &\le \sup_{-\tau\le s\le 0}|\xi(s)|^p + \sup_{0\le s\le t}|y(s\wedge\rho_R)|^p\\
&\le \sup_{-\tau\le s\le 0}|\xi(s)|^p + \frac{1}{(1-k)^{p-1}}\sup_{0\le s\le t}|y(s\wedge\rho_R)-u(z_3(s\wedge\rho_R))|^p\\
&\quad + k\sup_{-\tau\le s\le t}|y(s\wedge\rho_R)|^p.
\end{aligned}
$$

Претходна неједнакост имплицира

$$
\begin{aligned}
E\sup_{-\tau\le s\le t}|y(s\wedge\rho_R)|^p &\le \frac{1}{1-k}E\sup_{-\tau\le s\le 0}|\xi(s)|^p\\
&\quad + \frac{1}{(1-k)^p}E\sup_{0\le s\le t}|y(s\wedge\rho_R)-u(z_3(s\wedge\rho_R))|^p. \qquad (2.1.22)
\end{aligned}
$$

Применом елементарне неједнакости (1.4.5), Теореме Фубинија и Хелдерове неједнакости на (2.1.17), за $t\in[0,T]$, добија се да је

$$
\begin{aligned}
&E\sup_{0\le s\le t}|y(s\wedge\rho_R)-u(z_3(s\wedge\rho_R))|^p\\
&\quad\le 3^{p-1}E|\xi(0)-u(Y(-\Delta-I_\Delta[\delta(-\Delta)]\Delta))|^p\\
&\quad\quad + 3^{p-1}T^{p-1}\int_0^t E|f(z_1(s\wedge\rho_R),z_2(s\wedge\rho_R))|^p ds\\
&\quad\quad + 3^{p-1}E\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^{s\wedge\rho_R} g(z_1(r),z_2(r))dB(r)\right|^p. \qquad (2.1.23)
\end{aligned}
$$

На основу претпоставке (1.5.23) и узимајући у обзир (2.1.11) и (2.1.12), следи да је

$$
\begin{aligned}
|\xi(0)-u(Y(-\Delta-I_\Delta[\delta(-\Delta)]\Delta))|^p &\le 2^{p-1}(|\xi(0)|^p + k^p|Y(-\Delta-I_\Delta[\delta(-\Delta)]\Delta)|^p)\\
&\le 2^{p-1}\left[|\xi(0)|^p + k^p\left(|Y(-(M+1)\Delta)|\vee\sup_{-M\le k\le 0}|\xi(t_k)|\right)^p\right]\\
&\le 2^{p-1}(1+k^p)\sup_{-\tau\le s\le 0}|\xi(s)|^p.
\end{aligned}
$$

Тада је

$$
E|\xi(0)-u(Y(-\Delta-I_\Delta[\delta(-\Delta)]\Delta))|^p \le 2^{p-1}(1+k^p)E\sup_{-\tau\le s\le 0}|\xi(s)|^p. \qquad (2.1.24)
$$

Применом елементарне неједнакости (1.4.5) и глобалног Липшицовог услова на функцију f, следи да, за свако $s \in [0, t \wedge \rho_R]$, важи да је

$$\begin{aligned}
E|f(z_1(s), z_2(s))|^p &\leq 2^{p-1} E|f(z_1(s), z_2(s)) - f(0,0)|^p + 2^{p-1} E|f(0,0)|^p \\
&\leq 2^{p-1} E[K_1(|z_1(s)|^2 + |z_2(s)|^2)]^{\frac{p}{2}} + 2^{p-1} E|f(0,0)|^p \\
&\leq 2^{p-1} 2^{\frac{p}{2}-1} K_1^{\frac{p}{2}} (E|z_1(s)|^p + E|z_2(s)|^p) + 2^{p-1} E|f(0,0)|^p \\
&\leq K_2(1 + E|z_1(s)|^p + E|z_2(s)|^p), \qquad (2.1.25)
\end{aligned}$$

где је $K_2 = 2^{\frac{3p}{2}-2} K_1^{\frac{p}{2}} \vee 2^{p-1} E|f(0,0)|^p$. На сличан начин се добија да је, за $s \in [0, t \wedge \rho_R]$,

$$\begin{aligned}
E|g(z_1(s), z_2(s))|^p &\leq 2^{p-1} 2^{\frac{p}{2}-1} K_1 (E|z_1(s)|^p + E|z_2(s)|^p) + 2^{p-1} E|g(0,0)|^p \\
&\leq K_3(1 + E|z_1(s)|^p + E|z_2(s)|^p),
\end{aligned}$$

где је $K_3 = 2^{\frac{3p}{2}-2} K_1^{\frac{p}{2}} \vee 2^{p-1} E|g(0,0)|^p$. Применом неједнакости Буркхолдер–Дејвис–Гандија, а онда и Хелдерове неједнакости са коњугованим експонентима $\frac{p}{2}$ и $\frac{p}{p-2}$ у случају када је $p > 2$, односно без примене Хелдерове неједнакости ако је $p = 2$, а на крају и Теореме Фубинија, следи да је

$$\begin{aligned}
&E \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^{s \wedge \rho_R} g(z_1(r), z_2(r)) dB(r) \right|^p \\
&\leq C_p T^{\frac{p}{2}-1} \int_0^t E|g(z_1(s \wedge \rho_R), z_2(s \wedge \rho_R))|^p ds \\
&\leq C_p T^{\frac{p}{2}-1} K_3 \int_0^t (1 + E|z_1(s \wedge \rho_R)|^p + E|z_2(s \wedge \rho_R)|^p) ds, \qquad (2.1.26)
\end{aligned}$$

где је C_p универзална константа која зависи једино од p. Дакле, заменом (2.1.24), (2.1.25) и (2.1.26) у (2.1.23) и применом дефиниције (2.1.14) степенастих процеса z_1 и z_2, добија се

$$\begin{aligned}
&E \sup_{0 \leq s \leq t} |y(s \wedge \rho_R) - u(z_3(s \wedge \rho_R))|^p \\
&\leq 3^{p-1} 2^{p-1} (1 + k^p) E \sup_{-\tau \leq s \leq 0} |\xi(s)|^p \\
&\quad + 3^{p-1} T^{p-1} K_2 \int_0^t (1 + E|z_1(s \wedge \rho_R)|^p + E|z_2(s \wedge \rho_R)|^p) ds \\
&\quad + 3^{p-1} C_p T^{\frac{p}{2}-1} K_3 \int_0^t (1 + E|z_1(s \wedge \rho_R)|^p + E|z_2(s \wedge \rho_R)|^p) ds \\
&\leq 6^{p-1} (1 + k^p) E \sup_{-\tau \leq s \leq 0} |\xi(s)|^p \\
&\quad + 3^{p-1} T^{\frac{p}{2}-1} (T^{\frac{p}{2}} K_2 + C_p K_3) \int_0^t (1 + 2E \sup_{-\tau \leq r \leq s} |y(r \wedge \rho_R)|^p) ds \\
&\leq 3^{p-1} \left[2^{p-1} (1 + k^p) E \sup_{-\tau \leq s \leq 0} |\xi(s)|^p + T^{\frac{p}{2}} (T^{\frac{p}{2}} K_2 + C_p K_3) \right] \\
&\quad + 3^{p-1} 2 T^{\frac{p}{2}-1} (T^{\frac{p}{2}} K_2 + C_p K_3) \int_0^t E \sup_{-\tau \leq r \leq s} |y(r \wedge \rho_R)|^p ds,
\end{aligned}$$

односно

$$E\sup_{0\le s\le t}|y(s\wedge\rho_R)-u(z_3(s\wedge\rho_R))|^p\le S_1+S_2\int_0^t E\sup_{-\tau\le r\le s}|y(r\wedge\rho_R)|^p ds, \qquad (2.1.27)$$

где је

$$\begin{aligned} S_1 &= 3^{p-1}\left[2^{p-1}(1+k^p)E\sup_{-\tau\le s\le 0}|\xi(s)|^p+T^{\frac{p}{2}}(T^{\frac{p}{2}}K_2+C_pK_3)\right],\\ S_2 &= 3^{p-1}2T^{\frac{p}{2}-1}(T^{\frac{p}{2}}K_2+C_pK_3). \end{aligned}$$

Заменом (2.1.27) у (2.1.22), закључује се да је

$$\begin{aligned} E\sup_{-\tau\le s\le t}|y(s\wedge\rho_R)|^p &\le \frac{1}{1-k}E\sup_{-\tau\le s\le 0}|\xi(s)|^p+\frac{S_1}{(1-k)^p}\\ &\quad+\frac{S_2}{(1-k)^p}\int_0^t E\sup_{-\tau\le r\le s}|y(r\wedge\rho_R)|^p ds\\ &\le S_1'+S_2'\int_0^t E\sup_{-\tau\le r\le s}|y(r\wedge\rho_R)|^p ds, \end{aligned}$$

где је

$$S_1'=\frac{1}{1-k}E\sup_{-\tau\le s\le 0}|\xi(s)|^p+\frac{S_1}{(1-k)^p},\qquad S_2'=\frac{S_2}{(1-k)^p}.$$

Примена Грунвал–Белманове леме имплицира

$$E\sup_{-\tau\le s\le t}|y(s\wedge\rho_R)|^p\le S_1'e^{S_2'T}\equiv H.$$

Када $R\to+\infty$, може се закључити да претходна неједнакост постаје

$$E\sup_{-\tau\le s\le t}|y(s)|^p\le H,\quad t\in[0,T].$$

□

2.1.3 L^p-конвергенција решења Ојлер–Марујаме

У овом одељку се разматра конвергенција класичне методе Ојлер–Марујаме у L^p-смислу на коначном временском интервалу ($[0,T]$, за произвољно $T>0$) када коефицијенти преноса и дифузије једначине (2.0.1) задовољавају глобални Липшицов услов. Резултати који се наводе у овом одељку су објављени у раду [49].

Поред услова наведених у Поглављу 1.4.5, уводе се додатне претпоставке које су важне за доказивање главног резултата, тј. L^p-конвергенције решења Ојлер–Марујаме ка тачном решењу једначине (2.0.1).

$\mathcal{H}_5$: Постоји позитивна константа C_ξ, тако да је, за $p\ge 2$,

$$E\sup_{t,s\in[-\tau,0],\ |s-t|\le\Delta}|\xi(s)-\xi(t)|^p\le C_\xi\Delta^{\frac{p}{2}}.$$

$\mathcal{H}_6$: Постоји позитивна константа η, тако да је

$$|\delta(t)-\delta(s)| \le \eta|t-s|, \qquad t,s\ge 0.$$

Да би се доказао главни резултат овог одељка, пре тога је неопходно доказати следеће две леме. Нека $\lfloor\cdot\rfloor$ представља функцију цео део.

Лема 2.1.4 *Ако важе претпоставке $\mathcal{H}_1'$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_5$ и $\mathcal{H}_6$, заједно са (2.1.3) и*

$$k(3+\lfloor\eta\rfloor)<1, \tag{2.1.28}$$

тада је, за сваки цео број $l>1$ и $p\ge 2$,

$$E\sup_{-M\le k\le N}|Y(t_k)-Y(t_{k-1})|^p \le \bar{H}(l)\Delta^{\frac{pl-1}{2l}},$$

где је $\bar{H}(l)$ позитивна константа, која зависи од l, али не зависи од Δ.

Доказ. На основу (2.1.11), (2.1.12) и Претпоставке $\mathcal{H}_5$, добија се да је

$$E\sup_{-M\le k\le 0}|Y(t_k)-Y(t_{k-1})|^p = E\sup_{-M+1\le k\le 0}|\xi(t_k)-\xi(t_{k-1})|^p \le C_\xi\Delta^{\frac{p}{2}}.$$

Када је $k\in\{1,2,\dots,N\}$, на основу (2.1.13) следи да је

$$\begin{aligned}Y(t_k)-Y(t_{k-1}) &= u(Y(t_{k-1}-I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta))-u(Y(t_{k-2}-I_\Delta[\delta(t_{k-2})]\Delta))\\ &\quad+f(Y(t_{k-1}),Y(t_{k-1}-I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta))\Delta\\ &\quad+g(Y(t_{k-1}),Y(t_{k-1}-I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta))\Delta B_{k-1}.\end{aligned}$$

Применом елементарних неједнакости (1.4.5) и (1.4.1), може се закључити да је

$$\begin{aligned}&|Y(t_k)-Y(t_{k-1})|^p\\ &\le\left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}\frac{1}{\epsilon}|u(Y(t_{k-1}-I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta))-u(Y(t_{k-2}-I_\Delta[\delta(t_{k-2})]\Delta))|^p\\ &\quad+2^{p-1}\left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}|f(Y(t_{k-1}),Y(t_{k-1}-I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta))\Delta|^p\\ &\quad+2^{p-1}\left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}|g(Y(t_{k-1}),Y(t_{k-1}-I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta))\Delta B_{k-1}|^p.\end{aligned}$$

Претпоставка $\mathcal{H}_2$ имплицира

$$\begin{aligned}&|Y(t_k)-Y(t_{k-1})|^p\\ &\le\left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}\frac{k^p}{\epsilon}|Y(t_{k-1}-I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta)-Y(t_{k-2}-I_\Delta[\delta(t_{k-2})]\Delta)|^p\\ &\quad+2^{p-1}\left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}|f(Y(t_{k-1}),Y(t_{k-1}-I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta))|^p\Delta^p\\ &\quad+2^{p-1}\left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}|g(Y(t_{k-1}),Y(t_{k-1}-I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta))\Delta B_{k-1}|^p,\end{aligned}$$

одакле је

$$
\begin{aligned}
&E\sup_{1\le k\le N}|Y(t_k)-Y(t_{k-1})|^p \qquad (2.1.29)\\
&\le\left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}\frac{k^p}{\epsilon}E\sup_{1\le k\le N}|Y\left(t_{k-1}-I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta\right)-Y\left(t_{k-2}-I_\Delta[\delta(t_{k-2})]\Delta\right)|^p\\
&\quad+2^{p-1}\left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}E\sup_{1\le k\le N}|f\left(Y(t_{k-1}),Y\left(t_{k-1}-I_\Delta\left[\delta(t_{k-1})\right]\Delta\right)\right)|^p\Delta^p\\
&\quad+2^{p-1}\left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}E\sup_{1\le k\le N}|g\left(Y(t_{k-1}),Y\left(t_{k-1}-I_\Delta\left[\delta(t_{k-1})\right]\Delta\right)\right)\Delta B_{k-1}|^p.
\end{aligned}
$$

У наставку се сваки члан претходне суме оцењује посебно.
На основу Претпоставке $\mathcal{H}_6$, следи да је, за $k\in\{2,3,\dots,N+1\}$,

$$
\begin{aligned}
|t_{k-1}-I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta-t_{k-2}+I_\Delta[\delta(t_{k-2})]\Delta| &\le \Delta+|I_\Delta[\delta(t_{k-2})]-I_\Delta[\delta(t_{k-1})]|\Delta\\
&\le\Delta+(1+\eta)\Delta\\
&\le(3+\lfloor\eta\rfloor)\Delta.
\end{aligned}
$$

Са друге стране, за $k=1$, како је $\delta(-\Delta)=\delta(0)$, добија се да је

$$|t_{k-1}-I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta-t_{k-2}+I_\Delta[\delta(t_{k-2})]\Delta|=\Delta.$$

Према томе, како је $t_k=k\Delta$, за $k\in\{1,2,\dots,N+1\}$, следи да је

$$|(k-1)-I_\Delta[\delta(t_{k-1})]-(k-2)+I_\Delta[\delta(t_{k-2})]|\le 3+\lfloor\eta\rfloor. \qquad (2.1.30)$$

Ако се претпостави да је $(k-1)-I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\le(k-2)-I_\Delta[\delta(t_{k-2})]$ за $k\in\{1,2,\dots,N+1\}$, релација (2.1.30) и елементарна неједнакост (1.4.5) имплицирају

$$
\begin{aligned}
&|Y\left(t_{k-1}-I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta\right)-Y\left(t_{k-2}-I_\Delta[\delta(t_{k-2})]\Delta\right)|^p\\
&\qquad\le(3+\lfloor\eta\rfloor)^{p-1}\sum_{j=(k-1)-I_\Delta[\delta(t_{k-1})]+1}^{(k-2)-I_\Delta[\delta(t_{k-2})]}|Y(t_j)-Y(t_{j-1})|^p\\
&\qquad\le(3+\lfloor\eta\rfloor)^p\sup_{-M\le j\le N}|Y(t_j)-Y(t_{j-1})|^p. \qquad (2.1.31)
\end{aligned}
$$

У супротном, ако је $(k-1)-I_\Delta[\delta(t_{k-1})]>(k-2)-I_\Delta[\delta(t_{k-2})]$, $k\in\{1,2,\dots,N+1\}$, тада се применом истих аргумената као у претходном извођењу добија оцена (2.1.31). Сходно томе, следи да се део првог члана на десној страни неједнакости (2.1.29) може оценити као

$$
\begin{aligned}
&E\sup_{1\le k\le N}|Y\left(t_{k-1}-I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta\right)-Y\left(t_{k-2}-I_\Delta[\delta(t_{k-2})]\Delta\right)|^p\\
&\qquad\le(3+\lfloor\eta\rfloor)^pE\sup_{-M\le k\le N}|Y\left(t_k\right)-Y\left(t_{k-1}\right)|^p. \qquad (2.1.32)
\end{aligned}
$$

Са друге стране, применом Претпоставке $\mathcal{H}_1'$ и Леме 2.1.3, оцена дела другог сабирка на десној страни неједнакости (2.1.29) је

$$
\begin{aligned}
&E\sup_{1\le k\le N}\left|f\left(Y(t_{k-1}),Y\left(t_{k-1}-I_\Delta\left[\delta(t_{k-1})\right]\Delta\right)\right)\right|^p\\
&\quad\le 2^{p-1}E\sup_{1\le k\le N}\left|f\left(Y(t_{k-1}),Y\left(t_{k-1}-I_\Delta\left[\delta(t_{k-1})\right]\Delta\right)\right)-f(0,0)\right|^p+2^{p-1}E|f(0,0)|^p\\
&\quad\le 2^{p-1}K_1^{\frac{p}{2}}E\sup_{1\le k\le N}\left[|Y(t_{k-1})|^2+|Y(t_{k-1}-I_\Delta\left[\delta(t_{k-1})\right]\Delta)|^2\right]^{\frac{p}{2}}+2^{p-1}E|f(0,0)|^p\\
&\quad\le 2^{\frac{3p}{2}-2}K_1^{\frac{p}{2}}E\sup_{1\le k\le N}\left[|Y(t_{k-1})|^p+|Y(t_{k-1}-I_\Delta\left[\delta(t_{k-1})\right]\Delta)|^p\right]+2^{p-1}E|f(0,0)|^p\\
&\quad\le 2^{\frac{3p}{2}-1}K_1^{\frac{p}{2}}E\sup_{-\tau\le t\le T}|y(t)|^p+2^{p-1}E|f(0,0)|^p\\
&\quad\le 2^{\frac{3p}{2}-1}K_1^{\frac{p}{2}}H+2^{p-1}E|f(0,0)|^p.
\end{aligned}
\tag{2.1.33}
$$

Коначно, за оцену дела трећег сабирка на десној страни неједнакости (2.1.29) примењују се Хелдерова неједнакости и Лема 2.1.3, тј. за сваки цео број $l>1$, важи да је

$$
\begin{aligned}
&E\sup_{1\le k\le N}\left|g\left(Y(t_{k-1}),Y\left(t_{k-1}-I_\Delta\left[\delta(t_{k-1})\right]\Delta\right)\right)\Delta B_{k-1}\right|^p\\
&\quad\le E\left(\sup_{1\le k\le N}\left|g\left(Y(t_{k-1}),Y\left(t_{k-1}-I_\Delta\left[\delta(t_{k-1})\right]\Delta\right)\right)\right|^p\sup_{1\le k\le N}|\Delta B_{k-1}|^p\right)\\
&\quad\le\left[E\left(\sup_{1\le k\le N}\left|g\left(Y(t_{k-1}),Y\left(t_{k-1}-I_\Delta\left[\delta(t_{k-1})\right]\Delta\right)\right)\right|^{\frac{2pl}{2l-1}}\right)\right]^{\frac{2l-1}{2l}}\\
&\qquad\times\left[E\left(\sup_{0\le k\le N-1}|\Delta B_k|^{2pl}\right)\right]^{\frac{1}{2l}}\\
&\quad\le\left[2^{\frac{3p}{2}-1}K_1^{\frac{p}{2}}E\sup_{-\tau\le t\le T}|y(t)|^p+2^{p-1}E|g(0,0)|^p\right]^{\frac{2l-1}{2l}}\left[\sum_{k=0}^{N-1}E|\Delta B_k|^{2pl}\right]^{\frac{1}{2l}}\\
&\quad\le\left[2^{\frac{3pl}{2l-1}}K_1^{\frac{pl}{2l-1}}H+2^{\frac{2pl}{2l-1}-1}E|g(0,0)|^{\frac{2pl}{2l-1}}\right]^{\frac{2l-1}{2l}}\left[\sum_{k=0}^{N-1}E|\Delta B_k|^{2pl}\right]^{\frac{1}{2l}}.
\end{aligned}
\tag{2.1.34}
$$

Како је $B(t)=(B^1(t),B^2(t),\dots,B^m(t))^T$, $t\ge0$, m-димензионално стандардно Брауново кретање, закључује се да је

$$
\begin{aligned}
E|\Delta B_k|^{2pl}&=E\left(|\Delta B_k^1|^2+|\Delta B_k^2|^2+\cdots+|\Delta B_k^m|^2\right)^{pl}\\
&\le m^{pl-1}\sum_{i=1}^m E|\Delta B_k^i|^{2pl}\\
&=m^{pl}(2pl-1)!!\Delta^{pl},
\end{aligned}
\tag{2.1.35}
$$

где је $(2pl-1)!!=1\times3\times\cdots\times(2pl-1)$. Заменом (2.1.35) у (2.1.34), добија се да је

$$\begin{aligned}
&E \sup_{1\le k\le N} \left|g\left(Y(t_{k-1}), Y\left(t_{k-1} - I_\Delta\left[\delta(t_{k-1})\right]\Delta\right)\right)\Delta B_{k-1}\right|^p \\
&\quad\le \left[2^{\frac{3pl}{2l-1}} K_1^{\frac{pl}{2l-1}} H + 2^{\frac{2pl}{2l-1}-1} E|g(0,0)|^{\frac{2pl}{2l-1}}\right]^{\frac{2l-1}{2l}} \left[\sum_{k=0}^{N-1} m^{pl}(2pl-1)!!\Delta^{pl}\right]^{\frac{1}{2l}} \\
&\quad= \left[2^{\frac{3pl}{2l-1}} K_1^{\frac{pl}{2l-1}} H + 2^{\frac{2pl}{2l-1}-1} E|g(0,0)|^{\frac{2pl}{2l-1}}\right]^{\frac{2l-1}{2l}} m^{\frac{p}{2}} (T(2pl-1)!!)^{\frac{1}{2l}} \Delta^{\frac{pl-1}{2l}} \\
&\quad= \bar{M}(l)\Delta^{\frac{pl-1}{2l}},
\end{aligned} \tag{2.1.36}$$

где је

$$\bar{M}(l) = \left[2^{\frac{3pl}{2l-1}} K_1^{\frac{pl}{2l-1}} H + 2^{\frac{2pl}{2l-1}-1} E|g(0,0)|^{\frac{2pl}{2l-1}}\right]^{\frac{2l-1}{2l}} m^{\frac{p}{2}} (T(2pl-1)!!)^{\frac{1}{2l}}.$$

Заменом (2.1.32), (2.1.33) и (2.1.36) у (2.1.29), следи да је

$$\begin{aligned}
&E \sup_{1\le k\le N} |Y(t_k) - Y(t_{k-1})|^p \\
&\quad\le \left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1} \frac{k^p}{\epsilon}(3+\lfloor\eta\rfloor)^p E \sup_{-M\le k\le N} \left|Y\left(t_k\right) - Y\left(t_{k-1}\right)\right|^p \\
&\qquad+ \left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1} 2^{p-1}\left(\left[2^{\frac{3p}{2}-1} K_1^{\frac{p}{2}} H + 2^{p-1} E|f(0,0)|^p\right]\Delta^p + \bar{M}(l)\Delta^{\frac{pl-1}{2l}}\right).
\end{aligned}$$

На основу услова (2.1.28), постоји константа $\bar{\epsilon} > 0$ тако да је

$$\left[1+\bar{\epsilon}^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1} \frac{k^p}{\bar{\epsilon}}(3+\lfloor\eta\rfloor)^p = \gamma \in (0,1). \tag{2.1.37}$$

Узимајући у обзир да је $\Delta \in (0,1)$ и применом Претпоставке $\mathcal{H}_5$, следи да је

$$\begin{aligned}
&E \sup_{-M\le k\le N} |Y(t_k) - Y(t_{k-1})|^p \\
&\qquad\le C_\xi \Delta^{\frac{pl-1}{2l}} + \gamma E \sup_{-M\le k\le N} |Y(t_k) - Y(t_{k-1})|^p \\
&\qquad\quad+ \left[1+\bar{\epsilon}^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1} 2^{p-1}\left(2^{\frac{3p}{2}-1} K_1^{\frac{p}{2}} H + 2^{p-1} E|f(0,0)|^p + \bar{M}(l)\right)\Delta^{\frac{pl-1}{2l}}.
\end{aligned}$$

На основу претходне неједнакости, може се закључити да је

$$\begin{aligned}
&E \sup_{-M\le k\le N} |Y(t_k) - Y(t_{k-1})|^p \\
&\quad\le \frac{\Delta^{\frac{pl-1}{2l}}}{1-\gamma}\left(C_\xi + 2^{p-1}\left[1+\bar{\epsilon}^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}\left(2^{\frac{3p}{2}-1} K_1^{\frac{p}{2}} H + 2^{p-1} E|f(0,0)|^p + \bar{M}(l)\right)\right) \\
&\quad= \bar{H}(l)\Delta^{\frac{pl-1}{2l}},
\end{aligned}$$

где је

$$\bar{H}(l) = \frac{C_\xi}{1-\gamma} + \frac{2^{p-1}}{1-\gamma}\left[1+\bar{\epsilon}^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}\left(2^{\frac{3p}{2}-1}K_1^{\frac{p}{2}}H + 2^{\ p-1}E|f(0,0)|^p + \bar{M}(l)\right),$$

чиме је доказ завршен. □

Лема 2.1.5 *Нека важе услови Леме 2.1.4. Тада, за сваки цео број $l > 1$ и $p \geq 2$, важи да је*

$$E\sup_{0\leq t\leq T}|y(t-\delta(t)) - z_3(t)|^p \leq D(l)\Delta^{\frac{pl-1}{2l}},$$

где је $D(l)$ позитивна константа, која зависи од l, али не зависи од Δ.

Доказ. Нека је $t \in (0,T]$ произвољан тренутак. Поред тога, нека је $k \in \{0,1,\ldots,N-1\}$ и $k_t \in \{-M,-M+1,\ldots,N-1\}$, тако да $t \in [t_k, t_{k+1})$ и $t-\delta(t) \in [t_{k_t}, t_{k_t+1})$.

Примећује се да, за $t_{k-1} - I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta \leq t_{k_t}$, на основу Претпоставке $\mathcal{H}_6$, важи да је

$$\begin{aligned}
|t_{k_t} - t_{k-1} + I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta| &\leq t - \delta(t) - t_{k-1} + I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta \\
&= t - t_k + t_k - t_{k-1} - \delta(t) + I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta \\
&\leq 2\Delta + I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta - \delta(t) \\
&\leq 2\Delta + \left(\frac{\delta(t_{k-1})}{\Delta} + 1\right)\Delta - \delta(t) \\
&\leq 3\Delta + |\delta(t_{k-1}) - \delta(t)| \\
&\leq 3\Delta + |\delta(t_{k-1}) - \delta(t_k)| + |\delta(t_k) - \delta(t)| \\
&\leq 3\Delta + 2\eta\Delta \\
&\leq (4 + \lfloor 2\eta \rfloor)\Delta. \qquad (2.1.38)
\end{aligned}$$

Са друге стране, ако је $t_{k_t} < t_{k-1} - I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta$, имајући на уму Претпоставку $\mathcal{H}_6$, добија се да је

$$\begin{aligned}
|t_{k_t} - t_{k-1} + I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta| &\leq \Delta + |t_{k-1} - I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta - t + \delta(t)| \\
&\leq 3\Delta + |\delta(t) - I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta| \\
&\leq 4\Delta + |\delta(t) - \delta(t_{k-1})| \\
&\leq (5 + \lfloor 2\eta \rfloor)\Delta. \qquad (2.1.39)
\end{aligned}$$

На основу (2.1.38) и (2.1.39) следи да је

$$|k_t - (k - 1 - I_\Delta[\delta(t_{k-1})])| \leq 5 + \lfloor 2\eta \rfloor. \qquad (2.1.40)$$

Примењујући дефиницију (2.1.16) степенастог процеса z_3, добија се, за $t \in [t_k, t_{k+1})$, да је

$$|y(t-\delta(t)) - z_3(t)|^p \leq 2^{p-1}|y(t-\delta(t)) - Y(t_{k_t})|^p + 2^{p-1}|Y(t_{k_t}) - \bar{Z}_k(t)|^p.$$

Сходно томе, закључује се да је

$$E\sup_{0\le t\le T}|y(t-\delta(t))-z_3(t)|^p \le 2^{p-1}E\sup_{0\le t\le T}|y(t-\delta(t))-Y(t_{k_t})|^p + 2^{p-1}E\sup_{0\le t\le T}|Y(t_{k_t})-\bar{Z}_k(t)|^p. \tag{2.1.41}$$

У циљу оцењивања израза $E\sup_{0\le t\le T}|y(t-\delta(t))-Y(t_{k_t})|^p$, разматрају се следећа два случаја.

- *Случај 1:* Ако је $k_t<0$, тада се, на основу Претпоставке $\mathcal{H}_5$, добија да је

$$\begin{aligned}E\sup_{0\le t\le T,\,k_t<0}|y(t-\delta(t))-Y(t_{k_t})|^p &= E\sup_{0\le t\le T,\,k_t<0}|\xi(t-\delta(t))-\xi(t_{k_t})|^p\\ &\le E\sup_{0\le s,t\le T,|s-t|\le\Delta}|\xi(t)-\xi(s)|^p\\ &\le C_\xi\Delta^{\frac{p}{2}}.\end{aligned} \tag{2.1.42}$$

- *Случај 2:* Ако је $k_t\ge 0$, тада, на основу (2.1.18), следи да је

$$\begin{aligned}&E\sup_{0\le t\le T,\,k_t\ge 0}|y(t-\delta(t))-Y(t_{k_t})|^p\\ &\quad\le 3^{p-1}E\sup_{0\le t\le T,\,k_t\ge 0}|u(\bar{Z}_{k_t}(t-\delta(t))-u(Y(t_{k_t-1}-I_\Delta[\delta(t_{k_t-1})]\Delta))|^p\\ &\qquad+3^{p-1}E\sup_{0\le t\le T,\,k_t\ge 0}\left|\int_{t_{k_t}}^{t-\delta(t)}f(z_1(s),z_2(s))ds\right|^p\\ &\qquad+3^{p-1}E\sup_{0\le t\le T,\,k_t\ge 0}\left|\int_{t_{k_t}}^{t-\delta(t)}g(z_1(s),z_2(s))dB(s)\right|^p.\end{aligned} \tag{2.1.43}$$

Дакле, примењујући Претпоставку $\mathcal{H}_2$ и дефиниције (2.1.14) и (2.1.15), добија се да је

$$\begin{aligned}&E\sup_{0\le t\le T,\,k_t\ge 0}|u(\bar{Z}_{k_t}(t-\delta(t)))-u(Y(t_{k_t-1}-I_\Delta[\delta(t_{k_t-1})]\Delta))|^p\\ &\quad\le k^pE\sup_{0\le t\le T,\,k_t\ge 0}\left|\frac{t-\delta(t)-t_{k_t}}{\Delta}(z_2(t_{k_t})-z_2(t_{k_t-1}))\right|^p\\ &\quad\le k^pE\sup_{0\le t\le T,\,k_t\ge 0}|Y(t_{k_t}-I_\Delta[\delta(t_{k_t})]\Delta)-Y(t_{k_t-1}-I_\Delta[\delta(t_{k_t-1})]\Delta)|^p.\end{aligned}$$

На основу оцене (2.1.32) и Леме 2.1.4, следи да је

$$\begin{aligned}&E\sup_{0\le t\le T,\,k_t\ge 0}|u(\bar{Z}_{k_t}(t-\delta(t))-u(Y(t_{k_t-1}-I_\Delta[\delta(t_{k_t-1})]\Delta))|^p\\ &\qquad\le k^p(3+\lfloor\eta\rfloor)^pE\sup_{-M\le k\le N}|Y(t_k)-Y(t_{k-1})|^p\\ &\qquad\le k^p(3+\lfloor\eta\rfloor)^p\bar{H}(l)\Delta^{\frac{pl-1}{2l}}.\end{aligned} \tag{2.1.44}$$

Примена Хелдерове неједнакости, Претпоставке $\mathcal{H}_1'$ и Леме 2.1.3 даје

$$
\begin{aligned}
E \sup_{0\le t\le T,\ k_t\ge 0} & \left| \int_{t_{k_t}}^{t-\delta(t)} f(z_1(s), z_2(s))ds \right|^p \\
& \le \Delta^{p-1} E \sup_{0\le t\le T,\ k_t\ge 0} \int_{t_{k_t}}^{t-\delta(t)} |f(z_1(s), z_2(s))|^p ds \\
& \le 2^{\frac{p}{2}-1} K_1^{\frac{p}{2}} \Delta^{p-1} E \sup_{0\le t\le T,\ k_t\ge 0} \int_{t_{k_t}}^{t-\delta(t)} (|z_1(s)|^p + |z_2(s)|^p) ds,
\end{aligned}
$$

односно

$$
\begin{aligned}
E \sup_{0\le s,t\le T,\ k_t\ge 0} \left| \int_{t_{k_t}}^{t-\delta(t)} f(z_1(s), z_2(s))ds \right|^p & \le (2K_1)^{\frac{p}{2}} \Delta^{p-1} \int_0^T E \sup_{-\tau\le t\le T} |y(t)|^p ds \\
& \le (2K_1)^{\frac{p}{2}} T H \Delta^{p-1}. \qquad (2.1.45)
\end{aligned}
$$

Са друге стране, за сваки цео број $l > 1$, применом Хелдерове неједнакости, добија се да је

$$
\begin{aligned}
E \sup_{0\le t\le T,\ k_t\ge 0} & \left| \int_{t_{k_t}}^{t-\delta(t)} g(z_1(s), z_2(s))dB(s) \right|^p \\
&= E \sup_{0\le t\le T, k_t\ge 0} |g(Y(t_{k_t}), Y(t_{k_t} - I_\Delta[\delta(t_{k_t})]\Delta))(B(t-\delta(t)) - B(k_t))|^p \\
&\le \left(E \sup_{0\le t-\delta(t)\le T,\ k_t\ge 0} |g(Y(t_{k_t}), Y(t_{k_t} - I_\Delta[\delta(t_{k_t})]\Delta))|^{\frac{2pl}{2l-1}} \right)^{\frac{2l-1}{2l}} \\
&\quad \times \left(E \sup_{0\le t-\delta(t)\le T,\ k_t\ge 0} |B(t-\delta(t)) - B(k_t)|^{2pl} \right)^{\frac{1}{2l}}. \qquad (2.1.46)
\end{aligned}
$$

На основу Дубове мартингалне неједнакости важи да је

$$
\begin{aligned}
E \sup_{0\le t-\delta(t)\le T,\ k_t\ge 0} & |B(t-\delta(t)) - B(k_t)|^{2pl} \\
&\le E \sup_{0\le k_t\le N-1} \sup_{k_t\Delta\le t-\delta(t)\le (k_t+1)\Delta} |B(t-\delta(t)) - B(k_t)|^{2pl} \\
&\le \sum_{k_t=0}^{N-1} E \sup_{k_t\Delta\le t-\delta(t)\le (k_t+1)\Delta} |B(t-\delta(t)) - B(k_t)|^{2pl} \\
&\le \left(\frac{2pl}{2pl-1} \right)^{2pl} \sum_{k_t=0}^{N-1} E|B(t_{k_t+1}) - B(t_{k_t})|^{2pl}. \qquad (2.1.47)
\end{aligned}
$$

Заменом (2.1.47) у (2.1.46) и примењујући исти поступак као при добијању оцене (2.1.36), следи да је

$$\begin{aligned}
&E\sup_{0\le t\le T,\ k_t\ge 0}\left|\int_{t_{k_t}}^{t-\delta(t)} g(z_1(s),z_2(s))dB(s)\right|^p\\
&\le\left(\frac{2pl}{2pl-1}\right)^p\left(E\sup_{0\le t-\delta(t)\le T,\ k_t\ge 0}|g(Y(t_{k_t}),Y(t_{k_t}-I_\Delta[\delta(t_{k_t})]\Delta))|^{\frac{2pl}{2l-1}}\right)^{\frac{2l-1}{2l}}\\
&\quad\times\left(\sum_{k_t=0}^{N-1}E|B(t_{k_t+1})-B(t_{k_t})|^{2pl}\right)^{\frac{1}{2l}}\\
&\le\left(\frac{2pl}{2pl-1}\right)^p\bar{M}(l)\Delta^{\frac{pl-1}{2l}}. \qquad (2.1.48)
\end{aligned}$$

Заменом (2.1.44), (2.1.45) и (2.1.48) у (2.1.43) и како је $\Delta\in(0,1)$, добија се да је

$$\begin{aligned}
E\sup_{0\le t\le T,\ k_t\ge 0}|y(t-\delta(t))-Y(t_{k_t})|^p &\le 3^{p-1}k^p(3+\lfloor\eta\rfloor)^p\bar{H}(l)\Delta^{\frac{pl-1}{2l}}+3^{p-1}(2K_1)^{\frac{p}{2}}TH\Delta^{p-1}\\
&\quad+3^{p-1}\left(\frac{2pl}{2pl-1}\right)^p\bar{M}(l)\Delta^{\frac{pl-1}{2l}}\\
&\le R_1(l)\Delta^{\frac{pl-1}{2l}}, \qquad (2.1.49)
\end{aligned}$$

где је

$$R_1(l)=3^{p-1}\left(k^p(3+\lfloor\eta\rfloor)^p\bar{H}(l)+(2K_1)^{\frac{p}{2}}TH+\left(\frac{2pl}{2pl-1}\right)^p\bar{M}(l)\right).$$

Према томе, на основу (2.1.42) и (2.1.49), важи да је

$$E\sup_{0\le t\le T}|y(t-\delta(t))-Y(t_{k_t})|^p\le M(l)\Delta^{\frac{pl-1}{2l}},$$

где је $M(l)=C_\xi\vee R_1(l)$. Стога, (2.1.41) постаје

$$E\sup_{0\le t\le T}|y(t-\delta(t))-z_3(t)|^p\le 2^{p-1}M(l)\Delta^{\frac{pl-1}{2l}}+2^{p-1}E\sup_{0\le t\le T}|Y(t_{k_t})-\bar{Z}_k(t)|^p. \qquad (2.1.50)$$

Да би се оценио израз $E\sup_{0\le t\le T}|Y(t_{k_t})-\bar{Z}_k(t)|^p$ из (2.1.50), користи се дефиниција (2.1.15). Најпре је потребно уочити да је

$$Y(t_{k_t})-\bar{Z}_k(t)=Y(t_{k_t})-z_2(t_{k-1})-\frac{t-t_k}{\Delta}(z_2(t_k)-z_2(t_{k-1})),\ t\in[t_k,t_{k+1}).$$

На основу (2.1.14), (2.1.31) и (2.1.40), добија се да је

$$\begin{aligned}
|Y(t_{k_t})-\bar{Z}_k(t)|^p &\le 2^{p-1}|Y(t_{k_t})-z_2(t_{k-1})|^p+2^{p-1}|z_2(t_k)-z_2(t_{k-1})|^p\\
&=2^{p-1}|Y(t_{k_t})-Y(t_{k-1}-I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta)|^p\\
&\quad+2^{p-1}|Y(t_k-I_\Delta[\delta(t_k)]\Delta)-Y(t_{k-1}-I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta)|^p\\
&\le 2^{p-1}\left((5+\lfloor 2\eta\rfloor)^p+(3+\lfloor\eta\rfloor)^p\right)\sup_{-M\le i\le N}|Y(t_i)-Y(t_{i-1})|^p.
\end{aligned}$$

Затим, на основу Леме 2.1.4, закључује се да је

$$E \sup_{0\le t\le T} |Y(t_{k_t}) - \bar{Z}_k(t)|^2 \le 2^{p-1}\left((5+\lfloor 2\eta\rfloor)^p + (3+\lfloor\eta\rfloor)^p\right)\bar{H}(l)\Delta^{\frac{pl-1}{2l}}. \qquad (2.1.51)$$

Коначно, на основу (2.1.50) и (2.1.51), заједно са (2.1.41), добија се да је

$$E \sup_{0\le t\le T} |y(t-\delta(t)) - z_3(t)|^2 \le D(l)\Delta^{\frac{pl-1}{2l}},$$

где је

$$D(l) = 2^{p-1}M(l) + 4^{p-1}\left((5+\lfloor 2\eta\rfloor)^p + (3+\lfloor\eta\rfloor)^p\right)\bar{H}(l),$$

чиме је доказ завршен. □

Сада се може доказати L^p-конвергенција апроксимативног решења Ојлер–Марујаме $\{y(t), t\in[-\tau,T]\}$ ка тачном решењу $\{x(t), t\in[-\tau,T]\}$ једначине (2.0.1).

Теорема 2.1.3 *Нека важе услови Леме 2.1.4. Тада, за сваки цео број $l>1$ и $p>0$, важи да је*

$$E \sup_{-\tau\le t\le T} |x(t)-y(t)|^p \le S(l)\Delta^{\frac{pl-1}{2l}},$$

где је $S(l)$ позитивна константа, која зависи од l, али је независна од Δ.

Доказ. Најпре се разматра случај када је $p\ge 2$. Нека су τ_R и ρ_R два времена заустављања дефинисана са (2.1.5) и (2.1.21), респективно. За сваки природан број $R\ge R_0$, дефинише се време заустављања

$$\theta_R = \tau_R \wedge \rho_R,$$

при чему R_0 задовољава релацију (2.1.4). Тада је низ времена заустављања $\{\theta_R\}_{R\ge R_0}$ растући и важи да је $\lim_{R\to+\infty}\theta_R = +\infty$ с.и.

За свако $t\in[0,T]$ и $\epsilon\in(0,1)$, на основу елементарних неједнакости (1.4.5) и (1.4.1), следи да је

$$\begin{aligned}
&|x(t\wedge\theta_R) - y(t\wedge\theta_R)|^p \qquad (2.1.52)\\
&\le \left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}\frac{1}{\epsilon}|u(x(t\wedge\theta_R - \delta(t\wedge\theta_R)) - u(z_3(t\wedge\theta_R)) - u(\xi(-\delta(0)))\\
&\quad + u(Y(-\Delta - [\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta))|^p\\
&\quad + \left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1} 2^{p-1}\left|\int_0^{t\wedge\theta_R} f(x(s), x(s-\delta(s))) - f(z_1(s), z_2(s))ds\right|^p\\
&\quad + \left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1} 2^{p-1}\left|\int_0^{t\wedge\theta_R} g(x(s), x(s-\delta(s))) - g(z_1(s), z_2(s))dB(s)\right|^p.
\end{aligned}$$

Поновном применом неједнакости (1.4.1) и на основу Претпоставке $\mathcal{H}_2$, добија се да је

$$
\begin{aligned}
&|u(x(t\wedge\theta_R-\delta(t\wedge\theta_R)))-u(z_3(t\wedge\theta_R))-u(\xi(-\delta(0)))+u(Y(-\Delta-[\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta))|^p\\
&\quad\le\left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}\frac{1}{\epsilon}|u(x(t\wedge\theta_R-\delta(t\wedge\theta_R)))-u(z_3(t\wedge\theta_R))|^p\\
&\qquad+\left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}|u(Y(-\Delta-I_\Delta[\delta(-\Delta)]\Delta))-u(\xi(-\delta(0)))|^p\\
&\quad\le\left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{2p-2}\frac{1}{\epsilon^2}k^p|x(t\wedge\theta_R-\delta(t\wedge\theta_R))-y(t\wedge\theta_R-\delta(t\wedge\theta_R))|^p\\
&\qquad+\left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{2p-2}\frac{1}{\epsilon}k^p|y(t\wedge\theta_R-\delta(t\wedge\theta_R))-z_3(t\wedge\theta_R)|^p\\
&\qquad+\left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}k^p|Y(-\Delta-I_\Delta[\delta(-\Delta)]\Delta))-\xi(-\delta(0))|^p.
\end{aligned}
$$

Имајући на уму да је на основу дефиниције непрекидног решења Ојлер–Марујаме y, $\xi(-\delta(0))=y(-\delta(0))$, и $Y(-\Delta-I_\Delta[\delta(-\Delta)]\Delta))=z_3(0)$, закључује се да је

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\le s\le t}\Big|u(x(s\wedge\theta_R-\delta(s\wedge\theta_R)))-u(z_3(s\wedge\theta_R))\\
&\qquad-u(\xi(-\delta(0)))+u(Y(-\Delta-I_\Delta[\delta(-\Delta)]\Delta))\Big|^p\\
&\quad\le\left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{2p-2}\frac{1}{\epsilon^2}k^p\sup_{0\le s\le t}|x(s\wedge\theta_R-\delta(s\wedge\theta_R))-y(s\wedge\theta_R-\delta(s\wedge\theta_R))|^p\\
&\qquad+\left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{2p-2}\frac{1}{\epsilon}k^p\sup_{0\le s\le t}|y(s\wedge\theta_R-\delta(s\wedge\theta_R))-z_3(s\wedge\theta_R)|^p\\
&\qquad+\left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}k^p|Y(-\Delta-I_\Delta[\delta(-\Delta)]\Delta)-\xi(-\delta(0))|^p\\
&\quad\le\left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{2p-2}\frac{1}{\epsilon^2}k^p\sup_{-\tau\le s\le t}|x(s\wedge\theta_R)-y(s\wedge\theta_R)|^p\\
&\qquad+\left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}k^p\left(\left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}\frac{1}{\epsilon}+1\right)\sup_{0\le s\le t}|y(s\wedge\theta_R-\delta(s\wedge\theta_R))-z_3(s\wedge\theta_R)|^p.
\end{aligned}
$$

Како решења x и y задовољавају исти почетни услов, на основу (2.1.52) следи да је

$$
\begin{aligned}
&E\sup_{-\tau\le s\le t}|x(s\wedge\theta_R)-y(s\wedge\theta_R)|^p\\
&\le\left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{3p-3}\frac{1}{\epsilon^3}k^pE\sup_{-\tau\le s\le t}|x(s\wedge\theta_R)-y(s\wedge\theta_R)|^p\\
&\quad+\left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{2p-2}\frac{k^p}{\epsilon}\left(\left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}\frac{1}{\epsilon}+1\right)E\sup_{0\le s\le t}|y(s\wedge\theta_R-\delta(s\wedge\theta_R))-z_3(s\wedge\theta_R)|^p\\
&\quad+\left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}2^{p-1}E\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^{s\wedge\theta_R}f(x(r),x(r-\delta(r)))-f(z_1(r),z_2(r))dr\right|^p\\
&\quad+\left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}2^{p-1}E\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^{s\wedge\theta_R}g(x(r),x(r-\delta(r)))-g(z_1(r),z_2(r))dB(r)\right|^p.
\end{aligned}
$$

Затим се, применом неједнакости Хелдера и Буркхолдер–Дејвис–Гандија, добија да је

$$
\begin{aligned}
&E \sup_{-\tau\le s\le t}|x(s\wedge\theta_R)-y(s\wedge\theta_R)|^p \qquad (2.1.53)\\
&\le \Big[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\Big]^{3p-3}\frac{1}{\epsilon^3}k^pE\sup_{-\tau\le s\le t}|x(s\wedge\theta_R)-y(s\wedge\theta_R)|^p\\
&\quad+\Big[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\Big]^{2p-2}\frac{k^p}{\epsilon}\left(\Big[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\Big]^{p-1}\frac{1}{\epsilon}+1\right)E\sup_{0\le s\le t}|y(s\wedge\theta_R-\delta(s\wedge\theta_R))-z_3(s\wedge\theta_R)|^p\\
&\quad+\Big[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\Big]^{p-1}2^{p-1}T^{p-1}\Bigg[\int_0^t E\,|f(x(s\wedge\theta_R),x(s\wedge\theta_R-\delta(s\wedge\theta_R)))\\
&\qquad\qquad\qquad -f(z_1(s\wedge\theta_R),z_2(s\wedge\theta_R))|^p\,ds\\
&\quad+C_pT^{-\frac{p}{2}}\int_0^t E|g(x(s\wedge\theta_R),x(s\wedge\theta_R-\delta(s\wedge\theta_R)))-g(z_1(s\wedge\theta_R),z_2(s\wedge\theta_R))|^pds\Bigg],
\end{aligned}
$$

где је C_p универзална константа која зависи једино од p. Примењујући Лему 2.1.5, одабиром $\epsilon=\left(\frac{\sqrt[3]{k}}{1-\sqrt[3]{k}}\right)^{p-1}$ и применом Претпоставке $\mathcal{H}_1'$, израз (2.1.53) постаје

$$
\begin{aligned}
&E\sup_{-\tau\le s\le t}|x(s\wedge\theta_R)-y(s\wedge\theta_R)|^p \qquad (2.1.54)\\
&\quad\le \frac{(\sqrt[3]{k})^{p+2}(1+(\sqrt[3]{k})^{p-1})}{(1-k)(1-\sqrt[3]{k})^{p-1}}D\Delta^{\frac{pl-1}{2l}}+\frac{2^{\frac{3p}{2}-2}T^{\frac{p}{2}-1}(T^{\frac{p}{2}}+c_p)K_1^{\frac{p}{2}}}{(1-k)(1-\sqrt[3]{k})^{p-1}}\\
&\quad\times\int_0^t(E|x(s\wedge\theta_R)-z_1(s\wedge\theta_R)|^p+E|x(s\wedge\theta_R-\delta(s\wedge\theta_R))-z_2(s\wedge\theta_R)|^p)ds.
\end{aligned}
$$

За $u\in[0,t\wedge\theta_R]$, нека је k_u цео број, такав да је $u\in[k_u\Delta,(k_u+1)\Delta\wedge\theta_R)$. На основу дефиниције (2.1.14) степенастог процеса z_1, применом исте процедуре као у оцени (2.1.49), добија се, за $s\in[0,t\wedge\theta_R]$, да је

$$
\begin{aligned}
E|x(s)-z_1(s)|^p &\le 2^{p-1}E|x(s)-y(s)|^p+2^{p-1}E|y(s)-z_1(s)|^p\\
&\le 2^{p-1}E\sup_{-\tau\le u\le s}|x(u)-y(u)|^p+2^{p-1}E\sup_{0\le u\le s,k_u\ge 0}|y(u)-Y(k_u\Delta)|^p\\
&\le 2^{p-1}E\sup_{-\tau\le u\le s}|x(u)-y(u)|^p+2^{p-1}R_1(l)\Delta^{\frac{pl-1}{2l}}. \qquad (2.1.55)
\end{aligned}
$$

Такође, имајући у виду дефиниције (2.1.14) и (2.1.16), може се уочити да је

$$
z_3(s)-z_2(s)=z_2(t_{k-1})+\frac{s-t_k}{\Delta}(z_2(t_k)-z_2(t_{k-1}))-z_2(t_k), \qquad (2.1.56)
$$

када је $s\in[t_k,t_{k+1})$, $k\in\{0,1,\dots,N-1\}$. Ова релација, заједно са (2.1.32) и Лемом 2.1.4, имплицира

$$
\begin{aligned}
E|z_3(s)-z_2(s)|^p &\le E|z_2(t_k)-z_2(t_{k-1})|^p\\
&\le E\sup_{1\le k\le N}|Y(t_{k-1}-I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta)-Y(t_{k-2}-I_\Delta[\delta(t_{k-2})]\Delta)|^p\\
&\le (3+\lfloor\eta\rfloor)^p\bar{H}(l)\Delta^{\frac{pl-1}{2l}}. \qquad (2.1.57)
\end{aligned}
$$

Са друге стране, примењујући Лему 2.1.5, као и оцену (2.1.57), добија се да је

$$\begin{aligned}E|x(s-\delta(s))-z_2(s)|^p &\leq 3^{p-1}E|x(s-\delta(s))-y(s-\delta(s))|^p \\ &\quad +3^{p-1}E|y(s-\delta(s))-z_3(s)|^p+3^{p-1}E|z_3(s)-z_2(s)|^p \\ &\leq 3^{p-1}E|x(s-\delta(s))-y(s-\delta(s))|^p \\ &\quad +3^{p-1}(D(l)+(3+\lfloor\eta\rfloor)^p\bar{H}(l))\Delta^{\frac{pl-1}{2l}}. \qquad (2.1.58)\end{aligned}$$

Заменом (2.1.55) и (2.1.58) у (2.1.54), следи да је

$$\begin{aligned}&E\sup_{-\tau\leq s\leq t}|x(s\wedge\theta_R)-y(s\wedge\theta_R)|^p \\ &\leq (\sqrt[3]{k})^{p+2}\frac{1+(\sqrt[3]{k})^{p-1}}{(1-k)(1-\sqrt[3]{k})^{p-1}}D(l)\Delta^{\frac{pl-1}{2l}} \\ &\quad +\frac{2^{\frac{3p}{2}-2}T^{\frac{p}{2}-1}(T^{\frac{p}{2}}+c_p)K_1^{\frac{p}{2}}(2^{p-1}+3^{p-1})}{(1-k)(1-\sqrt[3]{k})^{p-1}}\int_0^t E\sup_{-\tau\leq u\leq s}|x(u\wedge\theta_R)-y(u\wedge\theta_R)|^p ds \\ &\quad +\frac{2^{\frac{3p}{2}-2}T^{\frac{p}{2}}(T^{\frac{p}{2}}+c_p)K_1^{\frac{p}{2}}}{(1-k)(1-\sqrt[3]{k})^{p-1}}\Big[2^{p-1}R_1(l)+3^{p-1}\big(D(l)+(3+\lfloor\eta\rfloor)^p\bar{H}(l)\big)\Big]\Delta^{\frac{pl-1}{2l}}.\end{aligned}$$

Коначно, примена Грунвал–Белманове леме имплицира

$$E\sup_{-\tau\leq s\leq t}|x(s\wedge\theta_R)-y(s\wedge\theta_R)|^p\leq S_0(l)\Delta^{\frac{pl-1}{2l}},$$

где је

$$\begin{aligned}S_0(l) &= \tilde{S}(l)e^{T\bar{S}}, \\ \tilde{S}(l) &= (\sqrt[3]{k})^{p+2}\frac{1+(\sqrt[3]{k})^{p-1}}{(1-k)(1-\sqrt[3]{k})^{p-1}}D(l) \\ &\quad +\frac{2^{\frac{3p}{2}-2}T^{\frac{p}{2}}(T^{\frac{p}{2}}+c_p)K_1^{\frac{p}{2}}}{(1-k)(1-\sqrt[3]{k})^{p-1}}\Big[2^{p-1}R_1(l)+3^{p-1}\big(D(l)+(3+\lfloor\eta\rfloor)^p\bar{H}(l)\big)\Big], \\ \bar{S} &= \frac{2^{\frac{3p}{2}-2}}{(1-k)(1-\sqrt[3]{k})^{p-1}}T^{\frac{p}{2}-1}(T^{\frac{p}{2}}+c_p)K_1^{\frac{p}{2}}(2^{p-1}+3^{p-1}).\end{aligned}$$

Сходно томе, следи да је

$$E\sup_{-\tau\leq s\leq T}|x(s\wedge\theta_R)-y(s\wedge\theta_R)|^p\leq S_0(l)\Delta^{\frac{pl-1}{2l}}. \qquad (2.1.59)$$

Када $R\to+\infty$, релација (2.1.59) постаје

$$E\sup_{-\tau\leq s\leq T}|x(s)-y(s)|^p\leq S_0(l)\Delta^{\frac{pl-1}{2l}}.$$

За $p \in (0,2)$, на основу Хелдерове неједнакости и претходног дела доказа, добија се да је

$$E \sup_{-\tau \le t \le T} |x(t)-y(t)|^p \le \left(E \sup_{-\tau \le t \le T} |x(t)-y(t)|^2\right)^{\frac{p}{2}} \le S_0^{\frac{p}{2}}(l)\Delta^{\frac{2l-1}{2l}\frac{p}{2}} < S_0^{\frac{p}{2}}(l)\Delta^{\frac{pl-1}{2l}}.$$

Дакле, тиме је доказ завршен, где је $S(l) = S_0(l) \vee S_0^{\frac{p}{2}}(l)$. □

Да би се илустровали претходни теоријски резултати, наводи се следећи пример.

Пример 2.1.1 *Разматра се следећа једнодимензионална неутрална СДЈ са временски зависним кашњењем*

$$d\left[x(t) - \frac{1}{27}x(t-\delta(t))\right] = f(x(t), x(t-\delta(t))dt + g(x(t), x(t-\delta(t))dB(t), \tag{2.1.60}$$

за $t \in [0,6]$*, са почетним условом* $\xi(\theta)=1$, $\theta \in [-\tau, 0]$, $\tau=2$. *Функција кашњења дефинисана је са* $\delta(t)=1-\frac{1}{4}\sin t$, $t\in[0,6]$*, док је*

$$f(x,y) = \frac{x-y}{1+(x-y)^2}, \quad g(x,y) = \frac{1}{1+(x+y)^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Дакле, за свако $x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^d$*, важи да је*

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(\bar{x},\bar{y})|^2 &= \left| \frac{x-y}{1+(x-y)^2} - \frac{\bar{x}-\bar{y}}{1+(\bar{x}-\bar{y})^2} \right|^2 \\ &= \left| \frac{(x-y)(1+(\bar{x}-\bar{y})^2) - (\bar{x}-\bar{y})(1+(x-y)^2)}{(1+(x-y)^2)(1+(\bar{x}-\bar{y})^2)} \right|^2 \\ &= |x-y-(\bar{x}-\bar{y})|^2 \left| \frac{1-(x-y)(\bar{x}-\bar{y})}{(1+(x-y)^2)(1+(\bar{x}-\bar{y})^2)} \right|^2 \\ &\le 2(|x-\bar{x}|^2 + |y-\bar{y}|^2) \left| \frac{1-(x-y)(\bar{x}-\bar{y})}{(1+(x-y)^2)(1+(\bar{x}-\bar{y})^2)} \right|^2. \end{aligned} \tag{2.1.61}$$

Како је

$$\begin{aligned} \left| \frac{1-(x-y)(\bar{x}-\bar{y})}{(1+(x-y)^2)(1+(\bar{x}-\bar{y})^2)} \right| &\le \frac{1+|x-y||\bar{x}-\bar{y}|}{(1+(x-y)^2)(1+(\bar{x}-\bar{y})^2)} \\ &\le \frac{\frac{1}{2}\left[1+(x-y)^2\right] + \frac{1}{2}\left[1+(\bar{x}-\bar{y})^2\right]}{(1+(x-y)^2)(1+(\bar{x}-\bar{y})^2)} \\ &\le 1, \end{aligned}$$

израз (2.1.61) се може оценити као

$$|f(x,y) - f(\bar{x},\bar{y})|^2 \le 2(|x-\bar{x}|^2 + |y-\bar{y}|^2).$$

На сличан начин, добија се да је

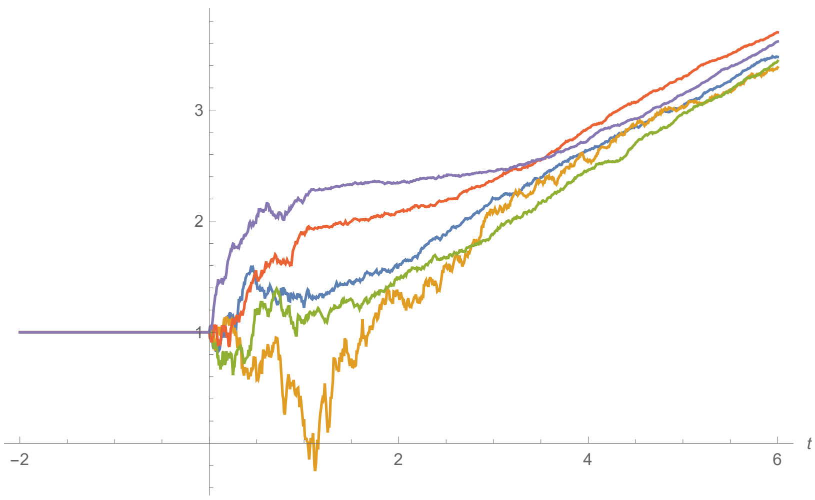
$$
\begin{aligned}
|g(x,y)-g(\bar{x},\bar{y})|^2 &= \left|\frac{1}{1+(x+y)^2}-\frac{1}{1+(\bar{x}+\bar{y})^2}\right|^2 \\
&= \frac{|(\bar{x}-x+\bar{y}-y)(\bar{x}+\bar{y}+x+y)|^2}{[1+(x+y)^2]^2[1+(\bar{x}+\bar{y})^2]^2} \\
&\leq 2(|x-\bar{x}|^2+|y-\bar{y}|^2)\frac{2(x+y)^2+2(\bar{x}+\bar{y})^2}{[1+(x+y)^2]^2[1+(\bar{x}+\bar{y})^2]^2} \\
&\leq 2(|x-\bar{x}|^2+|y-\bar{y}|^2).
\end{aligned}
$$

Стога, коефицијенти f и g једначине (2.1.60) задовољавају глобални Липшицов услов, односно, задовољавају претпоставку $\mathcal{H}_1'$ за $K_1 = 2$.

Одговарајуће дискретно решење Ојлер–Марујаме је облика $Y(t_k) = \xi(t_k)$, за $k \in \{-M, -(M-1), \ldots, 0\}$, док је за $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$,

$$
\begin{aligned}
Y(t_{k+1}) &= Y(t_k) + \frac{1}{27}Y\left(t_k - I_\Delta[\delta(t_k)]\Delta\right) - \frac{1}{27}Y\left(t_{k-1} - I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta\right) \\
&\quad + \frac{Y(t_k) - Y\left(t_k - I_\Delta\left[\delta(t_k)\right]\Delta\right)}{1+\left(Y(t_k) - Y\left(t_k - I_\Delta\left[\delta(t_k)\right]\Delta\right)\right)^2}\Delta \\
&\quad + \frac{1}{1+\left(Y(t_k) + Y\left(t_k - I_\Delta\left[\delta(t_k)\right]\Delta\right)\right)^2}\Delta B_k,
\end{aligned}
\tag{2.1.62}
$$

где је, за потребе илустрације, одабрано $N = 768$ и $M = 256$. У том смислу, за $\Delta = 0.0078$, симулирано је неколико трајекторија решења Ојлер–Марујаме (2.1.62) које одговарају једначини (2.1.60), што је приказано на Слици 2.1.



Слика 2.1: Трајекторије решења Ојлер–Марујаме које одговарају једначини (2.1.60) за $\Delta = 0.0078$

Са друге стране, функција $u(x) = \frac{1}{27}x$ задовољава Претпоставку $\mathcal{H}_2$, за $k = \frac{1}{27}$, док почетни услов $\xi(\theta) = 1$, $\theta \in [-\tau, 0]$ задовољава Претпоставку $\mathcal{H}_5$.

Имајући на уму да је

$$|\delta(t) - \delta(s)| \leq \frac{1}{4}|t - s|, \quad t, s \in [0, 6],$$

закључује се да важи Претпоставка $\mathcal{H}_6$ *за* $\eta = \frac{1}{4}$. *Такође, важи услов (2.1.28) јер је* $k(3 + \lfloor \eta \rfloor) = 1/9 < 1$, *што заједно са* $\mathcal{H}_1'$ *и* $\mathcal{H}_2$, *имплицира тврђење Теореме 2.1.3, односно, решење Ојлер–Марујаме (2.1.62) ковергира у* L^p*-смислу ка тачном решењу једначине (2.1.60).*

Горња граница оцене L^p*-блискости тачног решења и решења Ојлер–Марујаме из Теореме 2.1.3 зависи од вредности* l, *добијене применом Хелдерове неједнакости. Да би се илустровала зависност те горње границе од вредности* l, *разматра се функција* $A_l = S(l)\Delta^{\frac{pl-1}{2l}}$, *тј. горња граница у Теореми 2.1.3 за* $p = 4$ *и рачуна се* Δ^* *за које су вредности функције* A_l, *на пример,* 0.01 *и* 0.05.

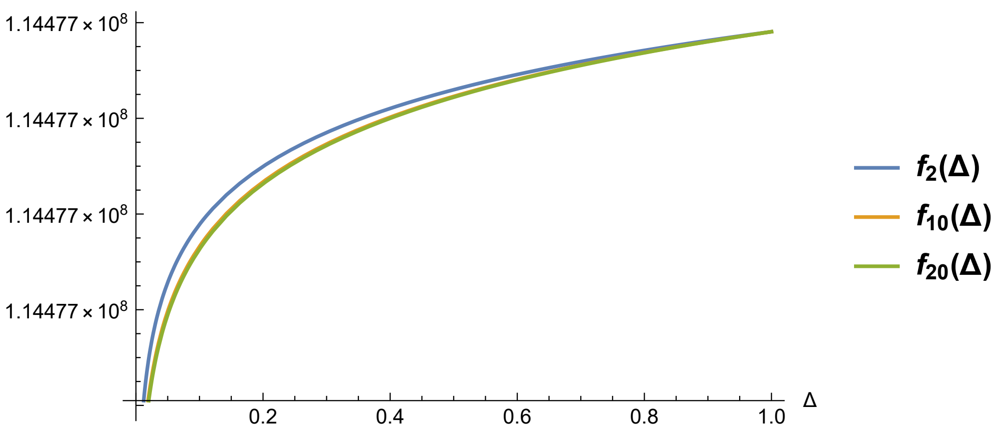
$l = 2$	$A_2 = 0.01$	$\Delta^* = 4.061475395680434 \cdot 10^{-28409543}$
	$A_2 = 0.05$	$\Delta^* = 1.018814829291499 \cdot 10^{-28409542}$
$l = 10$	$A_{10} = 0.01$	$\Delta^* = 6.734509939960537 \cdot 10^{-25495744}$
	$A_{10} = 0.05$	$\Delta^* = 1.537277087803325 \cdot 10^{-25495743}$
$l = 20$	$A_{20} = 0.01$	$\Delta^* = 5.682376072980548 \cdot 10^{-25173013}$
	$A_{20} = 0.05$	$\Delta^* = 1.283626977498382 \cdot 10^{-25173012}$

Табела 2.1: Величина корака за задату вредност горње границе оцене L^p-блискости решења

Дакле, за $l = 2, 10, 20$ *у Табели 2.1 дате су вредности* Δ^* *такве да, за свако* $\Delta \in (0, \Delta^*)$, *важи да је*

$$E \sup_{-\tau \leq t \leq T} |x(t) - y(t)|^p \leq A_l.$$

Штавише, log*-вредности* A_l, *за* $l = 2, 10, 20$ *представљење су на Слици 2.2.*



Слика 2.2: Функције $f_2(\Delta) = \ln(A_2)$, $f_{10}(\Delta) = \ln(A_{10})$ и $f_{20}(\Delta) = \ln(A_{20})$.

2.2 Сечена метода Ојлер–Марујаме

Већи део постојећих резултата о строгој конвергенцији нумеричких метода захтева да коефицијенти СДЈ буду глобално Липшиц непрекидни, што је био случај и са резултатима који се односе на методу Ојлер–Марујаме из претходног поглавља. Међутим, велики део СДЈ које се примењују за описивање појава из реалног живота не испуњава овај услов. Сходно томе, Хигам, Мао и Стјуарт су 2002. године објавили рад [15] који је отворио ново поглавље у проучавању апроксимативних решења СДЈ генерисаних помоћу нумеричких метода Ојлеровог типа, конкретно у проучавању строге конвергенције нумеричких решења под локалним Липшицовим условом за коефицијенте СДЈ. Како локални Липшицов услов није довољан да гарантује јединственост глобалног решења СДЈ, додатни услов који се намеће, а који је општији у односу на услов линеарног раста, јесте услов Хасминског.

У овом поглављу је представљена сечена метода Ојлер–Марујаме за нумеричко решавање класе неутралних СДЈ са временски зависним кашњењем облика (2.0.1), чији коефицијенти преноса и дифузије могу бити са високим степеном нелинеарности. У том смислу је у Одељку 2.2.1 представљена конструкција сечене методе Ојлер–Марујаме и доказане су основне особине ове нумеричке методе. У Одељку 2.2.2 се оцењује момент реда p сеченог решења Ојлер–Марујаме, а затим се у Одељку 2.2.3 оцењује L^p-блискост овог нумеричког решења и тачног решења једначине (2.0.1). На крају, у Одељку 2.2.4 је одређен ред L^q-конвергенције сеченог решења Ојлер–Марујаме. Сви резултати доказани су под локалним Липшицовим условом за коефицијенте преноса и дифузије једначине (2.0.1), као и условом Хасминског, поред услова који се намећу. Резултати изложени у одељцима 2.2.1–2.2.3 су објављени у раду [49], док су резултати Одељка 2.2.4 објављени у самосталном раду [50].

2.2.1 Сечено апроксимативно решење Ојлер–Марујаме за неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем

У овом одељку се конструише и разматра сечено апроксимативно решење Ојлер–Марујаме које одговара једначини (2.0.1). Главни резултати доказују се под условима који су слабији од класичних услова егзистенције и јединствености решења, представљених у Глави 1. Наиме, уместо глобалног Липшицовог услова, захтева се да коефицијенти f и g једначине (2.0.1) задовољавају локални Липшицов услов $\mathcal{H}_1$, док се за неутрални члан u претпоставља да је Липшиц непрекидан са Липшицовом константом $k \in (0,1)$, тј. захтева се да важи Претпоставка $\mathcal{H}_2$. Такође, како би егзистенција и јединственост глобалног решења биле загарантоване, а и како би се извели главни резултати, уводе се и следеће претпоставке.

$\mathcal{H}_3$: Функција кашњења δ је непрекидно диференцијабилна и важи да је за свако $t \in [0,\infty)$, $\delta'(t) \leq \bar{\delta} < 1$.

$\mathcal{H}_4'$: Постоје константе $p \geq 2$ и $K > 0$ тако да, за свако $a \in (0,1]$ и $x, y \in \mathbb{R}^d$, важи да је

$$(x - au(y))^T f(x,y) + \frac{p-1}{2}|g(x,y)|^2 \leq K(1 + |x|^2 + a|y|^2).$$

Специјално, за $a = 1$ добија се следећи услов.
$\mathcal{H}_4$: (*Услов Хасминског*) Постоје константе $p \geq 2$ и $K > 0$ тако да је, за свако $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$(x - u(y))^T f(x,y) + \frac{p-1}{2}|g(x,y)|^2 \leq K(1 + |x|^2 + |y|^2).$$

Теорема која даје довољне услове егзистенције и јединствености решења једначине (2.0.1) преузета је из рада [42]. Њена формулација наведена је у наставку, при чему су функције V и U одабране тако да је $V(x) = |x|^p$, $U(x) = 0$, за свако $x \in \mathbb{R}^d$, док су одговарајуће константе $c_1 = c_2 = 1$, $\lambda_1 = 2K[1 + 3(p-2)2^{p-2}]$ и $\lambda_2 > 0$ произвољно, при чему је $\lambda_2 > \lambda_1/(1-\bar{\delta})$.

Теорема 2.2.1 (Теорема 1, [42]) *Нека важе Претпоставке $\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_4$. Тада, за сваки почетни услов $\xi \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];\mathbb{R}^d)$, постоји јединствено глобално решење $x = \{x(t), t \geq -\tau\}$ једначине (2.0.1) које има особину да, за свако $T > 0$, важи да је*

$$\sup_{-\tau \leq t \leq T} E|x(t)|^p < \infty.$$

Такође, претпоставља се да важе услови $\mathcal{H}_5$ и $\mathcal{H}_6$. Међутим, како се у $\mathcal{H}_4$ и $\mathcal{H}_5$ јавља параметар $p \geq 2$, те како би се избегле могуће забуне, Претпоставка $\mathcal{H}_5$ ће бити преформулисана на следећи начин.

$\mathcal{H}_5'$: Постоји позитивна константа C_ξ тако да, за свако $\hat{p} \in [2,p]$, важи да је

$$E \sup_{t,s \in [-\tau,0],\ |s-t| \leq \Delta} |\xi(s) - \xi(t)|^{\hat{p}} \leq C_\xi \Delta^{\frac{\hat{p}}{2}}.$$

У наставку се конструише сечено апроксимативно решење Ојлер–Марујаме које одговара једначини (2.0.1). Пре саме дефиниције овог решења, бира се строго растућа непрекидна функција $\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ тако да $\mu(r) \to \infty$ када $r \to \infty$ и за свако $r \geq 1$, важи да је

$$\sup_{|x| \vee |y| \leq r} (|f(x,y)| \vee |g(x,y)|) \leq \mu(r). \tag{2.2.1}$$

Рестрикција инверзне функције од μ, означена са $\mu^{-1} : [\mu(1),\infty) \to \mathbb{R}_+$, је строго растућа и непрекидна. Такође, бирају се константа $\hat{h} \geq 1 \vee \mu(1)$ и строго опадајућа функција $h : (0,1) \to [\mu(1),\infty)$, тако да је

$$\lim_{\Delta \to 0} h(\Delta) = \infty, \tag{2.2.2}$$

и да за свако $\Delta \in (0,1)$ и неко $\epsilon_0 \in (0,1)$, важи да је

$$\Delta^{\frac{1-\epsilon_0}{4}} h(\Delta) \leq \hat{h}. \tag{2.2.3}$$

За дати корак $\Delta \in (0,1)$, дефинише се пресликавање $\pi_\Delta(x)$ из $\mathbb{R}^d$ у затворену куглу $\{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq \mu^{-1}(h(\Delta))\}$ са

$$\pi_\Delta(x) = (|x| \wedge \mu^{-1}(h(\Delta)))\frac{x}{|x|}, \tag{2.2.4}$$

где је $x/|x| = 0$ када је $x = 0$. Функција $\pi_\Delta(x)$ пресликава вредност x у саму себе када је $|x| \leq \mu^{-1}(h(\Delta))$ или у $\mu^{-1}(h(\Delta))\frac{x}{|x|}$ када је $|x| > \mu^{-1}(h(\Delta))$. Сада се могу дефинисати сечени коефицијенти једначине (2.0.1) на следећи начин

$$f_\Delta(x,y) = f(\pi_\Delta(x), \pi_\Delta(y)), \; g_\Delta(x,y) = g(\pi_\Delta(x), \pi_\Delta(y)), \; u_\Delta(x) = u(\pi_\Delta(x)),$$

за $x, y \in \mathbb{R}^d$. Лако се уочава да важи да је

$$\left| (|x| \wedge \mu^{-1}(h(\Delta)))\frac{x}{|x|} \right| \leq \mu^{-1}(h(\Delta)),$$

што, заједно са (2.2.1), имплицира да, за свако $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$|f_\Delta(x,y)| \vee |g_\Delta(x,y)| \leq \mu(\mu^{-1}(h(\Delta))) = h(\Delta). \tag{2.2.5}$$

На тај начин се закључује да су сечене функције f_Δ и g_Δ ограничене иако у општем случају то не мора да важи за функције f и g. Стога, разматра се следећа СДЈ

$$d[x(t) - u_\Delta(x(t-\delta(t)))] = f_\Delta(x(t), x(t-\delta(t)))dt + g_\Delta(x(t), x(t-\delta(t)))dB(t), \; t \geq 0,$$

која задовољава почетни услов (2.0.2).

Сада се може дефинисати сечено апроксимативно решење Ојлер–Марујаме x_Δ које одговара једначини (2.0.1), на коначном временском интервалу $[-\tau, T]$, за произвољно $T > 0$. Као и у случају класичне методе Ојлер–Марујаме, претпоставља се да је T/τ рационалан број. Такође, величина корака $\Delta \in (0,1)$ је садржана цео број пута у τ и у T.

Најпре се дефинише дискретно сечено апроксимативно решење Ојлер–Марујаме X_Δ, које одговара једначини (2.0.1), на еквидистантној партицији $t_k = k\Delta, \; k \in \{-(M+1), -M, \ldots, 0, 1, \ldots, N\}$ временског интервала $[-\tau - \Delta, T]$. Како би ово решење било добро дефинисано, нека је

$$\delta(-\Delta) = \delta(0), \qquad X_\Delta(-(M+1)\Delta) = \xi(-M\Delta). \tag{2.2.6}$$

Дискретно сечено апроксимативно решење Ојлер–Марујаме се дефинише као

$$X_\Delta(t_k) = \xi(t_k), \qquad k \in \{-M, -(M-1), \ldots, 0\}, \tag{2.2.7}$$

док је, за $k \in \{0, 1, \dots, N\}$,

$$\begin{aligned} X_\Delta(t_{k+1}) = X_\Delta(t_k) &+ u_\Delta(X_\Delta(t_k - I_\Delta[\delta(t_k)]\Delta)) - u_\Delta(X_\Delta(t_{k-1} - I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta)) \\ &+ f_\Delta(X_\Delta(t_k), X_\Delta(t_k - I_\Delta[\delta(t_k)]\Delta))\Delta \\ &+ g_\Delta(X_\Delta(t_k), X_\Delta(t_k - I_\Delta[\delta(t_k)]\Delta))\Delta B_k. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Како би се дефинисало непрекидно сечено решење Ојлер–Марујаме, уводе се следећи степенасти процеси

$$\bar{x}_\Delta(t) = \sum_{k=0}^{N-1} X_\Delta(t_k) I_{[t_k, t_{k+1})}(t), \quad \bar{y}_\Delta(t) = \sum_{k=-1}^{N-1} X_\Delta(t_k - I_\Delta[\delta(t_k)]\Delta) I_{[t_k, t_{k+1})}(t). \tag{2.2.9}$$

Након тога, дефинише се линеарна комбинација случајних променљивих $\bar{y}_\Delta(t_{k-1}) = X_\Delta(t_{k-1} - I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta)$ и $\bar{y}_\Delta(t_k) = X_\Delta(t_k - I_\Delta[\delta(t_k)]\Delta)$ на следећи начин

$$Z_k(t) = \bar{y}_\Delta(t_{k-1}) + \frac{t - t_k}{\Delta}(\bar{y}_\Delta(t_k) - \bar{y}_\Delta(t_{k-1})), \tag{2.2.10}$$

за свако $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, што се може представити у еквивалентном облику као

$$Z_k(t) = \left(1 - \frac{t - t_k}{\Delta}\right)\bar{y}_\Delta(t_{k-1}) + \frac{t - t_k}{\Delta}\bar{y}_\Delta(t_k). \tag{2.2.11}$$

Такође, нека је

$$\bar{z}_\Delta(t) = \sum_{k=0}^{N-1} Z_k(t) I_{[t_k, t_{k+1})}(t). \tag{2.2.12}$$

На основу претходног, може се дефинисати непрекидно сечено решење Ојлер–Марујаме $\{x_\Delta(t), t \in [-\tau, T]\}$, тако да је $x_\Delta(t) = \xi(t)$, $t \in [-\tau, 0]$, док је, за $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} x_\Delta(t) = \xi(0) &+ u_\Delta(\bar{z}_\Delta(t)) - u_\Delta(X_\Delta(-\Delta - I_\Delta[\delta(-\Delta)]\Delta)) \\ &+ \int_0^t f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s), \bar{y}_\Delta(s))ds + \int_0^t g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s), \bar{y}_\Delta(s))dB(s). \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

Када је $t \in [t_k, t_{k+1})$, једначина (2.2.13) се може представити у облику

$$\begin{aligned} x_\Delta(t) = X_\Delta(t_k) &+ u_\Delta(Z_k(t)) - u_\Delta(X_\Delta(t_{k-1} - I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta)) \\ &+ \int_{t_k}^t f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s), \bar{y}_\Delta(s))ds + \int_{t_k}^t g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s), \bar{y}_\Delta(s))dB(s). \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Може се закључити да је $x_\Delta(t_k) = \bar{x}_\Delta(t_k) = X_\Delta(t_k)$, за свако $k \in \{-M, -(M-1), \dots, N\}$, односно, дискретно и непрекидно сечено решење Ојлер–Марујаме се поклапају у тачкама партиције. Имајући у виду да за $t \in [0, T]$ постоји јединствен цео број $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, тако да $t \in [t_k, t_{k+1})$, из (2.2.12), (2.2.11) и (2.2.9), респективно, следи да је

$$\begin{aligned}|\bar{z}_\Delta(t)| &= |Z_k(t)| \\ &\le \left(1 - \frac{t-t_k}{\Delta}\right)|\bar{y}_\Delta(t_{k-1})| + \frac{t-t_k}{\Delta}|\bar{y}_\Delta(t_k)| \\ &\le \left(1 - \frac{t-t_k}{\Delta}\right)\sup_{-\tau\le s\le t}|x_\Delta(s)| + \frac{t-t_k}{\Delta}\sup_{-\tau\le s\le t}|x_\Delta(s)| \\ &\le \sup_{-\tau\le s\le t}|x_\Delta(s)|, \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

односно важи да је

$$E|\bar{z}_\Delta(t)|^p \le 2^{p-1}\sup_{-\tau\le s\le t}E|x_\Delta(s)|^p. \tag{2.2.16}$$

Са друге стране, на основу дефиниције (2.2.9), за $t\in[0,T]$, добија се да је

$$E|\bar{y}_\Delta(t)|^p = E|X_\Delta(t_k - I_\Delta[\delta(t_k)]\Delta)|^p \le \sup_{-\tau\le t_j\le t}E|X_\Delta(t_j)|^p \le \sup_{-\tau\le s\le t}E|x_\Delta(s)|^p. \tag{2.2.17}$$

Штавише, за свако $t \in [0,T]$, следи да је

$$E|\bar{x}_\Delta(t)|^p \le \sup_{0\le s\le t}E|\bar{x}_\Delta(s)|^p = \sup_{0\le t_k\le t}E|X_\Delta(t_k)|^p = \sup_{0\le t_k\le t}E|x_\Delta(t_k)|^p \le \sup_{0\le s\le t}E|x_\Delta(s)|^p.$$

У наредној леми доказује се да сечена функција u_Δ веома добро чува својство неутралног члана u, описано Претпоставком $\mathcal{H}_2$.

Лема 2.2.1 *Нека важи Претпоставка $\mathcal{H}_2$. Тада, за $k\in(0,1)$ и свако $x,y\in\mathbb{R}^d$, важи да је*

$$|u_\Delta(x) - u_\Delta(y)| \le k|x-y|. \tag{2.2.18}$$

Штавише, за свако $x \in \mathbb{R}^d$, важи следећа неједнакост

$$|u_\Delta(x)| \le k|x|. \tag{2.2.19}$$

Доказ. Нека су $x, y \in \mathbb{R}^d$ произвољни, тако да је $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Тада, за $x, y \in \mathbb{R}^d$, за које је $|x| \le \mu^{-1}(h(\Delta))$ и $|y| \le \mu^{-1}(h(\Delta))$, (2.2.18) одмах следи.

Са друге стране, за $x = (x_1, x_2, ..., x_d)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_d)$, за које важи да је $|x| > \mu^{-1}(h(\Delta))$ и $|y| > \mu^{-1}(h(\Delta))$, на основу Претпоставке $\mathcal{H}_2$, добија се да је

$$\begin{aligned}&|u_\Delta(x) - u_\Delta(y)|^2 \\ &\quad= |u(\pi_\Delta(x)) - u(\pi_\Delta(y))|^2 \\ &\quad\le k^2|\pi_\Delta(x) - \pi_\Delta(y)|^2 \\ &\quad= k^2\left(\mu^{-1}(h(\Delta))\right)^2\left|\frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|}\right|^2 \\ &\quad= k^2\left(\mu^{-1}(h(\Delta))\right)^2\left[\left(\frac{x_1}{|x|} - \frac{y_1}{|y|}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{|x|} - \frac{y_2}{|y|}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_d}{|x|} - \frac{y_d}{|y|}\right)^2\right] \\ &\quad= k^2\left(\mu^{-1}(h(\Delta))\right)^2\left(\frac{x_1^2 + \dots + x_d^2}{|x|^2} - 2\frac{x_1y_1 + \dots + x_dy_d}{|x||y|} + \frac{y_1^2 + \dots + y_d^2}{|y|^2}\right).\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

За $|x| \leq |y|$, следи да је

$$\begin{aligned}
&|u_\Delta(x) - u_\Delta(y)|^2 \\
&\quad \leq k^2 \left(\mu^{-1}(h(\Delta))\right)^2 \left(\frac{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_d-y_d)^2}{|x|^2} \right. \\
&\qquad\qquad \left. + 2\frac{x_1y_1 + \cdots + x_dy_d}{|x|^2}\left(1 - \frac{|x|}{|y|}\right) - \frac{y_1^2 + \cdots + y_d^2}{|x|^2} + 1 \right) \\
&\quad = k^2\left(\mu^{-1}(h(\Delta))\right)^2 \left(\frac{|x-y|^2}{|x|^2} + 2\frac{x_1y_1 + \cdots + x_dy_d}{|x|^2}\left(1 - \frac{|x|}{|y|}\right) - \frac{|y|^2}{|x|^2} + 1 \right).
\end{aligned}$$

Сада се, на основу неједнакости Коши–Шварца, добија да је

$$\begin{aligned}
|u_\Delta(x) - u_\Delta(y)|^2 &\leq k^2 \left(\mu^{-1}(h(\Delta))\right)^2 \left(\frac{|x-y|^2}{|x|^2} + 2\frac{|x||y|}{|x|^2}\left(1 - \frac{|x|}{|y|}\right) - \frac{|y|^2}{|x|^2} + 1 \right) \\
&= k^2 \left(\mu^{-1}(h(\Delta))\right)^2 \left(\frac{|x-y|^2}{|x|^2} + 2\frac{|y|}{|x|} - 1 - \frac{|y|^2}{|x|^2} \right) \\
&= k^2 \frac{\left(\mu^{-1}(h(\Delta))\right)^2}{|x|^2}|x-y|^2 - k^2\left(\mu^{-1}(h(\Delta))\right)^2 \left(1 - \frac{|y|}{|x|}\right)^2 \\
&\leq k^2 \frac{\left(\mu^{-1}(h(\Delta))\right)^2}{|x|^2}|x-y|^2.
\end{aligned}$$

Како је $\mu^{-1}(h(\Delta))/|x| < 1$, може се закључити да неједнакост (2.2.18) важи.

У случају када је $|y| < |x|$, на основу (2.2.20), добија се да је

$$\begin{aligned}
&|u_\Delta(x) - u_\Delta(y)|^2 \\
&\quad \leq k^2 \left(\mu^{-1}(h(\Delta))\right)^2 \left(1 + 2\frac{x_1y_1 + \cdots + x_dy_d}{|y|^2}\left(1 - \frac{|y|}{|x|}\right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{x_1^2 + \cdots + x_d^2}{|y|^2} + \frac{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_d-y_d)^2}{|y|^2} \right) \\
&\quad = k^2\left(\mu^{-1}(h(\Delta))\right)^2 \left(1 + 2\frac{x_1y_1 + \cdots + x_dy_d}{|y|^2}\left(1 - \frac{|y|}{|x|}\right) - \frac{|x|^2}{|y|^2} + \frac{|x-y|^2}{|y|^2} \right).
\end{aligned}$$

Сада, неједнакост Коши–Шварца имплицира

$$\begin{aligned}
|u_\Delta(x) - u_\Delta(y)|^2 &\leq k^2 \left(\mu^{-1}(h(\Delta))\right)^2 \left(1 + 2\frac{|x||y|}{|y|^2}\left(1 - \frac{|y|}{|x|}\right) - \frac{|x|^2}{|y|^2} + \frac{|x-y|^2}{|y|^2} \right) \\
&= k^2 \left(\mu^{-1}(h(\Delta))\right)^2 \left(\frac{|x-y|^2}{|y|^2} + 2\frac{|x|}{|y|} - 1 - \frac{|x|^2}{|y|^2} \right) \\
&= k^2 \frac{\left(\mu^{-1}(h(\Delta))\right)^2}{|y|^2}|x-y|^2 - k^2\left(\mu^{-1}(h(\Delta))\right)^2 \left(1 - \frac{|x|}{|y|}\right)^2 \\
&< k^2 \frac{\left(\mu^{-1}(h(\Delta))\right)^2}{|y|^2}|x-y|^2.
\end{aligned}$$

Стога, на основу услова $\mu^{-1}(h(\Delta))/|y| < 1$, следи неједнакост (2.2.18).

За $x, y \in \mathbb{R}^d$, такве да је $|x| > \mu^{-1}(h(\Delta))$ и $|y| \leq \mu^{-1}(h(\Delta))$, узимајући у обзир Претпоставку $\mathcal{H}_2$, као и неједнакост Коши–Шварца, следи да је

$$\begin{aligned}
|u_\Delta(x) - u_\Delta(y)|^2 &= |u(\pi_\Delta(x)) - u(\pi_\Delta(y))|^2 \\
&\leq k^2 |\pi_\Delta(x) - \pi_\Delta(y)|^2 \\
&= k^2 \left| \frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|} x - y \right|^2 \\
&= k^2 \left[\left(\frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|} x_1 - y_1 \right)^2 + \cdots + \left(\frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|} x_d - y_d \right)^2 \right] \\
&\leq k^2 \left[(\mu^{-1}(h(\Delta)))^2 - 2\frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|}(x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d) + |y|^2 \right] \\
&= k^2 \Bigg[|x-y|^2 + 2(x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d) \left(1 - \frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|} \right) \\
&\qquad + \left(\frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|} \right)^2 |x|^2 - |x|^2 \Bigg] \\
&\leq k^2 \Bigg[|x-y|^2 + 2|x||y| \left(1 - \frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|} \right) \\
&\qquad - |x|^2 \left(1 - \frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|} \right) \left(1 + \frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|} \right) \Bigg] \\
&= k^2 \left[|x-y|^2 - |x|^2 \left(1 - \frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|} \right) \left(1 + \frac{(\mu^{-1}(h(\Delta)))}{|x|} - 2\frac{|y|}{|x|} \right) \right].
\end{aligned}$$

Како је $|x| > \mu^{-1}(h(\Delta)) \geq |y|$, релација (2.2.18) важи.

На исти начин, може се добити неједнакост (2.2.18) за $x, y \in \mathbb{R}^d$, за које је $\mu^{-1}(h(\Delta)) \leq |x|$ и $\mu^{-1}(h(\Delta)) > |y|$.

У случају када је један од вектора x и y нула вектор, тј. на пример $y = 0$, на основу (1.5.23) следи да је

$$|u_\Delta(x) - u_\Delta(y)| = |u(\pi_\Delta(x))| \leq k|\pi_\Delta(x)| \leq k|x| = k|x-y|.$$

Ако је $x = 0$ и $y = 0$, тада (2.2.18) очигледно важи. Потребно је нагласити да такође важи и (2.2.19). $\square$

У наставку се доказује лема која тврди да, ако за функције f, g и u важи Претпоставка $\mathcal{H}_4'$, тада за сечене функције f_Δ, g_Δ и u_Δ важи услов Хасминског, тј. Претпоставка $\mathcal{H}_4$.

Лема 2.2.2 *Нека важи Претпоставка $\mathcal{H}_4'$. Тада, за свако $\Delta \in (0,1)$ и свако $x, y \in \mathbb{R}^d$, важи да је*

$$(x - u_\Delta(y))^T f_\Delta(x, y) + \frac{p-1}{2}|g_\Delta(x,y)|^2 \leq \bar{K}(1 + |x|^2 + |y|^2), \tag{2.2.21}$$

где је $\bar{K} = \frac{3}{2}K\left(1 \vee \frac{1}{\mu^{-1}(h(1))}\right)$.

Доказ. Фиксира се произвољно $\Delta \in (0,1)$. За вредности $x, y \in \mathbb{R}^d$, такве да је $|x| \vee |y| < \mu^{-1}(h(\Delta))$, на основу Претпоставке $\mathcal{H}_4'$, неједнакост (2.2.21) очигледно важи за $a = 1$.

Нека је сада $|x| \wedge |y| \geq \mu^{-1}(h(\Delta))$. Тада је

$$
\begin{aligned}
&(x - u_\Delta(y))^T f_\Delta(x,y) + \frac{p-1}{2}|g_\Delta(x,y)|^2 \\
&\quad = (x - u(\pi_\Delta(y)))^T f(\pi_\Delta(x), \pi_\Delta(y)) + \frac{p-1}{2}|g(\pi_\Delta(x), \pi_\Delta(y))|^2 \\
&\quad = \frac{|x|}{\mu^{-1}(h(\Delta))}\Bigg[\left(\pi_\Delta(x) - \frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|}u(\pi_\Delta(y))\right)^T f(\pi_\Delta(x), \pi_\Delta(y)) \\
&\qquad\qquad + \frac{p-1}{2}\frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|}|g(\pi_\Delta(x), \pi_\Delta(y))|^2\Bigg] \\
&\quad \leq \frac{|x|}{\mu^{-1}(h(\Delta))}\Bigg[\left(\pi_\Delta(x) - \frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|}u(\pi_\Delta(y))\right)^T f(\pi_\Delta(x), \pi_\Delta(y)) \\
&\qquad\qquad + \frac{p-1}{2}|g(\pi_\Delta(x), \pi_\Delta(y))|^2\Bigg].
\end{aligned}
$$

Дакле, на основу Претпоставке $\mathcal{H}_4'$, може се закључити да је

$$
\begin{aligned}
&(x - u_\Delta(y))^T f_\Delta(x,y) + \frac{p-1}{2}|g_\Delta(x,y)|^2 \\
&\quad \leq \frac{|x|}{\mu^{-1}(h(\Delta))}K\left[1 + |\pi_\Delta(x)|^2 + \frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|}|\pi_\Delta(y)|^2\right] \\
&\quad = K\left[\frac{|x|}{\mu^{-1}(h(\Delta))} + \frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|}|x|^2 + |\pi_\Delta(y)|^2\right] \\
&\quad \leq K\left[\frac{|x|}{\mu^{-1}(h(\Delta))} + |x|^2 + |y|^2\right].
\end{aligned}
$$

Са друге стране, ако је $|x| \geq \mu^{-1}(h(\Delta))$ и $y < \mu^{-1}(h(\Delta))$, тада Претпоставка $\mathcal{H}_4'$ имплицира

$$
\begin{aligned}
&(x - u_\Delta(y))^T f_\Delta(x,y) + \frac{p-1}{2}|g_\Delta(x,y)|^2 \\
&\quad = (x - u(y))^T f(\pi_\Delta(x), y) + \frac{p-1}{2}|g(\pi_\Delta(x), y)|^2 \\
&\quad \leq \frac{|x|}{\mu^{-1}(h(\Delta))}\left[\left(\pi_\Delta(x) - \frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|}u(y)\right)^T f(\pi_\Delta(x), y) + \frac{p-1}{2}|g(\pi_\Delta(x), y)|^2\right] \\
&\quad \leq \frac{|x|}{\mu^{-1}(h(\Delta))}K\left[1 + |\pi_\Delta(x)|^2 + \frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|}|y|^2\right] \\
&\quad = K\left[\frac{|x|}{\mu^{-1}(h(\Delta))} + \frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|}|x|^2 + |y|^2\right] \\
&\quad \leq K\left[\frac{|x|}{\mu^{-1}(h(\Delta))} + |x|^2 + |y|^2\right].
\end{aligned}
$$

Ако је $|x| \wedge |y| \geq \mu^{-1}(h(\Delta))$ или $|x| \geq \mu^{-1}(h(\Delta))$ и $y < \mu^{-1}(h(\Delta))$, важи да је

$$(x - u_\Delta(y))^T f_\Delta(x,y) + \frac{p-1}{2}|g_\Delta(x,y)|^2 \leq K\left[\frac{|x|}{\mu^{-1}(h(\Delta))} + |x|^2 + |y|^2\right].$$

На основу релације $\mu^{-1}(h(\Delta)) \geq \mu^{-1}(h(1))$, следи да је

$$\begin{aligned}(x - u_\Delta(y))^T f_\Delta(x,y) + \frac{p-1}{2}|g_\Delta(x,y)|^2 &\leq K\left[\frac{|x|}{\mu^{-1}(h(1))} + |x|^2 + |y|^2\right]\\ &\leq K\left(1 \vee \frac{1}{\mu^{-1}(h(1))}\right)\left[|x| + |x|^2 + |y|^2\right]\\ &\leq \bar{K}\left[1 + |x|^2 + |y|^2\right],\end{aligned}$$

где је $\bar{K} = \frac{3}{2}K\left(1 \vee \frac{1}{\mu^{-1}(h(1))}\right)$.

Коначно, када је $|y| \geq \mu^{-1}(h(\Delta))$ и $x < \mu^{-1}(h(\Delta))$, примењујући Претпоставку $\mathcal{H}_4'$, за $a = 1$, добија се да је

$$\begin{aligned}&(x - u_\Delta(y))^T f_\Delta(x,y) + \frac{p-1}{2}|g_\Delta(x,y)|^2\\ &\qquad = (x - u(\pi_\Delta(y)))^T f(x,\pi_\Delta(y)) + \frac{p-1}{2}|g(x,\pi_\Delta(y))|^2\\ &\qquad \leq K\left[1 + |x|^2 + |\pi_\Delta(y)|^2\right]\\ &\qquad \leq \bar{K}\left[1 + |x|^2 + |y|^2\right],\end{aligned}$$

чиме је доказ завршен. □

2.2.2 L^p-оцена сеченог решења Ојлер–Марујаме

Главни циљ у овом одељку је оцена момента реда $p \geq 2$ сеченог решења Ојлер–Марујаме (2.2.13) које одговара једначини (2.0.1). У том смислу, најпре се доказује неколико помоћних тврђења која су битна за доказивање главних резултата овог одељка.

Лема 2.2.3 *Ако важе Претпоставке $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$, $\mathcal{H}_5'$ и $\mathcal{H}_6$, заједно са (2.1.28), тада, за свако $\Delta \in (0,1)$, за сваки цео број $l > 1$ и $\hat{p} \in [2,p]$, важи да је*

$$E \sup_{-M \leq k \leq N} |X_\Delta(t_k) - X_\Delta(t_{k-1})|^{\hat{p}} \leq \tilde{c}\Delta^{\frac{\hat{p}}{2}} + \tilde{c}_l \Delta^{\frac{\hat{p}l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\hat{p}}, \tag{2.2.22}$$

где су константе $\tilde{c}, \tilde{c}_l > 0$ независне од Δ и константа $\tilde{c}_l$ је зависна од l.

Доказ. Нека је $\Delta \in (0,1)$ произвољан и фиксиран број. На основу (2.2.6), (2.2.7) и Претпоставке $\mathcal{H}_5'$, добија се да је

$$E \sup_{-M+1 \leq k \leq 0} |X_\Delta(t_k) - X_\Delta(t_{k-1})|^{\hat{p}} = E \sup_{-M \leq k \leq 0} |\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})|^{\hat{p}} \leq C_\xi \Delta^{\frac{\hat{p}}{2}}. \tag{2.2.23}$$

Када је $k \in \{1, 2, \dots, N+1\}$, из (2.2.8) следи да је

$$
\begin{aligned}
&X_\Delta(t_k) - X_\Delta(t_{k-1}) \\
&\quad = u_\Delta(X_\Delta\left(t_{k-1} - I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta\right)) - u_\Delta(X_\Delta\left(t_{k-2} - I_\Delta[\delta(t_{k-2})]\Delta\right)) \\
&\qquad + f_\Delta\left(X_\Delta(t_{k-1}), X_\Delta\left(t_{k-1} - I_\Delta\left[\delta(t_{k-1})\right]\Delta\right)\right)\Delta \\
&\qquad + g_\Delta\left(X_\Delta(t_{k-1}), X_\Delta\left(t_{k-1} - I_\Delta\left[\delta(t_{k-1})\right]\Delta\right)\right)\Delta B_{k-1}.
\end{aligned}
$$

Применом елементарне неједнакости (1.4.1), као и (2.2.18), следи да је

$$
\begin{aligned}
&E \sup_{1 \le k \le N} |X_\Delta(t_k) - X_\Delta(t_{k-1})|^{\hat{p}} \qquad (2.2.24) \\
&\le \frac{\epsilon_p k^{\hat{p}}}{\epsilon} E \sup_{1 \le k \le N} \left|X_\Delta\left(t_{k-1} - I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta\right) - X_\Delta\left(t_{k-2} - I_\Delta[\delta(t_{k-2})]\Delta\right)\right|^{\hat{p}} \\
&\quad + 2^{\hat{p}-1}\left[1 + \epsilon^{\frac{1}{\hat{p}-1}}\right]^{\hat{p}-1} E \sup_{1 \le k \le N} \left|f_\Delta\left(X_\Delta(t_{k-1}), X_\Delta\left(t_{k-1} - I_\Delta\left[\delta(t_{k-1})\right]\Delta\right)\right)\right|^{\hat{p}} \Delta^{\hat{p}} \\
&\quad + 2^{\hat{p}-1}\left[1 + \epsilon^{\frac{1}{\hat{p}-1}}\right]^{\hat{p}-1} E \sup_{1 \le k \le N} \left|g_\Delta(X_\Delta(t_{k-1}), X_\Delta\left(t_{k-1} - I_\Delta\left[\delta(t_{k-1})\right]\Delta\right))\Delta B_{k-1}\right|^{\hat{p}}.
\end{aligned}
$$

У наставку се сваки члан претходне суме оцењује посебно.

Како је на основу Претпоставке $\mathcal{H}_3$, $(k-1) - I_\Delta[\delta(t_{k-1})] \ge (k-2) - I_\Delta[\delta(t_{k-2})]$, за свако $k \in \{1, 2, \dots, N+1\}$, применом (2.1.30) и елементарне неједнакости (1.4.5), закључује се да је

$$
\begin{aligned}
&\left|X_\Delta\left(t_{k-1} - I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta\right) - X_\Delta\left(t_{k-2} - I_\Delta[\delta(t_{k-2})]\Delta\right)\right|^{\hat{p}} \\
&\qquad \le (3 + \lfloor \eta \rfloor)^{\hat{p}-1} \sum_{j=(k-2)-I_\Delta[\delta(t_{k-2})]+1}^{(k-1)-I_\Delta[\delta(t_{k-1})]} |X_\Delta(t_j) - X_\Delta(t_{j-1})|^{\hat{p}} \\
&\qquad \le (3 + \lfloor \eta \rfloor)^{\hat{p}} \sup_{-M \le j \le N} |X_\Delta(t_j) - X_\Delta(t_{j-1})|^{\hat{p}}. \qquad (2.2.25)
\end{aligned}
$$

Дакле, оцена дела првог сабирка десне стране неједнакости (2.2.24) дата је са

$$
\begin{aligned}
&E \sup_{1 \le k \le N+1} \left|X_\Delta\left(t_{k-1} - I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta\right) - X_\Delta\left(t_{k-2} - I_\Delta[\delta(t_{k-2})]\Delta\right)\right|^{\hat{p}} \\
&\quad \le (3 + \lfloor \eta \rfloor)^{\hat{p}} E \sup_{-M \le k \le N} \left|X_\Delta\left(t_k\right) - X_\Delta\left(t_{k-1}\right)\right|^{\hat{p}}. \qquad (2.2.26)
\end{aligned}
$$

Са друге стране, на основу (2.2.5), добија се оцена дела другог сабирка у (2.2.24), односно

$$
E \sup_{1 \le k \le N} \left|f_\Delta\left(X_\Delta(t_{k-1}), X_\Delta\left(t_{k-1} - I_\Delta\left[\delta(t_{k-1})\right]\Delta\right)\right)\right|^{\hat{p}} \le (h(\Delta))^{\hat{p}}. \qquad (2.2.27)
$$

Применом (2.2.5), као и Хелдерове неједнакости, за сваки цео број $l > 1$, важи да је

$$
\begin{aligned}
&E\sup_{1\le k\le N}|g_\Delta\left(X_\Delta(t_{k-1}),X_\Delta\left(t_{k-1}-I_\Delta\left[\delta(t_{k-1})\right]\Delta\right)\right)\Delta B_{k-1}|^{\hat p}\\
&\quad\le E\left(\sup_{1\le k\le N}|g_\Delta\left(X_\Delta(t_{k-1}),X_\Delta\left(t_{k-1}-I_\Delta\left[\delta(t_{k-1})\right]\Delta\right)\right)|^{\hat p}\sup_{1\le k\le N}|\Delta B_{k-1}|^{\hat p}\right)\\
&\quad\le (h(\Delta))^{\hat p}\left[E\left(\sup_{0\le k\le N-1}|\Delta B_k|^{2\hat p l}\right)\right]^{\frac{1}{2l}}\\
&\quad\le (h(\Delta))^{\hat p}\left[\sum_{k=0}^{N-1}E|\Delta B_k|^{2\hat p l}\right]^{\frac{1}{2l}}. \qquad (2.2.28)
\end{aligned}
$$

Заменом (2.1.35) у (2.2.28), добија се оцена дела трећег сабирка из (2.2.24), тј.

$$
\begin{aligned}
&E\sup_{1\le k\le N}|g_\Delta\left(X_\Delta(t_{k-1}),X_\Delta\left(t_{k-1}-I_\Delta\left[\delta(t_{k-1})\right]\Delta\right)\right)\Delta B_{k-1}|^{\hat p}\\
&\qquad\le (h(\Delta))^{\hat p}\left[\sum_{k=0}^{N-1}m^{\hat p l}(2\hat p l-1)!!\Delta^{\hat p l}\right]^{\frac{1}{2l}}\\
&\qquad\le m^{\frac{\hat p}{2}}(T(2\hat p l-1)!!)^{\frac{1}{2l}}(h(\Delta))^{\hat p}\Delta^{\frac{\hat p l-1}{2l}}. \qquad (2.2.29)
\end{aligned}
$$

Такође, заменом (2.2.26), (2.2.27) и (2.2.29) у (2.2.24) и имајући у виду да је $\Delta\in(0,1)$, следи да је

$$
\begin{aligned}
&E\sup_{1\le k\le N}|X_\Delta(t_k)-X_\Delta(t_{k-1})|^{\hat p}\\
&\quad\le\left[1+\epsilon^{\frac{1}{\hat p-1}}\right]^{\hat p-1}\frac{k^{\hat p}}{\epsilon}(3+\lfloor\eta\rfloor)^{\hat p}E\sup_{-M\le k\le N}|X_\Delta\left(t_k\right)-X_\Delta\left(t_{k-1}\right)|^{\hat p}\\
&\qquad+2^{\hat p-1}\left[1+\epsilon^{\frac{1}{\hat p-1}}\right]^{\hat p-1}\left[1+m^{\frac{\hat p}{2}}(T(2\hat p l-1)!!)^{\frac{1}{2l}}\right](h(\Delta))^{\hat p}\Delta^{\frac{\hat p l-1}{2l}}. \qquad (2.2.30)
\end{aligned}
$$

На основу (2.2.23) и (2.1.37), неједнакост (2.2.30) постаје

$$
\begin{aligned}
&E\sup_{-M\le k\le N}|X_\Delta(t_k)-X_\Delta(t_{k-1})|^{\hat p}\\
&\qquad\le C_\xi\Delta^{\frac{\hat p}{2}}+\gamma E\sup_{-M\le k\le N}|X_\Delta(t_k)-X_\Delta(t_{k-1})|^{\hat p}\\
&\qquad\quad+2^{\hat p-1}\left[1+\bar\epsilon^{\frac{1}{\hat p-1}}\right]^{\hat p-1}\left[1+m^{\frac{\hat p}{2}}(T(2\hat p l-1)!!)^{\frac{1}{2l}}\right]\Delta^{\frac{\hat p l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\hat p}.
\end{aligned}
$$

Дакле, добија се да је

$$
E\sup_{-M\le k\le N}|X_\Delta(t_k)-X_\Delta(t_{k-1})|^{\hat p}\le\tilde c\Delta^{\frac{\hat p}{2}}+\tilde c_l\Delta^{\frac{\hat p l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\hat p},
$$

где је

$$
\tilde c=\frac{C_\xi}{1-\gamma},\quad \tilde c_l=\frac{2^{\hat p-1}}{1-\gamma}\left[1+\bar\epsilon^{\frac{1}{\hat p-1}}\right]^{\hat p-1}\left[1+m^{\frac{\hat p}{2}}(T(2\hat p l-1)!!)^{\frac{1}{2l}}\right],
$$

чиме је доказ завршен. □

Последица 2.2.1 *Нека важе услови Леме 2.2.3. Тада, за сваки цео број* $l > 1$ *и* $\hat{p} \in [2, p]$*, важи да је*

$$E \sup_{-\Delta \le t \le T} |\bar{y}_\Delta(t) - \bar{z}_\Delta(t)|^{\hat{p}} \le \bar{c}\Delta^{\frac{\hat{p}}{2}} + \bar{c}_l \Delta^{\frac{\hat{p}l-1}{2l}} (h(\Delta))^{\hat{p}}, \tag{2.2.31}$$

$$E|x_\Delta(t) - \bar{x}_\Delta(t)|^{\hat{p}} \le c'\Delta^{\frac{\hat{p}}{2}} + c'_l \Delta^{\frac{\hat{p}l-1}{2l}} (h(\Delta))^{\hat{p}}, \quad t \in [0, T], \tag{2.2.32}$$

где су константе $\bar{c}, c', \bar{c}_l, c'_l > 0$ *независне од* Δ *и* $\bar{c}_l, c'_l$ *зависне од* l.

Доказ. Нека су $\Delta \in (0, 1)$ и $t \in [0, T]$ произвољни фиксирани бројеви. Тада постоји јединствен цео број $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, тако да је $t \in [t_k, t_{k+1})$.

Како би се доказала релација (2.2.31), најпре се на основу (2.2.9)–(2.2.12) закључује да је

$$\begin{aligned}
&|\bar{y}_\Delta(t) - \bar{z}_\Delta(t)|^{\hat{p}} \\
&\quad = |X_\Delta(t_k - I_\Delta[\delta(t_k)]\Delta) - Z_k(t)|^{\hat{p}} \\
&\quad = \left(1 - \frac{s - t_k}{\Delta}\right)^{\hat{p}} |X_\Delta(t_k - I_\Delta[\delta(t_k)]\Delta) - X_\Delta(t_{k-1} - I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta)|^{\hat{p}} \\
&\quad \le |X_\Delta(t_k - I_\Delta[\delta(t_k)]\Delta) - X_\Delta(t_{k-1} - I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta)|^{\hat{p}}.
\end{aligned}$$

Имајући у виду (2.2.25), добија се да је

$$E \sup_{-\Delta \le t \le T} |\bar{y}_\Delta(t) - \bar{z}_\Delta(t)|^{\hat{p}} \le (3 + \lfloor \eta \rfloor)^{\hat{p}} E \sup_{-M \le k \le N} |X_\Delta(t_k) - X_\Delta(t_{k-1})|^{\hat{p}}.$$

Сада применом Леме 2.2.3, следи релација (2.2.31) за

$$\bar{c} = (3 + \lfloor \eta \rfloor)^{\hat{p}} \tilde{c}, \quad \bar{c}_l = (3 + \lfloor \eta \rfloor)^{\hat{p}} \tilde{c}_l.$$

Са друге стране, да би се доказала релација (2.2.32), потребно је најпре приметити да, на основу (2.2.14), као и (2.2.9), важи да је

$$\begin{aligned}
&E|x_\Delta(t) - \bar{x}_\Delta(t)|^{\hat{p}} \\
&\quad \le 3^{\hat{p}-1} E|u_\Delta(Z_k(t)) - u_\Delta(X_\Delta(t_{k-1} - I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta))|^{\hat{p}} \\
&\qquad + 3^{\hat{p}-1} \left[E\Big| \int_{t_k}^{t} f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s), \bar{y}_\Delta(s)) ds \Big|^{\hat{p}} + E\Big| \int_{t_k}^{t} g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s), \bar{y}_\Delta(s)) dB(s) \Big|^{\hat{p}} \right].
\end{aligned} \tag{2.2.33}$$

Такође, на основу (2.2.18), (2.2.10) и (2.2.9), респективно, а затим (2.2.26) и Леме 2.2.3, добија се да је

$$\begin{aligned}
&E|u_\Delta(Z_k(t)) - u_\Delta(X_\Delta(t_{k-1} - I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta))|^{\hat{p}} \\
&\quad \le k^{\hat{p}} E|Z_k(t) - X_\Delta(t_{k-1} - I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta)|^{\hat{p}} \\
&\quad \le k^{\hat{p}} E|X_\Delta(t_k - I_\Delta[\delta(t_k)]\Delta) - X_\Delta(t_{k-1} - I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta)|^{\hat{p}} \\
&\quad \le k^{\hat{p}} (3 + \lfloor \eta \rfloor)^{\hat{p}} E \sup_{-M \le k \le N} |X_\Delta(t_k) - X_\Delta(t_{k-1})|^{\hat{p}} \\
&\quad \le k^{\hat{p}} (3 + \lfloor \eta \rfloor)^{\hat{p}} \Big(\tilde{c}\Delta^{\frac{\hat{p}}{2}} + \tilde{c}_l \Delta^{\frac{\hat{p}l-1}{2l}} (h(\Delta))^{\hat{p}} \Big).
\end{aligned} \tag{2.2.34}$$

Применом неједнакости Хелдера и Буркхолдер–Дајвис–Гандија, а затим релације (2.2.5), следи да је

$$
\begin{aligned}
E\Big|\int_{t_k}^{t} f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))ds\Big|^{\hat{p}} + E\Big|\int_{t_k}^{t} g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))dB(s)\Big|^{\hat{p}} \qquad (2.2.35)\\
&\le (t-t_k)^{\hat{p}-1}\int_{t_k}^{t} E|f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))|^{\hat{p}}ds\\
&\quad+\left(\frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{2}\right)^{\frac{\hat{p}}{2}}(t-t_k)^{\frac{\hat{p}}{2}-1}\int_{t_k}^{t} E\left|g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))\right|^{\hat{p}}ds\\
&\le \Delta^{\hat{p}}(h(\Delta))^{\hat{p}}+\left(\frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{2}\right)^{\frac{\hat{p}}{2}}\Delta^{\frac{\hat{p}}{2}}(h(\Delta))^{\hat{p}}.
\end{aligned}
$$

Заменом (2.2.34) и (2.2.35) у (2.2.33), а како је $\Delta \in (0,1)$, добија се да је

$$
\begin{aligned}
E|x_\Delta(t)-\bar{x}_\Delta(t)|^{\hat{p}} &\le 3^{\hat{p}-1}\Bigg[k^{\hat{p}}(3+\lfloor\eta\rfloor)^{\hat{p}}\Big(\tilde{c}\Delta^{\frac{\hat{p}}{2}}+\tilde{c}_l\Delta^{\frac{\hat{p}l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\hat{p}}\Big)\\
&\qquad+\Delta^{\hat{p}}(h(\Delta))^{\hat{p}}+\left(\frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{2}\right)^{\frac{\hat{p}}{2}}\Delta^{\frac{\hat{p}}{2}}(h(\Delta))^{\hat{p}}\Bigg]\\
&\le c'\Delta^{\frac{\hat{p}}{2}}+c_l'\Delta^{\frac{\hat{p}l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\hat{p}}, \quad t\in[0,T],
\end{aligned}
$$

где је

$$
c' = 3^{\hat{p}-1}k^{\hat{p}}(3+\lfloor\eta\rfloor)^{\hat{p}}\tilde{c},\ \ c_l' = 3^{\hat{p}-1}\left[k^{\hat{p}}(3+\lfloor\eta\rfloor)^{\hat{p}}\tilde{c}_l+1+\left(\frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{2}\right)^{\frac{\hat{p}}{2}}\right].
$$

□

Лема 2.2.4 *Нека важе услови Леме 2.2.1. Тада, за свако $t \in [0,T]$ и $p \ge 2$, важи да је*

$$
\sup_{0\le s\le t} E|x_\Delta(s)|^p \le \frac{k}{1-k}\sup_{-\tau\le s\le 0} E|\xi(s)|^p + \frac{1}{(1-k)^p}\sup_{0\le s\le t} E|x_\Delta(s)-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))|^p.
$$

Доказ. Нека је $\epsilon > 0$ произвољно. На основу елементарне неједнакости (1.4.1), као и (2.2.19), следи да је, за свако $t \in [0,T]$,

$$
\begin{aligned}
|x_\Delta(t)|^p &= |x_\Delta(t)-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(t))+u_\Delta(\bar{z}_\Delta(t))|^p\\
&\le \left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}\left(|x_\Delta(t)-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(t))|^p+\frac{|u_\Delta(\bar{z}_\Delta(t))|^p}{\epsilon}\right)\\
&\le \left[1+\epsilon^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}\left(|x_\Delta(t)-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(t))|^p+k^p\frac{|\bar{z}_\Delta(t)|^p}{\epsilon}\right).
\end{aligned}
$$

Одабиром $\epsilon = \left[\frac{k}{1-k}\right]^{p-1}$, и применом (2.2.15) закључује се да је

$$
E|x_\Delta(t)|^p \le \frac{1}{(1-k)^{p-1}}E|x_\Delta(t)-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(t))|^p + k\sup_{-\tau\le s\le 0}E|\xi(s)|^p + k\sup_{0\le s\le t}E|x_\Delta(t)|^p.
$$

Стога, важи да је

$$\sup_{0\le s\le t} E|x_\Delta(s)|^p \le \frac{k}{1-k}\sup_{-\tau\le s\le 0} E|\xi(s)|^p + \frac{1}{(1-k)^p}\sup_{0\le s\le t} E|x_\Delta(s)-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))|^p,$$

чиме је доказ завршен. □

Наредна лема даје довољне услове ограничености момента реда $\hat{p}>0$ непрекидног сеченог решења Ојлер–Марујаме $\{x_\Delta(t), t\in[-\tau,T]\}$, што је од значаја за доказ главних резултата овог поглавља.

Лема 2.2.5 *Нека важе услови Леме 2.2.3, заједно са Претпоставком $\mathcal{H}_4'$. Тада, за $\hat{p}\in(0,p]$, важи да је*

$$\sup_{0<\Delta\le 1}\sup_{0\le t\le T} E|x_\Delta(t)|^{\hat{p}} \le C, \tag{2.2.36}$$

где је $C=C(T,\hat{p},l,\bar{K},k,\xi)$ позитивна реална константа, независна од Δ.

Доказ. Најпре се разматра случај када је $\hat{p}\in(2,p]$. Нека су $\Delta\in(0,1)$ и $T>0$ произвољни фиксирани бројеви.

Применом формуле Итоа, на основу (2.2.13) се добија да је, за $t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned}
&E|x_\Delta(t)-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(t))|^{\hat{p}}\\
&\quad\le E|\xi(0)-u_\Delta(X_\Delta(-\Delta-I_\Delta[\delta(-\Delta)]\Delta))|^{\hat{p}}\\
&\qquad+\hat{p}E\int_0^t |x_\Delta(s)-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))|^{\hat{p}-2}(x_\Delta(s)-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s)))^T f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))ds\\
&\qquad+\frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{2}E\int_0^t |x_\Delta(s)-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))|^{\hat{p}-2}|g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))|^2ds\\
&\qquad+\hat{p}E\int_0^t |x_\Delta(s)-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))|^{\hat{p}-2}(x_\Delta(s)-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s)))^T g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))dB(s)\\
&\quad\le E|\xi(0)-u_\Delta(X_\Delta(-\Delta-I_\Delta[\delta(-\Delta)]\Delta))|^{\hat{p}}\\
&\qquad+\hat{p}E\int_0^t |x_\Delta(s)-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))|^{\hat{p}-2}\\
&\qquad\quad\times\left((x_\Delta(s)-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s)))^T f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))+\frac{\hat{p}-1}{2}|g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))|^2\right)ds.
\end{aligned}$$

Штавише, за свако $t\in[0,T]$, важи да је

$$\begin{aligned}
&E|x_\Delta(t)-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(t))|^{\hat{p}}\\
&\quad\le E|\xi(0)-u_\Delta(X_\Delta(-\Delta-I_\Delta[\delta(-\Delta)]\Delta))|^{\hat{p}}\\
&\qquad+\hat{p}E\int_0^t |x_\Delta(s)-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))|^{\hat{p}-2}\\
&\qquad\quad\times\left((\bar{x}_\Delta(s)-u_\Delta(\bar{y}_\Delta(s)))^T f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))+\frac{\hat{p}-1}{2}|g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))|^2\right)ds\\
&\qquad+\hat{p}E\int_0^t |x_\Delta(s)-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))|^{\hat{p}-2}\\
&\qquad\quad\times(x_\Delta(s)-\bar{x}_\Delta(s)-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))+u_\Delta(\bar{y}_\Delta(s)))^T f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))ds.
\end{aligned}\tag{2.2.37}$$

У наставку се сваки члан суме на десној страни претходне неједнакости оцењује посебно. Дакле, на основу (2.2.19), оцена првог сабирка је

$$\begin{aligned}
&E|\xi(0) - u_\Delta(X_\Delta(-\Delta - I_\Delta[\delta(-\Delta)]\Delta))|^{\hat{p}} \\
&\quad \leq 2^{\hat{p}-1}\left(E|\xi(0)|^{\hat{p}} + k^{\hat{p}} E|X_\Delta(-\Delta - I_\Delta[\delta(-\Delta)]\Delta)|^{\hat{p}}\right) \\
&\quad \leq 2^{\hat{p}-1}(1+k^{\hat{p}}) \sup_{-\tau\leq s\leq 0} E|\xi(s)|^{\hat{p}}.
\end{aligned} \tag{2.2.38}$$

У оцени другог сабирка примењује се Лема 2.2.2, као и елементарна неједнакост (1.4.3), тј. за $\epsilon = \frac{1}{4\bar{K}(\hat{p}-2)T}$, добија се да је

$$\begin{aligned}
&\hat{p}E\int_0^t |x_\Delta(s) - u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))|^{\hat{p}-2} \\
&\quad \times \left((\bar{x}_\Delta(s) - u_\Delta(\bar{y}_\Delta(s)))^T f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s), \bar{y}_\Delta(s)) + \frac{\hat{p}-1}{2}|g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s), \bar{y}_\Delta(s))|^2\right) ds \\
&\quad \leq \hat{p}\bar{K}E\int_0^t |x_\Delta(s) - u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))|^{\hat{p}-2}\left(1 + |\bar{x}_\Delta(s)|^2 + |\bar{y}_\Delta(s)|^2\right) ds \\
&\quad \leq \frac{1}{4T}E\int_0^t |x_\Delta(s) - u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))|^{\hat{p}} ds \\
&\qquad + 2\bar{K}[4\bar{K}(\hat{p}-2)T]^{\frac{\hat{p}-2}{\hat{p}}} E\int_0^t (1 + |\bar{x}_\Delta(s)|^2 + |\bar{y}_\Delta(s)|^2)^{\frac{\hat{p}}{2}} ds \\
&\quad \leq \frac{1}{4T}E\int_0^t |x_\Delta(s) - u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))|^{\hat{p}} ds \\
&\qquad + 2\bar{K}[4\bar{K}(\hat{p}-2)T]^{\frac{\hat{p}-2}{\hat{p}}} 3^{\frac{\hat{p}}{2}-1} E\int_0^t (1 + |\bar{x}_\Delta(s)|^{\hat{p}} + |\bar{y}_\Delta(s)|^{\hat{p}}) ds.
\end{aligned} \tag{2.2.39}$$

Такође, у оцени трећег сабирка, примена неједнакости (1.4.3) даје

$$\begin{aligned}
&\hat{p}E\int_0^t |x_\Delta(s) - u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))|^{\hat{p}-2}(x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s) - u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s)) + u_\Delta(\bar{y}_\Delta(s)))^T f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s), \bar{y}_\Delta(s)) ds \\
&\leq (\hat{p}-2)\epsilon E\int_0^t |x_\Delta(s) - u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))|^{\hat{p}} ds \\
&\quad + \frac{2}{\epsilon^{(\hat{p}-2)/2}} E\int_0^t |x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s) - u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s)) + u_\Delta(\bar{y}_\Delta(s))|^{\frac{\hat{p}}{2}} |f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s), \bar{y}_\Delta(s))|^{\frac{\hat{p}}{2}} ds.
\end{aligned} \tag{2.2.40}$$

На основу (2.2.5), Хелдерове неједнакости и Теореме Фубинија, следи

$$\begin{aligned}
&E\int_0^t |x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s) - u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s)) + u_\Delta(\bar{y}_\Delta(s))|^{\frac{\hat{p}}{2}} |f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s), \bar{y}_\Delta(s))|^{\frac{\hat{p}}{2}} ds \\
&\quad \leq (h(\Delta))^{\frac{\hat{p}}{2}} \int_0^t \left(E|x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s) - u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s)) + u_\Delta(\bar{y}_\Delta(s))|^{\hat{p}}\right)^{\frac{1}{2}} ds \\
&\quad \leq 2^{\frac{\hat{p}-1}{2}} (h(\Delta))^{\frac{\hat{p}}{2}} \int_0^t \left[E|x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s)|^{\hat{p}} + E|u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s)) - u_\Delta(\bar{y}_\Delta(s))|^{\hat{p}}\right]^{\frac{1}{2}} ds.
\end{aligned}$$

Имајући у виду да је $\hat{p} \in (2, p]$ и применом (2.2.32), (2.2.18) и (2.2.31), респективно, важи да је

$$
\begin{aligned}
&E\int_0^t |x_\Delta(s)-\bar{x}_\Delta(s)-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))+u_\Delta(\bar{y}_\Delta(s))|^{\frac{\hat{p}}{2}}|f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))|^{\frac{\hat{p}}{2}}ds\\
&\quad\le 2^{\frac{\hat{p}-1}{2}}(h(\Delta))^{\frac{\hat{p}}{2}}\int_0^t\Big(c'\Delta^{\frac{\hat{p}}{2}}+c_l'\Delta^{\frac{\hat{p}l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\hat{p}}+k^{\hat{p}}E|\bar{z}_\Delta(s)-\bar{y}_\Delta(s)|^{\hat{p}}\Big)^{\frac{1}{2}}ds\\
&\quad\le 2^{\frac{\hat{p}-1}{2}}(h(\Delta))^{\frac{\hat{p}}{2}}T\Big[\Big(c'+k^{\hat{p}}\bar{c}\Big)\Delta^{\frac{\hat{p}}{2}}+\Big(c_l'+k^{\hat{p}}\bar{c}_l\Big)\Delta^{\frac{\hat{p}l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\hat{p}}\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}\\
&\quad\le 2^{\frac{\hat{p}-1}{2}}T\Big[\Big(c'+k^{\hat{p}}\bar{c}\Big)^{\frac{1}{2}}\big(\Delta^{\frac{1}{2}}h(\Delta)\big)^{\frac{\hat{p}}{2}}+\Big(c_l'+k^{\hat{p}}\bar{c}_l\Big)^{\frac{1}{2}}\big(\Delta^{\frac{1-1/(\hat{p}l)}{4}}h(\Delta)\big)^{\hat{p}}\Big)\Big].
\end{aligned}
$$

За $\epsilon_0\in(0,1)$, може се наћи довољно велико $l>1$, тако да је $l\ge\frac{1}{\hat{p}\epsilon_0}$. Стога, како је $\Delta\in(0,1)$, на основу (2.2.3) и претходне оцене следи да је

$$
E\int_0^t |x_\Delta(s)-\bar{x}_\Delta(s)-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))+u_\Delta(\bar{y}_\Delta(s))|^{\frac{\hat{p}}{2}}|f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))|^{\frac{\hat{p}}{2}}ds\le C_l,
$$

где је

$$
C_l=2^{\frac{\hat{p}-1}{2}}T\Big[\Big(c'+k^{\hat{p}}\bar{c}\Big)^{\frac{1}{2}}\hat{h}^{\frac{\hat{p}}{2}}+\Big(c_l'+k^{\hat{p}}\bar{c}_l\Big)^{\frac{1}{2}}\hat{h}^{\hat{p}}\Big)\Big].
$$

Заменом последње неједнакости у (2.2.40), за $\epsilon=\frac{1}{4(\hat{p}-2)T}$, добија се да је

$$
\begin{aligned}
&\hat{p}E\int_0^t|x_\Delta(s)-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))|^{\hat{p}-2}(x_\Delta(s)-\bar{x}_\Delta(s)-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))+u_\Delta(\bar{y}_\Delta(s)))^Tf_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))ds\\
&\le\frac{1}{4T}E\int_0^t|x_\Delta(s)-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))|^{\hat{p}}ds+2(4(\hat{p}-2)T)^{\frac{\hat{p}-2}{2}}C_l.
\end{aligned}
\tag{2.2.41}
$$

Како је $t\in[0,T]$ произвољно, заменом (2.2.38), (2.2.39) и (2.2.41) у (2.2.37), следи да је

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\le s\le t}E|x_\Delta(s)-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))|^{\hat{p}}\\
&\le 2^{\hat{p}-1}(1+k^{\hat{p}})\sup_{-\tau\le s\le 0}E|\xi(s)|^{\hat{p}}+\frac{1}{2}\sup_{0\le s\le t}E|x_\Delta(s)-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))|^{\hat{p}}\\
&\quad+2\bar{K}[4\bar{K}(\hat{p}-2)T]^{\frac{\hat{p}-2}{\hat{p}}}3^{\frac{\hat{p}}{2}-1}\int_0^t(1+E|\bar{x}_\Delta(s)|^{\hat{p}}+E|\bar{y}_\Delta(s)|^{\hat{p}})ds+2(4(\hat{p}-2)T)^{\frac{\hat{p}-2}{2}}C_l.
\end{aligned}
$$

Дакле, на основу (2.2.9), закључује се да је

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\le s\le t}E|x_\Delta(s)-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))|^{\hat{p}}\\
&\quad\le 2^{\hat{p}}(1+k^{\hat{p}})\sup_{-\tau\le s\le 0}E|\xi(s)|^{\hat{p}}\\
&\qquad+4\bar{K}[4\bar{K}(\hat{p}-2)T]^{\frac{\hat{p}-2}{\hat{p}}}3^{\frac{\hat{p}}{2}-1}\int_0^t\big(1+2\sup_{0\le u\le r}E|x_\Delta(u)|^{\hat{p}}\big)dr+4(4(\hat{p}-2)T)^{\frac{\hat{p}-2}{2}}C_l\\
&\quad\le 2^{\hat{p}}(1+k^{\hat{p}})\sup_{-\tau\le s\le 0}E|\xi(s)|^{\hat{p}}+4\bar{K}[4\bar{K}(\hat{p}-2)T]^{\frac{\hat{p}-2}{\hat{p}}}3^{\frac{\hat{p}}{2}-1}T+4(4(\hat{p}-2)T)^{\frac{\hat{p}-2}{2}}C_l\\
&\qquad+8\bar{K}[4\bar{K}(\hat{p}-2)T]^{\frac{\hat{p}-2}{\hat{p}}}3^{\frac{\hat{p}}{2}-1}\int_0^t\sup_{0\le u\le r}E|x_\Delta(u)|^{\hat{p}}dr.
\end{aligned}
\tag{2.2.42}
$$

Затим, применом Леме 2.2.4, добија се да је

$$\sup_{0\le s\le t} E|x_\Delta(s)|^{\hat p} \le \left(\frac{k}{1-k}+\frac{2^{\hat p}(1+k^{\hat p})}{(1-k)^{\hat p}}\right)\sup_{-\tau\le s\le 0} E|\xi(s)|^{\hat p}+M_l+\bar N\int_0^t \sup_{0\le u\le r} E|x_\Delta(u)|^{\hat p}dr,$$

где је

$$\bar N = \frac{8\bar K[4\bar K(\hat p-2)T]^{\frac{\hat p-2}{\hat p}}3^{\frac{\hat p}{2}-1}}{(1-k)^{\hat p}},\ M_l = \frac{4\bar K[4\bar K(\hat p-2)T]^{\frac{\hat p-2}{\hat p}}3^{\frac{\hat p}{2}-1}T+4(4(\hat p-2)T)^{\frac{\hat p-2}{2}}C_l}{(1-k)^{\hat p}}.$$

Дакле, важи да је

$$\sup_{0\le s\le t} E|x_\Delta(s)|^{\hat p} \le Q_l + \bar N \int_0^t \sup_{0\le u\le r} E|x_\Delta(u)|^{\hat p}dr,$$

где је

$$Q_l = \left(\frac{k}{1-k}+\frac{2^{\hat p}(1+k^{\hat p})}{(1-k)^{\hat p}}\right)\sup_{-\tau\le s\le 0} E|\xi(s)|^{\hat p} + M_l.$$

Применом Грунвал–Белманове леме следи да је

$$\sup_{0\le s\le T} E|x_\Delta(s)|^{\hat p} \le Q_l e^{\bar N T} \equiv S_l. \tag{2.2.43}$$

Како добијена неједнакост важи за свако $\Delta \in (0,1)$, док је константа S_l независна од Δ, може се уочити да је

$$\sup_{0<\Delta\le 1}\sup_{0\le s\le T} E|x_\Delta(s)|^{\hat p} \le S_l.$$

За $\hat p \in (0,2]$, на основу Хелдерове неједнакости и применом претходног дела доказа, добија се да је

$$E|x_\Delta(t)|^{\hat p} \le (E|x_\Delta(t)|^p)^{\frac{\hat p}{p}} \le S_l^{\frac{\hat p}{p}}, \quad t\in[0,T].$$

Дакле, доказ је завршен за $C = S_l \vee S_l^{\frac{\hat p}{p}}$. □

2.2.3 L^q-конвергенција сеченог решења Ојлер–Марујаме

Главни циљ овог одељка је оцена L^q-блискости сеченог решења Ојлер–Марујаме (2.2.13) и тачног решења једначине (2.0.1). У том смислу, најпре се доказује неколико помоћних тврђења која су битна за доказивање главних резултата овог одељка.

У Теореми 2.1.2 је доказана ограниченост момента реда p тачног решења једначине (2.0.1), чији коефицијенти преноса и дифузије задовољавају глобални Липшицов услов. У наставку се доказује лема на основу које се може извести закључак о ограничености момента реда $p \ge 2$ тачног решења, али под локалним Липшицовим условом за коефицијенте преноса и дифузије и условом Хасминског.

Лема 2.2.6 *Нека важе Претпоставке $\mathcal{H}_1$ – $\mathcal{H}_4$ и нека је R_0 довољно велики природан број, такав да важи (2.1.4). Поред тога, нека је, за сваки природан број $R \geq R_0$, дефинисано време заустављања*

$$\tau_R = \inf\{t \geq 0 : |x(t)| \geq R\}, \tag{2.2.44}$$

где је $\inf \emptyset = \infty$. *Тада, за свако $p \geq 2$, важи да је*

$$P\{\tau_R \leq T\} \leq \frac{C'}{R^p}, \tag{2.2.45}$$

где је $C' = C'(p, k, K, T, \xi)$ позитивна реална константа.

Доказ. На основу формуле Итоа и Претпоставки $\mathcal{H}_4$ и $\mathcal{H}_2$, следи да је

$$\begin{aligned}
&E|x(t\wedge\tau_R) - u(x(t\wedge\tau_R - \delta(t\wedge\tau_R)))|^p \\
&\leq E|\xi(0) - u(\xi(-\delta(0)))|^p + pE\int_0^{t\wedge\tau_R} |x(s) - u(x(s-\delta(s))|^{p-2} \\
&\quad \times \left((x(s) - u(x(s-\delta(s))))^T f(x(s), x(s-\delta(s))) + \frac{p-1}{2}|g(x(s), x(s-\delta(s)))|^2 \right) ds \\
&\leq E|\xi(0) - u(\xi(-\delta(0))|^p \\
&\quad + pKE\int_0^{t\wedge\tau_R} |x(s) - u(x(s-\delta(s))|^{p-2}(1 + |x(s)|^2 + |x(s-\delta(s))|^2)ds \\
&\leq E|\xi(0) - u(\xi(-\delta(0))|^p \\
&\quad + pK\big(2^{p-3}\vee 1\big)E\int_0^{t\wedge\tau_R}\big[|x(s)|^{p-2} + k^{p-2}|x(s-\delta(s))|^{p-2}\big](1 + |x(s)|^2 + |x(s-\delta(s))|^2)ds.
\end{aligned}$$

Затим, применом елементарне неједнакости (1.4.4), следи да је

$$\begin{aligned}
E|x(t\wedge\tau_R) &- u(x(t\wedge\tau_R - \delta(t\wedge\tau_R)))|^p \\
&\leq E|\xi(0) - u(\xi(-\delta(0))|^p + K\Big(2^{p-3}\vee 1\Big)2\big(1 + k^{p-2}\big)T \\
&\quad + K\left(2^{p-3}\vee 1\right)\left[3p - 4 + 2k^{p-2}\right] E\int_0^t |x(s\wedge\tau_R)|^p ds \\
&\quad + K\left(2^{p-3}\vee 1\right)\left[2 + (3p-4)k^{p-2}\right] E\int_0^t |x(s\wedge\tau_R - \delta(s\wedge\tau_R))|^p ds,
\end{aligned}$$

односно

$$E|x(t\wedge\tau_R) - u(x(t\wedge\tau_R - \delta(t\wedge\tau_R)))|^p \leq C_1 + C_2\int_0^t \sup_{0\leq u\leq s} E|x(u\wedge\tau_R)|^p ds,$$

где је

$$\begin{aligned}
C_1 &= E|\xi(0) - u(\xi(-\delta(0))|^p + K\left(2^{p-3}\vee 1\right)T\Big[2 + \big(2 + (3p-4)k^{p-2}\big)\sup_{-\tau\leq s\leq 0} E|\xi(s)|^p\Big], \\
C_2 &= K\left(2^{p-3}\vee 1\right)\left(3p - 2 + (3p-2)k^{p-2}\right).
\end{aligned}$$

Дакле, важи да је

$$\sup_{0\le u\le t} E|x(u\wedge\tau_R)-u(x(u\wedge\tau_R-\delta(u\wedge\tau_R)))|^p\le C_1+C_2\int_0^t \sup_{0\le u\le s} E|x(u\wedge\tau_R)|^p ds. \quad (2.2.46)$$

Применом истих аргумената као у доказу Леме 2.2.4, добија се да је

$$\begin{aligned}\sup_{0\le u\le t} E|x(u\wedge\tau_R)|^p &\le \frac{k}{1-k}\sup_{-\tau\le u\le 0} E|\xi(u)|^p\\ &\quad+\frac{1}{(1-k)^p}\sup_{0\le u\le t} E|x(u\wedge\tau_R)-u(x(u\wedge\tau_R-\delta(u\wedge\tau_R)))|^p.\end{aligned}$$

Замењујући (2.2.46) у претходној неједнакости, следи да је

$$\sup_{0\le u\le t} E|x(u\wedge\tau_R)|^p\le \bar{C}_1+\bar{C}_2\int_0^t \sup_{0\le u\le s} E|x(s\wedge\tau_R)|^p ds,$$

где је

$$\bar{C}_1=\frac{k}{1-k}\sup_{-\tau\le u\le 0} E|\xi(u)|^p+\frac{C_1}{(1-k)^p},\quad \bar{C}_2=\frac{C_2}{(1-k)^p}.$$

Затим, Грунвал–Белманова неједнакост имплицира

$$\sup_{0\le u\le t} E|x(u\wedge\tau_R)|^p\le \bar{C}_1 e^{T\bar{C}_2}\equiv C'.$$

Специјално, може се закључити да је $E|x(T\wedge\tau_R)|^p\le C'$, тако да је

$$R^pP\{\tau_R\le T\}\le C',$$

те следи (2.2.45). □

Лема 2.2.7 *Нека важе услови Леме 2.2.3, заједно са Претпоставком $\mathcal{H}_4'$. За сваки природан број $R\ge R_0$, где R_0 задовољава услов (2.1.4) и $\Delta\in(0,1)$, дефинише се време заустављања*

$$\rho_{\Delta,R}=\inf\{t\ge 0:|x_\Delta(t)|\ge R\}. \quad (2.2.47)$$

Тада, за свако $p\ge 2$, важи да је

$$P\{\rho_{\Delta,R}\le T\}\le \frac{C''}{R^p}, \quad (2.2.48)$$

где је $C''=C''(p,k,l,\bar{K},T,\xi)$ позитивна реална константа.

Доказ. Пратећи процедуру доказа Леме 2.2.5, аналогно оцени у (2.2.42), за $t\in[0,T]$, добија се да је

$$\begin{aligned}&E|x_\Delta(t\wedge\rho_{\Delta,R})-u_\Delta(\bar{z}_\Delta(t\wedge\rho_{\Delta,R}))|^p\\ &\le 2^p(1+k^p)\sup_{-\tau\le s\le 0} E|\xi(s)|^p+4\bar{K}[4\bar{K}(p-2)T]^{\frac{p-2}{p}}3^{\frac{p}{2}-1}T+4(4(p-2)T)^{\frac{p-2}{2}}C_l\\ &\quad+8\bar{K}[4\bar{K}(p-2)T]^{\frac{p-2}{p}}3^{\frac{p}{2}-1}\int_0^t \sup_{0\le u\le r} E|x_\Delta(u\wedge\rho_{\Delta,R})|^p dr.\end{aligned}$$

Затим, примењујући исте аргументе као у оцени (2.2.43), на основу претходне неједнакости, закључује се да је

$$\sup_{0\le t\le T} E|x_\Delta(t\wedge\rho_{\Delta,R})|^p \le S_l \equiv C''.$$

На основу претходне релације следи да је $E|x_\Delta(T\wedge\rho_{\Delta,R})|^p \le C''$, тако да је $R^pP\{\rho_{\Delta,R}\le T\}\le C''$, те жељено тврђење важи. □

Сада су створени услови за доказивање главних резултата овог одељка. У наставку се, за фиксиран произвољан број $T>0$, доказује да је

$$\lim_{\Delta\to 0} E|x_\Delta(T)-x(T)|^{\hat q}=0, \quad \lim_{\Delta\to 0} E|\bar x_\Delta(T)-x(T)|^{\hat q}=0,$$

за свако $\hat q\ge 2$.

Теорема 2.2.2 *Нека важе Претпоставке $\mathcal{H}_1$–$\mathcal{H}_4$, $\mathcal{H}_5'$ и $\mathcal{H}_6$, заједно са условом (2.1.28). Тада, за свако $\hat q\in[2,p)$, важи да је*

$$\lim_{\Delta\to 0} E|x_\Delta(T)-x(T)|^{\hat q}=0, \quad \lim_{\Delta\to 0} E|\bar x_\Delta(T)-x(T)|^{\hat q}=0. \tag{2.2.49}$$

Доказ. Нека су τ_R и $\rho_{\Delta,R}$ времена заустављања, дефинисана са (2.2.44) и (2.2.47) респективно, и нека је

$$\theta_{\Delta,R}=\tau_R\wedge\rho_{\Delta,R}, \quad e_\Delta(T)=x_\Delta(T)-x(T).$$

Очигледно, важи да је

$$E|e_\Delta(T)|^{\hat q}=E\left(|e_\Delta(T)|^{\hat q}I_{\{\theta_{\Delta,R}>T\}}\right)+E\left(|e_\Delta(T)|^{\hat q}I_{\{\theta_{\Delta,R}\le T\}}\right). \tag{2.2.50}$$

Нека је $\epsilon>0$ произвољан број и $a,b>0$. Применом елементарне неједнакости (1.4.4), следи да је

$$a^{\hat q}b\le(\epsilon a^p)^{\frac{\hat q}{p}}\left(\frac{b^{\frac{p}{p-\hat q}}}{\epsilon^{\frac{\hat q}{p-\hat q}}}\right)^{1-\frac{\hat q}{p}}\le\frac{\hat q\epsilon}{p}a^p+\frac{p-\hat q}{p\epsilon^{\frac{\hat q}{p-\hat q}}}b^{\frac{p}{p-\hat q}},$$

тако да је

$$E\left(|e_\Delta(T)|^{\hat q}I_{\{\theta_{\Delta,R}\le T\}}\right)\le\frac{\hat q\epsilon}{p}E|e_\Delta(T)|^p+\frac{p-\hat q}{p\epsilon^{\frac{\hat q}{p-\hat q}}}P\{\theta_{\Delta,R}\le T\}. \tag{2.2.51}$$

На основу Теореме 2.2.1 и Леме 2.2.5, следи да постоји позитивна константа $\tilde C$, тако да је

$$E|e_\Delta(T)|^p\le 2^{p-1}(E|x_\Delta(T)|^p+E|x(T)|^p)\le\tilde C. \tag{2.2.52}$$

Са друге стране, Леме 2.2.6 и 2.2.7 дају

$$P\{\theta_{\Delta,R}\le T\}\le P\{\tau_R\le T\}+P\{\rho_{\Delta,R}\le T\}\le\frac{C'+C''}{R^p}. \tag{2.2.53}$$

На основу релација (2.2.51)–(2.2.53), израз (2.2.50) се може оценити као

$$E|e_\Delta(T)|^{\hat{q}} \leq E\left(|e_\Delta(T)|^{\hat{q}} I_{\{\theta_{\Delta,R}>T\}}\right) + \frac{\tilde{C}\hat{q}\epsilon}{p} + \frac{p-\hat{q}}{p\epsilon^{\frac{\hat{q}}{p-\hat{q}}}} \frac{C' + C''}{R^p}. \tag{2.2.54}$$

Нека је $\varepsilon > 0$ произвољна константа. Могу се одабрати довољно мали број ϵ, тако да је $\tilde{C}\hat{q}\epsilon/p \leq \varepsilon/3$, и довољно велика константа R тако да је

$$\frac{p-\hat{q}}{p\epsilon^{\frac{\hat{q}}{p-\hat{q}}}} \frac{C' + C''}{R^p} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Применом релације (2.2.54), за тако изабрану константу R, следи да је

$$E|e_\Delta(T)|^{\hat{q}} \leq E\left(|e_\Delta(T)|^{\hat{q}} I_{\{\theta_{\Delta,R}>T\}}\right) + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Ако се докаже да, за сваки довољно мали број ϵ, важи да је

$$E\left(|e_\Delta(T)|^{\hat{q}} I_{\{\theta_{\Delta,R}>T\}}\right) \leq \frac{\varepsilon}{3}, \tag{2.2.55}$$

онда се може закључити да је

$$\lim_{\Delta\to 0} E|e_\Delta(T)|^{\hat{q}} = 0.$$

Дакле, на основу (2.2.32), следи да је

$$\lim_{\Delta\to 0} E|x(T) - \bar{x}_\Delta(T)|^{\hat{q}} = 0,$$

те би доказ теореме био потпун. Сходно томе, како би се доказ комплетирао, потребно је доказати релацију (2.2.55). У том смислу се дефинишу сечене функције

$$\begin{aligned}
F_R(x,y) &= f\left((|x| \wedge R)\frac{x}{|x|}, (|y| \wedge R)\frac{y}{|y|}\right),\\
G_R(x,y) &= g\left((|x| \wedge R)\frac{x}{|x|}, (|y| \wedge R)\frac{y}{|y|}\right),\\
U_R(y) &= u\left((|y| \wedge R)\frac{y}{|y|}\right),
\end{aligned}$$

за $x, y \in \mathbb{R}^d$. Без губљења општости, може се претпоставити да је Δ^* већ довољно мали број, тако да је $\mu^{-1}(h(\Delta^*)) \geq R$. Дакле, за свако $\Delta \in (0, \Delta^*]$, следи да је

$$f_\Delta(x,y) = F_R(x,y), \quad g_\Delta(x,y) = G_R(x,y), \quad u_\Delta(y) = U_R(y),$$

за $x, y \in \mathbb{R}^d$, такве да је $|x| \vee |y| \leq R$. Сада се разматра следећа неутрална СДЈ са временски зависним кашњењем

$$d[z(t) - U_R(z(t-\delta(t)))] = F_R(z(t), z(t-\delta(t)))dt + G_R(z(t), z(t-\delta(t)))dB(t), \tag{2.2.56}$$

за $t \geq 0$, са почетним условом $z(u) = \xi(u)$, $u \in [-\tau, 0]$. На основу Претпоставке $\mathcal{H}_1$ следи да су функције $F_R(x, y)$ и $G_R(x, y)$ глобално Липшиц непрекидне са Липшицовом константом K_R. Са друге стране, применом Леме 2.2.1, закључује се да је функција $U_R(y)$ контрактивно пресликавање са константом $k \in (0, 1)$. Дакле, једначина (2.2.56) има јединствено глобално решење $\{z(t), t \geq -\tau\}$ (видети Теорему 2.1.1). Такође, лако се закључује да је

$$P\{x(t \wedge \tau_R) = z(t \wedge \tau_R),\, t \in [0, T]\} = 1. \tag{2.2.57}$$

Штавише, за сваку величину корака $\Delta \in (0, \Delta^*]$, може се применити класична метода Ојлер–Марујаме за једначину (2.2.56). У том смислу, нека је $\{z_\Delta(t), t \geq -\tau\}$ непрекидно решење Ојлер–Марујаме које одговара једначини (2.2.56). Тада, следи да је

$$P\{x_\Delta(t \wedge \rho_{\Delta,R}) = z_\Delta(t \wedge \rho_{\Delta,R}),\, t \in [0, T]\} = 1. \tag{2.2.58}$$

На основу Теореме 2.1.3, добија се да је

$$E \sup_{-\tau \leq t \leq T} |z(t) - z_\Delta(t)|^{\hat{q}} \leq S(l)\Delta^{\frac{\hat{q}l-1}{2l}},$$

где је $S(l)$ позитивна константа, независна од Δ. Сходно томе, закључује се да је

$$E \sup_{-\tau \leq t \leq T} |z(t \wedge \theta_{\Delta,R}) - z_\Delta(t \wedge \theta_{\Delta,R})|^{\hat{q}} \leq S(l)\Delta^{\frac{\hat{q}l-1}{2l}}.$$

Применом (2.2.57) и (2.2.58), добија се да је

$$E \sup_{-\tau \leq t \leq T} |x(t \wedge \theta_{\Delta,R}) - x_\Delta(t \wedge \theta_{\Delta,R})|^{\hat{q}} \leq S(l)\Delta^{\frac{\hat{q}l-1}{2l}},$$

што имплицира

$$E|x(T \wedge \theta_{\Delta,R}) - x_\Delta(T \wedge \theta_{\Delta,R})|^{\hat{q}} \leq S(l)\Delta^{\frac{\hat{q}l-1}{2l}}.$$

Коначно, важи да је

$$\begin{aligned}
E\left(|e_\Delta(T)|^{\hat{q}} I_{\{\theta_{\Delta,R} > T\}}\right) &= E\left(|e_\Delta(T \wedge \theta_{\Delta,R})|^{\hat{q}} I_{\{\theta_{\Delta,R} > T\}}\right) \\
&\leq E|x(T \wedge \theta_{\Delta,R}) - x_\Delta(T \wedge \theta_{\Delta,R})|^{\hat{q}} \\
&\leq S(l)\Delta^{\frac{\hat{q}}{2}(1-\frac{1}{l})}.
\end{aligned}$$

На пример, ако је $l = 2$, може се изабрати довољно мали број Δ, тако да важи релација (2.2.55). Тиме је доказ теореме завршен. $\square$

Како би се илустровали претходни теоријски резултати, наводи се следећи пример.

Пример 2.2.1 *Разматра се следећа једнодимензионална неутрална СДЈ са временски зависним кашњењем*

$$d\left[x(t)+\frac{1}{27}\sin x(t-\delta(t))\right]=f(x(t),x(t-\delta(t)))dt+g(x(t),x(t-\delta(t)))dB(t), \quad (2.2.59)$$

за $t \geq 0$, *са почетним условом* $\xi(\theta) = 1$, $\theta \in [-\tau, 0]$, $\tau = 2$, *где је функција кашњења дефинисана са* $\delta(t) = 1 - \frac{1}{4}\sin t$, $t \geq 0$ *и коефицијенти преноса и дифузије су*

$$f(x,y) = a_1 + a_2|y|^{\frac{6}{5}} - a_3x^5, \qquad g(x,y) = a_4|x|^{\frac{5}{2}} + a_5y, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

где су $a_1, \cdots, a_5 \in \mathbb{R}$ *и* $a_3 > 0$. *Очигледно је да су коефицијенти* f *и* g *локално Липшиц непрекидни, односно, задовољавају Претпоставку* $\mathcal{H}_1$, *док за* $k = 1/27$, *функција* $u(x) = -1/27\sin x$ *задовољава Претпоставку* $\mathcal{H}_2$. *Такође, како је* $\delta'(t) \leq \frac{1}{4} = \bar{\delta}$, *за свако* $t \geq 0$, *важи Претпоставка* $\mathcal{H}_3$. *Са друге стране, за свако* $p \geq 2$ *и свако* $a \in (0, 1]$, *важи да је*

$$(x - au(y))f(x,y) + \frac{p-1}{2}|g(x,y)|^2 \leq |a_1||x| + |a_2||x||y|^{\frac{6}{5}} - a_3x^6 + \frac{a|a_1|}{27} + \frac{a|a_2|}{27}|y|^{\frac{6}{5}} + \frac{aa_3}{27}|x|^5 + (p-1)a_4^2|x|^5 + (p-1)a_5^2y^2. \quad (2.2.60)$$

На основу елементарне неједнакости (1.4.4), може се закључити да је

$$|x||y|^{\frac{6}{5}} \leq \frac{2}{5}|x|^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{5}y^2, \qquad a|a_2||y|^{\frac{6}{5}} \leq \frac{2}{5}a|a_2| + \frac{3}{5}a|a_2|y^2. \quad (2.2.61)$$

Заменом (2.2.61) у (2.2.60), добија се да је

$$\begin{aligned}
&(x - au(y))f(x,y) + \frac{p-1}{2}|g(x,y)|^2 \\
&\leq \frac{a}{27}\left[|a_1| + \frac{2}{5}|a_2|\right] + \left[\frac{3}{5}|a_2|\left(1 + \frac{a}{27}\right) + (p-1)a_5^2\right]y^2 \\
&\quad + |a_1||x| + \left[\frac{aa_3}{27} + (p-1)a_4^2\right]|x|^5 + \frac{2}{5}|a_2||x|^{\frac{5}{2}} - a_3x^6 \\
&\leq K(1 + x^2 + ay^2),
\end{aligned}$$

где је

$$K = \frac{a}{27}\left[|a_1| + \frac{2}{5}|a_2|\right] \vee \frac{1}{a}\left[\frac{3}{5}|a_2|\left(1 + \frac{a}{27}\right) + (p-1)a_5^2\right] \vee \tilde{a},$$

и

$$\tilde{a} = \sup_{u\geq 0}\left\{|a_1|u + \left[\frac{aa_3}{27} + (p-1)a_4^2\right]u^5 + \frac{2}{5}|a_2|u^{\frac{5}{2}} - a_3u^6\right\} < \infty.$$

Дакле, Претпоставка $\mathcal{H}_4'$ *важи за свако* $p \geq 2$ *и свако* $a \in (0, 1]$. *Специјално, за* $a = 1$, *следи да важи Претпоставка* $\mathcal{H}_4$. *Како је почетни услов дефинисан* *са* $\xi(\theta)=1$, $\theta\in[-\tau,0]$, *следи да Претпоставка* $\mathcal{H}_5$ *важи. Узимајући у обзир да је*

$$|\delta(t)-\delta(s)|\leq\frac{1}{4}|t-s|,\quad t,s\geq 0,$$

Претпоставка $\mathcal{H}_6$ *важи за* $\eta=1/4$. *Такође, како је* $k(3+\lfloor\eta\rfloor)=1/9<1$, *услов (2.1.28) важи. Да би се применила Теорема 2.2.2, потребно је дефинисати функције* μ *и* h *које задовољавају услове (2.2.1)–(2.2.3). За свако* $r\geq 1$, *неједнакост (2.2.1) је задовољена за* $\mu(r)=\bar{a}r^5$, *где је*

$$\bar{a}=(|a_1|+|a_2|+a_3)\vee(|a_4|+|a_5|),$$

и $\mu^{-1}(r)=\bar{a}^{-\frac{1}{5}}r^{\frac{1}{5}}$ *за* $r\geq 1$. *За* $\epsilon_0\in(0,1)$ *може се одабрати* $\bar{\epsilon}\in[\epsilon_0,1)$ *и дефинисати функција* $h(\Delta)=\Delta^{-(1-\bar{\epsilon})}$ *за* $\Delta\in(0,1)$. *Одабиром довољно малог броја* $\Delta\in(0,1)$, *услови (2.2.2) и (2.2.3) су задовољени.*

Дакле, на основу Теореме 2.2.2, закључује се да сечено решење Ојлер–Марујаме конвергира ка тачном решењу $\{x(t),t\geq-\tau\}$ *једначине (2.2.59) у смислу (2.2.49) за свако* $\hat{q}\in[2,p)$.

2.2.4 Ред L^q-конвергенције сеченог решења Ојлер–Марујаме

Главни циљ овог одељка је доказивање L^q-конвергенције сеченог решења Ојлер–Марујаме за неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем, чији су коефицијенти преноса и дифузије са високим степеном нелинеарноси. Прецизније, одређује се ред L^q-конвергенције сечене методе Ојлер–Марујаме за $q>2$ и доказује се да је он близак вредности $q/2$.

За даље разматрање, неопходне су следеће претпоставке.

$\mathcal{H}_7$: Постоје константе $q>2$ и $H_1>0$ тако да, за свако $x,y,\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^d$, важи да је

$$\begin{aligned}(x-u(y)-\bar{x}+u(\bar{y}))^T(f(x,y)-f(\bar{x},\bar{y}))+\frac{q-1}{2}|g(x,y)-g(\bar{x},\bar{y})|^2&\\ \leq H_1\big(|x-\bar{x}|^2+|y-\bar{y}|^2\big).&\end{aligned}\tag{2.2.62}$$

$\mathcal{H}_8$: Постоје позитивне константе ρ и H_2 тако да, за свако $x,y,\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^d$, важи да је

$$\begin{aligned}&|f(x,y)-f(\bar{x},\bar{y})|^2\vee|g(x,y)-g(\bar{x},\bar{y})|^2\\ &\qquad\leq H_2\big(1+|x|^\rho+|y|^\rho+|\bar{x}|^\rho+|\bar{y}|^\rho\big)\big(|x-\bar{x}|^2+|y-\bar{y}|^2\big).\end{aligned}\tag{2.2.63}$$

Потребно је уочити да сечени коефицијенти f_Δ и g_Δ веома добро чувају Претпоставку $\mathcal{H}_8$, односно, за свако $x,y,\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^d$, важи да је

$$\begin{aligned}&|f_\Delta(x,y)-f_\Delta(\bar{x},\bar{y})|^2\vee|g_\Delta(x,y)-g_\Delta(\bar{x},\bar{y})|^2\\ &\quad=|f(\pi_\Delta(x),\pi_\Delta(y))-f(\pi_\Delta(\bar{x}),\pi_\Delta(\bar{y}))|^2\vee|g(\pi_\Delta(x),\pi_\Delta(y))-g(\pi_\Delta(\bar{x}),\pi_\Delta(\bar{y}))|^2\\ &\quad\leq H_2\big(1+|\pi_\Delta(x)|^\rho+|\pi_\Delta(y)|^\rho+|\pi_\Delta(\bar{x})|^\rho+|\pi_\Delta(\bar{y})|^\rho\big)\\ &\qquad\quad\times\big(|\pi_\Delta(x)-\pi_\Delta(\bar{x})|^2+|\pi_\Delta(y)-\pi_\Delta(\bar{y})|^2\big).\end{aligned}\tag{2.2.64}$$

На основу дефиниције функције $\pi_\Delta(\cdot)$, закључује се да је, за свако $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|\pi_\Delta(x)| \le |x|. \tag{2.2.65}$$

Такође, применом Леме 2.2.1 добија се да је, за свако $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$|\pi_\Delta(x) - \pi_\Delta(y)|^2 \le |x-y|^2.$$

Дакле, израз (2.2.64) се може оценити са

$$\begin{aligned}|f_\Delta(x,y) - f_\Delta(\bar{x},\bar{y})|^2 &\vee |g_\Delta(x,y) - g_\Delta(\bar{x},\bar{y})|^2 \\ &\le H_2\big(1+|x|^\rho+|y|^\rho+|\bar{x}|^\rho+|\bar{y}|^\rho\big)\big(|x-\bar{x}|^2+|y-\bar{y}|^2\big).\end{aligned} \tag{2.2.66}$$

Са друге стране, на основу Претпоставке $\mathcal{H}_8$ добија се да је, за свако $|x|, |y| \ge 1$,

$$\begin{aligned}\big||f(x,y)| - |f(0,0)|\big|^2 &\le |f(x,y) - f(0,0)|^2 \\ &\le H_2(1+|x|^\rho+|y|^\rho)(|x|^2+|y|^2) \\ &\le 2H_2(|x|^\rho+|y|^\rho)(|x|^2+|y|^2) \\ &\le 8H_2\big(|x|\vee|y|\big)^{\rho+2}.\end{aligned}$$

На сличан начин се може оценити израз $\big||g(x,y)| - |g(0,0)|\big|^2$. Следи да је, за свако $|x|, |y| \ge 1$,

$$|f(x,y)| \vee |g(x,y)| \le H_3\big(|x|\vee|y|\big)^{\frac{\rho+2}{2}}, \tag{2.2.67}$$

где је $H_3 = \big(\sqrt{8H_2} + |f(0,0)| + |g(0,0)|\big)$. Дакле, коефицијенти f и g расту највише полиномијално, тако да се може одабрати $\mu(u) = H_3 u^{\frac{\rho+2}{2}}$. Штавише, примењујући (2.2.3), може се одабрати $h(\Delta) = \hat{h}\Delta^{-\frac{1-\epsilon}{4}}$ за неко $\epsilon_0 \in [\epsilon_0, 1)$. Другим речима, постоји много избора функција $\mu(\cdot)$ и $h(\cdot)$.

За доказивање главних резултата овог поглавља, наредне две леме су од суштинског значаја.

Лема 2.2.8 *Нека важе Претпоставке $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$, $\mathcal{H}'_5$ анд $\mathcal{H}_6$, заједно са условом (2.1.28). Тада, за свако $\Delta \in (0,1)$, сваки цео број $l > 1$ и $\hat{p} \in [2, p]$, важи да је*

$$E|x_\Delta(t-\delta(t)) - \bar{z}_\Delta(t)|^{\hat{p}} \le \check{c}\Delta^{\frac{\hat{p}}{2}} + \check{c}_l\Delta^{\frac{\hat{p}l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\hat{p}}, \quad t \in [0,T],$$

где су константе $\check{c}, \check{c}_l > 0$ независне од Δ и константа $\check{c}_l$ је зависна од l.

Доказ. Нека је $t \in [0,T]$ произвољан фиксиран број. На основу дефиниције (2.2.12) степенастог процеса $\bar{z}_\Delta(t)$, за $t \in [t_i, t_{i+1})$, важи да је

$$E|x_\Delta(t-\delta(t)) - \bar{z}(t)|^{\hat{p}} \le 2^{\hat{p}-1}\left(E|x_\Delta(t-\delta(t)) - X_\Delta(t_j)|^{\hat{p}} + E|X_\Delta(t_j) - Z_i(t)|^{\hat{p}}\right). \tag{2.2.68}$$

Како би се оценио израз $E|x_\Delta(t-\delta(t)) - X_\Delta(t_j)|^{\hat{p}}$, разматрају се следећи случајеви.

Случај 1: Ако је $j \le -1$, тада на основу Претпоставке $\mathcal{H}_5$ следи да је

$$\begin{aligned}
E|x_\Delta(t-\delta(t)) - X_\Delta(t_j)|^{\hat{p}} &\le E \sup_{t\in[0,T],\ j\le -1} |X_\Delta(t-\delta(t)) - X_\Delta(t_j)|^{\hat{p}} \\
&\le E \sup_{s,t\in[-\tau,0],\ |s-t|\le\Delta} |\xi(t)-\xi(s)|^{\hat{p}} \\
&\le C_\xi \Delta^{\frac{\hat{p}}{2}}.
\end{aligned}$$

Случај 2: Ако је $j \ge 0$, на основу (2.2.9), (2.2.10), (2.2.14) и Леме 2.2.1, добија се да је

$$\begin{aligned}
&E|x_\Delta(t-\delta(t)) - X_\Delta(t_j)|^{\hat{p}} \qquad (2.2.69)\\
&\le 3^{\hat{p}-1}E|u_\Delta(Z_j(t-\delta(t))) - u_\Delta(X_\Delta(t_{j-1} - I_\Delta[\delta(t_{j-1})]\Delta))|^{\hat{p}} \\
&\quad + 3^{\hat{p}-1}E\left|\int_{t_j}^{t-\delta(t)} f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))ds\right|^{\hat{p}} + 3^{\hat{p}-1}E\left|\int_{t_j}^{t-\delta(t)} g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))dB(s)\right|^{\hat{p}} \\
&\le 3^{\hat{p}-1}k^{\hat{p}}E|Z_j(t-\delta(t)) - X_\Delta(t_{j-1} - I_\Delta[\delta(t_{j-1})]\Delta)|^{\hat{p}} \\
&\quad + 3^{\hat{p}-1}E\left|\int_{t_j}^{t-\delta(t)} f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))ds\right|^{\hat{p}} + 3^{\hat{p}-1}E\left|\int_{t_j}^{t-\delta(t)} g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))dB(s)\right|^{\hat{p}} \\
&= 3^{2\hat{p}-1}k^{\hat{p}}\left|\frac{t-\delta(t)-t_j}{\Delta}\right|^{\hat{p}} E|X_\Delta(t_j - I_\Delta[\delta(t_j)]\Delta) - X_\Delta(t_{j-1} - I_\Delta[\delta(t_{j-1})]\Delta)|^{\hat{p}} \\
&\quad + 3^{\hat{p}-1}E\left|\int_{t_j}^{t-\delta(t)} f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))ds\right|^{\hat{p}} + 3^{\hat{p}-1}E\left|\int_{t_j}^{t-\delta(t)} g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))dB(s)\right|^{\hat{p}}.
\end{aligned}$$

Сада је потребно оценити израз $E|X_\Delta(t_j - I_\Delta[\delta(t_j)]\Delta) - X_\Delta(t_{j-1} - I_\Delta[\delta(t_{j-1})]\Delta)|^{\hat{p}}$. На основу Претпоставке $\mathcal{H}_3$, важи да је $(j-1) - I_\Delta[\delta(t_{j-1})] \ge (j-2) - I_\Delta[\delta(t_{j-2})]$ за свако $j \in \{1,2,\ldots,N+1\}$. Тада се, применом (2.1.30) и елементарне неједнакости (1.4.5), закључује да је

$$\begin{aligned}
&|X_\Delta(t_{j-1} - I_\Delta[\delta(t_{j-1})]\Delta) - X_\Delta(t_{j-2} - I_\Delta[\delta(t_{j-2})]\Delta)|^{\hat{p}} \\
&\qquad \le (3+\lfloor\eta\rfloor)^{\hat{p}} \sup_{-M\le\alpha\le N} |X_\Delta(t_\alpha) - X_\Delta(t_{\alpha-1})|^{\hat{p}}. \qquad (2.2.70)
\end{aligned}$$

На сличан начин, имајући у виду израз (2.1.40), добија се да је

$$\begin{aligned}
&|X_\Delta(t_j) - X_\Delta(t_{i-1} - I_\Delta[\delta(t_{i-1})]\Delta)|^{\hat{p}} \\
&\qquad \le (5+\lfloor 2\eta\rfloor)^{\hat{p}-1} \sum_{\alpha=(i-1)-I_\Delta[\delta(t_{i-1})]+1}^{j} |X_\Delta(t_\alpha) - X_\Delta(t_{\alpha-1})|^{\hat{p}} \\
&\qquad \le (5+\lfloor 2\eta\rfloor)^{\hat{p}} \sup_{-M\le\alpha\le N} |X_\Delta(t_\alpha) - X_\Delta(t_{\alpha-1})|^{\hat{p}}. \qquad (2.2.71)
\end{aligned}$$

Затим, на основу Леме 2.2.3, важи да је

$$\begin{aligned}
&E|X_\Delta(t_j - I_\Delta[\delta(t_j)]\Delta) - X_\Delta(t_{j-1} - I_\Delta[\delta(t_{j-1})]\Delta)|^{\hat{p}} \\
&\qquad \le (3+\lfloor\eta\rfloor)^{\hat{p}-1}\left(\tilde{c}\Delta^{\frac{\hat{p}}{2}} + \tilde{c}_l\Delta^{\frac{\hat{p}l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\hat{p}}\right). \qquad (2.2.72)
\end{aligned}$$

Применом неједнакости Хелдера, Буркхолдер–Дејвис–Гандија и релације (2.2.5), респективно, добија се да је

$$
\begin{aligned}
E\Big|\int_{t_j}^{t-\delta(t)} & f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))ds\Big|^{\hat{p}} + E\Big|\int_{t_j}^{t-\delta(t)} g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))dB(s)\Big|^{\hat{p}} \\
&\le (t-\delta(t)-t_j)^{\hat{p}-1}\int_{t_j}^{t-\delta(t)} E|f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))|^{\hat{p}}ds \\
&\quad + \left(\frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{2}\right)^{\frac{\hat{p}}{2}} (t-\delta(t)-t_j)^{\frac{\hat{p}}{2}-1}\int_{t_j}^{t-\delta(t)} E\,|g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))|^{\hat{p}}ds \\
&\le \Delta^{\hat{p}}(h(\Delta))^{\hat{p}} + \left(\frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{2}\right)^{\frac{\hat{p}}{2}}\Delta^{\frac{\hat{p}}{2}}(h(\Delta))^{\hat{p}}.
\end{aligned}
\tag{2.2.73}
$$

Заменом израза (2.2.72) и (2.2.73) у (2.2.69), следи да је

$$
\begin{aligned}
E|x_\Delta(t-\delta(t)) - X_\Delta(t_j)|^{\hat{p}} &\le 3^{\hat{p}-1}k^{\hat{p}}(3+\lfloor\eta\rfloor)^{\hat{p}}\Big(\tilde{c}\Delta^{\frac{\hat{p}}{2}} + \tilde{c}_l\Delta^{\frac{\hat{p}l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\hat{p}}\Big) \\
&\quad + 3^{\hat{p}-1}\left(\Delta^{\hat{p}}(h(\Delta))^{\hat{p}} + \left(\frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{2}\right)^{\frac{\hat{p}}{2}}\Delta^{\frac{\hat{p}}{2}}(h(\Delta))^{\hat{p}}\right).
\end{aligned}
\tag{2.2.74}
$$

За оцену другог сабирка из (2.2.68), применом дефиниције (2.2.10), добија се да је

$$
\begin{aligned}
X_\Delta(t_j) - Z_k(t) &= X_\Delta(t_j) - \bar{y}_\Delta(t_{i-1}) - \frac{t-t_i}{\Delta}(\bar{y}_\Delta(t_i) - \bar{y}_\Delta(t_{i-1})) \\
&\le X_\Delta(t_j) - X_\Delta(t_{i-1} - I_\Delta[\delta(t_{i-1})]\Delta) \\
&\quad - \frac{t-t_i}{\Delta}\big(X_\Delta(t_i - I_\Delta[\delta(t_i)]\Delta) - X_\Delta(t_{i-1} - I_\Delta[\delta(t_{i-1})]\Delta)\big),
\end{aligned}
\tag{2.2.75}
$$

за $t \in [t_i, t_{i+1})$. На основу (2.2.70) и (2.2.71), следи да је

$$
\begin{aligned}
|X_\Delta(t_j) - Z_i(t)|^{\hat{p}} &\le 2^{\hat{p}-1}\,|X_\Delta(t_j) - X_\Delta(t_{i-1} - I_\Delta[\delta(t_{i-1})]\Delta)|^{\hat{p}} \\
&\quad + 2^{\hat{p}-1}\,|X_\Delta(t_i - I_\Delta[\delta(t_i)]\Delta) - X_\Delta(t_{i-1} - I_\Delta[\delta(t_{i-1})]\Delta)|^{\hat{p}} \\
&\le 2^{\hat{p}-1}\big((5+\lfloor 2\eta\rfloor)^{\hat{p}} + (3+\lfloor\eta\rfloor)^{\hat{p}}\big)\sup_{-M\le\alpha\le N}|X_\Delta(t_\alpha) - X_\Delta(t_{\alpha-1})|^{\hat{p}}.
\end{aligned}
\tag{2.2.76}
$$

Применом Леме 2.2.2, може се закључити да је

$$
E|X_\Delta(t_j) - Z_i(t)|^{\hat{p}} \le 2^{\hat{p}-1}\big((5+\lfloor 2\eta\rfloor)^{\hat{p}} + (3+\lfloor\eta\rfloor)^{\hat{p}}\big)\big(\tilde{c}\Delta^{\frac{\hat{p}}{2}} + \tilde{c}_l\Delta^{\frac{\hat{p}l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\hat{p}}\big). \tag{2.2.77}
$$

Стога, како је $\Delta \in (0,1)$, замена израза (2.2.74) и (2.2.77) у (2.2.68) даје

$$
\begin{aligned}
&E|x_\Delta(t-\delta(t)) - \bar{z}(t)|^{\hat{p}} \\
&\le 2^{\hat{p}-1}\Big(3^{\hat{p}-1}k^{\hat{p}}(3+\lfloor\eta\rfloor)^{\hat{p}} + 2^{\hat{p}-1}\big((5+\lfloor 2\eta\rfloor)^{\hat{p}} + (3+\lfloor\eta\rfloor)^{\hat{p}}\big)\Big)\Big(\tilde{c}\Delta^{\frac{\hat{p}}{2}} + \tilde{c}_l\Delta^{\frac{\hat{p}l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\hat{p}}\Big) \\
&\quad + 2^{\hat{p}-1}3^{\hat{p}-1}\left(\Delta^{\hat{p}}(h(\Delta))^{\hat{p}} + \left(\frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{2}\right)^{\frac{\hat{p}}{2}}\Delta^{\frac{\hat{p}}{2}}(h(\Delta))^{\hat{p}}\right) \\
&\le \check{c}\Delta^{\frac{\hat{p}}{2}} + \check{c}_l\Delta^{\frac{\hat{p}l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\hat{p}},
\end{aligned}
$$

где је

$$\check{c}=2^{\hat{p}-1}\tilde{c}\Big(3^{\hat{p}-1}k^{\hat{p}}(3+\lfloor\eta\rfloor)^{\hat{p}}+2^{\hat{p}-1}\big((5+\lfloor 2\eta\rfloor)^{\hat{p}}+(3+\lfloor\eta\rfloor)^{\hat{p}}\big)\Big),$$

$$\check{c}_l=2^{\hat{p}-1}\tilde{c}_l\Big(3^{\hat{p}-1}k^{\hat{p}}(3+\lfloor\eta\rfloor)^{\hat{p}}+2^{\hat{p}-1}\big((5+\lfloor 2\eta\rfloor)^{\hat{p}}+(3+\lfloor\eta\rfloor)^{\hat{p}}\big)\Big)+6^{\hat{p}-1}\left(1+\left(\frac{\hat{p}(\hat{p}-1)}{2}\right)^{\frac{\hat{p}}{2}}\right).$$

□

Последица 2.2.2 *Нека важе услови Леме 2.2.8, заједно са Претпоставком $\mathcal{H}_4'$. Тада, за сваки цео број $l>1$, $\hat{q}\in[2,p)$ и $\Delta\in(0,1)$, важи да је*

$$E|x_\Delta(t-\delta(t))-\pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(t))|^{\hat{q}}\leq \check{s}\Delta^{\frac{\hat{q}}{2}}+\check{s}\big(\mu^{-1}(h(\Delta))\big)^{-(p-\hat{q})}+\check{s}_l\Delta^{\frac{\hat{q}l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\hat{q}},\ t\in[0,T],$$

где су контанте $\check{s},\check{s}_l>0$ независне од Δ и константа $\check{s}_l$ је зависна од l.

Доказ. Нека је $t\in[0,T]$ произвољан фиксиран број. На основу Леме 2.2.8, добија се да је

$$\begin{aligned}
&E|x_\Delta(t-\delta(t))-\pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(t))|^{\hat{q}}\\
&\qquad\leq 2^{\hat{q}-1}E|x_\Delta(t-\delta(t))-\bar{z}_\Delta(t)|^{\hat{q}}+2^{\hat{q}-1}E|\bar{z}_\Delta(t)-\pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(t))|^{\hat{q}}\\
&\qquad\leq 2^{\hat{q}-1}\Big[\check{c}\Delta^{\frac{\hat{q}}{2}}+\check{c}_l\Delta^{\frac{\hat{q}l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\hat{q}}+E|\bar{z}_\Delta(t)-\pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(t))|^{\hat{q}}\Big].
\end{aligned}\tag{2.2.78}$$

Применом неједнакости Хелдера и Чебишева, закључује се да је

$$\begin{aligned}
E|\bar{z}_\Delta(t)-\pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(t))|^{\hat{q}}&=E\left(I_{\{|\bar{z}_\Delta(t)|>\mu^{-1}(h(\Delta))\}}|\bar{z}_\Delta(t)|^{\hat{q}}\right)\\
&\leq\big(P\{|\bar{z}_\Delta(t)|>\mu^{-1}(h(\Delta))\}\big)^{\frac{p-\hat{q}}{p}}\left(E|\bar{z}_\Delta(t)|^p\right)^{\frac{\hat{q}}{p}}\\
&\leq\left(\frac{E|\bar{z}_\Delta(t)|^p}{(\mu^{-1}(h(\Delta)))^p}\right)^{\frac{p-\hat{q}}{p}}\left(E|\bar{z}_\Delta(t)|^p\right)^{\frac{\hat{q}}{p}}\\
&\leq(\mu^{-1}(h(\Delta)))^{-(p-\hat{q})}E|\bar{z}_\Delta(t)|^p.
\end{aligned}$$

Имајући у виду релацију (2.2.15) и Лему 2.2.3, следи да је

$$\begin{aligned}
E|\bar{z}_\Delta(t)-\pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(t))|^{\hat{q}}&\leq 2^{p-1}\big(\mu^{-1}(h(\Delta))\big)^{-(p-\hat{q})}\sup_{-\tau\leq s\leq t}E|x_\Delta(s)|^p\\
&\leq 2^{p-1}\left(\sup_{-\tau\leq s\leq 0}E|\xi(s)|^p+C\right)\big(\mu^{-1}(h(\Delta))\big)^{-(p-\hat{q})}.
\end{aligned}\tag{2.2.79}$$

Заменом израза (2.2.79) у (2.2.78), добија се да је

$$\begin{aligned}
E|x(t-\delta(t))-\pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(t))|^{\hat{q}}&\leq 2^{\hat{q}-1}(\check{c}\Delta^{\frac{\hat{q}}{2}}+\check{c}_l\Delta^{\frac{\hat{q}l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\hat{q}})\\
&\quad+2^{p+\hat{q}-2}\big(\mu^{-1}(h(\Delta))\big)^{-(p-\hat{q})}\left(\sup_{-\tau\leq s\leq 0}E|\xi(s)|^p+C\right)\\
&\leq\check{s}\Delta^{\frac{\hat{q}}{2}}+\check{s}\big(\mu^{-1}(h(\Delta))\big)^{-(p-\hat{q})}+\check{s}_l\Delta^{\frac{\hat{q}l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\hat{q}},
\end{aligned}$$

где је

$$\check{s}=2^{\hat{q}-1}\left(\check{c}\vee 2^{p-1}\left(\sup_{-\tau\leq s\leq 0}E|\xi(s)|^p+C\right)\right),\quad \check{s}_l=2^{\hat{q}-1}\check{c}_l.$$

Тиме је доказ завршен. □

Теорема 2.2.3 *Нека важе Претпоставке* $\mathcal{H}_1$–$\mathcal{H}_4$, $\mathcal{H}_6$–$\mathcal{H}_8$, $\mathcal{H}_5^{'}$ *и* $\mathcal{H}_4^{'}$, *заједно са условима* (2.1.28) *и* $2p > (2+\rho)q$. *Тада, за свако* $\bar{q} \in [2, q)$, $\Delta \in (0, 1)$ *и* $l > 1$, *важи да је*

$$\sup_{0\le t\le T} E|x_\Delta(t)-x(t)|^{\bar{q}} \le D(\mu^{-1}(h(\Delta)))^{-\frac{2p-(2+\rho)\bar{q}}{2}} + D\Delta^{\bar{q}/2} + D_l\Delta^{\frac{\bar{q}l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\bar{q}}, \quad (2.2.80)$$

$$\sup_{0\le t\le T} E|\bar{x}_\Delta(t)-x(t)|^{\bar{q}} \le D^{'}(\mu^{-1}(h(\Delta)))^{-\frac{2p-(2+\rho)\bar{q}}{2}} + D^{'}\Delta^{\bar{q}/2} + D_l^{'}\Delta^{\frac{\bar{q}l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\bar{q}}, \quad (2.2.81)$$

где су константе $D, D^{'}, D_l, D_l^{'} > 0$ *независне од* Δ *и* $D_l, D_l^{'}$ *су зависне од* l.

Специјално, на основу релације (2.2.67), могу се дефинисати функције

$$\mu(u) = H_3 u^{\frac{\rho+2}{2}}, \quad |u| \ge 1, \quad (2.2.82)$$

и $h(\Delta) = \hat{h}\Delta^{-\epsilon}$, *за неко* $\epsilon \in \left(0, \frac{1-\epsilon_0}{4}\right]$ *и* $\hat{h} \ge 1$, *где су* ϵ_0 *и* $\hat{h}$ *константе дефинисане у (2.2.3), тако да важе следеће релације*

$$\sup_{0\le t\le T} E|x(t) - x_\Delta(t)|^{\bar{q}} = O\left(\Delta^{\epsilon\left(\frac{2p}{\rho+2}-\bar{q}\right)\wedge\left(\frac{\bar{q}}{2}-\frac{1}{2l}-\epsilon\bar{q}\right)}\right), \quad (2.2.83)$$

$$\sup_{0\le t\le T} E|x(t) - \bar{x}_\Delta(t)|^{\bar{q}} = O\left(\Delta^{\epsilon\left(\frac{2p}{\rho+2}-\bar{q}\right)\wedge\left(\frac{\bar{q}}{2}-\frac{1}{2l}-\epsilon\bar{q}\right)}\right). \quad (2.2.84)$$

Доказ. Најпре је потребно нагласити да је оцена (2.2.83) у којој фигурише непрекидно сечено решење Ојлер–Марујаме од теоријског значаја, с обзиром на то да се трајекторије тог решења не могу симулирати. На другој страни, релација (2.2.84) има велики практични значај, имајући у виду да у њој фигурише дискретно сечено решење Ојлер–Марујаме, које се може симулирати.

Претпоставка $\mathcal{H}_1$ неће бити експлицитно примењивана у доказу теореме, али је неопходна као гаранција егзистенције и јединствености тачног решења x једначине (2.0.1).

Нека су $\bar{q}\in[2, q)$ и $\Delta\in(0, 1)$ произвољни фиксирани бројеви. За $t\in[0, T]$, нека је

$$e_\Delta(t) := x(t) - x_\Delta(t), \quad \bar{e}_\Delta(t) := x(t) - u(x(t-\delta(t))) - x_\Delta(t) + u_\Delta(\bar{z}_\Delta(t)).$$

За сваки цео број $n > ||x_0|| \vee 1 = ||\xi|| \vee 1$, дефинише се време заустављања

$$\theta_n = \inf\{t \ge 0 : |x(t)| \vee |x_\Delta(t)| \ge n\},$$

где је $\inf\emptyset = \infty$. На основу формуле Итоа, добија се да је, за свако $t\in[0, T]$,

$$E|\bar{e}_\Delta(t\wedge\theta_n)|^{\bar{q}} = E\int_0^{t\wedge\theta_n} \bar{q}\,|\bar{e}_\Delta(s)|^{\bar{q}-2}\Bigg((\bar{e}_\Delta(s))^T\Big(f(x(s), x(s-\delta(s))) - f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s), \bar{y}_\Delta(s))\Big)$$
$$+ \frac{\bar{q}-1}{2}\big|g(x(s), x(t-\delta(s))) - g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s), \bar{y}_\Delta(s))\big|^2\Bigg)ds. \quad (2.2.85)$$

Како је

$$\begin{aligned}
&\frac{\bar q-1}{2}\big|g(x(s),x(t-\delta(s)))-g_\Delta(\bar x_\Delta(s),\bar y_\Delta(s))\big|^2\\
&\quad\le\frac{\bar q-1}{2}\Bigg(\left(1+\frac{q-\bar q}{\bar q-1}\right)\big|g(x(s),x(t-\delta(s)))-g(x_\Delta(s),\pi_\Delta(\bar z_\Delta(s)))\big|^2\\
&\qquad\qquad+\left(1+\frac{\bar q-1}{q-\bar q}\right)\big|g(x_\Delta(s),\pi_\Delta(\bar z_\Delta(s)))-g_\Delta(\bar x_\Delta(s),\bar y_\Delta(s))\big|^2\Bigg)\\
&\quad\le\frac{q-1}{2}\big|g(x(s),x(t-\delta(s)))-g(x_\Delta(s),\pi_\Delta(\bar z_\Delta(s)))\big|^2\\
&\qquad+\frac{(\bar q-1)(q-1)}{2(q-\bar q)}\big|g(x_\Delta(s),\pi_\Delta(\bar z_\Delta(s)))-g_\Delta(\bar x_\Delta(s),\bar y_\Delta(s))\big|^2,
\end{aligned}$$

израз (2.2.85) се може оценити као

$$\begin{aligned}
&E|\bar e_\Delta(t\wedge\theta_n)|^{\bar q}\\
&\le E\int_0^{t\wedge\theta_n}\bar q\,|\bar e_\Delta(s)|^{\bar q-2}\Bigg((\bar e_\Delta(s))^T\Big(f(x(s),x(s-\delta(s)))-f(x_\Delta(s),\pi_\Delta(\bar z_\Delta(s)))\Big)\\
&\qquad+\frac{q-1}{2}\big|g(x(s),x(s-\delta(s)))-g(x_\Delta(s),\pi_\Delta(\bar z_\Delta(s)))\big|^2\\
&\qquad+(\bar e_\Delta(s))^T\Big(f(x_\Delta(s),\pi_\Delta(\bar z_\Delta(s)))-f_\Delta(\bar x_\Delta(s),\bar y_\Delta(s))\Big)\\
&\qquad+\frac{(\bar q-1)(q-1)}{2(q-\bar q)}\big|g(x_\Delta(s),\pi_\Delta(\bar z_\Delta(s)))-g_\Delta(\bar x_\Delta(s),\bar y_\Delta(s))\big|^2\Bigg)ds\\
&=J_1+J_2,
\end{aligned}\tag{2.2.86}$$

где је

$$\begin{aligned}
J_1&=E\int_0^{t\wedge\theta_n}\bar q\,|\bar e_\Delta(s)|^{\bar q-2}\Bigg((\bar e_\Delta(s))^T\Big(f(x(s),x(s-\delta(s))-f(x_\Delta(s),\pi_\Delta(\bar z_\Delta(s)))\Big)\\
&\qquad+\frac{q-1}{2}\big|g(x(s),x(s-\delta(s)))-g(x_\Delta(s),\pi_\Delta(\bar z_\Delta(s)))\big|^2\Bigg)ds,\\
J_2&=E\int_0^{t\wedge\theta_n}\bar q\,|\bar e_\Delta(s)|^{\bar q-2}\Bigg((\bar e_\Delta(s))^T\Big(f(x_\Delta(s),\pi_\Delta(\bar z_\Delta(s)))-f_\Delta(\bar x_\Delta(s),\bar y_\Delta(s))\Big)\\
&\qquad+\frac{(\bar q-1)(q-1)}{2(q-\bar q)}\big|g(x_\Delta(s),\pi_\Delta(\bar z_\Delta(s)))-g_\Delta(\bar x_\Delta(s),\bar y_\Delta(s))\big|^2\Bigg)ds.
\end{aligned}\tag{2.2.87}$$

Најпре се оцењује интеграл J_1. У том смислу, нека је $a,b\ge 0$. Применом елементарне неједнакости (1.4.4), следи да је

$$a^{\bar q-2}b^2=(a^{\bar q})^{\frac{\bar q-2}{\bar q}}\,(b^{\bar q})^{\frac{2}{\bar q}}\le\frac{\bar q-2}{\bar q}a^{\bar q}+\frac{2}{\bar q}b^{\bar q}.\tag{2.2.88}$$

Имајући у виду Претпоставку $\mathcal{H}_7$, услов (2.2.88), као и $0 \leq t \wedge \theta_n \leq t \leq T$, закључује се да је

$$
\begin{aligned}
J_1 &\leq \bar{q} H_1 E \int_0^{t\wedge\theta_n} |\bar{e}_\Delta(s)|^{\bar{q}-2} |x(s) - x_\Delta(s)|^2 ds \\
&\quad + \bar{q} H_1 E \int_0^{t\wedge\theta_n} |\bar{e}_\Delta(s)|^{\bar{q}-2} |x(s-\delta(s)) - \pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))|^2 ds \\
&\leq \bar{q} H_1 E \int_0^{t\wedge\theta_n} \left(\frac{\bar{q}-2}{\bar{q}} |\bar{e}_\Delta(s)|^{\bar{q}} + \frac{2}{\bar{q}} |x(s) - x_\Delta(s)|^{\bar{q}} \right) ds \\
&\quad + \bar{q} H_1 E \int_0^{t\wedge\theta_n} \left(\frac{\bar{q}-2}{\bar{q}} |\bar{e}_\Delta(s)|^{\bar{q}} + \frac{2}{\bar{q}} |x(s-\delta(s)) - \pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))|^{\bar{q}} \right) ds \\
&\leq 2H_1(\bar{q}-2) E \int_0^{t\wedge\theta_n} |\bar{e}_\Delta(s)|^{\bar{q}} ds \\
&\quad + 2H_1 E \int_0^{t\wedge\theta_n} \Big(|x(s) - x_\Delta(s)|^{\bar{q}} + 2^{\bar{q}-1} |x(s-\delta(s)) - x_\Delta(s-\delta(s))|^{\bar{q}} \\
&\qquad\qquad + 2^{\bar{q}-1} |x_\Delta(s-\delta(s)) - \pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))|^{\bar{q}} \Big) ds \\
&\leq 2H_1(\bar{q}-2) E \int_0^{t\wedge\theta_n} |\bar{e}_\Delta(s)|^{\bar{q}} ds \\
&\quad + 2^{\bar{q}} H_1 \bigg(E \int_0^{t\wedge\theta_n} |x(s) - x_\Delta(s)|^{\bar{q}} ds + E \int_0^{t\wedge\theta_n} |x(s-\delta(s)) - x_\Delta(s-\delta(s))|^{\bar{q}} ds \\
&\qquad\qquad + E \int_0^{t\wedge\theta_n} |x_\Delta(s-\delta(s)) - \pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))|^{\bar{q}} ds \bigg). \qquad (2.2.89)
\end{aligned}
$$

На основу Претпоставке $\mathcal{H}_3$, с обзиром на то да решења x и x_Δ задовољавају исти почетни услов, добија се да је

$$
2^{\bar{q}} H_1 E \int_0^{t\wedge\theta_n} |x(s-\delta(s)) - x_\Delta(s-\delta(s))|^{\bar{q}} ds \leq \frac{2^{\bar{q}} H_1}{1-\bar{\delta}} E \int_0^{t\wedge\theta_n} |x(s) - x_\Delta(s)|^{\bar{q}} ds.
$$

Заменом претходне оцене у (2.2.89), следи да је

$$
\begin{aligned}
J_1 &\leq 2H_1(\bar{q}-2) E \int_0^{t\wedge\theta_n} |\bar{e}_\Delta(s)|^{\bar{q}} ds + 2^{\bar{q}} \left(1 + \frac{1}{1-\bar{\delta}}\right) H_1 E \int_0^{t\wedge\theta_n} |x(s) - x_\Delta(s)|^{\bar{q}} ds \\
&\quad + 2^{\bar{q}} H_1 \int_0^T E|x_\Delta(s-\delta(s)) - \pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))|^{\bar{q}} ds.
\end{aligned}
$$

Дакле, применом Последице 2.2.2, може се закључити да је, за $l > 1$,

$$
\begin{aligned}
J_1 &\leq 2H_1(\bar{q}-2) E \int_0^{t\wedge\theta_n} |\bar{e}_\Delta(s)|^{\bar{q}} ds + 2^{\bar{q}} \left(1 + \frac{1}{1-\bar{\delta}}\right) H_1 E \int_0^{t\wedge\theta_n} |e_\Delta(s)|^{\bar{q}} ds \\
&\quad + 2^{2\bar{q}-1} H_1 T \left(\check{s}\Delta^{\frac{\bar{q}}{2}} + \check{s}\big(\mu^{-1}(h(\Delta))\big)^{-(p-\bar{q})} + \check{s}_l \Delta^{\frac{\bar{q}l-1}{2l}} (h(\Delta))^{\bar{q}} \right). \qquad (2.2.90)
\end{aligned}
$$

Функција $\mu^{-1}:[\mu(1),\infty)\to R^{+}$ је строго растућа и непрекидна, одакле је

$$\big(\mu^{-1}(h(\Delta))\big)^{-(p-\bar{q})}\le\big(\mu^{-1}(h(\Delta))\big)^{-\frac{2p-(2+\rho)\bar{q}}{2}}. \tag{2.2.91}$$

Према томе, израз (2.2.90) се може оценити као

$$\begin{aligned}J_1\le{}&2H_1(\bar{q}-2)E\int_0^{t\wedge\theta_n}|\bar{e}_\Delta(s)|^{\bar{q}}ds+2^{\bar{q}}\left(1+\frac{1}{1-\bar{\delta}}\right)H_1E\int_0^{t\wedge\theta_n}|e_\Delta(s)|^{\bar{q}}ds\\&+2^{2\bar{q}-1}H_1T\left(\check{s}\Delta^{\frac{\bar{q}}{2}}+\check{s}\big(\mu^{-1}(h(\Delta))\big)^{-\frac{2p-(2+\rho)\bar{q}}{2}}+\check{s}_l\Delta^{\frac{\bar{q}l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\bar{q}}\right).\end{aligned} \tag{2.2.92}$$

Са друге стране, оцена интеграла J_2 из (2.2.87), дата је са

$$J_2\le J_{21}+J_{22}, \tag{2.2.93}$$

где је

$$\begin{aligned}J_{21}={}&E\int_0^{t\wedge\theta_n}\bar{q}\,|\bar{e}_\Delta(s)|^{\bar{q}-2}\Bigg((\bar{e}_\Delta(s))^T\Big(f(x_\Delta(s),\pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(s)))-f_\Delta(x_\Delta(s),\bar{z}_\Delta(s))\Big)\\&+\frac{(\bar{q}-1)(q-1)}{q-\bar{q}}\big|g(x_\Delta(s),\pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(s)))-g_\Delta(x_\Delta(s),\bar{z}_\Delta(s))\big|^2\Bigg)ds,\\J_{22}={}&E\int_0^{t\wedge\theta_n}\bar{q}\,|\bar{e}_\Delta(s)|^{\bar{q}-2}\Bigg((\bar{e}_\Delta(s))^T\Big(f_\Delta(x_\Delta(s),\bar{z}_\Delta(s))-f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))\Big)\\&+\frac{(\bar{q}-1)(q-1)}{q-\bar{q}}\big|g_\Delta(x_\Delta(s),\bar{z}_\Delta(s))-g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s),\bar{y}_\Delta(s))\big|^2\Bigg)ds.\end{aligned}$$

За оцену интеграла J_{21} примењују се (2.2.88) и релације $0\le t\wedge\theta_n\le t\le T$, тако да је

$$\begin{aligned}J_{21}\le{}&E\int_0^{t\wedge\theta_n}\bar{q}\,|\bar{e}_\Delta(s)|^{\bar{q}-2}\Bigg(\frac{1}{2}|\bar{e}_\Delta(s)|^2+\frac{1}{2}\big|f(x_\Delta(s),\pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(s)))-f_\Delta(x_\Delta(s),\bar{z}_\Delta(s))\big|^2\\&+\frac{(\bar{q}-1)(q-1)}{q-\bar{q}}\big|g(x_\Delta(s),\pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(s)))-g_\Delta(x_\Delta(s),\bar{z}_\Delta(s))\big|^2\Bigg)ds\\={}&\frac{\bar{q}}{2}E\int_0^{t\wedge\theta_n}|\bar{e}_\Delta(s)|^{\bar{q}}ds\\&+\frac{\bar{q}}{2}E\int_0^{t\wedge\theta_n}|\bar{e}_\Delta(s)|^{\bar{q}-2}\big|f(x_\Delta(s),\pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(s)))-f_\Delta(x_\Delta(s),\bar{z}_\Delta(s))\big|^2ds\\&+\frac{\bar{q}(\bar{q}-1)(q-1)}{q-\bar{q}}E\int_0^{t\wedge\theta_n}|\bar{e}_\Delta(s)|^{\bar{q}-2}\big|g(x_\Delta(s),\pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(s)))-g_\Delta(x_\Delta(s),\bar{z}_\Delta(s))\big|^2ds,\end{aligned}$$

односно,

$$
\begin{aligned}
J_{21} \leq{}& \frac{\bar{q}}{2} E \int_0^{t\wedge\theta_n} |\bar{e}_\Delta(s)|^{\bar{q}} ds \\
&+ \frac{\bar{q}}{2} E \int_0^{t\wedge\theta_n} \left(\frac{\bar{q}-2}{\bar{q}} |\bar{e}_\Delta(s)|^{\bar{q}} + \frac{2}{\bar{q}} \big| f(x_\Delta(s), \pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))) - f_\Delta(x_\Delta(s), \bar{z}_\Delta(s)) \big|^{\bar{q}} \right) ds \\
&+ \frac{\bar{q}(\bar{q}-1)(q-1)}{q-\bar{q}} E \int_0^{t\wedge\theta_n} \Bigg(\frac{\bar{q}-2}{\bar{q}} |\bar{e}_\Delta(s)|^{\bar{q}} \\
&\qquad + \frac{2}{\bar{q}} \big| g(x_\Delta(s), \pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))) - g_\Delta(x_\Delta(s), \bar{z}_\Delta(s)) \big|^{\bar{q}} \Bigg) ds \\
\leq{}& \left(\bar{q} - 1 + \frac{(\bar{q}-1)(q-1)(\bar{q}-2)}{q-\bar{q}} \right) E \int_0^{t\wedge\theta_n} |\bar{e}_\Delta(s)|^{\bar{q}} ds \\
&+ E \int_0^{t\wedge\theta_n} \big| f(x_\Delta(s), \pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))) - f_\Delta(x_\Delta(s), \bar{z}_\Delta(s)) \big|^{\bar{q}} ds \\
&+ \frac{2(\bar{q}-1)(q-1)}{q-\bar{q}} E \int_0^{t\wedge\theta_n} \big| g(x_\Delta(s), \pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))) - g_\Delta(x_\Delta(s), \bar{z}_\Delta(s)) \big|^{\bar{q}} ds \\
\leq{}& C_1 E \int_0^{t\wedge\theta_n} |\bar{e}_\Delta(s)|^{\bar{q}} ds + J_{23},
\end{aligned}
\tag{2.2.94}
$$

где је

$$
\begin{aligned}
J_{23} &= C_1 E \int_0^{t\wedge\theta_n} \Big(\big| f(x_\Delta(s), \pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))) - f_\Delta(x_\Delta(s), \bar{z}_\Delta(s)) \big|^{\bar{q}} \\
&\qquad + \big| g(x_\Delta(s), \pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))) - g_\Delta(x_\Delta(s), \bar{z}_\Delta(s)) \big|^{\bar{q}} \Big) ds, \\
C_1 &= \max \left\{ \bar{q} - 1 + \frac{(\bar{q}-1)(q-1)(\bar{q}-2)}{q-\bar{q}}, 1, \frac{2(\bar{q}-1)(q-1)}{q-\bar{q}} \right\}.
\end{aligned}
$$

На основу Претпоставке $\mathcal{H}_8$ и релације (2.2.65), добија се да је

$$
\begin{aligned}
J_{23} \leq{}& C_1 E \int_0^T \Bigg(\big| f(x_\Delta(s), \pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))) - f(\pi_\Delta(x_\Delta(s)), \pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))) \big|^{\bar{q}} \\
&\qquad + \big| g(x_\Delta(s), \pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))) - g(\pi_\Delta(x_\Delta(s)), \pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))) \big|^{\bar{q}} \Bigg) ds \\
\leq{}& 2C_1 E \int_0^T \Bigg(H_2 \Big(1 + |x_\Delta(s)|^\rho + |\pi_\Delta(x_\Delta(s))|^\rho + 2|\pi_\Delta(\bar{z}_\Delta(s))|^\rho \Big) \\
&\qquad \times |x_\Delta(s) - \pi_\Delta(x_\Delta(s))|^2 \Bigg)^{\frac{\bar{q}}{2}} ds \\
\leq{}& 2C_1 H_2^{\frac{\bar{q}}{2}} E \int_0^T \Big(1 + 2|x_\Delta(s)|^\rho + 2|\bar{z}_\Delta(s)|^\rho \Big)^{\frac{\bar{q}}{2}} \Big(|x_\Delta(s) - \pi_\Delta(x_\Delta(s))|^2 \Big)^{\frac{\bar{q}}{2}} ds \\
\leq{}& 2^{\frac{\bar{q}}{2}+1} C_1 H_2^{\frac{\bar{q}}{2}} E \int_0^T 3^{\frac{\bar{q}}{2}-1} \Big(1 + |x_\Delta(s)|^{\frac{\bar{q}\rho}{2}} + |\bar{z}_\Delta(s)|^{\frac{\bar{q}\rho}{2}} \Big) \big| x_\Delta(s) - \pi_\Delta(x_\Delta(s)) \big|^{\bar{q}} ds.
\end{aligned}
$$

Дакле, следи да је

$$J_{23} \leq 2^{\frac{\bar{q}}{2}+1} 3^{\frac{\bar{q}}{2}-1} C_1 H_2^{\frac{\bar{q}}{2}} \int_0^T E\left[\left(1 + |x_\Delta(s)|^{\frac{\bar{q}\rho}{2}} + |\bar{z}_\Delta(s)|^{\frac{\bar{q}\rho}{2}}\right)\left|x_\Delta(s) - \pi_\Delta(x_\Delta(s))\right|^{\bar{q}}\right] ds.$$

Хелдерова неједнакост и релација (2.2.15) имплицирају

$$\begin{aligned}
J_{23} &\leq 2^{\frac{\bar{q}}{2}+1} 3^{\frac{\bar{q}}{2}-1} C_1 H_2^{\frac{\bar{q}}{2}} \int_0^T \left[E\left(1 + |x_\Delta(s)|^{\frac{\bar{q}\rho}{2}} + |\bar{z}_\Delta(s)|^{\frac{\bar{q}\rho}{2}}\right)^{\frac{2p}{\bar{q}\rho}}\right]^{\frac{\bar{q}\rho}{2p}} \\
&\qquad \times \left[E\left(|x_\Delta(s) - \pi_\Delta(x_\Delta(s))|^{\bar{q}}\right)^{\frac{2p}{2p-\bar{q}\rho}}\right]^{\frac{2p-\bar{q}\rho}{2p}} ds \\
&\leq 2^{\frac{\bar{q}}{2}+1} 3^{\frac{\bar{q}}{2}-1} C_1 H_2^{\frac{\bar{q}}{2}} \int_0^T \left[3^{\frac{2p}{\bar{q}\rho}-1}\left(1 + E|x_\Delta(s)|^p + E|\bar{z}_\Delta(s)|^p\right)\right]^{\frac{\bar{q}\rho}{2p}} \\
&\qquad \times \left[E\left|x_\Delta(s) - \pi_\Delta(x_\Delta(s))\right|^{\frac{2p\bar{q}}{2p-\bar{q}\rho}}\right]^{\frac{2p-\bar{q}\rho}{2p}} ds \\
&\leq 2^{\frac{\bar{q}}{2}+1} 3^{\frac{\bar{q}(p-\rho)}{2p}} C_1 H_2^{\frac{\bar{q}}{2}} \int_0^T \left[1 + (1+2^p) \sup_{-\tau\leq r\leq s} E|x_\Delta(r)|^p\right]^{\frac{\bar{q}\rho}{2p}} \\
&\qquad \times \left[E\left|x_\Delta(s) - \pi_\Delta(x_\Delta(s))\right|^{\frac{2p\bar{q}}{2p-\bar{q}\rho}}\right]^{\frac{2p-\bar{q}\rho}{2p}} ds. \qquad (2.2.95)
\end{aligned}$$

Применом сличног поступка као у (2.2.79), може се закључити да је

$$\begin{aligned}
\left[E|x_\Delta(s) - \pi_\Delta(x_\Delta(s))|^{\frac{2p\bar{q}}{2p-\bar{q}\rho}}\right]^{\frac{2p-\bar{q}\rho}{2p}} &= \left[E\left(I_{\{|x_\Delta(s)|>\mu^{-1}(h(\Delta))\}}|x_\Delta(s)|^{\frac{2p\bar{q}}{2p-\bar{q}\rho}}\right)\right]^{\frac{2p-\bar{q}\rho}{2p}}. \\
&\leq \left[P\{|x_\Delta(s)|>\mu^{-1}(h(\Delta))\}\right]^{\frac{2p-(2+\rho)\bar{q}}{2p}}\left[E|x_\Delta(s)|^p\right]^{\frac{\bar{q}}{p}} \\
&\leq (\mu^{-1}(h(\Delta)))^{-\frac{2p-(2+\rho)\bar{q}}{2}}\left[E|x_\Delta(s)|^p\right]^{\frac{2p-\rho\bar{q}}{2p}}.
\end{aligned}$$

Стога, на основу Леме 2.2.5, добија се оцена израза (2.2.95), тј. следи да је

$$\begin{aligned}
J_{23} &\leq 2^{\frac{\bar{q}}{2}+1} 3^{\frac{\bar{q}(p-\rho)}{2p}} C_1 \left(1 + (1+2^{p-1})\left(\sup_{-\tau\leq s\leq 0} E|\xi(s)|^p + C\right)\right)^{\frac{\bar{q}\rho}{2p}} H_2^{\frac{\bar{q}}{2}} \\
&\quad \times \int_0^T (\mu^{-1}(h(\Delta)))^{-\frac{2p-(2+\rho)\bar{q}}{2}}\left[E|x_\Delta(s)|^p\right]^{\frac{2p-\rho\bar{q}}{2p}} ds \\
&\leq \tilde{C}_1 (\mu^{-1}(h(\Delta)))^{-\frac{2p-(2+\rho)\bar{q}}{2}}, \qquad (2.2.96)
\end{aligned}$$

где је

$$\tilde{C}_1 = 2^{\frac{\bar{q}}{2}+1} 3^{\frac{\bar{q}(p-\rho)}{2p}} C_1 \left(1 + \left(1+2^{p-1}\right)\left(\sup_{-\tau\leq s\leq 0} E|\xi(s)|^p + C\right)\right)^{\frac{\bar{q}\rho}{2p}} H_2^{\frac{\bar{q}}{2}} T C^{\frac{2p-\rho\bar{q}}{2p}}.$$

Заменом израза (2.2.96) у (2.2.94), добија се да је

$$J_{21} \leq C_1 E \int_0^{t\wedge\theta_n} |\bar{e}_\Delta(s)|^{\bar{q}} ds + \tilde{C}_1(\mu^{-1}(h(\Delta)))^{-\frac{2p-(2+\rho)\bar{q}}{2}}. \tag{2.2.97}$$

Аналогно као у (2.2.94), важи да је

$$J_{22} \leq C_1 E \int_0^{t\wedge\theta_n} |\bar{e}_\Delta(s)|^{\bar{q}} ds + J_{24}, \tag{2.2.98}$$

где је

$$\begin{aligned} J_{24} = C_1 E \int_0^{t\wedge\theta_n} \Big(& \big| f_\Delta(x_\Delta(s), \bar{z}_\Delta(s)) - f_\Delta(\bar{x}_\Delta(s), \bar{y}_\Delta(s)) \big|^{\bar{q}} \\ & + \big| g_\Delta(x_\Delta(s), \bar{z}_\Delta(s)) - g_\Delta(\bar{x}_\Delta(s), \bar{y}_\Delta(s)) \big|^{\bar{q}} \Big) ds. \end{aligned}$$

На основу Претпоставке $\mathcal{H}_8$, Хелдерове неједнакости и (2.2.66), следи да је

$$\begin{aligned} J_{24} \leq{} & 2C_1 E \int_0^T \Bigg(H_2 \Big(1 + |x_\Delta(s)|^\rho + |\bar{x}_\Delta(s)|^\rho + |\bar{z}_\Delta(s)|^\rho + |\bar{y}_\Delta(s)|^\rho \Big) \\ & \times \Big(|x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s)|^2 + |\bar{z}_\Delta(s) - \bar{y}_\Delta(s)|^2 \Big) \Bigg)^{\frac{\bar{q}}{2}} ds \\ \leq{} & 2C_1 H_2^{\frac{\bar{q}}{2}} \int_0^T E \Bigg(5^{\frac{\bar{q}}{2}-1} \Big(1 + |x_\Delta(s)|^{\frac{\bar{q}\rho}{2}} + |\bar{x}_\Delta(s)|^{\frac{\bar{q}\rho}{2}} + |\bar{z}_\Delta(s)|^{\frac{\bar{q}\rho}{2}} + |\bar{y}_\Delta(s)|^{\frac{\bar{q}\rho}{2}} \Big) \\ & \times 2^{\frac{\bar{q}}{2}-1} \Big(|x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s)|^{\bar{q}} + |\bar{z}_\Delta(s)) - \bar{y}_\Delta(s)|^{\bar{q}} \Big) \Bigg) ds \\ \leq{} & 2^{\frac{\bar{q}}{2}} 5^{\frac{\bar{q}}{2}-1} C_1 H_2^{\frac{\bar{q}}{2}} \int_0^T \left[E \Big(1 + |x_\Delta(s)|^{\frac{\bar{q}\rho}{2}} + |\bar{x}_\Delta(s)|^{\frac{\bar{q}\rho}{2}} + |\bar{z}_\Delta(s)|^{\frac{\bar{q}\rho}{2}} + |\bar{y}_\Delta(s)|^{\frac{\bar{q}\rho}{2}} \Big)^{\frac{2p}{\bar{q}\rho}} \right]^{\frac{\bar{q}\rho}{2p}} \\ & \times \left[E \Big(|x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s)|^{\bar{q}} + |\bar{z}_\Delta(s) - \bar{y}_\Delta(s)|^{\bar{q}} \Big)^{\frac{2p}{2p-\bar{q}\rho}} \right]^{\frac{2p-\bar{q}\rho}{2p}} ds \\ \leq{} & 2^{\frac{\bar{q}}{2}} 5^{\frac{\bar{q}}{2}-1} C_1 H_2^{\frac{\bar{q}}{2}} \int_0^T \left[5^{\frac{2p}{\bar{q}\rho}-1} \Big(1 + E|x_\Delta(s)|^p + E|\bar{x}_\Delta(s)|^p + E|\bar{z}_\Delta(s)|^p + E|\bar{y}_\Delta(s)|^p \Big) \right]^{\frac{\bar{q}\rho}{2p}} \\ & \times \left[2^{\frac{2p}{2p-\bar{q}\rho}-1} \Big(E|x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s)|^{\frac{2p\bar{q}}{2p-\bar{q}\rho}} + E|\bar{z}_\Delta(s) - \bar{y}_\Delta(s)|^{\frac{2p\bar{q}}{2p-\bar{q}\rho}} \Big) \right]^{\frac{2p-\bar{q}\rho}{2p}} ds, \\ \leq{} & 2^{\frac{\bar{q}}{2}+1-\frac{2p-\bar{q}\rho}{2p}} 5^{\frac{\bar{q}(p-\rho)}{2p}} C_1 H_2^{\frac{\bar{q}}{2}} \int_0^T \Big[1 + E|x_\Delta(s)|^p + E|\bar{x}_\Delta(s)|^p + E|\bar{z}_\Delta(s)|^p + E|\bar{y}_\Delta(s)|^p \Big]^{\frac{\bar{q}\rho}{2p}} \\ & \times \left[E|x_\Delta(s) - \bar{x}_\Delta(s)|^{\frac{2p\bar{q}}{2p-\bar{q}\rho}} + E|\bar{z}_\Delta(s) - \bar{y}_\Delta(s)|^{\frac{2p\bar{q}}{2p-\bar{q}\rho}} \right]^{\frac{2p-\bar{q}\rho}{2p}} ds. \end{aligned}$$

Изрази (2.2.15), (2.2.17) и (2.1.19), заједно са Лемом 2.2.5, дају

$$
\begin{aligned}
J_{24} \le & \, 2^{\frac{\bar q}{2}+1-\frac{2p-\bar q\rho}{2p}} 5^{\frac{\bar q(p-\rho)}{2p}} C_1 H_2^{\frac{\bar q}{2}} \int_0^T \Big[1+(3+2^{p-1}) \sup_{-\tau\le r\le s} E|x_\Delta(r)|^p\Big]^{\frac{\bar q\rho}{2p}} \\
& \times \Big[E|x_\Delta(s)-\bar x_\Delta(s)|^{\frac{2p\bar q}{2p-\bar q\rho}} + E|\bar z_\Delta(s)-\bar y_\Delta(s)|^{\frac{2p\bar q}{2p-\bar q\rho}}\Big]^{\frac{2p-\bar q\rho}{2p}} ds \\
\le & \, C_{24} \int_0^T \Big[\Big(E|x_\Delta(s)-\bar x_\Delta(s)|^{\frac{2p\bar q}{2p-\bar q\rho}}\Big)^{\frac{2p-\bar q\rho}{2p}} + \Big(E|\bar z_\Delta(s)-\bar y_\Delta(s)|^{\frac{2p\bar q}{2p-\bar q\rho}}\Big)^{\frac{2p-\bar q\rho}{2p}} \Big] ds,
\end{aligned}
$$

где је

$$
C_{24} = 2^{\frac{\bar q}{2}} 5^{\frac{\bar q(p-\rho)}{2p}} C_1 H_2^{\frac{\bar q}{2}} \Big[1+(3+2^{p-1})\Big(\sup_{-\tau\le s\le 0} E|\xi(s)|^p + C\Big)\Big].
$$

Сада, на основу Последице 2.2.1, следи да је, за $l>1$,

$$
\begin{aligned}
J_{24} \le & \, C_{24}T \Bigg[\bigg(c'\Delta^{\frac{p\bar q}{2p-\bar q\rho}} + c_l'\Delta^{\frac{\frac{2p\bar q}{2p-\bar q\rho}l-1}{2l}} (h(\Delta))^{\frac{2p\bar q}{2p-\bar q\rho}}\bigg)^{\frac{2p-\bar q\rho}{2p}} \\
& + \bigg(\bar c\Delta^{\frac{p\bar q}{2p-\bar q\rho}} + \bar c_l\Delta^{\frac{\frac{2p\bar q}{2p-\bar q\rho}l-1}{2l}} (h(\Delta))^{\frac{2p\bar q}{2p-\bar q\rho}}\bigg)^{\frac{2p-\bar q\rho}{2p}} \Bigg] \\
\le & \, \bar m\Delta^{\frac{\bar q}{2}} + \bar m_l \Delta^{\frac{\bar q}{2}-\frac{2p-\bar q l}{4pl}} (h(\Delta))^{\bar q},
\end{aligned}
\tag{2.2.99}
$$

где је

$$
\bar m = 2^{\frac{2p-\bar q\rho}{2p}} C_{24}T\,(c'\vee\bar c)^{\frac{2p-\bar q\rho}{2p}}, \quad \bar m_l = 2^{\frac{2p-\bar q\rho}{2p}} C_{24}T\,(c_l'\vee\bar c_l)^{\frac{2p-\bar q\rho}{2p}}.
$$

Заменом израза (2.2.99) у (2.2.98), добија се да је

$$
J_{22} \le C_1 E\int_0^{t\wedge\theta_n} |\bar e_\Delta(s)|^{\bar q} ds + \bar m\Delta^{\frac{\bar q}{2}} + \bar m_l\Delta^{\frac{\bar q}{2}-\frac{2p-\bar q l}{4pl}} (h(\Delta))^{\bar q}. \tag{2.2.100}
$$

Са друге стране, замена израза (2.2.97) и (2.2.100) у (2.2.93), даје

$$
\begin{aligned}
J_2 \le & \, 2C_1 E\int_0^{t\wedge\theta_n} |\bar e_\Delta(s)|^{\bar q} ds + \tilde C_1(\mu^{-1}(h(\Delta))^{-\frac{2p-(2+\rho)\bar q}{2}} \\
& + \bar m\Delta^{\frac{\bar q}{2}} + \bar m_l\Delta^{\frac{\bar q}{2}-\frac{2p-\bar q l}{4pl}} (h(\Delta))^{\bar q}.
\end{aligned}
\tag{2.2.101}
$$

Применом (2.2.92) и (2.2.101), заједно са (2.2.86), добија се да је

$$
\begin{aligned}
& E|\bar e_\Delta(t\wedge\theta_n)|^{\bar q} \\
& \le 2H_1(\bar q-2)E\int_0^{t\wedge\theta_n} |\bar e_\Delta(s)|^{\bar q} ds + 2^{\bar q}\left(1+\frac{1}{1-\bar\delta}\right) H_1 E\int_0^{t\wedge\theta_n} |e_\Delta(s)|^{\bar q} ds \\
& \quad + 2^{2\bar q-1}H_1T\bigg(\check s\Delta^{\frac{\bar q}{2}} + \check s\big(\mu^{-1}(h(\Delta))\big)^{-\frac{2p-(2+\rho)\bar q}{2}} + \check s_l\Delta^{\frac{\bar q l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\bar q}\bigg) \\
& \quad + 2C_1E\int_0^{t\wedge\theta_n} |\bar e_\Delta(s)|^{\bar q} ds + \tilde C_1(\mu^{-1}(h(\Delta)))^{-\frac{2p-(2+\rho)\bar q}{2}} + \bar m\Delta^{\frac{\bar q}{2}} + \bar m_l\Delta^{\frac{\bar q}{2}-\frac{2p-\bar q l}{4pl}}(h(\Delta))^{\bar q},
\end{aligned}
$$

односно

$$
\begin{aligned}
&E|\bar{e}_\Delta(t\wedge\theta_n)|^{\bar{q}}\\
&\quad\leq 2\left(H_1(\bar{q}-2)+C_1\right)E\int_0^{t\wedge\theta_n}|\bar{e}_\Delta(s)|^{\bar{q}}ds+2^{\bar{q}}\left(1+\frac{1}{1-\bar{\delta}}\right)H_1E\int_0^{t\wedge\theta_n}|e_\Delta(s)|^{\bar{q}}ds\\
&\qquad+(2^{2\bar{q}-1}\check{s}H_1T+\tilde{C}_1)(\mu^{-1}(h(\Delta)))^{-\frac{2p-(2+\rho)\bar{q}}{2}}\\
&\qquad+\left(2^{2\bar{q}-1}\check{s}H_1T+\bar{m}\right)\Delta^{\frac{\bar{q}}{2}}+\left(2^{2\bar{q}-1}\check{s}_lH_1T+\bar{m}_l\right)\Delta^{\frac{\bar{q}l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\bar{q}}.
\end{aligned}
\tag{2.2.102}
$$

На основу Претпоставке $\mathcal{H}_2$, Последице 2.2.2 и релације (2.2.91), оцена израза (2.2.102) је дата са

$$
\begin{aligned}
E|\bar{e}_\Delta(t\wedge\theta_n)|^{\bar{q}}&\leq 2^{\bar{q}}\left(H_1(\bar{q}-2)+C_1+\left(1+\frac{1}{1-\bar{\delta}}\right)H_1\right)E\int_0^{t\wedge\theta_n}|e_\Delta(s)|^{\bar{q}}ds\\
&\quad+2^{\bar{q}}\left(H_1(\bar{q}-2)+C_1\right)E\int_0^{t\wedge\theta_n}|u(x(s-\delta(s)))-u_\Delta(\bar{z}(s))|^{\bar{q}}ds\\
&\quad+\left(2^{2\bar{q}-1}\check{s}H_1T+\tilde{C}_1\right)\left(\mu^{-1}(h(\Delta)\right)^{-\frac{2p-(2+\rho)\bar{q}}{2}}\\
&\quad+\left(2^{2\bar{q}-1}\check{s}H_1T+\bar{m}\right)\Delta^{\frac{\bar{q}}{2}}+\left(2^{2\bar{q}-1}\check{s}_lH_1T+\bar{m}_l\right)\Delta^{\frac{\bar{q}l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\bar{q}}\\
&\leq 2^{\bar{q}}\left(H_1(\bar{q}-2)+C_1+\left(1+\frac{1}{1-\bar{\delta}}\right)H_1\right)E\int_0^{t\wedge\theta_n}|e_\Delta(s)|^{\bar{q}}ds\\
&\quad+2^{\bar{q}}\left(H_1(\bar{q}-2)+C_1\right)k^{\bar{q}}\int_0^{T}E|x(s-\delta(s))-\pi_\Delta(\bar{z}(s))|^{\bar{q}}ds\\
&\quad+\left(2^{2\bar{q}-1}\check{s}H_1T+\tilde{C}_1\right)\left(\mu^{-1}(h(\Delta)\right)^{-\frac{2p-(2+\rho)\bar{q}}{2}}\\
&\quad+\left(2^{2\bar{q}-1}\check{s}H_1T+\bar{m}\right)\Delta^{\frac{\bar{q}}{2}}+\left(2^{2\bar{q}-1}\check{s}_lH_1T+\bar{m}_l\right)\Delta^{\frac{\bar{q}l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\bar{q}}\\
&\leq 2^{\bar{q}}\left(H_1(\bar{q}-2)+C_1+\left(1+\frac{1}{1-\bar{\delta}}\right)H_1\right)E\int_0^{t\wedge\theta_n}|e_\Delta(s)|^{\bar{q}}ds\\
&\quad+\left(2^{2\bar{q}-1}\check{s}H_1T+\tilde{C}_1+2^{\bar{q}}(H_1(\bar{q}-2)+C_1)k^{\bar{q}}\check{s}T\right)\left(\mu^{-1}(h(\Delta))\right)^{-\frac{2p-(2+\rho)\bar{q}}{2}}\\
&\quad+\left(2^{2\bar{q}-1}\check{s}H_1T+\bar{m}+2^{\bar{q}}\left(H_1(\bar{q}-2)+C_1\right)k^{\bar{q}}\check{s}T\right)\Delta^{\frac{\bar{q}}{2}}\\
&\quad+\left(2^{2\bar{q}-1}\check{s}_lH_1T+\bar{m}_l+2^{\bar{q}}\left(H_1(\bar{q}-2)+C_1\right)k^{\bar{q}}\check{s}_lT\right)\Delta^{\frac{\bar{q}l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\bar{q}}.
\end{aligned}
$$

Дакле, добија се да је, за $l>1$,

$$
\begin{aligned}
E|\bar{e}_\Delta(t\wedge\theta_n)|^{\bar{q}}\leq G\int_0^t E|e_\Delta(u\wedge\theta_n)|^{\bar{q}}ds+G(\mu^{-1}(h(\Delta)))^{-\frac{2p-(2+\rho)\bar{q}}{2}}&\\
+G\Delta^{\frac{\bar{q}}{2}}+G_l\Delta^{\frac{\bar{q}l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\bar{q}},&
\end{aligned}
\tag{2.2.103}
$$

где је

$$G_l=2^{2\bar{q}-1}\check{s}_lH_1T+\bar{m}_l+2^{\bar{q}}\left(H_1(\bar{q}-2)+C_1\right)k^{\bar{q}}\check{s}_lT,$$

и

$$G = \max\left\{2^{\bar q}\left(H_1(\bar q-2)+C_1+\left(1+\frac{1}{1-\bar\delta}\right)H_1\right),\right.$$
$$2^{2\bar q-1}\check{s}H_1T+\tilde C_1+2^{\bar q}\left(H_1(\bar q-2)+C_1\right)k^{\bar q}\check{s}T,$$
$$\left.2^{2\bar q-1}\check{s}H_1T+\bar m+2^{\bar q}\left(H_1(\bar q-2)+C_1\right)k^{\bar q}\check{s}T\right\}.$$

Како решења x и x_Δ задовољавају исти почетни услов, на основу елементарне неједнакости (1.4.1) и Претпоставке $\mathcal{H}_2$ следи да је, за свако $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$,

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\le s\le t} E|e_\Delta(s\wedge\theta_n)|^{\bar q}\\
&\le (1+\epsilon_1)^{\bar q-1}\sup_{0\le s\le t} E|\bar e_\Delta(s\wedge\theta_n)|^{\bar q}\\
&\quad+\left(\frac{1+\epsilon_1}{\epsilon_1}\right)^{\bar q-1}k^{\bar q}\sup_{0\le s\le t} E|x(s\wedge\theta_n-\delta(s\wedge\theta_n))-\pi_\Delta(\bar z_\Delta(s\wedge\theta_n))|^{\bar q}\\
&\le (1+\epsilon_1)^{\bar q-1}\sup_{0\le s\le t} E|\bar e_\Delta(s\wedge\theta_n)|^{\bar q}\\
&\quad+\left(\frac{1+\epsilon_1}{\epsilon_1}\right)^{\bar q-1}k^{\bar q}\Bigg((1+\epsilon_2)^{\bar q-1}\sup_{0\le s\le t} E|x(s\wedge\theta_n-\delta(s\wedge\theta_n))-x_\Delta(s\wedge\theta_n-\delta(s\wedge\theta_n))|^{\bar q}\\
&\qquad+\left(\frac{1+\epsilon_2}{\epsilon_2}\right)^{\bar q-1}\sup_{0\le s\le t} E|x_\Delta(s\wedge\theta_n-\delta(s\wedge\theta_n))-\pi_\Delta(\bar z_\Delta(s\wedge\theta_n))|^{\bar q}\Bigg)\\
&\le (1+\epsilon_1)^{\bar q-1}\sup_{0\le s\le t} E|\bar e_\Delta(s\wedge\theta_n)|^{\bar q}\\
&\quad+\left(\frac{1+\epsilon_1}{\epsilon_1}\right)^{\bar q-1}k^{\bar q}\Bigg((1+\epsilon_2)^{\bar q-1}\sup_{0\le s\le t} E|e_\Delta(s\wedge\theta_n)|^{\bar q}\\
&\qquad+\left(\frac{1+\epsilon_2}{\epsilon_2}\right)^{\bar q-1}\sup_{0\le s\le t} E|x_\Delta(s-\delta(s))-\pi_\Delta(\bar z_\Delta(s))|^{\bar q}\Bigg).
\end{aligned}$$

Дакле, одабиром $\epsilon_1=\frac{1}{1-k}>\frac{k}{1-k}$, $\epsilon_2=\frac{\epsilon_1}{k(1+\epsilon_1)}-1=\frac{1}{k(2-k)}-1$, на основу Претпоставке 2.2.2 и израза (2.2.91), следи да је, за $l>1$,

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\le s\le t} E|e_\Delta(s\wedge\theta_n)|^{\bar q}\\
&\quad\le\frac{(2-k)^{\bar q-1}}{(1-k)^{\bar q}}\sup_{0\le s\le t} E|\bar e_\Delta(s\wedge\theta_n)|^{\bar q}\\
&\qquad+\frac{k^{\bar q}(2-k)^{\bar q-1}}{(1-k)^{2\bar q-1}}\Big(\check{s}\Delta^{\frac{\bar q}{2}}+\check{s}\big(\mu^{-1}(h(\Delta))\big)^{-\frac{2p-(2+\rho)\bar q}{2}}+\check{s}_l\Delta^{\frac{\bar q l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\bar q}\Big).
\end{aligned}$$

Заменом претходне оцене у (2.2.103), добија се да је

$$
\begin{aligned}
E|\bar{e}_\Delta(t\wedge\theta_n)|^{\bar{q}} \le{}& G\frac{(2-k)^{\bar{q}-1}}{(1-k)^{\bar{q}}}\int_0^t \sup_{0\le s\le t} E|\bar{e}_\Delta(s\wedge\theta_n)|^{\bar{q}}ds\\
&+G\left(\check{s}T\frac{k^{\bar{q}}(2-k)^{\bar{q}-1}}{(1-k)^{2\bar{q}-1}}+1\right)\Delta^{\frac{\bar{q}}{2}}\\
&+G\left(\check{s}T\frac{k^{\bar{q}}(2-k)^{\bar{q}-1}}{(1-k)^{2\bar{q}-1}}+1\right)\left(\mu^{-1}(h(\Delta))\right)^{-\frac{2p-(2+\rho)\bar{q}}{2}}\\
&+\left(\check{s}_lGT\frac{k^{\bar{q}}(2-k)^{\bar{q}-1}}{(1-k)^{2\bar{q}-1}}+G_l\right)\Delta^{\frac{\bar{q}l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\bar{q}}.
\end{aligned}
\tag{2.2.104}
$$

Сада, применом Грунвал–Белманове леме, израз (2.2.104) постаје

$$
\sup_{0\le t\le T} E|e_\Delta(t\wedge\theta_n)|^{\bar{q}} \le D(\mu^{-1}(h(\Delta)))^{-\frac{2p-(2+\rho)\bar{q}}{2}}+D\Delta^{\frac{\bar{q}}{2}}+D_l\Delta^{\frac{\bar{q}l-1}{2l}}(h(\Delta))^{\bar{q}}, \tag{2.2.105}
$$

где је

$$
\begin{aligned}
D&=G\left(\check{s}T\frac{k^{\bar{q}}(2-k)^{\bar{q}-1}}{(1-k)^{2\bar{q}-1}}+1\right)e^{\frac{(2-k)^{\bar{q}-1}}{(1-k)^{\bar{q}}}GT},\\
D_l&=\left(\check{s}_lGT\frac{k^{\bar{q}}(2-k)^{\bar{q}-1}}{(1-k)^{2\bar{q}-1}}+G_l\right)e^{\frac{(2-k)^{\bar{q}-1}}{(1-k)^{\bar{q}}}GT}.
\end{aligned}
\tag{2.2.106}
$$

На основу Фатуове леме, када $n\to\infty$, добија се неједнакост (2.2.80). Релација (2.2.81) следи из (2.2.80) и Последице 2.2.2, за константе

$$
D^{'}=2^{\bar{q}-1}D\vee(D+2^{\bar{q}-1}c^{'}),\quad D_l^{'}=D_l+2^{\bar{q}-1}c_l^{'}. \tag{2.2.107}
$$

Коначно, када је функција μ облика (2.2.82), тада је $\mu^{-1}(u)=(u/H_3)^{\frac{2}{\rho+2}}$. Дакле, на основу дефиниције функције $h(\Delta)=\hat{h}\Delta^{-\epsilon}$ и (2.2.80), добија се да је, за $l>1$,

$$
\sup_{0\le t\le T} E|e_\Delta(t)|^{\bar{q}} \le \tilde{D}\left(\Delta^{\epsilon\left(\frac{2p}{\rho+2}-\bar{q}\right)}+\Delta^{\frac{\bar{q}}{2}}+\Delta^{\frac{\bar{q}}{2}-\frac{1}{2l}-\epsilon\bar{q}}\right), \tag{2.2.108}
$$

где је

$$
\tilde{D}=D\left(\frac{H_3}{\hat{h}}\right)^{\frac{2p}{2+\rho}-\bar{q}}\vee D\vee D_l\hat{h}^{\bar{q}}. \tag{2.2.109}
$$

Релација (2.2.83) је доказана. Аналогно се може доказати релација (2.2.84). Тиме је доказ завршен. □

Наредном теоремом се доказује да је ред $L^{\bar{q}}$-конвергенције низа сечених решења Ојлер–Марујаме ка тачном решењу једначине (2.0.1) произвољно близак вредности $\bar{q}/2$.

Теорема 2.2.4 *Нека важе услови Теореме 2.2.3. Тада, за свако* $\bar{q} \in [2, q)$ *и свако* $\epsilon \in \left(0, \frac{1-\epsilon_0}{4}\right)$, *важи да је*

$$\sup_{0 \le t \le T} E|x(t) - x_\Delta(t)|^{\bar{q}} \le O\left(\Delta^{\frac{\bar{q}(1-4\epsilon)}{2}}\right), \tag{2.2.110}$$

$$\sup_{0 \le t \le T} E|x(t) - \bar{x}_\Delta(t)|^{\bar{q}} \le O\left(\Delta^{\frac{\bar{q}(1-4\epsilon)}{2}}\right). \tag{2.2.111}$$

Доказ. Одабиром довољно великог броја p, тако да је

$$\frac{\epsilon(2p - (2+\rho)\bar{q})}{2+\rho} > \frac{\bar{q}(1-4\epsilon)}{2}$$

и $l > \frac{1}{2\epsilon\bar{q}}$, лако се доказује да важе релације (2.2.110) и (2.2.111). □

Како би се илустровали претходно наведени теоријски резултати, разматра се следећи пример.

Пример 2.2.2 *Разматра се следећа једнодимензионална неутрална СДЈ са временски зависним кашњењем*

$$d\left[x(t) + \frac{1}{27}\sin(x(t-\delta(t)))\right] = f(x(t), x(t-\delta(t)))dt + g(x(t), x(t-\delta(t)))dB(t),\ t \in [0, 6], \tag{2.2.112}$$

са почетним условом $\xi(\theta) = 1$, $\theta \in [-\tau, 0]$, $\tau = 2$, *где је функција кашњења дафинисана са* $\delta(t) = 1 - \frac{1}{4}\sin t$, $t \in [0, 6]$ *и коефицијенти преноса и дифузије са*

$$f(x,y) = x + \frac{1}{27}\sin y - \left(x + \frac{1}{27}\sin y\right)^3, \qquad g(x,y) = x + \frac{y}{1+y^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Јасно је да су коефицијенти f *и* g *локално Липшиц непрекидни, односно да задовољавају Претпоставку* $\mathcal{H}_1$. *Са друге стране, за* $k = 1/27$, *функција* $u(x) = -1/27 \sin x$ *задовољава Претпоставку* $\mathcal{H}_2$. *Како је* $\delta'(t) \le \frac{1}{4} = \bar{\delta}$, *за свако* $t \in [0, 6]$, *Претпоставка* $\mathcal{H}_3$ *такође важи. Штавише, за свако* $p \ge 2$ *и свако* $a \in (0, 1]$, *важи да је*

$$\begin{aligned}
&(x - au(y))^T f(x,y) + \frac{p-1}{2}|g(x,y)|^2 \\
&\quad = \left(x + \frac{a}{27}\sin y\right)\left(x + \frac{1}{27}\sin y - \left(x + \frac{1}{27}\sin y\right)^3\right) + \frac{p-1}{2}\left|x + \frac{y}{1+y^2}\right|^2 \\
&\quad \le \left(x + \frac{a}{3^3}\sin y\right)\left(x + \frac{1}{3^3}\sin y - \left(x^3 + \frac{1}{3^2}x^2\sin y + \frac{1}{3^5}x\sin^2 y + \frac{1}{3^9}\sin^3 y\right)\right) \\
&\qquad + (p-1)\left(x^2 + \frac{y^2}{(1+y^2)^2}\right),
\end{aligned}$$

односно

$$
\begin{aligned}
&(x-au(y))^T f(x,y)+\frac{p-1}{2}|g(x,y)|^2\\
&\quad = x^2+\frac{a+1}{3^3}x\sin y+\frac{a}{3^6}\sin^2 y - x^4 - \frac{a+3}{3^3}x^3\sin y - \frac{a+1}{3^5}x^2\sin^2 y\\
&\qquad - \frac{3a+1}{3^9}x\sin^3 y - \frac{a}{3^{12}}\sin^4 y + (p-1)(x^2+y^2)\\
&\quad \le \frac{55+a}{54}x^2+\frac{29a+27}{1458}y^2 - x^4 + \frac{a+3}{3^3}|x|^3+\frac{3a+1}{3^9}|x|+(p-1)(x^2+y^2)\\
&\quad \le \tilde{k}\left(1+x^2+ay^2\right),
\end{aligned}
$$

где је

$$
\begin{aligned}
\tilde{k} &= \left(\frac{55+a}{54}+p-1\right)\vee\left(\frac{29}{1458}+\frac{27}{1458a}+\frac{p-1}{a}\right)\vee\tilde{a},\\
\tilde{a} &= \sup_{u\ge 0}\left\{-u^4+\frac{a+3}{3^3}u^3+\frac{3a+1}{3^9}u\right\}.
\end{aligned}
$$

Дакле, Претпоставка $\mathcal{H}_4'$ важи за свако $p\ge 2$ и свако $a\in(0,1]$. Специјално, за $a=1$, Претпоставка $\mathcal{H}_4$ је такође испуњена. Почетни услов $\xi(\theta)=1$, $\theta\in[-\tau,0]$ задовољава Претпоставку $\mathcal{H}_5$. Како је

$$
|\delta(t)-\delta(s)|\le\frac{1}{4}|t-s|,\quad t,s\in[0,6],
$$

важи Претпоставка $\mathcal{H}_6$ за $\eta=1/4$. Такође, како је $k(3+\lfloor\eta\rfloor)=1/9<1$, испуњен је и услов (2.1.28). Штавише, важи да је, за свако $q>2$,

$$
\begin{aligned}
&(x-u(y)-\bar{x}+u(\bar{y}))^T\left(f(x,y)-f(\bar{x},\bar{y})\right)+\frac{q-1}{2}|g(x,y)-g(\bar{x},\bar{y})|^2\\
&\quad=\left(x-\bar{x}+\frac{1}{27}(\sin y-\sin\bar{y})\right)\\
&\qquad\times\left(x+\frac{1}{27}\sin y-\left(x+\frac{1}{27}\sin y\right)^3-\bar{x}-\frac{1}{27}\sin\bar{y}+\left(\bar{x}+\frac{1}{27}\sin\bar{y}\right)^3\right)\\
&\qquad+\frac{q-1}{2}\left|x+\frac{y}{1+y^2}-\bar{x}-\frac{\bar{y}}{1+\bar{y}^2}\right|^2\\
&\quad\le\left(x-\bar{x}+\frac{1}{27}(\sin y-\sin\bar{y})\right)^2\\
&\qquad\times\left(1-\left(x+\frac{1}{27}\sin y\right)^2-\left(x+\frac{1}{27}\sin y\right)\left(\bar{x}+\frac{1}{27}\sin\bar{y}\right)-\left(\bar{x}+\frac{1}{27}\sin\bar{y}\right)^2\right)\\
&\qquad+(q-1)\,|x-\bar{x}|^2+(q-1)\left|\frac{y}{1+y^2}-\frac{\bar{y}}{1+\bar{y}^2}\right|^2\\
&\quad\le 2\,|x-\bar{x}|^2+\frac{2}{27^2}\,|y-\bar{y}|^2+(q-1)|x-\bar{x}|^2+(q-1)|y-\bar{y}|^2\\
&\quad\le (q+1)\left(|x-\bar{x}|^2+|y-\bar{y}|^2\right).
\end{aligned}
$$

Дакле, важи Претпоставка $\mathcal{H}_7$ за свако $q > 2$. Такође, може се уочити да је

$$
\begin{aligned}
&|f(x,y) - f(\bar{x},\bar{y})|^2 \\
&= \left(x - \bar{x} + \frac{1}{27}(\sin y - \sin \bar{y})\right)^2 \\
&\quad\times\left(1-\left(x+\frac{1}{27}\sin y\right)^2-\left(x+\frac{1}{27}\sin y\right)\left(\bar{x}+\frac{1}{27}\sin \bar{y}\right)-\left(\bar{x}+\frac{1}{27}\sin \bar{y}\right)^2\right)^2 \\
&\le 2\left(|x-\bar{x}|^2 + \frac{1}{27^2}|y-\bar{y}|^2\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{27}\sin y\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\bar{x} + \frac{1}{27}\sin \bar{y}\right)^2\right)^2 \\
&\le 2\left(|x-\bar{x}|^2 + |y-\bar{y}|^2\right)\left(1 + |x|^\rho + |y|^\rho + |\bar{x}|^\rho + |\bar{y}|^\rho\right),
\end{aligned}
$$

односно, Претпоставка $\mathcal{H}_8$ је испуњена, на пример, за $\rho = 1$. Очигледно, за такав избор вредности ρ могу се одабрати вредности p и q, тако да важи релација $2p > (2+\rho)q$.

Како би се могла применити Теорема 2.2.3, потребно је још задати функције $\mu(\cdot)$ и $h(\cdot)$. На основу релације (2.2.67) може се закључити да је, да за свако $r \ge 1$,

$$\sup_{|x|\vee|y|\le r}\Big(|f(x,y)| \vee |g(x,y)| \vee |u(y)|\Big) \le 4r^{\frac{3}{2}}.$$

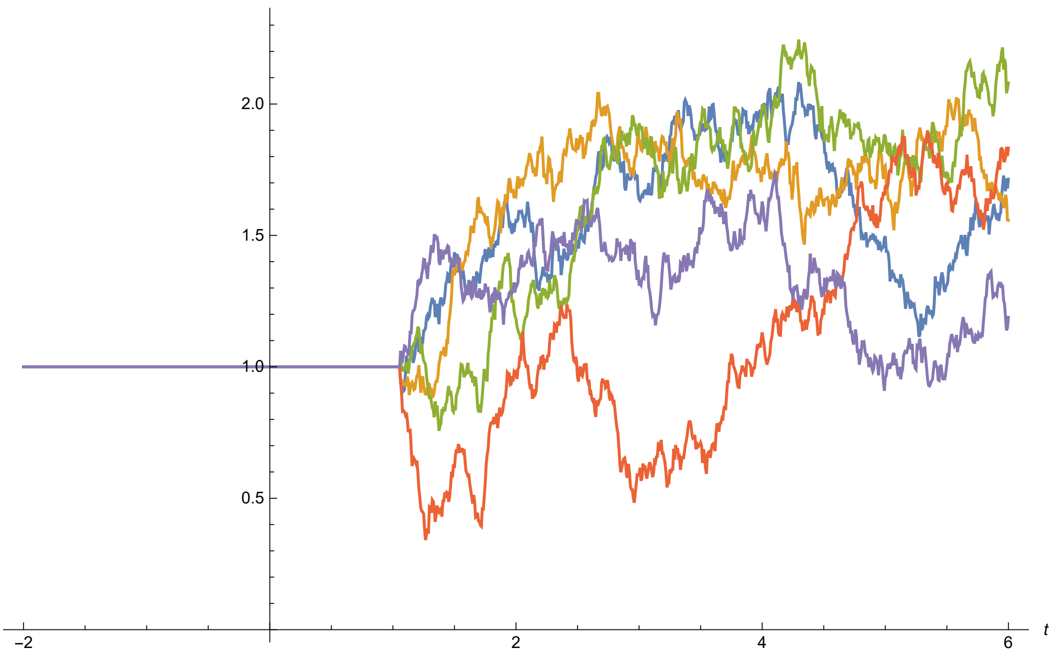
Може се дефинисати функција $\mu(r) = 4r^{\frac{3}{2}}$ за $r \ge 4$, при чему је њена инверзна функција $\mu^{-1}(r) = (r/4)^{\frac{2}{3}}$. За $\epsilon \in \left(0, \frac{1-\epsilon_0}{4}\right]$, дефинише се $h(\Delta) = \Delta^{-\epsilon}$ за $\Delta > 0$. Сада, за свако $\bar{q} \ge 2$, може се одабрати довољно велики број p, тако да важи услов

$$\frac{\epsilon(2p - (2+\rho)\bar{q})}{2+\rho} > \frac{\bar{q}(1-4\epsilon)}{2}.$$

На основу Теореме 2.2.4 следи да сечена решења Ојлер–Марујаме која одговарају једначини (2.2.112) задовољавају релације (2.2.110) и (2.2.111), тј. ред $L^{\bar{q}}$-ковергенције тих решења ка тачном решењу једначине (2.2.112) је произвољно близак вредности $\bar{q}/2$. Такође, одабиром $\epsilon = \frac{1}{128}$, релације (2.2.110) и (2.2.111) имплицирају

$$
\begin{aligned}
\sup_{0\le t\le T} E|x(t) - x_\Delta(t)|^{\bar{q}} &\le O\left(\Delta^{\frac{\bar{q}}{2}-\frac{\bar{q}}{64}}\right), \\
\sup_{0\le t\le T} E|x(t) - \bar{x}_\Delta(t)|^{\bar{q}} &\le O\left(\Delta^{\frac{\bar{q}}{2}-\frac{\bar{q}}{64}}\right).
\end{aligned}
$$

Са друге стране, ако се функције $\mu(\cdot)$ и $h(\cdot)$ дефинишу са $\mu(r) = 4r^{\frac{3}{2}}$ и $h(\Delta) = \Delta^{-\frac{1}{128}}$, закључује се да је ред $L^{\bar{q}}$-ковергенције сеченог решења Ојлер–Марујаме $\{x_\Delta(t), t \ge -\tau\}$ ка тачном решењу једначине (2.2.112) бліскији вредности $\bar{q}/2$, у односу на случај када је $\mu(r) = 4r^{\frac{3}{2}}$ и $h(\Delta) = \Delta^{-\frac{1}{4}}$.



Слика 2.3: Трајекторије сеченог решења Ојлер–Марујаме за $\Delta = 0.0078$

Уз одабир $\Delta = 0.0078$, $\epsilon_0 = \frac{1}{2}$ *и* $\epsilon = \frac{1-\epsilon_0}{64} = \frac{1}{128}$ *симулирано је неколико трајекторија сеченог решења Ојлер–Марујаме које одговарају једначини (2.2.112) и представљене су на Слици 2.3.*

Са друге стране, на основу Теореме 2.2.4, за $\bar{q} = 2$ *и* $\epsilon = 1/10$, *може се закључити да је*

$$E|x(T) - \bar{x}_\Delta(T)|^{\bar{q}} \leq \tilde{D}\Delta^{\bar{q}\left(\frac{1}{2}-2\epsilon\right)}, \tag{2.2.113}$$

где је $\tilde{D}$ *представљено са* (2.2.109).

Како би се ред конвергенције $\frac{1}{2}-2\epsilon$ *апроксимативног решења из овог примера упоредио са редом конвергенције* $\frac{1}{2}$, *што је највећи ред конвергенције који може достићи класична метода Ојлер–Марујаме, потребно је упоредити грешке апроксимације* $\tilde{D}\Delta^{\bar{q}\left(\frac{1}{2}-2\epsilon\right)}$ *и* $\tilde{D}\Delta^{\frac{\bar{q}}{2}}$. *Логаритмовањем леве и десне стране неједнакости (2.2.113), добија се да је*

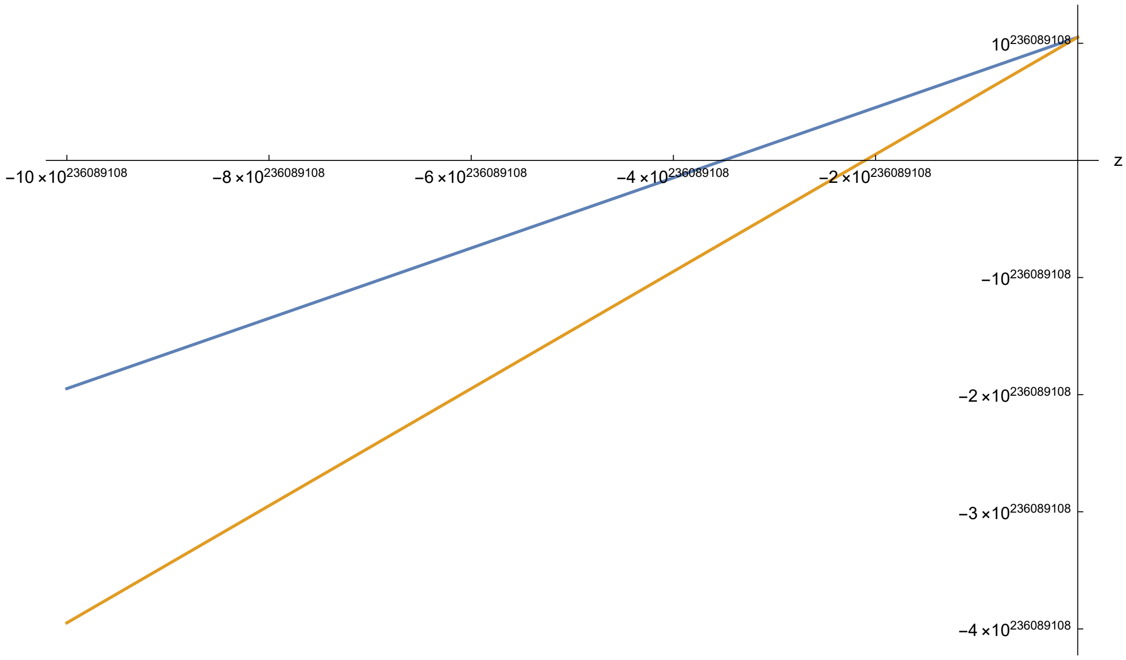
$$\ln E|x(T) - \bar{x}_\Delta(T)| \approx \frac{\ln \tilde{D}}{\bar{q}} + \left(\frac{1}{2} - 2\epsilon\right)\ln \Delta.$$

Дакле, проблем се своди на упоређивање правих $a\left(\frac{1}{2}, \Delta\right)$ *и* $a\left(\frac{1}{2} - 2\epsilon, \Delta\right)$, *где је* $a(x, \Delta) = x \ln \Delta + \frac{\ln \tilde{D}}{\bar{q}}$, *за фиксирану вредност* $\Delta \in (0, 1)$. *Затим је потребно израчунати грешке апроксимације за довољно мало* Δ.

На Слици 2.4 су представљене праве $a\left(\frac{1}{2}, \Delta\right)$ *и* $a\left(\frac{1}{2} - 2\epsilon, \Delta\right)$ *за* $\Delta \in (0, 1)$, *где је* $z = \ln \Delta$, $\bar{q} = 2$, $\epsilon = \frac{1}{10}$. *За фиксирану вредност* Δ, *посматрану као параметар, прираштај функције* a *се може представити као*

$$a\left(\frac{1}{2} - 2\epsilon, \Delta\right) - a\left(\frac{1}{2}, \Delta\right) = \ln \Delta \, (-2\epsilon)\,.$$

Закључује се да прираштај функције a тежи $+\infty$, када $\Delta \to 0$. Овај закључак одговара графичком приказу правих $a\left(\frac{1}{2}, \Delta\right)$ и $a\left(\frac{1}{2} - 2\epsilon, \Delta\right)$ на Слици 2.4.



Слика 2.4: Праве $a\left(\frac{1}{2}, \Delta\right)$ и $a\left(\frac{1}{2} - 2\epsilon, \Delta\right)$ за $\Delta \in (0,1), \bar{q} = 2, \epsilon = \frac{1}{10}$

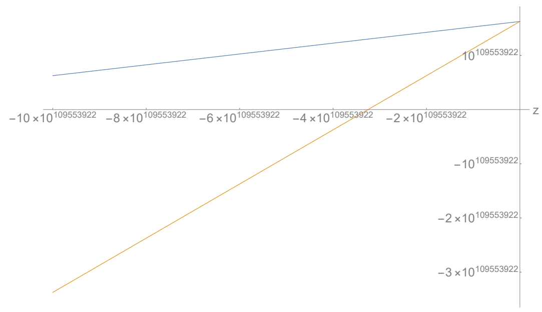
Међутим, да би се упоредио ред конвергенције $\frac{1}{2} - 2\epsilon$ са редом конвергенције $\frac{1}{2}$, од значаја је функција $b(x, \Delta) = e^{a(x,\Delta)}$. На основу теореме о средњој вредности, за фиксирану вредност Δ, посматрану као параметар, и за неко $\theta \in (0,1)$, прираштај функције b је дат са

$$b\left(\frac{1}{2} - 2\epsilon, \Delta\right) - b\left(\frac{1}{2}, \Delta\right) = \tilde{D}^{\bar{q}} \Delta^{\frac{1}{2} - 2(1-\theta)\epsilon} \ln \Delta(-2\epsilon).$$

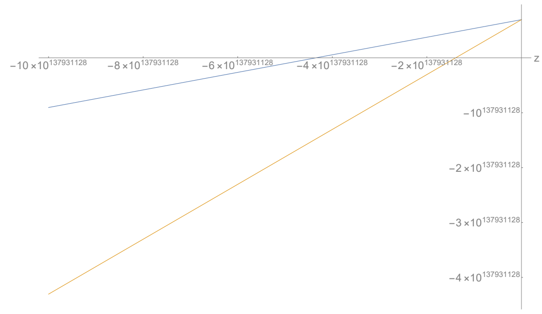
Јасно је да прираштај функције b тежи нули када $\Delta \to 0$, односно, закључује се да се, за довољно мало Δ, грешка апроксимације $O\left(\Delta^{\bar{q}\left(\frac{1}{2} - 2\epsilon\right)}\right)$ приближава грешци апроксимације $O(\Delta^{\frac{\bar{q}}{2}})$. На крају је потребно нагласити да је због погодности у прорачуну, константа D_l' из (2.2.107) мајорирана константом $2D_l$, где је D_l дато са (2.2.106).

Такође, када су вредности $p = 13, \bar{q} = 2, \epsilon_0 = 0.001$ фиксиране, а вредности ϵ се мењају, може се закључити да коефицијент правца праве $a\left(\frac{1}{2} - 2\epsilon, \Delta\right)$ постаје блискији коефицијенту правца праве $a\left(\frac{1}{2}, \Delta\right)$, када се вредност ϵ смањује (видети Слику 2.5).

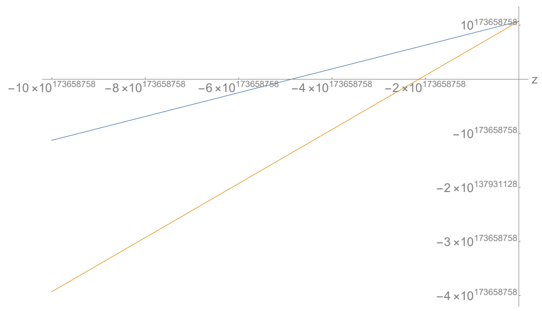
Поред тога, ако се повећају вредности p и $\bar{q}$, ($p = 20$ и $\bar{q} = 3$), тада се за различите вредности параметра ϵ добија исти закључак, односно, како се ϵ смањује, праве $a\left(\frac{1}{2}, \Delta\right)$ и $a\left(\frac{1}{2} - 2\epsilon, \Delta\right)$ постају блискије једна другој (видети Слику 2.6).



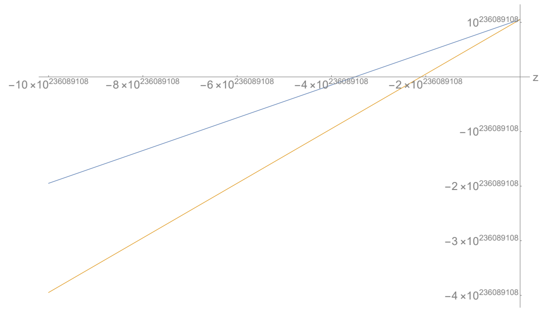
(а)



(б)

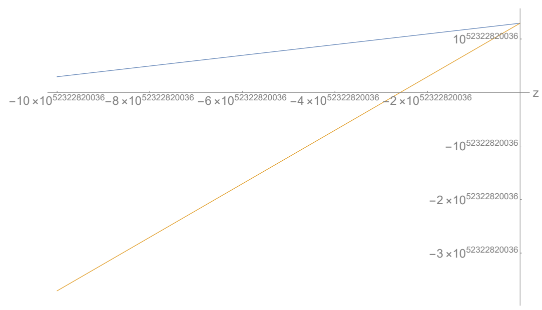


(ц)

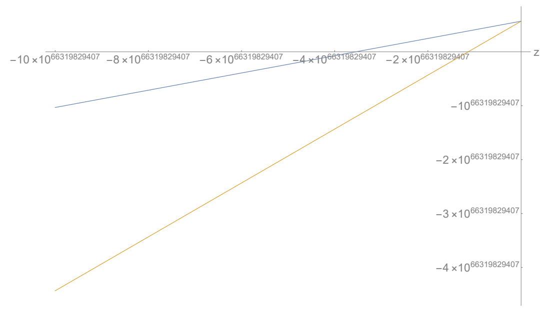


(д)

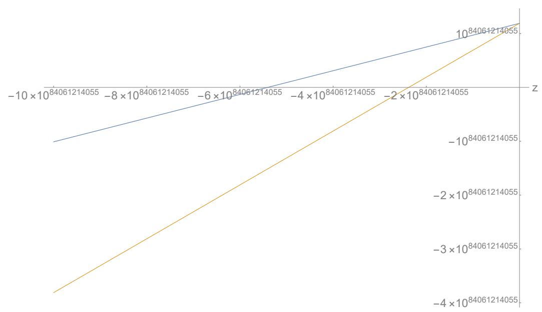
Слика 2.5: Праве $a\left(\frac{1}{2},\Delta\right)$ (жута линија) и $a\left(\frac{1}{2}-2\epsilon,\Delta\right)$ (плава линија) за $\Delta\in(0,1), p=13, \bar{q}=2, \epsilon_0=0.001$, (а) $\epsilon=0.2$, (б) $\epsilon=0.17$, (ц) $\epsilon=0.14$, (д) $\epsilon=0.1$.



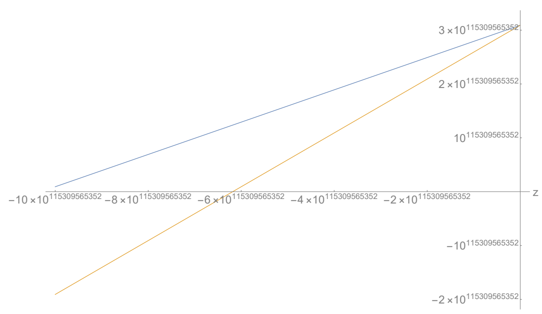
(а)



(б)



(ц)



(д)

Слика 2.6: Праве $a\left(\frac{1}{2},\Delta\right)$ (жута линија) и $a\left(\frac{1}{2}-2\epsilon,\Delta\right)$ (плава линија) за $\Delta\in(0,1), p=20, \bar{q}=3, \epsilon_0=0.001$, (а) $\epsilon=0.2$, (б) $\epsilon=0.17$, (ц) $\epsilon=0.14$, (д) $\epsilon=0.1$.

Ради потпунијег приказа, у Табели 2.2.2 су представљене вредности функција $a\left(\frac{1}{2},\Delta\right)$ *и* $a\left(\frac{1}{2}-2\epsilon,\Delta\right)$ *за различите вредности* ϵ *и* $\Delta \in (0,1)$.

	$\ln\Delta=-3$	$\ln\Delta=-6$	$\ln\Delta=-9$
$a\left(\frac{1}{2},\Delta\right)$	$-0.2\cdot 10^{52322820036}$	$-1.7\cdot 10^{52322820036}$	$-3.2\cdot 10^{52322820036}$
$a\left(\frac{1}{2}-2\epsilon,\Delta\right), \epsilon=0.2$	$0.99\cdot 10^{52322820036}$	$0.69\cdot 10^{52322820036}$	$0.39\cdot 10^{52322820036}$
$a\left(\frac{1}{2},\Delta\right)$	$-0.93\cdot 10^{66083740299}$	$-2.4\cdot 10^{66083740299}$	$-3.9\cdot 10^{66083740299}$
$a\left(\frac{1}{2}-2\epsilon,\Delta\right), \epsilon=0.17$	$0.09\cdot 10^{66083740299}$	$-0.4\cdot 10^{66083740299}$	$-0.87\cdot 10^{66083740299}$
$a\left(\frac{1}{2},\Delta\right)$	$-0.31\cdot 10^{84061214055}$	$-1.8\cdot 10^{84061214055}$	$-3.3\cdot 10^{84061214055}$
$a\left(\frac{1}{2}-2\epsilon,\Delta\right), \epsilon=0.14$	$0.53\cdot 10^{84061214055}$	$-0.13\cdot 10^{84061214055}$	$-0.79\cdot 10^{84061214055}$
$a\left(\frac{1}{2},\Delta\right)$	$1.59\cdot 10^{115073476244}$	$0.09\cdot 10^{115073476244}$	$0.39\cdot 10^{115073476244}$
$a\left(\frac{1}{2}-2\epsilon,\Delta\right), \epsilon=0.1$	$2.19\cdot 10^{115073476244}$	$1.29\cdot 10^{115073476244}$	$-1.4\cdot 10^{115073476244}$

Табела 2.2: Табеларни приказ функција $a\left(\frac{1}{2},\Delta\right)$ и $a\left(\frac{1}{2}-2\epsilon,\Delta\right)$ за $p=20$, $\bar{q}=3, \epsilon_0=0.001$ и различите вредности ϵ и Δ

Глава 3

Дивергенција метода Ојлеровог типа за неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем

Степен у коме нумеричко решење наслеђује својства тачног решења одговарајуће СДЈ утиче на одабир нумеричке методе која се примењује. Постоји опсежна литература која се односи на анализу особина бројних нумеричких метода за СДЈ различитих типова (видети на пример [5, 14, 23, 24, 25, 27, 28, 33, 38, 42, 43, 47, 55, 59, 64, 65]) међу којима су и нумеричке методе Ојлеровог типа. Неке од ових метода су имплицитне, док су друге експлицитне, што утиче на технике које се користе у теоријским разматрањима и на брзину симулација. Међутим, поред све веће потребе да се одреде класе једначина код којих су нумеричко и тачно решење блиски и деле иста својства, постоји и интересовање за одређивање класа једначина за које поменута два решења нису блиска. У постојећој литератури, теореме које гарантују конвергенцију нумеричких метода Ојлеровог типа за неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем, дају само довољне услове конвергенције у одговарајућем смислу. Због тога је битно одредити класе неутралних СДЈ са временски зависним кашњењем, за које одговарајућа метода Ојлеровог типа дивергира. На тај начин се сужава класа ових једначина у оквиру које се трага за оним једначинама за које та метода конвергира у L^p-смислу. Неки од постојећих резултата о дивергенцији који се односе на нумеричка решења на коначним и бесконачним интервалима могу се наћи у [8, 10, 11, 12, 16, 41, 46, 54].

Сходно томе, у овој глави се разматра L^p-дивергенција, за $p \in (0, \infty)$, различитих нумеричких метода Ојлеровог типа за класу неутралних СДЈ са временски зависним кашњењем (и прелазима Маркова). Прецизније, у Поглављу 3.1 доказује се L^p-дивергенција семиимплицитне Ојлерове методе за једну класу неутралних СДЈ са временски зависним кашњењем. Поред тога, доказује се да класа ових једначина са јединственим глобалним решењем, коначним апсолутним моментом првог реда тачног решења у крајњем тренутку разматраног временског интервала и бесконачним моментом првог реда решења добијеног семиимплицитном Ојлеровом методом у истом тренутку, није празна. Притом се узимају у обзир и услови који гарантују егзистенцију и јединственост таквог нумеричког решења. У Поглављу 3.2 доказује се, под одређеним условима, дивергенција методе Ојлер–Марујаме за неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем и прелазима Маркова. На крају главе, у Поглављу 3.3 разматра се дивергенција сечене методе Ојлер–Марујаме за неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем.

Како су класична и сечена метода Ојлер–Марујаме експлицитне, њихова разматрања не захтевају увођење додатних услова егзистенције и јединствености одговарајућих нумеричких решења, као што је случај са семиимплицитном Ојлеровом методом. Теоријска анализа употпуњена је примерима и нумеричким симулацијама. Притом је потребно нагласити да су симулације које се односе на нумеричка решења добијена експлицитним методама једноставније и брже од оних које се односе на нумеричка решења добијена имплицитном методом.

3.1 Семиимплицитна Ојлерова метода за неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем

У овом поглављу су представљени довољни услови строге и слабе дивергенције семиимплицитне Ојлерове методе за класу неутралних СДЈ са временски зависним кашњењем чији је коефицијент преноса суперлинеарног раста, док коефицијент дифузије расте највише суперлинеарно. Такође, доказује се дивергенција апсолутних момената реда p семиимплицитних Ојлерових решења на коначном временском интервалу када величина корака тежи нули, уз услов да су апсолутни моменти реда p тачног решења коначни, за $p \in (0, +\infty)$. Поред тога што апроксимативно решење добијено овом методом, под одређеним условима, наслеђује својства тачног решења у већој мери него апроксимативно решење Ојлер–Марујаме (видети на пример [18, 60, 44, 17, 61, 67]), у овом поглављу се одређују довољни услови који гарантују L^p-дивергенцију семиимплицитне Ојлерове методе.

Резултати изложени у овом поглављу представљени су у раду [51].

3.1.1 L^p-дивергенција семиимплицитне Ојлерове методе за неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем

Разматра се једнодимензионална неутрална СДЈ са временски зависним кашњењем облика (2.0.1), при чему је $d = 1$, односно

$$d[x(t) - u(x(t-\delta(t)))] = f(x(t), x(t-\delta(t)))dt + g(x(t), x(t-\delta(t)))dB(t), \quad t \in [0, T], \tag{3.1.1}$$

са почетним условом

$$x_0 = \xi = \{\xi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}, \tag{3.1.2}$$

где је $\xi \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];\mathbb{R})$ и

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad u : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

Борел мерљиве функције. Такође, претпоставља се да постоји једнодимензионални стохастички процес $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ који представља тачно решење једначине (3.1.1) у смислу Дефиниције 1.5.3.

За потребе доказивања главног резултата овог поглавља, уводе се следеће претпоставке.

$\mathcal{A}_1$: Нека функција $f \in C(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ задовољава једностране Липшицове услове по првом и другом аргументу, тј. нека постоје константе $\mu_1, \mu_2 > 0$ тако да, за свако $x, y, z \in \mathbb{R}$, важи да је

$$(x-y)(f(x,z) - f(y,z)) \le \mu_1 |x-y|^2, \tag{3.1.3}$$

$$(x-y)(f(z,x) - f(z,y)) \le \mu_2 |x-y|^2. \tag{3.1.4}$$

Такође, претпоставља се да је функција $u(\cdot)$ Липшиц непрекидна са Липшицовом константом $k \in (0,1)$, тј. претпоставља се да важи Претпоставка $\mathcal{H}_2$.

За потребе доказивања главног резултата, односно, строге L^p-дивергенције семиимплицитне Ојлерове методе у коначном тренутку T, за свако $p \in (0, +\infty)$, користи се следећа лема.

Лема 3.1.1 (Лема 4.1, [7]) *Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ простор вероватноће и $Z : \Omega \to R$ $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-мерљива случајна променљива са нормалном нормираном расподелом. Тада важи да је*

$$P\left(|Z| \ge x\right) \ge \frac{xe^{-x^2}}{4}, \quad P\left(|Z| \in [x, 2x]\right) \ge \frac{xe^{-2x^2}}{2}, \quad x \in [0, \infty).$$

Пре навођења главног резултата овог поглавља дефинише се нумеричко решење добијено семиимплицитном Ојлеровом методом, које одговара једначини (3.1.1) и наводе се услови под којима је та метода добро дефинисана. У том смислу, нека је $T \in (0, \infty)$ произвољан фиксиран број и нека је величина корака $\Delta = \tau/M = T/N$ за неке природне бројеве $M > \tau$ и $N > T$. Такође, претпоставља се да је τ/T рационалан број. Најпре се дефинише *дискретно семиимплицитно Ојлерово* решење Z^N које одговара једначини (3.1.1), на еквидистантној партицији $n\Delta$, $n \in \{-M, \dots, 0, 1, \dots, N\}$ временског интервала $[-\tau, T]$. Ово решење дефинише се као

$$Z^N_n(\omega) = \xi(n\Delta, \omega), \ n \in \{-M, -(M-1), \dots, 0\}, \tag{3.1.5}$$

док је, за $n \in \{1, \dots, N\}$,

$$\begin{aligned} Z^N_n(\omega) = {} & Z^N_{n-1}(\omega) + u\left(Z^N_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}(\omega)\right) - u\left(Z^N_{n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)]}(\omega)\right) \\ & + f\left(Z^N_n(\omega), Z^N_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}(\omega)\right)\Delta \\ & + g\left(Z^N_{n-1}(\omega), Z^N_{n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)]}(\omega)\right)\Delta B_{n-1}(\omega). \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Потребно је нагласити да је једначина (3.1.6) имплицитна, не само по првом и другом аргументу функције f, већ и по аргументу функције u. У том смислу, за фиксирано $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$, нека је $I_A = 1$, када је $I_\Delta[\delta(n\Delta)] = 0$, и $I_A = 0$, у супротном. Тада се једначина (3.1.6) може представити у еквивалентном облику

$$\begin{aligned} Z_n^N(\omega) = {} & Z_{n-1}^N(\omega) + u\left(Z_n^N(\omega)\right) I_A + u\left(Z^N_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}(\omega)\right) I_{A^C} - u\left(Z^N_{n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)]}(\omega)\right) \\ & + f\left(Z_n^N(\omega), Z_n^N(\omega)\right) I_A \Delta + f\left(Z_n^N(\omega), Z^N_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}(\omega)\right) I_{A^C} \Delta \\ & + g\left(Z_{n-1}^N(\omega), Z^N_{n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)]}(\omega)\right) \Delta B_{n-1}(\omega). \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Очигледно је да је једначина (3.1.7) облика

$$x = d + \Delta f(x, a) I_{A^C} + \Delta f(x, x) I_A + u(x) I_A, \quad x \in R, \tag{3.1.8}$$

где су $a, d \in \mathbb{R}$.

Наредна лема даје довољне услове егзистенције и јединствености решења једначине (3.1.8).

Лема 3.1.2 (Лема 1, [44]) *Нека важе Претпоставке $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Ако важи да је $(\mu_1 + \mu_2)\Delta + k < 1$, тада постоји јединствено решење једначине (3.1.8).*

Сада се може доказати главни резултат овог поглавља, а то је L^p-дивергенција семиимпицитне Ојлерове методе за једну класу неутралних СДЈ са временски зависним кашњењем. Доказ ове теореме је конструктиван, односно дефинише се догађај Ω_N чија вероватноћа може бити екстремно мала, а да притом одговарајуће трајекторије нумеричког решења имају екстремно велике апсолутне вредности, што резултира дивергенцијом момената овог решења када $\Delta \to 0$.

Теорема 3.1.1 *Нека важе Претпоставке $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{H}_2$, заједно са условом*

$$P\left\{\omega \in \Omega : \inf_{\theta \in [-\tau, 0]} |g(\xi(0, \omega), \xi(\theta, \omega))| > 0\right\} > 0. \tag{3.1.9}$$

Такође, претпоставља се да постоје константе $B \geq 1$ и $\delta_1, \delta_2, \gamma_1, \gamma_2 > 0$, тако да је $\gamma = 1 \vee \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \delta_2$, $\delta_1 > \gamma$ и за свако $x, y \in \mathbb{R}$, за које је $|x| \vee |y| \geq B$, важи да је

$$|f(x, y)| \leq B(|x|^{\gamma_1} + |y|^{\gamma_2}), \quad |g(x, y)| \geq \frac{1}{B}|x|^{\delta_1} - B|y|^{\delta_2}. \tag{3.1.10}$$

Тада постоји константа $b \in \left(1 + \frac{2(\delta_1 + \gamma)}{\delta_1 - \gamma}, +\infty\right)$ и низ непразних догађаја

$$\{\Omega_N \in \mathcal{F}, N \in \mathbb{N}, N \geq N_0\},$$

тако да је, за свако $N \in \mathbb{N}, N \geq N_0$ и свако $\omega \in \Omega_N$,

$$P(\Omega_N) \geq b^{-N^b}, \tag{3.1.11}$$

$$|Z_N^N(\omega)| \geq 2^{\left(\frac{\delta_1 + \gamma}{2\gamma}\right)^{N-1}}, \tag{3.1.12}$$

где је N_0 довољно велики природан број за који је $(\mu_1 + \mu_2)\Delta + k < 1$ када је $N \geq N_0$. Ако постоји јединствено решење $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$ једначине (3.1.1), за које је $E|x(T)|^p < \infty$, за неко $p \in (0, \infty)$, тада важи да је

$$\lim_{N\to\infty} E|x(T) - Z_N^N|^p = \infty, \tag{3.1.13}$$

$$\lim_{N\to\infty} \left|E|x(T)|^p - E|Z_N^N|^p\right| = \infty. \tag{3.1.14}$$

Доказ. Потребно је нагласити да се Претпоставка $\mathcal{A}_1$ не примењује експлицитно у доказу теореме. Улога ове претпоставке је да гарантује егзистенцију и јединственост семиимплицитног Ојлеровог решења које задовољава једначину (3.1.6). Имајући у виду Лему 3.1.2, нека је $N \geq N_0$, где је $N_0 = \lfloor \frac{T(\mu_1+\mu_2)}{1-k} \rfloor + 1$. Такође, потребно је нагласити да услов (3.1.9) искључује детерминистичке диференцијалне једначине из разматрања и обезбеђује да је апсолутна вредност нумеричког решења након прве итерације довољно велика. Штавише, за $p \geq 1$, (3.1.13) представља строгу L^p-дивергенцију семиимплицитног Ојлеровог решења, док (3.1.14) представља нумерички слабу дивергенцију тог решења. Обе врсте дивергенције се односе на крајњи тренутак разматраног временског интервала, када величина корака тежи нули.

На основу услова (3.1.9) и $\xi \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; \mathbb{R})$, може се закључити да постоји константа $K \in [B, +\infty)$, тако да је

$$\vartheta := P\left\{\omega \in \Omega : \inf_{\theta\in[-\tau,0]} |g\left(\xi(0,\omega), \xi(\theta,\omega)\right)| \geq \frac{1+k}{K}, \sup_{-\tau\leq\theta\leq0} |\xi(\theta,\omega)| \leq K\right\} > 0.$$

Како је коефицијент преноса f полазне једначине (3.1.1) непрекидна функција на $\mathbb{R}^2$, f је ограничена на компактном скупу, односно постоји константа $G_B > 0$, тако да је

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ |x|\vee|y|<B} |f(x,y)| \leq G_B. \tag{3.1.15}$$

Нека је

$$\begin{aligned} r_N := \max\Bigg\{&2, B, \left(\frac{K}{2}\right)^{\frac{2}{\delta_1+\gamma}}, (BK^{\gamma_2}\Delta + \Delta G_B)^{\frac{2}{\delta_1+\gamma}}, (1+2B\Delta)^{\frac{2}{\delta_1-\gamma}}, \\ &\left(\frac{2B}{\Delta}(1+kK) + B(BK^{\gamma_2} + BK^{\delta_2} + B + G_B)\right)^{\frac{2}{\delta_1-\gamma}}\Bigg\},\ N \geq N_0. \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

Дефинише се низ догађаја $\{\Omega_N, N \geq N_0\}$, тако да је

$$\begin{aligned} \Omega_N = \{&\omega \in \Omega : |B_n(\omega) - B_{n-1}(\omega)| \geq \Delta, \forall n \in \{1, 2, \ldots, N-1\}, \\ &|B_1(\omega)| \geq K\left(2r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}} + K\right), \\ &\inf_{\theta\in[-\tau,0]} |g\left(\xi(0,\omega), \xi(\theta,\omega)\right)| \geq \frac{1+k}{K}, \sup_{-\tau\leq\theta\leq0} |\xi(\theta,\omega)| \leq K\Bigg\}. \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Најпре се разматра случај када је $n = 1$. Тада се, на основу (3.1.6), може закључити да је, за свако $\omega \in \Omega_N$,

$$\begin{aligned} Z_1^N(\omega) &= Z_0^N(\omega) + u\left(Z^N_{1-I_\Delta[\delta(\Delta)]}(\omega)\right) - u\left(Z^N_{-I_\Delta[\delta(0)]}(\omega)\right) \\ &\quad + f\left(Z_1^N(\omega), Z^N_{1-I_\Delta[\delta(\Delta)]}(\omega)\right)\Delta + g\left(Z_0^N(\omega), Z^N_{-I_\Delta[\delta(0)]}(\omega)\right)B_1(\omega). \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

Имајући у виду дефиницију догађаја Ω_N и применом Претпоставке $\mathcal{H}_2$, следи да је

$$\begin{aligned} &|Z_1^N(\omega)| \\ &\geq \left|g\left(Z_0^N(\omega), Z^N_{-I_\Delta[\delta(0)]}(\omega)\right)\right| |B_1(\omega)| - \left|Z_0^N(\omega)\right| \\ &\quad - \Delta\left|f\left(Z_1^N(\omega), Z^N_{1-I_\Delta[\delta(\Delta)]}(\omega)\right)\right| - \left|u\left(Z^N_{1-I_\Delta[\delta(\Delta)]}(\omega)\right) - u\left(Z^N_{-I_\Delta[\delta(0)]}(\omega)\right)\right| \\ &\geq |g(\xi(0,\omega), \xi(-I_\Delta[\delta(0)]\Delta, \omega))| |B_1(\omega)| - |\xi(0,\omega)| \\ &\quad - \Delta\left|f\left(Z_1^N(\omega), Z^N_{1-I_\Delta[\delta(\Delta)]}(\omega)\right)\right| - k\left|Z^N_{1-I_\Delta[\delta(\Delta)]}(\omega)\right| - k\left|\xi(-I_\Delta[\delta(0)]\Delta, \omega)\right| \\ &\geq \frac{1+k}{K}K\left(2r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}} + K\right) - (1+k)K - \Delta\left|f\left(Z_1^N(\omega), Z^N_{1-I_\Delta[\delta(\Delta)]}(\omega)\right)\right| \\ &\quad - k\left|Z^N_{1-I_\Delta[\delta(\Delta)]}(\omega)\right| \\ &\geq 2(1+k)r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}} - \Delta\left|f\left(Z_1^N(\omega), Z^N_{1-I_\Delta[\delta(\Delta)]}(\omega)\right)\right| - k\left|Z^N_{1-I_\Delta[\delta(\Delta)]}(\omega)\right|. \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

Разматрају се два случаја.

Случај 1: Ако је $I_\Delta[\delta(\Delta)] = 0$, тада се претходни израз може оценити као

$$(1+k)|Z_1^N(\omega)| \geq 2(1+k)r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}} - \Delta\left|f\left(Z_1^N(\omega), Z_1^N(\omega)\right)\right|.$$

Применом (3.1.10) и (3.1.15), добија се да је

$$\begin{aligned} |Z_1^N(\omega)| &\geq 2r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}} - \frac{1}{1+k}\Delta\left|f\left(Z_1^N(\omega), Z_1^N(\omega)\right)\right| \\ &> 2r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}} - \Delta\left|f\left(Z_1^N(\omega), Z_1^N(\omega)\right)\right| \\ &= 2r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}} - \Delta\left|f\left(Z_1^N(\omega), Z_1^N(\omega)\right)\right| I_{\{|Z_1^N(\omega)|\geq B\}} \\ &\quad - \Delta\left|f\left(Z_1^N(\omega), Z_1^N(\omega)\right)\right| I_{\{|Z_1^N(\omega)|<B\}} \\ &\geq 2r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}} - B\Delta\left(|Z_1^N(\omega)|^{\gamma_1} + |Z_1^N(\omega)|^{\gamma_2}\right) - \Delta G_B. \end{aligned} \tag{3.1.20}$$

На основу дефиниције (3.1.16), следи да је

$$r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}} \geq \Delta G_B, \tag{3.1.21}$$

што, заједно са (3.1.20), даје

$$|Z_1^N(\omega)| + B\Delta|Z_1^N(\omega)|^{\gamma_1} + B\Delta|Z_1^N(\omega)|^{\gamma_2} \geq r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}}. \tag{3.1.22}$$

Случај 2: Ако је $I_\Delta[\delta(\Delta)] > 0$, тада се на основу дефиниције догађаја Ω_N, може закључити да је $\sup_{-\tau\le\theta\le 0}|\xi(\theta,\omega)| \le K$. Дакле, израз (3.1.19) се може оценити као

$$\begin{aligned}|Z_1^N(\omega)| &\ge 2(1+k)r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}} - \Delta\left|f\left(Z_1^N(\omega),\xi((1-I_\Delta[\delta(\Delta)])\Delta,\omega)\right)\right| - kK\\ &\ge 2(1+k)r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}}\\ &\quad -\Delta\left|f\left(Z_1^N(\omega),\xi((1-I_\Delta[\delta(\Delta)])\Delta,\omega)\right)\right| I_{\{|Z_1^N(\omega)|\vee|\xi((1-I_\Delta[\delta(\Delta)])\Delta,\omega)|\ge B\}}\\ &\quad -\Delta\left|f\left(Z_1^N(\omega),\xi((1-I_\Delta[\delta(\Delta)])\Delta,\omega)\right)\right| I_{\{|Z_1^N(\omega)|\vee|\xi((1-I_\Delta[\delta(\Delta)])\Delta,\omega)|<B\}} - kK.\end{aligned}$$

Затим, применом (3.1.10) и (3.1.15) добија се да је

$$\begin{aligned}|Z_1^N(\omega)| &\ge 2(1+k)r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}} - \Delta B\left(|Z_1^N(\omega)|^{\gamma_1} + |\xi((1-I_\Delta[\delta(\Delta)]\Delta,\omega)|^{\gamma_2}\right) - \Delta G_B - kK\\ &\ge r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}} - B\Delta|Z_1^N(\omega)|^{\gamma_1} + r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}} - \Delta\left(BK^{\gamma_2}+G_B\right) + k\left(2r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}} - K\right).\end{aligned}$$

Дакле, на основу (3.1.16) и претходне релације следи да је

$$|Z_1^N(\omega)| + B\Delta|Z_1^N(\omega)|^{\gamma_1} + B\Delta|Z_1^N(\omega)|^{\gamma_2} \ge r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}}. \tag{3.1.23}$$

Имајући у виду релације (3.1.22) и (3.1.23), може се закључити да је

$$|Z_1^N(\omega)| + B\Delta|Z_1^N(\omega)|^{\gamma_1} + B\Delta|Z_1^N(\omega)|^{\gamma_2} \ge r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}}. \tag{3.1.24}$$

У наставку се доказује да важи

$$|Z_1^N(\omega)| \ge r_N, \quad \omega\in\Omega_N. \tag{3.1.25}$$

У том смислу, претпоставља се супротно, да постоји $\omega_0 \in \Omega_N$, тако да је $|Z_1^N(\omega_0)| < r_N$. Тада, на основу $r_N \ge B \ge 1$, следи да је

$$\begin{aligned}|Z_1^N(\omega)| + B\Delta|Z_1^N(\omega)|^{\gamma_1} + B\Delta|Z_1^N(\omega)|^{\gamma_2} &< r_N + B\Delta r_N^{\gamma_1} + B\Delta r_N^{\gamma_2}\\ &\le (1+2B\Delta)\, r_N^{\gamma}.\end{aligned} \tag{3.1.26}$$

Имајући у виду дефиницију (3.1.16), добија се да је

$$r_N \ge (1+2B\Delta)^{\frac{2}{\delta_1-\gamma}},$$

односно, применом (3.1.26) следи да је

$$|Z_1^N(\omega)| + B\Delta|Z_1^N(\omega)|^{\gamma_1} + B\Delta|Z_1^N(\omega)|^{\gamma_2} < r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}},$$

што је у контрадикцији са (3.1.24). Дакле, закључује се да важи (3.1.25).

Доказ теореме се наставља индукцијом по $n \in \{1,2,\dots,N-1\}$. Нека је индуктивна претпоставка дата са

$$|Z_{i+1}^N(\omega)| \ge |Z_i^N(\omega)|^{\frac{\delta_1+\gamma}{2\gamma}} \ge r_N^{\left(\frac{\delta_1+\gamma}{2\gamma}\right)^i}, \quad \omega\in\Omega_N, \tag{3.1.27}$$

за свако $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Циљ је доказати да важи

$$|Z_{n+1}^N(\omega)| \geq |Z_n^N(\omega)|^{\frac{\delta_1+\gamma}{2\gamma}} \geq r_N^{\left(\frac{\delta_1+\gamma}{2\gamma}\right)^n}, \quad \omega \in \Omega_N. \tag{3.1.28}$$

Потребно уочити да је на основу индуктивне претпоставке (3.1.27)

$$|Z_{i+1}^N(\omega)| \geq r_N \geq 2, \quad \omega \in \Omega_N, \tag{3.1.29}$$

за свако $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Са друге стране, Претпоставка $\mathcal{H}_2$, једначина (3.1.6) и дефиниција догађаја Ω_N, гарантују да је

$$\begin{aligned}
|Z_{n+1}^N(\omega)| \geq& \left|g\left(Z_n^N(\omega), Z_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega)\right)\right| |B_{n+1}(\omega) - B_n(\omega)| - \left|Z_n^N(\omega)\right| \\
&- \Delta \left|f\left(Z_{n+1}^N(\omega), Z_{n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)]}^N(\omega)\right)\right| \\
&- \left|u\left(Z_{n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)]}^N(\omega)\right) - u\left(Z_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega)\right)\right| \\
\geq& \left|g\left(Z_n^N(\omega), Z_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega)\right)\right| \Delta - \left|Z_n^N(\omega)\right| \\
&- \Delta \left|f\left(Z_{n+1}^N(\omega), Z_{n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)]}^N(\omega)\right)\right| \\
&- k\left|Z_{n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)]}^N(\omega)\right| - k\left|Z_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega)\right|,
\end{aligned} \tag{3.1.30}$$

за $n \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$.

Разматрају се четири случаја.

1. Нека је $I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)] \geq n+1$ и $I_\Delta[\delta(n\Delta)] \geq n$. Тада се, на основу (3.1.30), добија да је

$$\begin{aligned}
\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right| \geq& \left|g\left(Z_n^N(\omega), \xi(n - I_\Delta[\delta(n\Delta)], \omega)\right)\right| \Delta - \left|Z_n^N(\omega)\right| \\
&- \Delta \left|f\left(Z_{n+1}^N(\omega), \xi(n+1 - I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)], \omega)\right)\right| \\
&\quad \times I_{\{|Z_{n+1}^N(\omega)| \vee |\xi(n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)], \omega)| \geq B\}} \\
&- \Delta \left|f\left(Z_{n+1}^N(\omega), \xi(n+1 - I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)], \omega)\right)\right| \\
&\quad \times I_{\{|Z_{n+1}^N(\omega)| \vee |\xi(n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)], \omega)| < B\}} \\
&- k|\xi(n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)], \omega)| - k|\xi(n-I_\Delta[\delta(n\Delta)], \omega)|, \ \omega \in \Omega_N.
\end{aligned}$$

На основу услова (3.1.10), релације (3.1.15) и дефиниције (3.1.17) догађаја Ω_N, може се закључити да је

$$\begin{aligned}
\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right| \geq& \frac{\Delta}{B}\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\delta_1} - \Delta B \left|\xi(n - I_\Delta[\delta(n\Delta)], \omega)\right|^{\delta_2} - |Z_n^N(\omega)| \\
&- \Delta B |Z_{n+1}^N(\omega)|^{\gamma_1} - \Delta B |\xi(n+1 - I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)], \omega)|^{\gamma_2} - \Delta G_B \\
&- k|\xi(n+1 - I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)], \omega)| - k|\xi(n - I_\Delta[\delta(n\Delta)], \omega)| \\
\geq& \frac{\Delta}{B}\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\delta_1} - \Delta B K^{\delta_2} - |Z_n^N(\omega)| \\
&- \Delta B |Z_{n+1}^N(\omega)|^{\gamma_1} - \Delta B K^{\gamma_2} - \Delta G_B - 2kK, \quad \omega \in \Omega_N.
\end{aligned} \tag{3.1.31}$$

Примењујући (3.1.29), израз (3.1.31) се може оценити као

$$
\begin{aligned}
&\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right| + \Delta B |Z_{n+1}^N(\omega)|^{\gamma_1} \\
&\quad \geq \frac{\Delta}{B}\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\delta_1} - |Z_n^N(\omega)| - \Delta B K^{\delta_2} - \Delta B K^{\gamma_2} - \Delta G_B - 2kK \\
&\quad \geq \left|Z_n^N(\omega)\right|^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}} \left(\frac{\Delta}{B}\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\frac{\delta_1-\gamma}{2}} - 1 - \Delta B K^{\delta_2} - \Delta B K^{\gamma_2} - \Delta G_B - 2kK\right) \\
&\quad \geq |Z_n^N(\omega)|^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}} \left(\frac{\Delta}{B} r_N^{\frac{\delta_1-\gamma}{2}} - 1 - \Delta B K^{\delta_2} - \Delta B K^{\gamma_2} - \Delta G_B - 2kK\right), \ \omega \in \Omega_N.
\end{aligned}
$$

На основу (3.1.16) и (3.1.29), важи да је

$$
\begin{aligned}
\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right| + \Delta B \left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_1} &\geq (1+\Delta B)\,|Z_n^N(\omega)|^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}} \\
&\geq (1+\Delta B) r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}}, \quad \omega \in \Omega_N. \qquad (3.1.32)
\end{aligned}
$$

Сада се претпоставља супротно, да постоји догађај $\bar{\omega} \in \Omega_N$, за $N \geq N_0$, тако да је $|Z_{n+1}^N(\bar{\omega})| < 1$. Тада, следи да је

$$
\left|Z_{n+1}^N(\bar{\omega})\right| + \Delta B \left|Z_{n+1}^N(\bar{\omega})\right|^{\gamma_1} \leq 1 + \Delta B < (1+\Delta B) r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}},
$$

што је у контрадикцији са (3.1.32). Дакле, може се закључити да је $|Z_{n+1}^N(\omega)| \geq 1$, када је $\omega \in \Omega_N$, $N \geq N_0$. Прва неједнакост у (3.1.32) имплицира

$$
(1+\Delta B)\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma} \geq (1+\Delta B)\,|Z_n^N(\omega)|^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}}, \quad \omega \in \Omega_N. \qquad (3.1.33)
$$

Према томе, на основу индуктивне претпоставке (3.1.27), важи да је

$$
|Z_{n+1}^N(\omega)| \geq |Z_n^N(\omega)|^{\frac{\delta_1+\gamma}{2\gamma}} \geq r_N^{\left(\frac{\delta_1+\gamma}{2\gamma}\right)^n}, \quad \omega \in \Omega_N. \qquad (3.1.34)
$$

2. Нека је $I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)] < n+1$ и $I_\Delta[\delta(n\Delta)] \geq n$. Тада се, имајући у виду (3.1.30), добија да је

$$
\begin{aligned}
&\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right| \\
&\quad \geq \left|g\left(Z_n^N(\omega), \xi(n - I_\Delta[\delta(n\Delta)], \omega)\right)\right|\Delta - \left|Z_n^N(\omega)\right| \\
&\qquad - \Delta\left|f\left(Z_{n+1}^N(\omega), Z_{n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)]}^N(\omega)\right)\right| I_{\{|Z_{n+1}^N(\omega)|\vee|Z_{n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)]}^N(\omega)|\geq B\}} \\
&\qquad - \Delta\left|f\left(Z_{n+1}^N(\omega), Z_{n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)]}^N(\omega)\right)\right| I_{\{|Z_{n+1}^N(\omega)|\vee|Z_{n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)]}^N(\omega)|< B\}} \\
&\qquad - k|Z_{n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)]}^N(\omega)| - k|\xi(n - I_\Delta[\delta(n\Delta)], \omega)|, \quad \omega \in \Omega_N.
\end{aligned}
$$

На основу услова (3.1.10), релације (3.1.15) и дефиниције (3.1.17) догађаја Ω_N, важи да је

$$\begin{aligned}\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right| \geq \frac{\Delta}{B}\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\delta_1} &- \Delta B\left|\xi(n - I_\Delta[\delta(n\Delta)], \omega)\right|^{\delta_2} - \left|Z_n^N(\omega)\right| \\ &- \Delta B\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_1} - \Delta B\left|Z_{n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)]}^N(\omega)\right|^{\gamma_2} - G_B\Delta \\ &- k|Z_{n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)]}^N(\omega)| - k|\xi(n - I_\Delta[\delta(n\Delta)], \omega)|, \\ \geq \frac{\Delta}{B}\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\delta_1} &- \Delta BK^{\delta_2} - \left|Z_n^N(\omega)\right| - \Delta B\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_1} \\ &- \Delta B\left|Z_{n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)]}^N(\omega)\right|^{\gamma_2} - \Delta G_B \\ &- k|Z_{n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)]}^N(\omega)| - kK, \quad \omega \in \Omega_N. \end{aligned} \tag{3.1.35}$$

2.1. Ако се претпостави да је $I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)] = 0$, следи да је

$$\begin{aligned}\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right| \geq \frac{\Delta}{B}\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\delta_1} &- \Delta BK^{\delta_2} - \left|Z_n^N(\omega)\right| - \Delta B\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_1} \\ &- \Delta B\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_2} - \Delta G_B - k|Z_{n+1}^N(\omega)| - kK, \quad \omega \in \Omega_N.\end{aligned}$$

Дакле, на основу релације (3.1.29), може се закључити да је

$$\begin{aligned}(1+k)\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right| &+ \Delta B\left(\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_1} + \left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_2}\right) \\ &\geq \frac{\Delta}{B}\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\delta_1} - \left|Z_n^N(\omega)\right| - \Delta BK^{\delta_2} - \Delta G_B - kK \\ &\geq \left|Z_n^N(\omega)\right|^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}}\left(\frac{\Delta}{B}\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\frac{\delta_1-\gamma}{2}} - 1 - \Delta BK^{\delta_2} - \Delta G_B - kK\right) \\ &\geq \left|Z_n^N(\omega)\right|^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}}\left(\frac{\Delta}{B}r_N^{\frac{\delta_1-\gamma}{2}} - 1 - \Delta BK^{\delta_2} - \Delta G_B - kK\right).\end{aligned} \tag{3.1.36}$$

Такође, примењујући дефиницију (3.1.16), следи да је

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{B}r_N^{\frac{\delta_1-\gamma}{2}} &\geq 2 + 2kK + \Delta BK^{\gamma_2} + \Delta B + \Delta G_B + \Delta BK^{\delta_2} \\ &\geq 1 + kK + \Delta G_B + \Delta BK^{\delta_2} + 1 + k + 2\Delta B.\end{aligned}$$

Према томе, може се закључити да важи

$$\frac{\Delta}{B}r_N^{\frac{\delta_1-\gamma}{2}} - 1 - \Delta BK^{\delta_2} - \Delta G_B - kK \geq 1 + k + 2\Delta B, \tag{3.1.37}$$

што, заједно са (3.1.29) и (3.1.36), даје

$$\begin{aligned}(1+k)\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right| + \Delta B\left(\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_1} + \left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_2}\right)& \\ \geq (1+k+2\Delta B)\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}}& \\ \geq (1+k+2\Delta B)r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}}&, \quad \omega \in \Omega_N.\end{aligned} \tag{3.1.38}$$

Сада се претпоставља супротно, да постоји $\bar{\omega} \in \Omega_N$, за $N \geq N_0$, тако да је $|Z_{n+1}^N(\bar{\omega})| < 1$. Тада је

$$(1+k)\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right| + \Delta B\left(\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_1} + \left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_2}\right) < 1+k+2\Delta B$$
$$< (1+k+2\Delta B) r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}},$$

што је у контрадикцији са (3.1.38). Дакле, може се закључити да је $|Z_{n+1}^N(\omega)| \geq 1$, за $\omega \in \Omega_N$, $N \geq N_0$. Тада, прва неједнакост у (3.1.38) имплицира

$$(1+k+2\Delta B)\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma} \geq (1+k+2\Delta B)\,|Z_n^N(\omega)|^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}},$$

што даје релацију (3.1.34).

2.2. Са друге стране, ако се претпостави да је $I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)] \geq 1$, тада се на основу (3.1.35) добија да је

$$\begin{aligned} &\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right| + \Delta B\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_1} \\ &\quad\geq \frac{\Delta}{B}\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\delta_1} - \Delta B K^{\delta_2} - \left|Z_n^N(\omega)\right| - \Delta B\left|Z_{n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)]}^N(\omega)\right|^{\gamma_2} \\ &\quad\quad -\Delta G_B - k|Z_{n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)]}^N(\omega)| - kK, \quad \omega \in \Omega_N. \end{aligned} \tag{3.1.39}$$

Такође, може се уочити да услов $I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)] \geq 1$ имплицира неједнакост $n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)] \leq n$. Тада се, на основу индуктивне претпоставке (3.1.27), добија да је

$$|Z_{i+1}^N(\omega)| \geq |Z_i^N(\omega)|, \quad \omega \in \Omega_N, \tag{3.1.40}$$

за свако $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Специјално, за $i = n-1$, следи да је

$$|Z_n^N(\omega)| \geq |Z_{n-1}^N(\omega)| \geq \cdots \geq |Z_{n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)]}(\omega)|, \quad \omega \in \Omega_N. \tag{3.1.41}$$

На основу релација (3.1.29) и (3.1.39), важи да је

$$\begin{aligned} &\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right| + \Delta B\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_1} \\ &\geq \frac{\Delta}{B}\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\delta_1} - \Delta B K^{\delta_2} - \left|Z_n^N(\omega)\right| - \Delta B\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\gamma_2} - \Delta G_B - k|Z_n^N(\omega)| - kK \\ &\geq \left|Z_n^N(\omega)\right|^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}}\left(\frac{\Delta}{B}\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\frac{\delta_1-\gamma}{2}} - \Delta B K^{\delta_2} - 1 - \Delta B - \Delta G_B - k - kK\right) \\ &\geq \left|Z_n^N(\omega)\right|^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}}\left(\frac{\Delta}{B} r_N^{\frac{\delta_1-\gamma}{2}} - \Delta B K^{\delta_2} - 1 - \Delta B - \Delta G_B - k - kK\right), \ \omega \in \Omega_N. \end{aligned} \tag{3.1.42}$$

Са друге стране, може се уочити да, из дефиниције (3.1.16), следи да је

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{B} r_N^{\frac{\delta_1-\gamma}{2}} &\geq 2 + 2kK + \Delta B K^{\gamma_2} + \Delta B + \Delta G_B + \Delta B K^{\delta_2} \\ &\geq 1 + k + kK + \Delta B + \Delta G_B + \Delta B K^{\delta_2} + 1 + \Delta B, \end{aligned}$$

односно, важи да је

$$\frac{\Delta}{B} r_N^{\frac{\delta_1-\gamma}{2}} - \Delta B K^{\delta_2} - 1 - \Delta B - \Delta G_B - k - kK \geq 1 + \Delta B,$$

што, заједно са (3.1.29) и (3.1.42), имплицира

$$\begin{aligned}\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right| + \Delta B \left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_1} &\geq (1+\Delta B) \left|Z_n^N(\omega)\right|^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}} \\ &\geq (1+\Delta B) r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}}, \quad \omega \in \Omega_N.\end{aligned}$$

Сада се на основу резултата у Случају 1, добија релација (3.1.34).

3. Претпоставља се да је $I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)] \geq n+1$ и $I_\Delta[\delta(n\Delta)] < n$. Тада, на основу (3.1.30), следи да је

$$\begin{aligned}&\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right| \\ &\geq \left|g\left(Z_n^N(\omega), Z_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega)\right)\right| \Delta - \left|Z_n^N(\omega)\right| \\ &-\Delta\left|f\left(Z_{n+1}^N(\omega), \xi(n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)], \omega)\right)\right| I_{\{|Z_{n+1}^N(\omega)| \vee |\xi(n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)],\omega)| \geq B\}} \\ &-\Delta\left|f\left(Z_{n+1}^N(\omega), \xi(n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)], \omega)\right)\right| I_{\{|Z_{n+1}^N(\omega)| \vee |\xi(n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)],\omega)| < B\}} \\ &-k|\xi(n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)], \omega)| - k|Z_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega)|, \quad \omega \in \Omega_N.\end{aligned}$$

На основу услова (3.1.10), релације (3.1.15) и дефиниције (3.1.17) догађаја Ω_N, следи да је

$$\begin{aligned}&\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right| \\ &\quad\geq \frac{\Delta}{B}\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\delta_1} - \Delta B \left|Z_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega)\right|^{\delta_2} - |Z_n^N(\omega)| \\ &\qquad - \Delta B |Z_{n+1}^N(\omega)|^{\gamma_1} - \Delta B |\xi(n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)], \omega)|^{\gamma_2} - \Delta G_B \\ &\qquad - k|\xi(n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)], \omega)| - k|Z_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega)| \\ &\quad\geq \frac{\Delta}{B}\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\delta_1} - \Delta B \left|Z_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega)\right|^{\delta_2} - |Z_n^N(\omega)| \\ &\qquad - \Delta B |Z_{n+1}^N(\omega)|^{\gamma_1} - \Delta B K^{\gamma_2} - \Delta G_B - kK - k\left|Z_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega)\right|.\end{aligned} \tag{3.1.43}$$

Штавише, може се уочити да је $n - I_\Delta[\delta(n\Delta)] \leq n$. Дакле, на основу релације (3.1.40), за $i = n-1$, важи да је

$$|Z_n^N(\omega)| \geq |Z_{n-1}^N(\omega)| \geq \cdots \geq |Z_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega)|, \ \omega \in \Omega_N. \tag{3.1.44}$$

Применом релација (3.1.29) и (3.1.43), добија се да је

$$\begin{aligned}&\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right| + \Delta B |Z_{n+1}^N(\omega)|^{\gamma_1} \\ &\geq \frac{\Delta}{B}\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\delta_1} - \Delta B \left|Z_n^N(\omega)\right|^{\delta_2} - |Z_n^N(\omega)| - \Delta B K^{\gamma_2} - \Delta G_B - kK - k\left|Z_n(\omega)\right| \\ &\geq \left|Z_n^N(\omega)\right|^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}} \left(\frac{\Delta}{B}|Z_n^N(\omega)|^{\frac{\delta_1-\gamma}{2}} - \Delta B - 1 - \Delta B K^{\gamma_2} - \Delta G_B - kK - k\right) \\ &\geq \left|Z_n^N(\omega)\right|^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}} \left(\frac{\Delta}{B} r_N^{\frac{\delta_1-\gamma}{2}} - \Delta B - 1 - \Delta B K^{\gamma_2} - \Delta G_B - kK - k\right).\end{aligned} \tag{3.1.45}$$

Такође, дефиниција (3.1.16) даје

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{B} r_N^{\frac{\delta_1-\gamma}{2}} &\geq 2 + 2kK + \Delta B K^{\gamma_2} + \Delta B + \Delta G_B + \Delta B K^{\delta_2} \\ &\geq 1 + k + kK + \Delta B K^{\gamma_2} + \Delta G_B + \Delta B + 1 + \Delta B,\end{aligned}$$

односно

$$\frac{\Delta}{B} r_N^{\frac{\delta_1-\gamma}{2}} - \Delta B - 1 - \Delta B K^{\gamma_2} - \Delta G_B - kK - k \geq 1 + \Delta B,$$

што, заједно са (3.1.29) и (3.1.45), имплицира

$$\begin{aligned}\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right| + \Delta B \left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_1} &\geq (1+\Delta B)\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}} \\ &\geq (1+\Delta B) r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}}, \quad \omega \in \Omega_N.\end{aligned}$$

Сада се, на сличан начин као у Случају 1, добија релација (3.1.34).

4. Коначно, претпоставља се да важи да је $I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)] < n+1$ и $I_\Delta[\delta(n\Delta)] < n$. Тада се, имајући у виду (3.1.30), закључује да је

$$\begin{aligned}&\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right| \\ &\quad \geq \left|g\left(Z_n^N(\omega), Z_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega)\right)\right|\Delta - \left|Z_n^N(\omega)\right| \\ &\quad -\Delta\left|f\left(Z_{n+1}^N(\omega), Z_{n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)]}^N(\omega)\right)\right| I_{\{|Z_{n+1}^N(\omega)|\vee|Z_{n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)]}^N(\omega)|\geq B\}} \\ &\quad -\Delta\left|f\left(Z_{n+1}^N(\omega), Z_{n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)]}^N(\omega)\right)\right| I_{\{|Z_{n+1}^N(\omega)|\vee|Z_{n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)]}^N(\omega)|<B\}} \\ &\quad -k|Z_{n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)]}^N(\omega)| - k|Z_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega)|, \quad \omega \in \Omega_N.\end{aligned}$$

Применом услова (3.1.10) и релације (3.1.15), следи да је

$$\begin{aligned}\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right| \geq \frac{\Delta}{B}\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\delta_1} &- \Delta B\left|Z_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega)\right|^{\delta_2} - \left|Z_n^N(\omega)\right| \\ &- \Delta B\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_1} - \Delta B\left|Z_{n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)]}^N(\omega)\right|^{\gamma_2} - \Delta G_B \\ &- k|Z_{n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)]}^N(\omega)| - k|Z_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega)|, \quad \omega \in \Omega_N.\end{aligned} \tag{3.1.46}$$

4.1. Ако је $I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)] = 0$, тада је

$$\begin{aligned}\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right| \geq \frac{\Delta}{B}\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\delta_1} &- \Delta B\left|Z_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega)\right|^{\delta_2} - \left|Z_n^N(\omega)\right| - \Delta B\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_1} \\ &- \Delta B\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_2} - \Delta G_B - k|Z_{n+1}^N(\omega)| - k\left|Z_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega)\right|.\end{aligned}$$

Имајући у виду релацију (3.1.44), добија се да је

$$\begin{aligned}&(1+k)|Z_{n+1}^N(\omega)| + \Delta B\left(\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_1} + \left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_2}\right) \\ &\quad \geq \frac{\Delta}{B}\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\delta_1} - \Delta B\left|Z_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega)\right|^{\delta_2} - \left|Z_n^N(\omega)\right| - \Delta G_B \\ &\qquad - k\left|Z_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega)\right| \\ &\quad \geq \frac{\Delta}{B}\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\delta_1} - \Delta B\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\delta_2} - \left|Z_n^N(\omega)\right| - \Delta G_B - k\left|Z_n^N(\omega)\right|.\end{aligned}$$

Тада (3.1.29) имлицира

$$\begin{aligned}
&(1+k)|Z_{n+1}^N(\omega)| + \Delta B\left(\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_1} + \left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_2}\right)\\
&\geq \left|Z_n^N(\omega)\right|^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}}\left(\frac{\Delta}{B}\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\frac{\delta_1-\gamma}{2}} - \Delta B - 1 - \Delta G_B - k\right)\\
&\geq \left|Z_n^N(\omega)\right|^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}}\left(\frac{\Delta}{B}r_N^{\frac{\delta_1-\gamma}{2}} - \Delta B - 1 - \Delta G_B - k\right), \quad \omega\in\Omega_N. \qquad (3.1.47)
\end{aligned}$$

Такође, на основу дефиниције (3.1.16), важи да је

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta}{B}r_N^{\frac{\delta_1-\gamma}{2}} &\geq 2 + 2kK + \Delta BK^{\gamma_2} + \Delta B + \Delta G_B + \Delta BK^{\delta_2}\\
&\geq 1 + k + \Delta G_B + \Delta B + 1 + k + 2\Delta B,
\end{aligned}$$

одакле, следи да је

$$\frac{\Delta}{B}r_N^{\frac{\delta_1-\gamma}{2}} - \Delta B - 1 - \Delta G_B - k \geq 1 + k + 2\Delta B, \qquad (3.1.48)$$

што, заједно са (3.1.29) и (3.1.47), имплицира

$$\begin{aligned}
(1+k)\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right| + \Delta B\left(\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_1} + \left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_2}\right)&\\
\geq (1+k+2\Delta B)\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}}&\\
\geq (1+k+2\Delta B)r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}}, \quad \omega\in\Omega_N.&
\end{aligned}$$

Применом истих аргумената као у Случају 2.1, може се закључити да важи релација (3.1.34).

4.2. Ако се претпостави да је $I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)] \geq 1$, тада се, применом релација (3.1.29), (3.1.41) и (3.1.44), израз (3.1.46) може оценити као

$$\begin{aligned}
\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right| \geq \frac{\Delta}{B}\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\delta_1} - \Delta B\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\delta_2} - \left|Z_n^N(\omega)\right| - \Delta B\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_1}&\\
- \Delta B\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\gamma_2} - \Delta G_B - 2k|Z_n^N(\omega)|.&
\end{aligned}$$

Дакле, имајући у виду релацију (3.1.29), следи да је

$$\begin{aligned}
&\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right| + \Delta B\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_1}\\
&\quad\geq \frac{\Delta}{B}\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\delta_1} - \Delta B\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\delta_2} - \left|Z_n^N(\omega)\right| - \Delta B\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\gamma_2}\\
&\qquad - \Delta G_B - 2k|Z_n^N(\omega)|\\
&\quad\geq \left|Z_n^N(\omega)\right|^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}}\left(\frac{\Delta}{B}\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\frac{\delta_1-\gamma}{2}} - 2\Delta B - 1 - \Delta G_B - 2k\right)\\
&\quad\geq \left|Z_n^N(\omega)\right|^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}}\left(\frac{\Delta}{B}r_N^{\frac{\delta_1-\gamma}{2}} - 2\Delta B - 1 - \Delta G_B - 2k\right). \qquad (3.1.49)
\end{aligned}$$

Штавише, на основу (3.1.16), важи да је

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{B} r_N^{\frac{\delta_1-\gamma}{2}} &\geq 2+2kK+\Delta B K^{\gamma_2}+\Delta B+\Delta G_B+\Delta B K^{\delta_2}\\ &\geq 1+2k+2\Delta B+\Delta G_B+1+\Delta B,\end{aligned}$$

односно

$$\frac{\Delta}{B} r_N^{\frac{\delta_1-\gamma}{2}}-2\Delta B-1-\Delta G_B-2k \geq 1+\Delta B,$$

што, заједно са (3.1.29) и (3.1.49), даје

$$\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|+\Delta B\left|Z_{n+1}^N(\omega)\right|^{\gamma_1} \geq (1+\Delta B)\left|Z_n^N(\omega)\right|^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}}, \quad \omega \in \Omega_N.$$

Сада се, на сличан начин као у Случају 1, добија релација (3.1.34).

На основу (3.1.29), уочава се да је $r_N \geq 2$, за свако $N \geq N_0$. С обзиром на претходно разматрање, закључује се да је

$$|Z_N^N(\omega)| \geq r_N^{\left(\frac{\delta_1+\gamma}{2\gamma}\right)^{N-1}} \geq 2^{\left(\frac{\delta_1+\gamma}{2\gamma}\right)^{N-1}}, \qquad \omega \in \Omega_N, N \geq N_0. \tag{3.1.50}$$

Узимајући у обзир дефиницију (3.1.17), следи да је, за сваки природан број $N \geq N_0$,

$$\begin{aligned}P(\Omega_N) &= \vartheta P\Big(\big|B_1\big| \geq \Delta\Big)^{N-1} P\Big(\big|B_1\big| \geq K\Big(2r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}}+K\Big)\Big)\\ &= \vartheta P\Big(\big|B(\Delta)\big| \geq \Delta\Big)^{N-1} P\Big(\big|B(\Delta)\big| \geq K\Big(2r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}}+K\Big)\Big)\\ &\geq \vartheta P\Big(\big|B(1)\big| \geq \sqrt{\Delta}\Big)^{N} P\left(\big|B(1)\big| \geq \frac{K\Big(2r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}}+K\Big)}{\sqrt{\Delta}}\right).\end{aligned}$$

Примена Леме 3.1.1 имплицира

$$P(\Omega_N) \geq \vartheta\Big(\frac{\sqrt{\Delta}}{4} e^{-\Delta}\Big)^N \frac{K(2r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}}+K)}{4\sqrt{\Delta}} e^{-\frac{K^2\left(2r_N^{\frac{\delta_1+\gamma}{2}}+K\right)^2}{\Delta}}.$$

Имајући у виду да је $\Delta=\frac{T}{N}$, следи да постоје константа $b \in \left(1+\frac{2(\delta_1+\gamma)}{\delta_1-\gamma},+\infty\right)$ и довољно велики природан број $N_0' \geq N_0 = \lfloor\frac{T(\mu_1+\mu_2)}{1-k}\rfloor+1$, за које важи да је

$$P(\Omega_N) \geq b^{-N^b}, \quad N \in \mathbb{N}, N \geq N_0'. \tag{3.1.51}$$

Сада, дефиниција (3.1.50) и релација (3.1.51) имплицирају

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} E|Z_N^N| &\geq \lim_{N\to\infty} E\Big[I_{\Omega_N}|Z_N^N|\Big]\\ &\geq \lim_{N\to\infty} E\left[P(\Omega_N) r_N^{\left(\frac{\delta_1+\gamma}{2\gamma}\right)^{N-1}}\right]\\ &\geq \lim_{N\to\infty}\left[b^{-N^b} 2^{\left(\frac{\delta_1+\gamma}{2\gamma}\right)^{N-1}}\right]\\ &= +\infty,\end{aligned}$$

одакле следи (3.1.14). Штавише, ако је $p \in (0, 1]$, тада на основу елементарне неједнакости (1.4.5), следи да је

$$E|Z_N^N|^p \leq E|x(T) - Z_N^N|^p + E|x(T)|^p.$$

Како је, по претпоставци, $E|x(T)|^p < \infty$, закључује се да је

$$\lim_{N\to\infty} E|x(T) - Z_N^N|^p \geq \lim_{N\to\infty} E|Z_N^N|^p - E|x(T)|^p = +\infty,$$

односно, важи релација (3.1.13). Са друге стране, ако је $p > 1$, применом елементарне неједнакости (1.4.6), добија се да је

$$E|Z_N^N|^p \leq (1+\theta)^{p-1}(E|x(T) - Z_N^N|^p + \theta^{1-p}E|x(T)|^p),$$

односно, на основу ограничености апсолутног момента реда p тачног решења, следи релација (3.1.13). Тиме је доказ завршен. □

Напомена 3.1.1 *Претходна теорема се односи на случај када је* $d = 1$. *У том смислу је потребно нагласити да, за* $d > 1$, *ако је матрица* g *дијагонална и ако важе услови ове теореме бар за једну координату нумеричког решења, тада важи* L^p*-дивергенција нумеричке методе у вишедимензионалном случају.*

3.1.2 Примери и нумеричке симулације

У овом одељку се разматрају два примера једначина облика (3.1.1). Најпре се доказује да једначине задовољавају услове теореме која гарантује егзистенцију и јединственост њихових глобалних решења. Затим се доказује да су апсолутни моменти првог реда тачног решења коначни на произвољном коначном временском интервалу. Такође, показује се да важе услови Леме 3.1.2, који гарантују егзистенцију и јединственост семиимплицитног Ојлеровог решења. Коначно, закључује се да важе и услови Теореме 3.1.1, тј. да нумеричка решења добијена семиимплицитном Ојлеровом методом дивергирају у строгом L^p-смислу на разматраним временским интервалима. Тиме се доказује да класа једначина облика (3.1.1) са јединственим глобалним решењем, коначним апсолутним моментом првог реда у крајњем тренутку разматраног временског интервала и бесконачним моментом првог реда семиимплицитног Ојлеровог решења у истом тренутку, није празна.

Најпре се уводи претпоставка која је битна за доказ егзистенције и јединствености глобалног решења једначине (3.1.1).

$\mathcal{A}_2$: Нека постоје функције $V \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}_+)$ и $U_1, U_2 \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}_+)$, као и ненегативне константе c_1, c_2, c_3, где је $c_2 > c_3$, тако да је

$$\lim_{|x|\to\infty} U_1(x) = \infty,$$

и нека, за свако $x, y \in \mathbb{R}$, важи да је

$$\begin{aligned} &U_1(x) \leq V(x) \leq U_2(x), \\ &LV(x,y) \leq c_1 - c_2 U_2(x) + c_3(1-\bar{\delta})U_2(y), \end{aligned}$$

где је $LV : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ оператор, дефинисан са

$$LV(x,y) = V_x(x - u(y))f(x,y) + \frac{1}{2}|g(x,y)|^2 V_{xx}(x - u(y)).$$

Наредном теоремом су дати довољни услови егзистенције и јединствености глобалног решења једначине (3.1.1).

Теорема 3.1.2 (Теорема 2, [48]) *Нека важе Претпоставке $\mathcal{H}_1$–$\mathcal{H}_3$ и $\mathcal{A}_2$. Ако је функција кашњења $\delta(t)$ ограничена, у смислу да је*

$$\bar{h} := \sup_{t \geq 0} \delta(t) < \infty, \tag{3.1.52}$$

тада, за сваки почетни услов $\xi \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; \mathbb{R})$, постоји јединствено глобално решење x једначине (3.1.1) и важи да је

$$\limsup_{t \to \infty} EU_1(x(t) - u(x(t - \delta(t)))) \leq \frac{c_1}{\varepsilon}, \tag{3.1.53}$$

где је $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, док је ε_0 јединствени позитивни корен једначине $c_2 = \varepsilon_0 + c_3 e^{\varepsilon_0 \bar{h}}$.

Потребно је нагласити да су Претпоставка $\mathcal{A}_2$ и Теорема 3.1.2 из рада [48], где су разматране неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем и прелазима Маркова. Ради погодности, поменуте претпоставка и теорема, формулисане су у складу са једначинама које се разматрају у овом поглављу, без прелаза Маркова.

Пример 3.1.1 *Разматра се следећа једнодимензионална неутрална СДЈ са временски зависним кашњењем*

$$\begin{aligned} d\Big[x(t) - \frac{1}{3}\frac{\sin x(t-\delta(t))}{2+\sin^2 x(t-\delta(t))}\Big] = \Big(&-x(t) - x^3(t) - \frac{1}{8}\sin^2 x(t-\delta(t))\Big)dt \\ &+ \frac{1}{20}\left(x^4(t) - |x(t-\delta(t))|\right)dw(t), \quad t \in [0,5], \end{aligned} \tag{3.1.54}$$

са почетним условом $\xi(\theta) = 20$, $\theta \in [-\tau, 0]$, $\tau = 1$, где је функција кашњења дефинисана са $\delta(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t$, $t \in [0,5]$.

Очигледно је да коефицијенти преноса и дифузије једначине (3.1.54) задовољавају локални Липшицов услов, односно важи Претпоставка $\mathcal{H}_1$. Сада је потребно доказати да неутрални члан

$$u(x) = \frac{1}{3}\frac{\sin x}{2 + \sin^2 x}, \; x \in \mathbb{R},$$

задовољава Претпоставку $\mathcal{H}_2$. *У том смислу, за свако* $x, y \in \mathbb{R}$, *важи да је*

$$\begin{aligned} |u(x)-u(y)| &= \frac{|(\sin x-\sin y)(2-\sin x\sin y)|}{3(2+\sin^2 x)(2+\sin^2 y)} \\ &= \frac{\left|2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}(2-\sin x\sin y)\right|}{3(2+\sin^2 x)(2+\sin^2 y)} \\ &\le \frac{1}{4}|x-y|. \end{aligned} \tag{3.1.55}$$

Штавише, следи да је $u(0)=0$. *Дакле, може се закључити да важи Претпоставка* $\mathcal{H}_2$ *за* $k=\frac{1}{4}$. *Претпоставка* $\mathcal{H}_3$ *је такође задовољена јер је први извод функције кашњења ограничен, тј.* $\delta'(t) = -\frac{1}{2}\sin t \le \frac{1}{2} = \bar{\delta}$, *за свако* $t \in [0,5]$. *Нека је функција* V *дефинисана са*

$$V(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тада је

$$V_x(x) = \frac{x\left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+1\right]}{1+x^2}, \quad V_{xx}(x) = \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Ако се уведе ознака $m(x,y) = \left(x - \frac{\sin y}{3(2+\sin^2 y)}\right)$, *важи да је*

$$\begin{aligned} LV(x,y) &= \frac{m(x,y)\left[\left(1+m^2(x,y)\right)^{\frac{1}{2}}+1\right]}{1+m^2(x,y)}\Big(-x-x^3-\frac{1}{8}\sin^2 y\Big) \\ &\quad + \frac{1}{800}\frac{\left(1+m^2(x,y)\right)^{\frac{1}{2}}+1-m^2(x,y)}{\left(1+m^2(x,y)\right)^2}\Big(x^4-|y|\Big)^2 \\ &= \frac{\left(1+m^2(x,y)\right)^{\frac{1}{2}}+1}{1+m^2(x,y)} \\ &\quad \times\Big(-x^2-x^4-\frac{1}{8}x\sin^2 y+\frac{1}{3}x\frac{\sin y}{2+\sin^2 y}+\frac{1}{3}x^3\frac{\sin y}{2+\sin^2 y}+\frac{1}{24}\frac{\sin^3 y}{2+\sin^2 y}\Big) \\ &\quad + \frac{1}{800}\frac{\left(1+m^2(x,y)\right)^{\frac{1}{2}}+1-m^2(x,y)}{\left[1+m^2(x,y)\right]^2}\Big(x^8-2x^4|y|+y^2\Big) \\ &\le \frac{\left(1+m^2(x,y)\right)^{\frac{1}{2}}+1}{1+m^2(x,y)}\Big(-x^2-x^4+\frac{17}{72}|x|+\frac{1}{9}|x|^3+\frac{1}{72}\Big) \\ &\quad + \frac{1}{800}\frac{\left(1+m^2(x,y)\right)^{\frac{1}{2}}+1-m^2(x,y)}{\left(1+m^2(x,y)\right)^2}\Big(x^8-2x^4|y|+y^2\Big). \end{aligned} \tag{3.1.56}$$

Бројилац у другом сабирку израза (3.1.56) се може представити као функција

$$h(z) = (1+z^2)^{\frac{1}{2}} + 1 - z^2, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Лако се уочава да је функција h ограничена, тј. да је $h(z) \le h(0) = 2$, за свако $z \in \mathbb{R}$. Штавише, применом елементарне неједнакости (1.4.4), следи да је

$$|x| \le \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}, \quad |x|^3 \le \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{4}. \tag{3.1.57}$$

Дакле, (3.1.56) се може оценити као

$$\begin{aligned}
&LV(x,y)\\
&\le \frac{\Big[\Big(1+m^2(x,y)\Big)^{\frac{1}{2}}+1\Big]\Big(-\frac{127}{144}x^2-\frac{11}{12}x^4+\frac{23}{144}\Big)}{1+m^2(x,y)}\\
&\quad+\frac{\Big[\Big(1+m^2(x,y)\Big)^{\frac{1}{2}}+1-m^2(x,y)\Big]\Big(\frac{1}{800}x^8-\frac{1}{400}x^4|y|\Big)+\frac{1}{400}y^2}{\Big(1+m^2(x,y)\Big)^2}\\
&\le \frac{-\frac{127}{144}x^2-\frac{11}{12}x^4}{\Big(1+m^2(x,y)\Big)^{\frac{1}{2}}}+\frac{\frac{23}{144}\Big[\Big(1+m^2(x,y)\Big)^{\frac{1}{2}}+1\Big]}{1+m^2(x,y)} \qquad (3.1.58)\\
&\quad+\frac{\frac{1}{800}x^8\Big(1+m^2(x,y)\Big)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{800}x^8-\frac{1}{800}x^8m^2(x,y)+\frac{1}{400}x^4|y|m^2(x,y)+\frac{1}{400}y^2}{\Big(1+m^2(x,y)\Big)^2}.
\end{aligned}$$

На основу елементарне неједнакости (1.4.4), следи да је

$$\begin{aligned}
\frac{1}{800}x^8\Big(1+m^2(x,y)\Big)^{\frac{1}{2}} &\le \frac{1}{1000}x^{10}+\frac{1}{4000}\Big(1+m^2(x,y)\Big)^{\frac{5}{2}},\\
\frac{1}{400}x^4|y|m^2(x,y) &\le \frac{1}{800}x^8+\frac{1}{800}y^2m^4(x,y).
\end{aligned}$$

Такође, други сабирак у изразу (3.1.58), може се представити као функција

$$v(z) = \frac{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}+1}{1+z^2}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Лако је проверити да важи $v(z) \le v(0) = 2$. Дакле, добија се да је

$$\begin{aligned}
LV(x,y) \le\ & \frac{-\frac{127}{1444}x^2-\frac{11}{12}x^4}{\Big(1+m^2(x,y)\Big)^{\frac{1}{2}}}+\frac{23}{72}\\
&+\frac{1}{\Big(1+m^2(x,y)\Big)^2}\Bigg\{\frac{x^{10}}{1000}+\frac{1}{4000}\Big(1+m^2(x,y)\Big)^{\frac{5}{2}}+\frac{x^8}{400}-\frac{x^{10}}{800}\\
&+\frac{x^9}{400}\frac{\sin y}{3(2+\sin^2 y)}-\frac{x^8}{800}\frac{\sin^2 y}{9(2+\sin^2 y)^2}+\frac{y^2}{800}m^4(x,y)+\frac{y^2}{400}\Bigg\},
\end{aligned}$$

односно

$$LV(x,y) \leq \frac{-\frac{127}{144}x^2 - \frac{11}{12}x^4}{\Big(1+m^2(x,y)\Big)^{\frac{1}{2}}} + \frac{23}{72}$$
$$+ \frac{-\frac{1}{4000}x^{10} + \frac{1}{4000}\Big(1+m^2(x,y)\Big)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{400}x^8 + \frac{1}{3600}|x|^9}{\Big(1+m^2(x,y)\Big)^2} + \frac{1}{400}y^2.$$

Поновном применом елементарне неједнакости (1.4.4), важи да је

$$\begin{aligned}\frac{1}{400}x^8 &= \frac{1}{400}\cdot\frac{1}{16}(x^{10})^{\frac{4}{5}}(16^5)^{\frac{1}{5}} \leq \frac{1}{8000}x^{10} + \frac{4^6}{125},\\ \frac{1}{3600}|x|^9 &= \frac{1}{3600}\cdot\frac{1}{3}(x^{10})^{\frac{9}{10}}(3^{10})^{\frac{1}{10}} \leq \frac{1}{12000}x^{10} + \frac{3^8}{12000},\end{aligned}$$

односно, добија се да је

$$LV(x,y) \leq \frac{-\frac{127}{144}x^2 - \frac{11}{12}x^4}{\Big(1+m^2(x,y)\Big)^{\frac{1}{2}}} + c_0 + \frac{1}{400}y^2 + \frac{1}{4000}\Big(1+m^2(x,y)\Big)^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.1.59)$$

где је $c_0 = \frac{23}{72} + \frac{4^6}{125} + \frac{3^8}{12000}$. *Имајући у виду (3.1.57), може се закључити да је*

$$\begin{aligned}-\frac{127}{144}x^2 - \frac{11}{12}x^4 &= -\frac{3}{200}(1+x^2)\Big(1+m^2(x,y)\Big) + \frac{3}{200} + \frac{3}{100}x^2\\ &\quad - \frac{1}{100}x\frac{\sin y}{2+\sin^2 y} + \frac{1}{600}\frac{\sin^2 y}{(2+\sin^2 y)^2} + \frac{3}{200}x^4 - \frac{1}{100}x^3\frac{\sin y}{2+\sin^2 y}\\ &\quad + \frac{1}{600}x^2\frac{\sin^2 y}{(2+\sin^2 y)^2} - \frac{127}{144}x^2 - \frac{11}{12}x^4\\ &\leq -\frac{3}{200}(1+x^2)\Big(1+m^2(x,y)\Big)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{200} + \frac{3}{100}x^2 + \frac{1}{300}|x| + \frac{1}{5400}\\ &\quad + \frac{3}{200}x^4 + \frac{1}{300}|x|^3 + \frac{1}{5400}x^2 - \frac{127}{144}x^2 - \frac{11}{12}x^4\\ &\leq -\frac{3}{200}(1+x^2)\Big(1+m^2(x,y)\Big)^{\frac{1}{2}} + \frac{191}{10800} - \frac{9181}{10800}x^2 - \frac{1079}{1200}x^4\\ &\leq -\frac{3}{200}(1+x^2)\Big(1+m^2(x,y)\Big)^{\frac{1}{2}} + \frac{191}{10800}. \qquad (3.1.60)\end{aligned}$$

Заменом израза (3.1.60) у (3.1.59), следи да је

$$LV(x,y) \leq \frac{\frac{191}{10800} - \frac{3}{200}(1+x^2)\Big(1+m^2(x,y)\Big)^{\frac{1}{2}}}{\Big(1+m^2(x,y)\Big)^{\frac{1}{2}}} + c_0 + \frac{1}{400}y^2$$
$$+ \frac{1}{4000}\Big(1 + x^2 - 2x\frac{\sin y}{3(2+\sin^2 y)} + \frac{\sin^2 y}{9(2+\sin^2 y)^2}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

тако да је

$$
\begin{aligned}
LV(x,y) &\le -\frac{3}{200}(1+x^2)+\frac{191}{10800}+c_0+\frac{1}{400}y^2+\frac{1}{4000}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad+\frac{1}{4000}\Big(2|x|\frac{|\sin y|}{3(2+\sin^2 y)}\Big)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4000}\Big(\frac{\sin^2 y}{9(2+\sin^2 y)^2}\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\le -\frac{3}{200}(1+x^2)+\frac{191}{10800}+c_0+\frac{1}{400}y^2+\frac{1}{2400}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{36000}\\
&\le -\frac{7}{480}(1+x^2)+\frac{1913}{108000}+c_0+\frac{1}{400}y^2\\
&\le \frac{1913}{108000}+c_0-\frac{7}{480}(1+x^2)+\frac{1}{400}(1+y^2)\\
&= c_1-c_2U_2(x)+c_3(1-\bar{\delta})U_2(y),
\end{aligned}
$$

где је $c_1=\frac{1913}{108000}+c_0$, $c_2=\frac{7}{960}$ *и* $c_3=\frac{1}{800(1-\bar{\delta})}=\frac{1}{400}$, *док је* $U_2(x)=2(1+x^2), x\in\mathbb{R}$. *За* $U_1(x)=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x\in\mathbb{R}$, *може се закључити да важи Претпоставка* $\mathcal{A}_2$. *Према томе, важе услови Теореме 3.1.2, односно постоји јединствено глобално решење једначине (3.1.54), тако да је, за свако* $T\in(0,\infty)$,

$$E|x(t)-u(x(t-\delta(t)))|\le EU_1(x(t)-u(x(t-\delta(t))))\le C,\quad t\in[0,T].$$

где је C *позитивна константа. На основу претходне релације, може се закључити да је*

$$\sup_{0\le s\le t}E|x(s)-u(x(s-\delta(s)))|\le C,$$

одакле следи да је

$$
\begin{aligned}
E|x(t)| &\le E|x(t)-u(x(t-\delta(t)))|+E|u(x(t-\delta(t)))|\\
&\le C+kE|x(t-\delta(t))|\\
&\le C+k\sup_{-\tau\le s\le t}E|x(s)|\\
&\le C+k\|\xi\|+k\sup_{0\le s\le t}E|x(s)|.
\end{aligned}
$$

Директна последица претходне неједнакости је

$$\sup_{0\le s\le t}E|x(s)|\le C+k\|\xi\|+k\sup_{0\le s\le t}E|x(s)|,$$

тако да је

$$\sup_{0\le s\le t}E|x(s)|\le\frac{C+k\|\xi\|}{1-k},\quad t\in[0,T],$$

односно, први апсолутни момент тачног решења једначине (3.1.54) је коначан.

Даље се разматра нумеричко решење добијено семиимплицитном Ојлеровом методом, које одговара једначини (3.1.54). У том смислу, нека је $N\in\mathbb{N}$.

За $n \in \{-(M+1), -M, -M+1, ..., 0\}$, *дискретно семиимплицитно Ојлерово решење дафинисано је са* $Y_n^N = \xi(n\Delta) = 20$, *док је, за* $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$,

$$\begin{aligned} Z_{n+1}^N = Z_n^N &+ \frac{\sin\big(Z^N_{n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)]}\big)}{3\big(2+\sin^2\big(Z^N_{n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)]}\big)\big)} - \frac{\sin\big(Z^N_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}\big)}{3\big(2+\sin^2\big(Z^N_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}\big)\big)} \\ &+\Big(-Z_{n+1}^N - (Z_{n+1}^N)^3 - \frac{1}{8}\sin^2 Z^N_{n+1-I_\Delta[\delta((n+1)\Delta)}\Big)\Delta \\ &+\frac{1}{20}\left(\left(Z_n^N\right)^4 - \left|Z^N_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}\right|\right)\big(B_{n+1}-B_n\big). \end{aligned} \tag{3.1.61}$$

Да би се гарантовале егзистенција и јединственост решења једначине (3.1.61), потребно је доказати да коефицијент преноса

$$f(x,y) = -x - x^3 - \frac{1}{8}\sin^2 y, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

задовољава једностране Липшицове услове по првом и другом аргументу, односно да важи Претпоставка $\mathcal{A}_1$. *У том смислу, за свако* $x, y, z \in \mathbb{R}$, *важи да је*

$$(x-y)(f(x,z) - f(y,z)) = -(x-y)^2(1+x^2+xy+y^2) \le \mu_1|x-y|^2,$$

за свако $\mu_1 > 0$. *Штавише, добија се да је*

$$\begin{aligned} (x-y)(f(z,x)-f(z,y)) &= -\frac{1}{8}(x-y)(\sin x - \sin y)(\sin x + \sin y) \\ &= -\frac{1}{4}(x-y)\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}(\sin x + \sin y) \\ &\le \frac{1}{4}|x-y|^2. \end{aligned}$$

Дакле, важи Претпоставка $\mathcal{A}_1$ *за свако* $\mu_1 > 0$ *и* $\mu_2 = \frac{1}{4}$. *Како важи Претпоставка* $\mathcal{H}_2$ *за* $k = \frac{1}{4}$, *може се одабрати* $\mu_1 = \frac{1}{4}$, *тако да је* $(\mu_1+\mu_2)\Delta + k < 1$, *за свако* $\Delta < 1$. *Према томе, на основу Леме 3.1.2, закључује се да постоји јединствено решење једначине (3.1.61).*

Коначно, потребно је показати да важи услов (3.1.10) Теореме 3.1.1. У том смислу, лако је уочити да је, за свако $x, y \in \mathbb{R}$, *за које је* $|x| \vee |y| \ge B = 20$,

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &= |-x-x^3-\frac{1}{8}\sin^2 y| \le |x|^3 + |x| + \frac{1}{8}y^2 \le 20\big(|x|^3+|y|^2\big), \\ |g(x,y)| &= \frac{1}{20}\big(x^4 - |y|\big), \end{aligned}$$

тј. важи услов (3.1.10) за $\gamma_1 = 3, \gamma_2 = 2, \delta_1 = 4, \delta_2 = 1$. *Дакле, сви услови Теореме 3.1.1 су задовољени, односно може се закључити да низ семиимплицитних Ојлерових решења (3.1.61) дивергира у* L^p*-смислу.*

У наредном примеру разматра се неутрална СДЈ са константним кашњењем и доказује се да су апсолутни моменти првог реда њеног тачног решења коначни, али да су апсолутни моменти апроксимативног решења добијеног семиимплицитном Ојлеровом методом бесконачни. Представљене су и нумеричке симулације како би се илустровао закључак.

Пример 3.1.2 *Разматра се једнодимензионална неутрална СДЈ са константним кашњењем*

$$d\Big[x(t)-\frac{1}{4}\sin x(t-\tau)\Big]=\Big(-x(t)+\sin x(t-\tau)\Big)dt + \Big(x(t)-\frac{1}{4}\sin x(t-\tau)\Big)^2 dw(t), \quad t\in[0,5], \tag{3.1.62}$$

и почетним условом $\xi(\theta)=4,\ \theta\in[-\tau,0]$, $\tau=1$.

Најпре се доказује да важе услови Теореме 3.1.1, која гарантује егзистенцију и јединственост глобалног решења једначине (3.1.62). Очигледно је да коефицијенти преноса и дифузије једначине (3.1.62) задовољавају локални Липшицов услов $\mathcal{H}_1$, *док за* $k=\frac{1}{4}$, *функција* $u(x)=\frac{1}{4}\sin x$ *задовољава Претпоставку* $\mathcal{H}_2$. *Нека је сада функција* V *дефинисана са* $V(x)=\sqrt{1+x^2}$, *за* $x\in\mathbb{R}$. *Тада, важи да је*

$$V_x(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\qquad V_{xx}(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

тако да је

$$\begin{aligned}
LV(x,y)&\le \frac{-x^2+\frac{5}{4}x\sin y-\frac{1}{4}\sin^2 y}{\sqrt{1+(x-\frac{1}{4}\sin y)^2}}+\frac{1}{2}\frac{\big(x-\frac{1}{4}\sin y\big)^2}{\sqrt{1+\big(x-\frac{1}{4}\sin y\big)^2}}\\
&=-\frac{1}{4}\sqrt{1+x^2}+\frac{\frac{1}{4}\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+(x-\frac{1}{4}\sin y)^2}-\frac{1}{2}x^2+x\sin y-\frac{7}{32}\sin^2 y}{\sqrt{1+(x-\frac{1}{4}\sin y)^2}}\\
&\le-\frac{1}{4}\sqrt{1+x^2}+\frac{\frac{1}{8}\big(1+x^2\big)+\frac{1}{8}\big(1+(x-\frac{1}{4}\sin y)^2\big)-\frac{1}{2}x^2+x\sin y-\frac{7}{32}\sin^2 y}{\sqrt{1+(x-\frac{1}{4}\sin y)^2}}\\
&\le-\frac{1}{4}\sqrt{1+x^2}+\frac{-\frac{1}{4}x^2+\frac{15}{16}|x|+\frac{1}{4}}{\sqrt{1+(x-\frac{1}{4}\sin y)^2}}.
\end{aligned}\tag{3.1.63}$$

Како је

$$\frac{15}{16}|x|=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{15}{8}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}(|x|^2)^{\frac{1}{2}}\le\frac{1}{4}x^2+\frac{225}{256},$$

следи да је

$$LV(x,y)\le\frac{289}{256}-\frac{1}{4}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{8}\sqrt{1+y^2}.$$

За $c_1=\frac{289}{256}$, $c_2=\frac{1}{4}$, $c_3=\frac{1}{8}$, $U_1(x)=U_2(x)=\sqrt{1+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$, *може се закључити да важи Претпоставка* $\mathcal{A}_2$. *Штавише, како је* $\delta(t)=\tau$, $t\in[0,5]$, *важи Претпоставка* $\mathcal{H}_3$, *за* $\bar{\delta}=0$. *Дакле, услови Теореме 3.1.1 важе, односно* *постоји јединствено глобално решење једначине (3.1.62), тако да је, за свако* $T \in (0, \infty)$,

$$E|x(t) - u(x(t-\tau))| \leq EU_1(x(t) - u(x(t-\tau))) \leq C, \quad t \in [0, T],$$

где је C *позитивна константа. Истим поступком као у Примеру 3.1.1, може се закључити да је*

$$\sup_{0 \leq s \leq t} E|x(s)| \leq \frac{C + k\|\xi\|}{1-k}, \quad t \in [0, T],$$

тј. следи ограниченост првог момента тачног решења једначине (3.1.62).

Сада се дефинише семиимплицитно Ојлерово решење које одговара једначини (3.1.62). Нека је $N \in \mathbb{N}$. *За* $n \in \{-(M+1), -M, -M+1, ..., 0\}$, *семиимплицитно Ојлерово решење дефинише се са* $Z_n^N = \xi(n\Delta) = 4$, *док се, за* $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, *дефинише са*

$$\begin{aligned} Z_{n+1}^N = Z_n^N &+ \frac{1}{4} Z_{n+1-M}^N - \frac{1}{4} Z_{n-M}^N + \Big(- Z_{n+1}^N - \sin Z_{n+1-M}^N \Big) \Delta \\ &+ \left(Z_n^N - \frac{1}{4} \sin Z_{n-M}^N \right)^2 \big(B_{n+1} - B_n \big). \end{aligned} \tag{3.1.64}$$

Очигледно је да коефицијент преноса једначине (3.1.62) задовољава једнострани Липшицов услов и по првом и по другом аргументу, тј. важи да је

$$(x-y)(f(x,z) - f(y,z)) = (x-y)(-x + \sin z + y - \sin z) \leq \mu_1 |x-y|^2,$$

за свако $\mu_1 > 0$, *и*

$$\begin{aligned} (x-y)(f(z,x) - f(z,y)) &= (x-y)(\sin x - \sin y) \\ &= 2(x-y) \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \\ &\leq |x-y|^2. \end{aligned}$$

Дакле, важи Претпоставка $\mathcal{A}_1$ *за* $\mu_1 > 0$ *и* $\mu_2 = 1$. *Како Претпоставка* $\mathcal{H}_2$ *важи за* $k = \frac{1}{4}$, *може се одабрати* $\mu_1 = \frac{1}{8}$, *тако да је* $(\mu_1 + \mu_2)\Delta + k < 1$, *за свако* $\Delta < \frac{2}{3}$. *Тиме је доказано да су испуњени услови Леме 3.1.2, односно, постоји јединствено решење једначине (3.1.64).*

За свако $x, y \in \mathbb{R}$, *за које важи да је* $|x| \vee |y| \geq B = 16$, *добија се да је*

$$|f(x,y)| = |-x + \sin y| \leq |x| + |\sin y| \leq 16\big(|x| + |y|\big).$$

Како је

$$x^2 \leq 2 \left(x - \frac{1}{4} \sin y \right)^2 + \frac{1}{8} \sin^2 y,$$

следи да је, за свако $x, y \in \mathbb{R}$, *за које важи* $|x| \vee |y| \geq 16$,

$$|g(x,y)| = |x - \frac{1}{4} \sin y|^2 \geq \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{16} \sin^2 y \geq \frac{1}{16} \big(x^2 - |y|^{\frac{3}{2}} \big),$$

односно, важи услов (3.1.10) за $\gamma_1 = \gamma_2 = 1, \delta_1 = 2, \delta_2 = \frac{3}{2}$. *Испуњени су услови Теореме 3.1.1. Стога, може се закључити да низ семиимплицитних Ојлерових решења једначине (3.1.64) дивергира у* L^p*-смислу.*

Применом програмског пакета Mathematica, симулирано је 10 000 *трајекторија семиимплицитног Ојлеровог решења које одговара једначини (3.1.64). У Табели 3.1.2, представљене су симулиране вредности момената првог реда* $E|Z_N^N|$, *за* $T = 5$ *и* $N = 15, 20, 25, ..., 70$. *Почевши од* $N = 55$, *програм је генерисао информацију* "General:ovfl" *која означава грешку која се јавља када је резултат већи од вредности* $MaxNumber.

$N = 15$	$1.5088893 \cdot 10^{22263}$	$N = 45$	$2.8448994 \cdot 10^{15890371053054}$
$N = 20$	$1.1595917 \cdot 10^{602554}$	$N = 50$	$1.1749093 \cdot 10^{338294941136972}$
$N = 25$	$2.5793244 \cdot 10^{19353723}$	$N = 55$	General:ovfl
$N = 30$	$3.0360465 \cdot 10^{562161396}$	$N = 60$	General:ovfl
$N = 35$	$4.4579376 \cdot 10^{169995536410}$	$N = 65$	General:ovfl
$N = 40$	$5.5362483 \cdot 10^{580173322521}$	$N = 70$	General:ovfl

Табела 3.1: Симулиране вредности $E|Z_N^N|$, $N = 15, 20, 25, ..., 70$ на основу 10 000 трајекторија

3.2 Метода Ојлер–Марујаме за неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем и прелазима Маркова

У овом поглављу се разматра апроксимативно решење Ојлер–Марујаме за класу неутралних СДЈ са временски зависним кашњењем и прелазима Маркова чији коефицијенти преноса и дифузије расту суперлинеарно, док је неутрални члан Липшиц непрекидан са Липшицовом константом $\beta \in (0, 1)$. Доказује се да такво решење не конвергира ни у строгом L^p-смислу ни у нумерички слабом смислу ка тачном решењу разматране СДЈ у крајњој тачки посматраног временског интервала, за $p \in (0, \infty)$, када величина корака тежи нули. Притом је, у општем случају, функција кашњења неограничена. Штавише, одређена је класа неутралних пантографских СДЈ са прелазима Маркова за коју постоји јединствено глобално решење са коначним апсолутним моментима првог реда на било ком коначном временском интервалу, док су моменти првог реда нумеричког решења бесконачни у крајњој тачки тог временског интервала. Теоријска разматрања су употпуњена примером и одговарајућим нумеричким симулацијама.

Резултати изложени у овом поглављу представљени су у раду [52].

3.2.1 L^p-дивергенција методе Ојлер–Марујаме за неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем и прелазима Маркова

Разматра се неутрална СДЈ са временски зависним кашњењем и прелазима Маркова облика (1.5.24), односно, једначина

$$\begin{aligned} &d[x(t) - u(x(t-\delta(t)), r(t))] \\ &\quad = f(x(t), x(t-\delta(t)), r(t))dt + g(x(t), x(t-\delta(t)), r(t))dB(t),\ t \in [-\tau, T], \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

са почетним условима (1.5.25) и (1.5.26), где је Борел-мерљива функција кашњења δ у општем случају неограничена, тј. $\delta : [0,T] \to [0,\infty)$. Поред тога, претпоставља се да постоји једнодимензионални стохастички процес $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$, који представља решење једначине (3.2.1) у смислу Дефиниције 1.5.4.

За потребе доказивања главног резултата овог поглавља, уводи се следећа претпоставка.

$\mathcal{A}_1'$: Нека постоји константа $\beta \in (0,1)$, тако да, за свако $x, y \in \mathbb{R}$ и $i \in S$, важи да је

$$|u(x,i) - u(y,i)| \le \beta |x - y|. \tag{3.2.2}$$

Штавише, претпоставља се да је $u(0,i) = 0$ за свако $i \in S$, што заједно са (3.2.2), имплицира

$$|u(x,i)| \le \beta |x|. \tag{3.2.3}$$

Такође, претпоставља се да је извод функције кашњења δ ограничен у смислу Претпоставке $\mathcal{H}_3$.

У наставку се дефинише апроксимативно решење Ојлер–Марујаме које одговара једначини (1.5.24). У том смислу, нека је $T \in (0,\infty)$ произвољан фиксиран број. Лако је уочити да Претпоставка $\mathcal{H}_3$ гарантује да је $t-\delta(t) \ge -\delta(0)$. Без губљења општости, претпоставља се да је $T/\delta(0)$ рационалан број. Такође, нека је величина корака $\Delta = \delta(0)/M = T/N$ за неке природне бројеве $M > \delta(0)$ и $N > T$. Најпре се дефинише дискретно решење Ојлер–Марујаме Y^N, које одговара једначини (1.5.24), на еквидистантној партицији $n\Delta$, $n \in \{-M, \dots, 0, 1, \dots, N\}$ временског интервала $[-\delta(0), T]$. Како би ово решење било добро дефинисано, нека је

$$\delta(-\Delta) = \delta(0), \qquad r^{\Delta}_{-1} = r^{\Delta}_0 = r(0). \tag{3.2.4}$$

Дискретно апроксимативно решење Ојлер–Марујаме се дефинише као

$$Y^N_{-(M+1)}(\omega) = \xi(-M\Delta, \omega),\ Y^N_n(\omega) = \xi(n\Delta, \omega),\ n \in \{-M, -(M-1), \dots, 0\}, \tag{3.2.5}$$

док је, за $n \in \{1, \dots, N\}$,

$$\begin{aligned} Y^N_n(\omega) = {} & Y^N_{n-1}(\omega) + u\big(Y^N_{n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)]}(\omega), r^\Delta_{n-1}(\omega)\big) - u\big(Y^N_{n-2-I_\Delta[\delta((n-2)\Delta)]}(\omega), r^\Delta_{n-2}(\omega)\big) \\ & + f\left(Y^N_{n-1}(\omega), Y^N_{n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)]}(\omega), r^\Delta_{n-1}(\omega)\right)\Delta \\ & + g\left(Y^N_{n-1}(\omega), Y^N_{n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)]}(\omega), r^\Delta_{n-1}(\omega)\right)\Delta B_{n-1}(\omega), \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

где је $r_n^{\Delta}(\omega) = r(n\Delta, \omega)$.

Наредна теорема даје довољне услове дивергенције методе Ојлер–Марујаме, дефинисане са (3.2.4)–(3.2.6), која одговара једначини (3.2.1).

Теорема 3.2.1 *Нека важе Претпоставке $\mathcal{A}_1'$ и $\mathcal{H}_3$, заједно са условом*

$$P\left\{\omega \in \Omega : \inf_{\theta \in [-\delta(0),0]} |g(\xi(0,\omega), \xi(\theta,\omega), r(0,\omega))| > 0\right\} > 0. \tag{3.2.7}$$

Такође, претпоставља се да за свако $i \in S$ постоје константе $C(i) \geq 1$ и $\delta_1(i), \delta_2(i), \gamma_1(i), \gamma_2(i) > 0$, тако да је $\gamma(i) = \max\{1, \gamma_1(i), \gamma_2(i), \delta_2(i)\}$, $\delta_1(i) > \gamma(i)$ и за свако $i \in S$ и $x, y \in \mathbb{R}$, за које је $\max\{|x|, |y|\} \geq C(i)$, важи да је

$$\min\{|f(x,y,i)|, |g(x,y,i)|\} \leq C(i)(|x|^{\gamma_1(i)} + |y|^{\gamma_2(i)}), \tag{3.2.8}$$

$$\max\{|f(x,y,i)|, |g(x,y,i)|\} \geq \frac{1}{C(i)}|x|^{\delta_1(i)} - C(i)|y|^{\delta_2(i)}. \tag{3.2.9}$$

Тада постоји константа $b \in (1, +\infty)$ и низ непразних догађаја $\{\Omega_N \in \mathcal{F}, N \in \mathbb{N}\}$, тако да је, за свако $N \in \mathbb{N}$ и свако $\omega \in \Omega_N$,

$$P(\Omega_N) \geq b^{-N^b}, \tag{3.2.10}$$

$$|Y_N^N(\omega)| \geq 2^{\bar{\gamma}^{N-1}}, \tag{3.2.11}$$

где је

$$\bar{\gamma} = \max_{i \in S} \gamma(i).$$

Ако постоји јединствено глобално решење $\{x(t), t \in [-\delta(0), T]\}$ које одговара једначини (3.2.1), за које је $E|x(T)|^p < \infty$, за неко $p \in (0, +\infty)$, тада важи да је

$$\lim_{N \to \infty} E|x(T) - Y_N^N|^p = +\infty, \tag{3.2.12}$$

$$\lim_{N \to \infty} \left|E|x(T)|^p - E|Y_N^N|^p\right| = +\infty. \tag{3.2.13}$$

Доказ. Потребно је нагласити да се Претпоставка $\mathcal{H}_3$ не примењује експлицитно у доказу теореме. Улога ове претпоставке је да гарантује да је најдаљи прошли тренутак који се разматра $-\delta(0)$. Такође, услов (3.2.7) искључује детерминистичке диференцијалне једначине из разматрања и обезбеђује да је апсолутна вредност нумеричког решења након прве итерације довољно велика. Штавише, за $p \geq 1$, (3.2.12) представља строгу L^p-дивергенцију решења Ојлер–Марујаме, док (3.2.13) представља нумерички слабу дивергенцију. Обе врсте дивергенције се односе на крајњу тачку разматраног временског интервала, када величина корака тежи нули.

На основу услова (3.2.7) и $\xi \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\delta(0), 0]; \mathbb{R})$ и имајући у виду Дефиницију 1.5.3, може се закључити да постоји константа $K \in [C, +\infty)$, где је $C = \max_{i \in S} C(i)$, тако да је

$$\vartheta := P\Bigg\{\omega \in \Omega : \inf_{\theta \in [-\delta(0),0]} |g(\xi(0,\omega), \xi(\theta,\omega), r(0,\omega))| \geq \frac{1+\beta}{K},$$
$$\sup_{-\delta(0) \leq \theta \leq 0} (|\xi(\theta,\omega)| + |f(\xi(0,\omega), \xi(\theta,\omega), r(0,\omega))|\Delta) \leq K\Bigg\} > 0.$$

Нека је

$$r_N = \max\left\{2, C, \max_{i\in S}\left\{\left(\frac{2C(i)}{\Delta}(1+\beta K)+[C(i)]^2\left(K^{\delta_2(i)}+2+2K^{\gamma_2(i)}\right)\right)^{\frac{1}{\delta_1(i)-\gamma(i)}}\right\}\right\}. \quad (3.2.14)$$

Дефинише се низ догађаја $\{\Omega_N, N\in\mathbb{N}\}$, на следећи начин

$$\begin{aligned}\Omega_N = \{\omega\in\Omega : |\Delta B_{n-1}(\omega)|\in[\Delta,2\Delta], \forall n\in\{2,3,\ldots,N\}, |B_1(\omega)|\geq K\left(r_N+2K\right),\\ \sup_{-\delta(0)\leq\theta\leq 0}\left(|\xi(\theta,\omega)|+|f\left(\xi(0,\omega),\xi(\theta,\omega),r(0,\omega)\right)|\,\Delta\right)\leq K\\ \inf_{\theta\in[-\delta(0),0]}|g\left(\xi(0,\omega),\xi(\theta,\omega),r(0,\omega)\right)|\geq\frac{1+\beta}{K}\right\}. \quad (3.2.15)\end{aligned}$$

Најпре се разматра случај када је $n=1$. Тада се, на основу (3.2.4) и (3.2.6), може закључити да је, за свако $\omega\in\Omega_N$,

$$\begin{aligned}Y_1^N(\omega) &= Y_0^N(\omega)+u\left(Y^N_{-I_\Delta[\delta(0)]}(\omega),r_0^\Delta(\omega)\right)-u\left(Y^N_{-1-I_\Delta[\delta(0)]}(\omega),r_0^\Delta(\omega)\right) \quad (3.2.16)\\ &\quad+f\left(Y_0^N(\omega),Y^N_{-I_\Delta[\delta(0)]}(\omega),r_0^\Delta(\omega)\right)\Delta+g\left(Y_0^N(\omega),Y^N_{-I_\Delta[\delta(0)]}(\omega),r_0^\Delta(\omega)\right)B_1(\omega).\end{aligned}$$

Имајући у виду дефиницију догађаја Ω_N и примењујући Претпоставку $\mathcal{A}_1'$, следи да је

$$\begin{aligned}|Y_1^N(\omega)| &\geq \left|g\left(Y_0^N(\omega),Y^N_{-I_\Delta[\delta(0)]}(\omega),r_0^\Delta(\omega)\right)\right||B_1(\omega)|-\left|f\left(Y_0^N(\omega),Y^N_{-I_\Delta[\delta(0)]}(\omega),r_0^\Delta(\omega)\right)\right|\Delta\\ &\quad-\left|Y_0^N(\omega)\right|-\left|u\left(Y^N_{-I_\Delta[\delta(0)]}(\omega),r_0^\Delta(\omega)\right)-u\left(Y^N_{-1-I_\Delta[\delta(0)]}(\omega),r_0^\Delta(\omega)\right)\right|\\ &\geq \left|g\left(\xi(0,\omega),\xi\left(-I_\Delta[\delta(0)]\Delta,\omega\right),r_0^\Delta(\omega)\right)\right||B_1(\omega)|\\ &\quad-|\xi(0,\omega)|-\left|f\left(\xi(0,\omega),\xi\left(-I_\Delta[\delta(0)]\Delta,\omega\right),r_0^\Delta(\omega)\right)\right|\Delta\\ &\quad-\beta\,|\xi(-I_\Delta[\delta(0)]\Delta,\omega)|-\beta\,|\xi((-1-I_\Delta[\delta(0)])\Delta,\omega)|\\ &\geq \frac{1+\beta}{K}K\left(r_N+2K\right)-K-2\beta K\\ &> r_N. \quad (3.2.17)\end{aligned}$$

Сада се разматра случај када је $n=2$. Дакле, на основу (3.2.6) и (3.2.3) респективно, добија се да је

$$\begin{aligned}|Y_2^N(\omega)| &\geq \Big|f\left(Y_1^N(\omega),Y^N_{1-I_\Delta[\delta(\Delta)]}(\omega),r_1^\Delta(\omega)\right)\Delta\\ &\quad+g\left(Y_1^N(\omega),Y^N_{1-I_\Delta[\delta(\Delta)]}(\omega),r_1^\Delta(\omega)\right)\Delta B_1(\omega)\Big|-\left|Y_1^N(\omega)\right|\\ &\quad-\left|u\left(Y^N_{1-I_\Delta[\delta(\Delta)]}(\omega),r_1^\Delta(\omega)\right)-u\left(Y^N_{-I_\Delta[\delta(0)]}(\omega),r_0^\Delta(\omega)\right)\right|\\ &\geq \max\Big\{\left|f\left(Y_1^N(\omega),Y^N_{1-I_\Delta[\delta(\Delta)]}(\omega),r_1^\Delta(\omega)\right)\Delta\right|,\\ &\qquad\left|g\left(Y_1^N(\omega),Y^N_{1-I_\Delta[\delta(\Delta)]}(\omega),r_1^\Delta(\omega)\right)\right||\Delta B_1(\omega)|\Big\}\\ &\quad-\min\Big\{\left|f\left(Y_1^N(\omega),Y^N_{1-I_\Delta[\delta(\Delta)]}(\omega),r_1^\Delta(\omega)\right)\Delta\right|,\\ &\qquad\left|g\left(Y_1^N(\omega),Y^N_{1-I_\Delta[\delta(\Delta)]}(\omega),r_1^\Delta(\omega)\right)\right||\Delta B_1(\omega)|\Big\}-\left|Y_1^N(\omega)\right|\\ &\quad-\beta\left|Y^N_{1-I_\Delta[\delta(\Delta)]}(\omega)\right|-\beta\,|\xi(-I_\Delta[\delta(0)]\Delta,\omega)|,\end{aligned}$$

тако да је, на основу (3.2.15),

$$\begin{aligned}
|Y_2^N(\omega)| \geq \Delta \max \Big\{ & \left| f\left(Y_1^N(\omega), Y_{1-I_\Delta[\delta(\Delta)]}^N(\omega), r_1^\Delta(\omega)\right)\right|, \\
& \left| g\left(Y_1^N(\omega), Y_{1-I_\Delta[\delta(\Delta)]}^N(\omega), r_1^\Delta(\omega)\right)\right| \Big\} \\
& - 2\Delta \min \Big\{ \left| f\left(Y_1^N(\omega), Y_{1-I_\Delta[\delta(\Delta)]}^N(\omega), r_1^\Delta(\omega)\right)\right|, \\
& \left| g\left(Y_1^N(\omega), Y_{1-I_\Delta[\delta(\Delta)]}^N(\omega), r_1^\Delta(\omega)\right)\right| \Big\} - \left|Y_1^N(\omega)\right| \\
& - \beta \left| Y_{1-I_\Delta[\delta(\Delta)]}^N(\omega)\right| - \beta \left|\xi(-I_\Delta[\delta(0)]\Delta, \omega)\right|. \qquad (3.2.18)
\end{aligned}$$

Случај 1: Нека је $I_\Delta[\delta(\Delta)] \geq 1$. Тада се, примењујући релације (3.2.8), (3.2.9), (3.2.15), (3.2.17) и (3.2.14), како је $|Y_1^N(\omega)| \geq r_N \geq C \geq 1$, израз (3.2.18), за свако $i \in S$, може оценити као

$$\begin{aligned}
\left|Y_2^N(\omega)\right| &\geq \frac{\Delta}{C(i)} \left|Y_1^N(\omega)\right|^{\delta_1(i)} - \Delta C(i) \left|\xi((1-I_\Delta[\delta(\Delta)])\Delta, \omega)\right|^{\delta_2(i)} \\
&\quad - 2\Delta C(i) \left(\left|Y_1^N(\omega)\right|^{\gamma_1(i)} + \left|\xi((1-I_\Delta[\delta(\Delta)])\Delta, \omega)\right|^{\gamma_2(i)} \right) - \left|Y_1^N(\omega)\right| \\
&\quad - \beta \left|\xi((1-I_\Delta[\delta(\Delta)])\Delta, \omega)\right| - \beta \left|\xi(-I_\Delta[\delta(0)]\Delta, \omega)\right| \\
&\geq \frac{\Delta}{C(i)} \left|Y_1^N(\omega)\right|^{\delta_1(i)} - \Delta C(i) K^{\delta_2(i)} - 2\Delta C(i) \left|Y_1^N(\omega)\right|^{\gamma_1(i)} \\
&\quad - 2\Delta C(i) K^{\gamma_2(i)} - \left|Y_1^N(\omega)\right| - 2\beta K \\
&\geq \left|Y_1^N(\omega)\right|^{\gamma(i)} \Bigg(\frac{\Delta}{C(i)} \left|Y_1^N(\omega)\right|^{\delta_1(i)-\gamma(i)} - \Delta C(i) K^{\delta_2(i)} - 2\Delta C(i) \\
&\qquad\qquad - 2\Delta C(i) K^{\gamma_2(i)} - 1 - 2\beta K \Bigg) \\
&\geq \left|Y_1^N(\omega)\right|^{\gamma(i)} \left(\frac{\Delta}{C(i)} r_N^{\delta_1(i)-\gamma(i)} - \Delta C(i)(K^{\delta_2(i)} + 2 + 2K^{\gamma_2(i)}) - 1 - 2\beta K \right) \\
&\geq \left|Y_1^N(\omega)\right|^{\gamma(i)}, \quad \omega \in \Omega_N.
\end{aligned}$$

Дакле, следи да је

$$|Y_2^N(\omega)| \geq |Y_1^N(\omega)|^{\bar{\gamma}}, \quad \omega \in \Omega_N. \qquad (3.2.19)$$

Случај 2: Са друге стране, ако се претпостави да је $I_\Delta[\delta(\Delta)] = 0$, тада, имајући у виду (3.2.15), за свако $i \in S$, израз (3.2.18) се може оценити као

$$\begin{aligned}
&\left|Y_2^N(\omega)\right| \\
&\geq \frac{\Delta}{C(i)} \left|Y_1^N(\omega)\right|^{\delta_1(i)} - \Delta C(i) \left|Y_1^N(\omega)\right|^{\delta_2(i)} - 2\Delta C(i) \left(\left|Y_1^N(\omega)\right|^{\gamma_1(i)} + \left|Y_1^N(\omega)\right|^{\gamma_2(i)} \right) \\
&\quad - \left|Y_1^N(\omega)\right| - \beta \left|Y_1^N(\omega)\right| - \beta \left|\xi(-I_\Delta[\delta(0)]\Delta, \omega)\right| \\
&\geq \frac{\Delta}{C(i)} \left|Y_1^N(\omega)\right|^{\delta_1(i)} - \Delta C(i) \left|Y_1^N(\omega)\right|^{\delta_2(i)} - 2\Delta C(i) \left|Y_1^N(\omega)\right|^{\gamma_1(i)} \\
&\quad - 2\Delta C(i) \left|Y_1^N(\omega)\right|^{\gamma_2(i)} - (1+\beta) \left|Y_1^N(\omega)\right| - \beta K.
\end{aligned}$$

На основу (3.2.17) и дефиниције (3.2.14), како је $|Y_1^N(\omega)| \geq 1$, следи да је

$$\begin{aligned}
\left|Y_2^N(\omega)\right| &\geq \left|Y_1^N(\omega)\right|^{\gamma(i)} \left(\frac{\Delta}{C(i)} \left|Y_1^N(\omega)\right|^{\delta_1(i)-\gamma(i)} - 5\Delta C(i) - (1+\beta) - \beta K \right) \\
&\geq \left|Y_1^N(\omega)\right|^{\gamma(i)} \left(\frac{\Delta}{C(i)} r_N^{\delta_1(i)-\gamma(i)} - 5\Delta C(i) - (1+\beta) - \beta K \right) \\
&\geq \left|Y_1^N(\omega)\right|^{\gamma(i)} \left(\frac{\Delta}{C(i)} r_N^{\delta_1(i)-\gamma(i)} - \Delta C(i) \left(K^{\delta_2(i)} + 2 + 2K^{\gamma_2(i)}\right) - 1 - 2\beta K \right) \\
&\geq \left|Y_1^N(\omega)\right|^{\gamma(i)}, \quad \omega \in \Omega_N.
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Сходно томе, важи релација (3.2.19).

Доказ се наставља индукцијом по $n \in \{3, 4, \ldots, N-1\}$. Нека је индуктивна претпоставка дата са

$$|Y_{k+1}^N(\omega)| \geq |Y_k^N(\omega)|^{\bar{\gamma}} \geq r_N^{\bar{\gamma}^k}, \quad \omega \in \Omega_N, \tag{3.2.21}$$

за свако $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$. Циљ је доказати да важи

$$|Y_{n+1}^N(\omega)| \geq |Y_n^N(\omega)|^{\bar{\gamma}} \geq r_N^{\bar{\gamma}^n}, \quad \omega \in \Omega_N. \tag{3.2.22}$$

Најпре је потребно уочити да, на основу (3.2.17), (3.2.14) и индуктивне претпоставке (3.2.21), следи да је

$$|Y_{k+1}^N(\omega)| \geq r_N \geq C \geq 1, \tag{3.2.23}$$

за свако $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ и $\omega \in \Omega_N$. Са друге стране, имајући у виду релацију (3.2.6) и дефиницију (3.2.15) догађаја Ω_N, добија се да је, за свако $n \in \{2, 3, \ldots, N-1\}$,

$$\begin{aligned}
|Y_{n+1}^N(\omega)| \geq \Big| & f\left(Y_n^N(\omega), Y_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega), r_n^\Delta(\omega)\right)\Delta \\
&+ g\left(Y_n^N(\omega), Y_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega), r_n^\Delta(\omega)\right)\Delta B_n(\omega)\Big| - \left|Y_n^N(\omega)\right| \\
&- \left|u\left(Y_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega), r_n^\Delta(\omega)\right) - u\left(Y_{n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)]}^N(\omega), r_{n-1}^\Delta(\omega)\right)\right| \\
\geq \max & \Big\{\left|f\left(Y_n^N(\omega), Y_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega), r_n^\Delta(\omega)\right)\Delta\right|, \\
&\quad \left|g\left(Y_n^N(\omega), Y_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega), r_n^\Delta(\omega)\right)\right| |\Delta B_n(\omega)|\Big\} \\
&- \min\Big\{\left|f\left(Y_n^N(\omega), Y_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega), r_n^\Delta(\omega)\right)\Delta\right|, \\
&\quad \left|g\left(Y_n^N(\omega), Y_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega), r_n^\Delta(\omega)\right)\right| |\Delta B_n(\omega)|\Big\} - \left|Y_n^N(\omega)\right| \\
&- \left|u\left(Y_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega), r_n^\Delta(\omega)\right) - u\left(Y_{n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)]}^N(\omega), r_{n-1}^\Delta(\omega)\right)\right| \\
\geq \Delta \max & \Big\{\left|f\left(Y_n^N(\omega), Y_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega), r_n^\Delta(\omega)\right)\right|, \\
&\quad \left|g\left(Y_n^N(\omega), Y_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega), r_n^\Delta(\omega)\right)\right|\Big\} \\
&- 2\Delta \min\Big\{\left|f\left(Y_n^N(\omega), Y_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega), r_n^\Delta(\omega)\right)\right|, \\
&\quad \left|g\left(Y_n^N(\omega), Y_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega), r_n^\Delta(\omega)\right)\right|\Big\} - \left|Y_n^N(\omega)\right| \\
&- \left|u\left(Y_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega), r_n^\Delta(\omega)\right) - u\left(Y_{n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)]}^N(\omega), r_{n-1}^\Delta(\omega)\right)\right|.
\end{aligned}$$

Имајући у виду (3.2.3), (3.2.8), (3.2.9) и (3.2.23), за свако $i \in S$, важи

$$\begin{aligned}|Y_{n+1}^N(\omega)| \geq \frac{\Delta}{C(i)}\left|Y_n^N(\omega)\right|^{\delta_1(i)} &- \Delta C(i)\left|Y_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega)\right|^{\delta_2(i)} \\ &- 2\Delta C(i)\left(\left|Y_n^N(\omega)\right|^{\gamma_1(i)} + \left|Y_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega)\right|^{\gamma_2(i)}\right) - \left|Y_n^N(\omega)\right| \\ &- \beta\left|Y_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega)\right| - \beta\left|Y_{n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)]}^N(\omega)\right|. \qquad (3.2.24)\end{aligned}$$

Сада се разматрају четири случаја.

1. Нека је $I_\Delta[\delta(n\Delta)] \geq n$ и $I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)] \geq n-1$. Тада се, на основу (3.2.15), (3.2.23), (3.2.24) и (3.2.14), добија да је, за свако $i \in S$,

$$\begin{aligned}&\left|Y_{n+1}^N(\omega)\right| \\ &\geq \frac{\Delta}{C(i)}\left|Y_n^N(\omega)\right|^{\delta_1(i)} - \Delta C(i)\left|\xi((n-I_\Delta[\delta(n\Delta)])\Delta,\omega)\right|^{\delta_2(i)} \\ &\quad - 2\Delta C(i)\left(\left|Y_n^N(\omega)\right|^{\gamma_1(i)} + \left|\xi((n-I_\Delta[\delta(n\Delta)])\Delta,\omega)\right|^{\gamma_2(i)}\right) - \left|Y_n^N(\omega)\right| \\ &\quad - \beta\left|\xi((n-I_\Delta[\delta(n\Delta)])\Delta,\omega)\right| - \beta\left|\xi((n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)])\Delta,\omega)\right| \\ &\geq \frac{\Delta}{C(i)}\left|Y_n^N(\omega)\right|^{\delta_1(i)} - \Delta C(i)K^{\delta_2(i)} - 2\Delta C(i)\left|Y_n^N(\omega)\right|^{\gamma_1(i)} - 2\Delta C(i)K^{\gamma_2(i)} \\ &\quad - \left|Y_n^N(\omega)\right| - 2\beta K \\ &\geq \left|Y_n^N(\omega)\right|^{\gamma(i)}\left(\frac{\Delta}{C(i)}\left|Y_n^N(\omega)\right|^{\delta_1(i)-\gamma(i)} - \Delta C(i)\left(K^{\delta_2(i)}+2+2K^{\gamma_2(i)}\right) - 1 - 2\beta K\right) \\ &\geq \left|Y_n^N(\omega)\right|^{\gamma(i)}\left(\frac{\Delta}{C(i)}r_N^{\delta_1(i)-\gamma(i)} - \Delta C(i)\left(K^{\delta_2(i)}+2+2K^{\gamma_2(i)}\right) - 1 - 2\beta K\right) \\ &\geq \left|Y_n^N(\omega)\right|^{\gamma(i)}, \quad \omega \in \Omega_N,\end{aligned}$$

односно

$$|Y_{n+1}^N(\omega)| \geq |Y_n^N(\omega)|^{\bar{\gamma}}, \quad \omega \in \Omega_N. \qquad (3.2.25)$$

2. Нека је сада $I_\Delta[\delta(n\Delta)] < n$ и $I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)] \geq n-1$. Тада, имајући у виду (3.2.24), следи да је, за свако $i \in S$,

$$\begin{aligned}\left|Y_{n+1}^N(\omega)\right| \geq \frac{\Delta}{C(i)}\left|Y_n^N(\omega)\right|^{\delta_1(i)} &- \Delta C(i)\left|Y_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega)\right|^{\delta_2(i)} \\ &- 2\Delta C(i)\left(\left|Y_n^N(\omega)\right|^{\gamma_1(i)} + \left|Y_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega)\right|^{\gamma_2(i)}\right) - \left|Y_n^N(\omega)\right| \\ &- \beta\left|Y_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega)\right| - \beta\left|\xi((n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)])\Delta,\omega)\right|. \qquad (3.2.26)\end{aligned}$$

Такође, може се закључити да је $n - I_\Delta[\delta(n\Delta)] \leq n$. Стога се, применом (3.2.19) и индуктивне претпоставке (3.2.21), добија да је

$$|Y_{k+1}^N(\omega)| \geq |Y_k^N(\omega)|, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}. \qquad (3.2.27)$$

Конкретно, за $k = n-1$, следи да је

$$|Y_n^N(\omega)| \geq |Y_{n-1}^N(\omega)| \geq \cdots \geq |Y_{n-I_\Delta[\delta(n\Delta)]}^N(\omega)|, \quad \omega \in \Omega_N. \tag{3.2.28}$$

Имајући у виду (3.2.15) и (3.2.28), као и релације (3.2.23) и (3.2.14), израз (3.2.26) се може оценити као

$$\begin{aligned}
&\left|Y_{n+1}^N(\omega)\right| \\
&\geq \frac{\Delta}{C(i)}\left|Y_n^N(\omega)\right|^{\delta_1(i)} - \Delta C(i)\left|Y_n^N(\omega)\right|^{\delta_2(i)} - 2\Delta C(i)\left|Y_n^N(\omega)\right|^{\gamma_1(i)} \\
&\quad - 2\Delta C(i)\left|Y_n^N(\omega)\right|^{\gamma_2(i)} - (1+\beta)\left|Y_n^N(\omega)\right| - \beta K \\
&\geq \left|Y_n^N(\omega)\right|^{\gamma(i)}\left(\frac{\Delta}{C(i)}\left|Y_n^N(\omega)\right|^{\delta_1(i)-\gamma(i)} - 5\Delta C(i) - (1+\beta) - \beta K\right) \\
&\geq \left|Y_n^N(\omega)\right|^{\gamma(i)}\left(\frac{\Delta}{C(i)} r_N^{\delta_1(i)-\gamma(i)} - \Delta C(i)\left(K^{\delta_2(i)}+2+2K^{\gamma_2(i)}\right) - 1 - 2\beta K\right) \\
&\geq \left|Y_n^N(\omega)\right|^{\gamma(i)}, \quad \omega \in \Omega_N,\ i \in S,
\end{aligned}$$

односно важи (3.2.25).

3. Сада се претпоставља да је $I_\Delta[\delta(n\Delta)] \geq n$ и $I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)] < n-1$. Имајући у виду (3.2.27), аналогно као у (3.2.28), добија се да је

$$|Y_n^N(\omega)| \geq |Y_{n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)]}^N(\omega)|, \quad \omega \in \Omega_N. \tag{3.2.29}$$

На основу (3.2.15), (3.2.29), (3.2.23) и (3.2.14), израз (3.2.24) даје

$$\begin{aligned}
&|Y_{n+1}^N(\omega)| \\
&\geq \frac{\Delta}{C(i)}\left|Y_n^N(\omega)\right|^{\delta_1(i)} - \Delta C(i)\left|\xi((n-I_\Delta[\delta(n\Delta)])\Delta,\omega)\right|^{\delta_2(i)} \\
&\quad - 2\Delta C(i)\left(\left|Y_n^N(\omega)\right|^{\gamma_1(i)} + \left|\xi((n-I_\Delta[\delta(n\Delta)])\Delta,\omega)\right|^{\gamma_2(i)}\right) - \left|Y_n^N(\omega)\right| \\
&\quad - \beta\left|\xi((n-I_\Delta[\delta(n\Delta)])\Delta,\omega)\right| - \beta\left|Y_{n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)]}^N(\omega)\right| \\
&\geq \frac{\Delta}{C(i)}\left|Y_n^N(\omega)\right|^{\delta_1(i)} - \Delta C(i)K^{\delta_2(i)} - 2\Delta C(i)\left|Y_n^N(\omega)\right|^{\gamma_1(i)} - 2\Delta C(i)K^{\gamma_2(i)} \\
&\quad - (1+\beta)\left|Y_n^N(\omega)\right| - \beta K \\
&\geq \left|Y_n^N(\omega)\right|^{\gamma(i)}\left(\frac{\Delta}{C(i)}\left|Y_n^N(\omega)\right|^{\delta_1(i)-\gamma(i)} - \Delta C(i)K^{\delta_2(i)} - 2\Delta C(i)\left(1+K^{\gamma_2(i)}\right)\right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. - (1+\beta) - \beta K\right) \\
&\geq \left|Y_n^N(\omega)\right|^{\gamma(i)}\left(\frac{\Delta}{C(i)} r_N^{\delta_1(i)-\gamma(i)} - \Delta C(i)(K^{\delta_2(i)}+2+2K^{\gamma_2(i)}) - (1+\beta) - \beta K\right) \\
&\geq \left|Y_n^N(\omega)\right|^{\gamma(i)}\left(\frac{\Delta}{C(i)} r_N^{\delta_1(i)-\gamma(i)} - \Delta C(i)\left(K^{\delta_2(i)}+2+2K^{\gamma_2(i)}\right) - 1 - 2\beta K\right) \\
&\geq \left|Y_n^N(\omega)\right|^{\gamma(i)}, \quad \omega \in \Omega_N,\ i \in S,
\end{aligned}$$

односно важи (3.2.25).

4. Коначно, нека је $I_\Delta[\delta(n\Delta)] < n$ и $I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)] < n-1$. Тада, применом (3.2.28) и (3.2.29), као и релација (3.2.23) и (3.2.14), израз (3.2.24) имплицира

$$\begin{aligned}
&|Y^N_{n+1}(\omega)| \\
&\geq \frac{\Delta}{C(i)} \left|Y^N_n(\omega)\right|^{\delta_1(i)} - \Delta C(i) \left|Y^N_n(\omega)\right|^{\delta_2(i)} \\
&\quad - 2\Delta C(i) \left(\left|Y^N_n(\omega)\right|^{\gamma_1(i)} + \left|Y^N_n(\omega)\right|^{\gamma_2(i)}\right) - (1+2\beta)\left|Y^N_n(\omega)\right| \\
&\geq \frac{\Delta}{C(i)} \left|Y^N_n(\omega)\right|^{\delta_1(i)} - (5\Delta C(i) + 1 + 2\beta)\left|Y^N_n(\omega)\right|^{\gamma(i)} \\
&= \left|Y^N_n(\omega)\right|^{\gamma(i)} \left(\frac{\Delta}{C(i)} \left|Y^N_n(\omega)\right|^{\delta_1(i)-\gamma(i)} - 5\Delta C(i) - 1 - 2\beta\right) \\
&\geq \left|Y^N_n(\omega)\right|^{\gamma(i)} \left(\frac{\Delta}{C(i)} r_N^{\delta_1(i)-\gamma(i)} - 5\Delta C(i) - 1 - 2\beta\right) \\
&\geq \left|Y^N_n(\omega)\right|^{\gamma(i)} \left(\frac{\Delta}{C(i)} r_N^{\delta_1(i)-\gamma(i)} - \Delta C(i)\left(K^{\delta_2(i)}+2+2K^{\gamma_2(i)}\right) - 1 - 2\beta K\right) \\
&\geq \left|Y^N_n(\omega)\right|^{\gamma(i)}, \quad \omega \in \Omega_N,\, i \in S,
\end{aligned}$$

односно следи (3.2.25).

На основу (3.2.14), следи да је $r_N \geq 2$ за свако $N \in \mathbb{N}$. Применом (3.2.25) и индуктивне претпоставке (3.2.21), као и релације (3.2.23), важи да је

$$|Y^N_N(\omega)| \geq r_N^{\bar{\gamma}^{N-1}} \geq 2^{\bar{\gamma}^{N-1}}, \qquad \omega \in \Omega_N,\ N \in \mathbb{N}. \tag{3.2.30}$$

Имајући у виду дефиницију (3.2.15), следи да је, за свако $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
P(\Omega_N) &= \vartheta \left(P\Big(\big|B_1\big| \in [\Delta, 2\Delta]\Big)\right)^{N-1} P\Big(\big|B_1\big| \geq K\Big(r_N + 2K\Big)\Big) \\
&= \vartheta \left(P\Big(\big|B(\Delta)\big| \in [\Delta, 2\Delta]\Big)\right)^{N-1} P\Big(\big|B(\Delta)\big| \geq K\Big(r_N + 2K\Big)\Big) \\
&\geq \vartheta \left(P\Big(\big|B(1)\big| \in [\sqrt{\Delta}, \sqrt{2\Delta}]\Big)\right)^{N} P\left(\big|B(1)\big| \geq \frac{K\Big(r_N + 2K\Big)}{\sqrt{\Delta}}\right).
\end{aligned}$$

Примена Леме 3.1.1 имплицира

$$P(\Omega_N) \geq \vartheta\Big(\frac{\sqrt{\Delta}}{2} e^{-2\Delta}\Big)^N \frac{K\Big(r_N + 2K\Big)}{4\sqrt{\Delta}} e^{-\frac{K^2\left(r_N+2K\right)^2}{\Delta}}.$$

Како је $\Delta = \frac{T}{N}$, следи да постоји константа $b \in (1, +\infty)$, тако да је

$$P(\Omega_N) \geq b^{-N^b}, \quad N \in \mathbb{N}. \tag{3.2.31}$$

На основу (3.2.30) и (3.2.31), важи да је

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} E|Y_N^N| &\geq \lim_{N\to\infty} E\Big[I_{\Omega_N}|Y_N^N|\Big] \\
&\geq \lim_{N\to\infty} E\left[P(\Omega_N) r_N^{\bar{\gamma}^{N-1}}\right] \\
&\geq \lim_{N\to\infty} \Big[b^{-N^b} 2^{\bar{\gamma}^{N-1}}\Big] \\
&= +\infty,
\end{aligned}
\tag{3.2.32}
$$

што имплицира (3.2.13). Штавише, ако је $p \in (0,1]$, тада на основу елементарне неједнакости (1.4.5), следи да је

$$
E|Y_N^N|^p \leq E|x(T) - Y_N^N|^p + E|x(T)|^p.
$$

Сада се, на основу претпоставке $E|x(T)|^p < \infty$, закључује да је

$$
\lim_{N\to\infty} E|x(T) - Y_N^N|^p \geq \lim_{N\to\infty} E|Y_N^N|^p - E|x(T)|^p = +\infty,
$$

односно, важи релација (3.2.12). Са друге стране, ако је $p > 1$, применом елементарне неједнакости (1.4.6), добија се да је

$$
E|Y_N^N|^p \leq (1+\theta)^{p-1}\Big(E|x(T) - Y_N^N|^p + \theta^{1-p} E|x(T)|^p\Big),
$$

односно, на основу ограничености апсолутног момента реда p тачног решења, важи релација (3.2.12). Тиме је доказ завршен. □

Потребно је нагласити да резултати претходне теореме важе и у случају када је $d > 1$ у смислу Напомене 3.1.1.

3.2.2 Пример и нумеричке симулације

У овом одељку се разматра пример једначине облика (3.2.1) како би се илустровао теоријски резултат овог поглавља. Доказује се да важе услови теореме која гарантује егзистенцију и јединственост глобалног решења разматране једначине, као и то да су апсолутни моменти првог реда тачног решења коначни. Поред тога, закључује се да важе и услови Теореме 3.2.1, односно да нумеричка решења Ојлер–Марујаме дивергирају у L^1-смислу на коначним временским интервалима. Како би се илустровали ови закључци, представљене су нумериче симулације првог апсолутног момента решења Ојлер–Марујаме за различите величине корака.

Најпре се уводе претпоставке које су од значаја за формулацију теореме егзистенције и јединствености глобалног решења једначине (3.2.1).

$\mathcal{A}_2'$: (Локални Липшицов услов) За свако $h \geq 1$, постоји позитивна константа $K_h > 0$, тако да, за свако $x, \bar{x}, y, \bar{y} \in \mathbb{R}$, за које је $|x_1| \vee |x_2| \vee |y_1| \vee |y_2| \leq h$, и свако $i \in S$, важи да је

$$|f(x,y,i)-f(\bar{x},\bar{y},i)|^2 \vee |g(x,y,i)-g(\bar{x},\bar{y},i)|^2 \leq K_h\big(|x-\bar{x}|^2+|y-\bar{y}|^2\big). \quad (3.2.33)$$

$\mathcal{A}_3'$: Постоје функције $V \in C^2(\mathbb{R} \times S; \mathbb{R}_+)$ и $U_1, U_2 \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$, као и ненегативне константе c_1, c_2, c_3, где је $c_2 > c_3$, тако да је

$$\lim_{|x| \to +\infty} U_1(x) = +\infty, \quad (3.2.34)$$

и за свако $x, y \in \mathbb{R}$ и $i \in S$, важи да је

$$U_1(x) \leq V(x,i) \leq U_2(x), \quad (3.2.35)$$

$$LV(x,y,i) \leq c_1 - c_2 U_2(x) + c_3(1-\bar{\delta})U_2(y), \quad (3.2.36)$$

где је $LV : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S \to \mathbb{R}$ оператор дефинисан са

$$\begin{aligned} LV(x,y,i) &= V_x(x-u(y,i),i)f(x,y,i) + \frac{1}{2}|g(x,y,i)|^2 V_{xx}(x-u(y,i),i) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N} \gamma_{ij} V(x-u(y,i),j). \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

Наредна теорема даје довољне услове егзистенције и јединствености глобалног решења једначине (3.2.1), али пре тога се дефинишу појмови који су неопходни за њену формулацију. Најпре је потребно уочити да, на основу локалног Липшицовог услова $\mathcal{A}_2'$, за сваки ограничени почетни услов ξ, постоји јединствено максимално локално решење $\{x(t), t \in [0, \tau_e)\}$, где је $\tau_e = \inf\{t \geq 0 : |x(t)| = \infty\}$ време експлозије. Нека је $k_0 > 0$ довољно велики природан број, такав да је $||\xi|| \leq k_0$. За свако $k \geq k_0$, дефинише се време заустављања

$$\tau_k = \inf\{t \in [0, \tau_e) : |x(t)| \geq k\}, \quad \inf \emptyset = +\infty. \quad (3.2.38)$$

Очигледно је да τ_k расте када $k \to \infty$. Дефинише се и $\tau_\infty = \lim_{k\to\infty} \tau_k$, где је $\tau_\infty \leq \tau_e$ с.и. На основу Теореме 3.2.2, закључује се да је $\tau_e = +\infty$ с.и. и $\tau_\infty = +\infty$ с.и, односно, решење $\{x(t), t \in [-\delta(0), \infty)\}$ не експлодира на коначном временском интервалу.

Теорема 3.2.2 (Теорема 1, [48]) *Нека важе Претпоставке $\mathcal{A}_1'$–$\mathcal{A}_3'$ и $\mathcal{H}_3$. Тада, за сваки почетни услов $\xi \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\delta(0), 0]; \mathbb{R})$, постоји јединствено глобално решење x једначине (3.2.1) и важи да је*

$$EU_1(x(\tau_k \wedge t) - u(x(\tau_k \wedge t - \delta(\tau_k \wedge t)), r(\tau_k \wedge t))) \leq K + c_1 t,$$

где су $\tau_k, k \geq k_0$ времена заустављања дефинисана са (3.2.38),

$$K = U_2(x(0) - u(x(0, r(0))) + c_3 \int_{-\delta(0)}^{0} U_2(x(s), s)ds,$$

и c_1 и c_3 су позитивне константе.

Од значаја је и следећа последица која се експлицитно примењује у наредном примеру.

Последица 3.2.1 (Последица 1, [48]) *Нека важе претпоставке* $\mathcal{A}_1'$–$\mathcal{A}_3'$ *и* $\mathcal{H}_3$. *За произвољан број* $\epsilon \in (0,1)$ *и* $T > 0$, *постоји довољно велики природан број* $k^* = k^*(\epsilon, t)$, *тако да је*

$$P\{\tau_k \leq T\} \leq \epsilon, \quad k \geq k^*,$$

где је $\tau_k, k \geq 1$ *низ времена заустављања дефинисаних са (3.2.38).*

Имајући у виду наведено, може се разматрати следећи пример.

Пример 3.2.1 *Разматра се следећа једнодимензионална неутрална СДЈ са временски зависним кашњењем и прелазима Маркова*

$$\begin{aligned} &d[x(t) - u(x(t-\delta(t)), r(t))] \qquad (3.2.39)\\ &\quad = f(x(t), x(t-\delta(t)), r(t))dt + g(x(t), x(t-\delta(t)), r(t))dB(t),\ t \in [0,5], \end{aligned}$$

са почетним условом $x(0) = \xi(0) = 20$, *где је функција кашњења дефинисана са* $\delta(t) = (1-q)t$, $q \in \left(\frac{1}{21}, 1\right)$ *за* $t \in [0,5]$. *На основу облика функције кашњења јасно је да је једначина* (3.2.39) *неутрална пантографска СДЈ са прелазима Маркова. Нека је* $\{B(t), t \geq 0\}$ *једнодимензионално Брауново кретање и* $\{r(t), t \geq 0\}$ *непрекидан здесна процес Маркова са скупом стања* $S = \{1, 2\}$ *и генератором дефинисаним са*

$$\Gamma = (\gamma_{ij})_{2\times 2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Претпоставља се да су процеси $\{B(t), t \geq 0\}$ *и* $\{r(t), t \geq 0\}$ *независни. Коефицијенти преноса и дифузије једначине* (3.2.39) *дефинисани су са*

$$\begin{aligned} f(x,y,1) &= -3x - 3x^3 + \frac{1}{3}\sin y, \quad g(x,y,1) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2,\\ f(x,y,2) &= -8x^3\left(1 + \left(x - \frac{1}{16}\cos^2 y\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad g(x,y,2) = 2|x|^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}|y|. \end{aligned}$$

Очигледно је да коефицијенти преноса и дифузије, за свако $i \in S$, *задовољавају локални Липшицов услов* $\mathcal{A}_2'$. *Са друге стране, нека је неутрални члан дефинисан као*

$$u(x,1) = \frac{1}{9}\sin x, \quad u(x,2) = \frac{1}{16}\cos^2 x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Лако је закључити да за $\beta = \frac{1}{9}$ *важи Претпоставка* $\mathcal{A}_1'$. *Претпоставка* $\mathcal{H}_3$ *је такође испуњена јер је први извод функције кашњења ограничен, односно*

$$\delta'(t) = 1 - q = \bar{\delta} < 1, \quad t \in [0,5].$$

Нека је $V(x,1) = 1 + x^2$ *и* $V(x,2) = \sqrt{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. *Тада је*

$$V_x(x,1) = 2x, \quad V_{xx}(x,1) = 2,$$
$$V_x(x,2) = \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad V_{xx}(x,2) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

тако да је

$$\begin{aligned} LV(x,y,1) &= 2\left(x - \frac{1}{9}\sin y\right)\left(-3x - 3x^3 + \frac{1}{3}\sin y\right) + \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2\right)^2 \\ &\quad - \left(1 + \left(x - \frac{1}{9}\sin y\right)^2\right) + \sqrt{1 + \left(x - \frac{1}{9}\sin y\right)^2} \\ &\leq -6x^3\left(x - \frac{1}{9}\sin y\right) - 6\left(x - \frac{1}{9}\sin y\right)^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{8}y^4 \\ &\leq -6x^4 + \frac{2}{3}|x|^3 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{8}y^4. \end{aligned}$$

Применом елементарне неједнакости (1.4.4), добија се да је

$$\begin{aligned} LV(x,y,1) &\leq -6x^4 + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{8}y^4 \\ &= -\frac{43}{8}x^4 + \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{6} \\ &= -\frac{43}{4}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x^4\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}y^4\right) + \frac{191}{12}. \end{aligned} \tag{3.2.40}$$

Ако се уведе ознака $m(x,y) = x - \frac{1}{16}\cos^2 y$, *тада на основу елементарне неједнакости (1.4.4), следи да је*

$$\begin{aligned} LV(x,y,2) &= \frac{m(x,y)}{(1+m^2(x,y))^{\frac{1}{2}}}\Big(-8x^3(1+m^2(x,y))^{\frac{1}{2}}\Big) \\ &\quad + \frac{1}{2\Big(1+m^2(x,y)\Big)^{\frac{3}{2}}}\Big(2|x|^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}|y|\Big)^2 \\ &\quad + 2(1+m^2(x,y)) - 2\sqrt{1+m^2(x,y)} \\ &\leq -8x^3 m(x,y) + 4|x|^3 + \frac{1}{16}y^2 + 2\left(1 + 2x^2 + \frac{2}{16^2}\right) \\ &\leq -8x^4 + \frac{9}{2}|x|^3 + \frac{1}{16}y^2 + 2\left(1 + 2x^2 + \frac{2}{16^2}\right) \\ &\leq -\frac{21}{8}x^4 + \frac{1}{32}y^4 + \frac{331}{64} \\ &= -\frac{21}{4}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x^4\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}y^4\right) + \frac{829}{64}. \end{aligned} \tag{3.2.41}$$

Дакле, на основу (3.2.40) и (3.2.41), закључује се да је, за свако $i \in S$,

$$LV(x,y,i) \leq \frac{191}{12} - \frac{21}{4}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x^4\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}y^4\right) = c_1 - c_2U_2(x) + qc_3U_2(y),$$

где је $c_1 = \frac{191}{12}$, $c_2 = \frac{21}{4}$ *и* $c_3 = \frac{1}{4q}$, *док је* $U_2(x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x^4, x \in \mathbb{R}$. *Одабиром функције* $U_1(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$, *може се уочити да важи Претпоставка* $\mathcal{A}_3'$ *за свако* $q \in \left(\frac{1}{21}, 1\right)$.

Дакле, важе претпоставке Теореме 3.2.2 и Последице 3.2.1, односно, за сваки ограничени почетни услов ξ, *постоји јединствено глобално решење* $x = \{x(t), t \in [-\delta(0), 5]\}$ *једначине (3.2.39). Решење* x *не експлодира на коначном временском интервалу, тј.* $\tau_e = +\infty$ *с.и. и* $\tau_\infty = +\infty$ *с.и. Такође, на основу Теореме 3.2.2, за свако* $t \in [0,5]$, *важи да је*

$$EU_1(x(\tau_k \wedge t) - u(x(\tau_k \wedge t - \delta(\tau_k \wedge t)), r(\tau_k \wedge t))) \leq K + c_1t, \tag{3.2.42}$$

где су $\tau_k, k \geq k_0$ *времена заустављања, дефинисана са (3.2.38) и*

$$K = U_2(x(0) - u(x(0, r(0))) + c_3\int_{-\delta(0)}^{0} U_2(x(s), s)ds = U_2(x(0) - u(\xi(0), r(0))) < +\infty.$$

Када $n \to +\infty$, *на основу (3.2.42), добија се да је*

$$EU_1(x(t) - u(x(t-\delta(t)), r(t))) \leq K + c_1t,\ t \in [0,5],$$

односно, важи да је

$$E|x(t) - u(x(t-\delta(t)))| \leq EU_1(x(t) - u(x(t-\delta(t)))) \leq K + 5c_1, \quad t \in [0,5].$$

Према томе, следи да је

$$\sup_{0 \leq s \leq t} E|x(s) - u(x(s-\delta(s)))| \leq K + 5c_1, \quad t \in [0,5].$$

Применом Претпоставке $\mathcal{A}_1'$ *и имајући у виду да је* $\delta(t) = (1-q)t$, $t \in [0,5]$, *може се закључити да је*

$$\begin{aligned} E|x(t)| &\leq E|x(t) - u(x(t-\delta(t)))| + E|u(x(t-\delta(t)))| \\ &\leq K + 5c_1 + \beta E|x(qt)| \\ &\leq K + 5c_1 + \beta \sup_{0 \leq s \leq t} E|x(s)|, \quad t \in [0,5]. \end{aligned}$$

Стога, следи да је

$$\sup_{0 \leq s \leq t} E|x(s)| \leq K + 5c_1 + \beta \sup_{0 \leq s \leq t} E|x(s)|,$$

што имплицира

$$\sup_{0 \leq s \leq t} E|x(s)| \leq \frac{K + 5c_1}{1 - \beta}, \quad t \in [0,5].$$

Дакле, први апсолутни момент тачног решења је коначан.

Сада се дефинише нумеричко решење Ојлер–Марујаме, које одговара једначини (3.2.39). У том смислу, нека је $N \in \mathbb{N}$. За $n \in \{-(M+1), -M, ..., 0\}$, решење Ојлер–Марујаме се дефинише са

$$Y_n^N = \xi(n\Delta) = 20.$$

С обзиром на то да у (3.2.6) фигуришу два стања процеса Маркова, у општем случају различита, за $n \in \{1, 2, \dots, N\}$, разматрају се следећа четири случаја.

1. *Ако је $r_{n-1}^{\Delta}(\omega) = r_{n-2}^{\Delta}(\omega) = 1$, следи да је*

$$\begin{aligned} Y_n^N(\omega) &= Y_{n-1}^N(\omega) + \frac{1}{9}\sin\left(Y_{n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)]}^N(\omega)\right) - \frac{1}{9}\sin\left(Y_{n-2-I_\Delta[\delta((n-2)\Delta)]}^N(\omega)\right) \\ &\quad + \left(-3Y_{n-1}^N(\omega) - 3\left(Y_{n-1}^N(\omega)\right)^3 + \frac{1}{3}\sin\left(Y_{n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)]}^N(\omega)\right)\right)\Delta \\ &\quad + \frac{1}{4}\left(\left(Y_{n-1}^N(\omega)\right)^2 + \left(Y_{n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)]}^N(\omega)\right)^2\right)\Delta B_{n-1}(\omega). \end{aligned} \tag{3.2.43}$$

2. *За $r_{n-1}^{\Delta}(\omega) = 1$ и $r_{n-2}^{\Delta}(\omega) = 2$, важи да је*

$$\begin{aligned} Y_n^N(\omega) &= Y_{n-1}^N(\omega) + \frac{1}{9}\sin\left(Y_{n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)]}^N(\omega)\right) - \frac{1}{16}\cos^2\left(Y_{n-2-I_\Delta[\delta((n-2)\Delta)]}^N(\omega)\right) \\ &\quad + \left(-3Y_{n-1}^N(\omega) - 3\left(Y_{n-1}^N(\omega)\right)^3 + \frac{1}{3}\sin\left(Y_{n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)]}^N(\omega)\right)\right)\Delta \\ &\quad + \frac{1}{4}\left(\left(Y_{n-1}^N(\omega)\right)^2 + \left(Y_{n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)]}^N(\omega)\right)^2\right)\Delta B_{n-1}(\omega). \end{aligned} \tag{3.2.44}$$

3. *Ако је $r_{n-1}^{\Delta}(\omega) = 2$ и $r_{n-2}^{\Delta}(\omega) = 1$, важи да је*

$$\begin{aligned} Y_n^N(\omega) &= Y_{n-1}^N(\omega) + \frac{1}{16}\cos^2\left(Y_{n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)]}^N(\omega)\right) - \frac{1}{9}\sin\left(Y_{n-2-I_\Delta[\delta((n-2)\Delta)]}^N(\omega)\right) \\ &\quad - 8\left(Y_{n-1}^N(\omega)\right)^3\left(1 + \left(Y_{n-1}^N(\omega) - \frac{1}{16}\cos^2\left(Y_{n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)]}^N(\omega)\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\Delta \\ &\quad + \left(2\left|Y_{n-1}^N(\omega)\right|^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}\left|Y_{n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)]}^N(\omega)\right|\right)\Delta B_{n-1}(\omega). \end{aligned} \tag{3.2.45}$$

4. *Коначно, за $r_{n-1}^{\Delta}(\omega) = r_{n-2}^{\Delta}(\omega) = 2$, следи да је*

$$\begin{aligned} Y_n^N(\omega) &= Y_{n-1}^N(\omega) + \frac{1}{16}\left(\cos^2\left(Y_{n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)]}^N(\omega)\right) - \cos^2\left(Y_{n-2-I_\Delta[\delta((n-2)\Delta)]}^N(\omega)\right)\right) \\ &\quad - 8\left(Y_{n-1}^N(\omega)\right)^3\left(1 + \left(Y_{n-1}^N(\omega) - \frac{1}{16}\cos^2\left(Y_{n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)]}^N(\omega)\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\Delta \\ &\quad + \left(2\left|Y_{n-1}^N(\omega)\right|^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}\left|Y_{n-1-I_\Delta[\delta((n-1)\Delta)]}^N(\omega)\right|\right)\Delta B_{n-1}(\omega). \end{aligned} \tag{3.2.46}$$

Потребно је још доказати да је задовољен услов (3.2.8) Теореме 3.2.1. Сходно томе, закључује се да је, за свако $x, y \in \mathbb{R}$, *за које је* $|x| \vee |y| \geq C(1) = C = 2$,

$$
\begin{aligned}
|f(x,y,1)| &= \left|-3x - 3x^3 + \frac{1}{3}\sin y\right| \geq 3|x|(1+x^2) - \frac{1}{3}\,|\sin y| \geq \frac{1}{2}\left(|x|^3 - |y|\right), \\
|g(x,y,1)| &= \frac{1}{4}(x^2+y^2) \leq 2(x^2+y^2).
\end{aligned}
$$

Такође, за свако $x, y \in \mathbb{R}$, *за које је* $|x| \vee |y| \geq C(2) = C = 2$, *добија се да је*

$$
\begin{aligned}
|f(x,y,2)| &= 8|x|^3 \left(1 + \left(x - \frac{1}{16}\cos^2 y\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&> 8|x|^3 \left(|x| - \frac{1}{16}\cos^2 y\right) \\
&\geq 8x^4 - \frac{1}{2}|x|^3 \\
&\geq \frac{1}{2}\left(x^4 - |y|\right), \\
|g(x,y,2)| &\leq 2|x|^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}|y| \leq 2\left(|x|^{\frac{3}{2}} + |y|\right).
\end{aligned}
$$

Дакле, важи услов (3.2.8) за $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = 2, \delta_1(1) = 3, \delta_2(1) = 1$, $\gamma_1(2) = 3/2$, $\gamma_2(2) = 1$, $\delta_1(2) = 4, \delta_2(2) = 1$. *Према томе, важе све претпоставке Теореме 3.2.1, односно, низ решења Ојлер–Марујаме, дефинисаних са (3.2.43)–(3.2.46), дивергира у* L^1*-смислу.*

Применом програмског пакета Mathematica, *симулирано је* 10 000 *трајекторија решења Ојлер–Марујаме, дефинисаних са (3.2.43)–(3.2.46), која одговарају једначини (3.2.39). У Табели 3.2.1, представљене су симулиране вредности момената првог реда* $E|Y_N^N|$, *за* $T = 5$ *и* $N = 15, 20, 25, ..., 45$. *Почевши од* $N = 30$, *програм је генерисао информацију* "General:ovfl," *која означава грешку која се јавља када је резултат већи од вредности* \$MaxNumber.

$N = 10$	$5.66223848 \cdot 10^{354179}$	$N = 30$	General:ovfl
$N = 15$	$1.96694795 \cdot 10^{108553538}$	$N = 35$	General:ovfl
$N = 20$	$5.891960 \cdot 10^{598630272448}$	$N = 40$	General:ovfl
$N = 25$	$1.4610 \cdot 10^{570756109657851}$	$N = 45$	General:ovfl

Табела 3.2: Симулиране вредности $E|Y_N^N|$, $N = 15, 20, 25, ..., 70$ на основу 10 000 трајекторија

3.3 Сечена метода Ојлер–Марујаме за неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем

У Поглављу 2.1 доказано је да решење Ојлер–Марујаме конвергира у L^p-смислу ка тачном решењу неутралне СДЈ са временски зависним кашњењем чији су коефицијенти преноса и дифузије глобално Липшиц непрекидни. У Поглављу 2.2 су представљени довољни услови L^q-конвергенција сечене методе Ојлер–Марујаме за исти тип једначина, али са коефицијентима преноса и дифузије са високим степеном нелинеарности. Међутим, намеће се питање да ли сечено решење Ојлер–Марујаме конвергира ако не важе поменути услови. У овом поглављу доказује се да за једну класу неутралних СДЈ са временски зависним кашњењем, то решење не конвергира ни у строгом L^p-смислу, ни у нумерички слабом смислу ка тачном решењу на коначном временском интервалу. У том смислу се сужава класа неутралних СДЈ са временски зависним кашњењем за које сечено решење Ојлер–Марујаме конвергира ка тачном решењу у L^p-смислу, што имплицира да за довољним условима L^p-конвергенције треба трагати изван те класе.

Резултати изложени у овом поглављу представљени су у раду [53].

Разматра се једнодимензионална неутрална СДЈ са временски зависним кашњењем облика (2.0.1), за $d = 1$, односно

$$d[x(t)-u(x(t-\delta(t)))]=f(x(t),x(t-\delta(t)))dt+g(x(t),x(t-\delta(t)))dB(t), \tag{3.3.1}$$

за $t \in [0,T]$, са почетним условом (2.0.2). Претпоставља се да постоји једнодимензионални стохастички процес $\{x(t), t \in [-\tau, T]\}$, који представља решење једначине (3.2.1) у смислу Дефиниције 1.5.4.

За доказивање главног резултата овог поглавља од значаја је дискретно сечено решење Ојлер–Марујаме које одговара једначини (3.3.1). Бира се строго растућа непрекидна функција $\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ тако да $\mu(r) \to \infty$ када $r \to \infty$ и за свако $r \geq 1$ важи (2.2.1). Рестрикција инверзне функције од μ, $\mu^{-1} : [\mu(1), \infty) \to \mathbb{R}_+$ је строго растућа и непрекидна. Такође, бирају се константа $\hat{h} \geq 1 \vee \mu(1)$ и строго опадајућа функција $h : (0,1) \to [\mu(1), \infty)$, тако да $h(\Delta) \to \infty$ када $\Delta \to 0$ и да за свако $\Delta \in (0,1)$ и неко $\epsilon_0 \in (0,1)$, важи да је

$$\Delta^{\frac{1-\epsilon_0}{4}} h(\Delta) \leq \hat{h}. \tag{3.3.2}$$

За дати корак $\Delta \in (0,1)$, дефинише се пресликавање $\pi_\Delta(x)$ из $\mathbb{R}^d$ у затворену куглу $\{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq \mu^{-1}(h(\Delta))\}$ са

$$\pi_\Delta(x) = (|x| \wedge \mu^{-1}(h(\Delta))) \frac{x}{|x|}, \tag{3.3.3}$$

где је $x/|x| = 0$ када је $x = 0$. Дефинишу се сечени коефицијенти једначине (2.0.1) на следећи начин

$$f_\Delta(x,y) = f(\pi_\Delta(x), \pi_\Delta(y)),\ g_\Delta(x,y) = g(\pi_\Delta(x), \pi_\Delta(y)),\ u_\Delta(x) = u(\pi_\Delta(x)),$$

за $x, y \in \mathbb{R}^d$. Разматра се СДЈ

$$\begin{aligned} d[x(t) - u_\Delta(x(t-\delta(t)))] \\ = f_\Delta(x(t), x(t-\delta(t)))dt + g_\Delta(x(t), x(t-\delta(t)))dB(t),\ t \in [0,T], \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

која задовољава почетни услов (2.0.2) и дефинише се сечено решење Ојлер–Марујаме које одговара једначини (3.3.1). Како би ово решење било добро дефинисано, нека је

$$\delta(-\Delta) = \delta(0), \qquad X_\Delta(-(M+1)\Delta) = \xi(-M\Delta). \tag{3.3.5}$$

Тада је, као у (2.2.7) и (2.2.8),

$$X_\Delta(t_k) = \xi(t_k), \qquad k \in \{-M, -(M-1), \dots, 0\}, \tag{3.3.6}$$

док је, за $k \in \{0, 1, \dots, N\}$,

$$\begin{aligned} X_\Delta(t_{k+1}) &= X_\Delta(t_k) + u_\Delta(X_\Delta\,(t_k - I_\Delta[\delta(t_k)]\Delta)) - u_\Delta(X_\Delta\,(t_{k-1} - I_\Delta[\delta(t_{k-1})]\Delta)) \\ &\quad + f_\Delta\left(X_\Delta(t_k), X_\Delta\left(t_k - I_\Delta\left[\delta(t_k)\right]\Delta\right)\right)\Delta \\ &\quad + g_\Delta\left(X_\Delta(t_k), X_\Delta\left(t_k - I_\Delta\left[\delta(t_k)\right]\Delta\right)\right)\Delta B_k. \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

У наставку се доказују две леме које се експлицитно примењују у доказу главног резултата овог поглавља.

Лема 3.3.1 *Нека постоје константе $\tilde{M} \geq 1$ и $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ тако да је, за свако $x, y \in \mathbb{R}$, за које је $|x| \vee |y| \geq \tilde{M}$,*

$$\min\{|f(x,y)|, |g(x,y)|\} \leq \tilde{M}(|x|^{\gamma_1} + |y|^{\gamma_2}). \tag{3.3.8}$$

Тада, за свако $\Delta \in (0,1)$ и свако $x, y \in \mathbb{R}$, за које је $|x| \vee |y| \geq \tilde{M}$, важи да је

$$\min\{|f_\Delta(x,y)|, |g_\Delta(x,y)|\} \leq \tilde{M}(|x|^{\gamma_1} + |y|^{\gamma_2}). \tag{3.3.9}$$

Доказ. Фиксира се произвољно $\Delta \in (0,1)$. За свако $x, y \in \mathbb{R}$, за које важи да је $|x| \vee |y| < \mu^{-1}(h(\Delta))$, на основу услова (3.3.8), неједнакост (3.3.9) очигледно важи.

Нека је сада $|x| \wedge |y| \geq \mu^{-1}(h(\Delta))$. Тада, на основу (3.3.8), важи да је

$$\begin{aligned} &\min\left\{|f_\Delta(x,y)|, |g_\Delta(x,y)|\right\} \\ &\quad = \min\left\{\left|f\left(\frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|}x, \frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|y|}y\right)\right|, \left|g\left(\frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|}x, \frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|y|}y\right)\right|\right\} \\ &\quad \leq \tilde{M}\left(\left|\frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|}x\right|^{\gamma_1} + \left|\frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|y|}y\right|^{\gamma_2}\right) \\ &\quad = \tilde{M}\left(\left(\frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|}\right)^{\gamma_1}|x|^{\gamma_1} + \left(\frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|y|}\right)^{\gamma_1}|y|^{\gamma_1}\right). \end{aligned}$$

Имајући у виду да је $\frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|} \leq 1$ и $\frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|y|} \leq 1$, следи (3.3.9).

Са друге стране, ако је $|x| \geq \mu^{-1}(h(\Delta))$ и $|y| < \mu^{-1}(h(\Delta))$, услов (3.3.8) имплицира

$$\begin{aligned}\min\{|f_\Delta(x,y)|, |g_\Delta(x,y)|\} &= \min\left\{\left|f\left(\frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|}x, y\right)\right|, \left|g\left(\frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|}x, y\right)\right|\right\} \\ &\leq \tilde{M}\left(\left|\frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|}x\right|^{\gamma_1} + |y|^{\gamma_2}\right) \\ &\leq \tilde{M}\left(|x|^{\gamma_1} + |y|^{\gamma_2}\right).\end{aligned}$$

Аналогно се може доказати да важи (3.3.9) када је $|x| < \mu^{-1}(h(\Delta))$ и $|y| \geq \mu^{-1}(h(\Delta))$. Тиме је доказ завршен. $\square$

Лема 3.3.2 *Нека постоје константе $\tilde{M} \geq 1$ и $\delta_1 > \delta_2 > 0$, тако да је, за свако $\tilde{a} \in (0,1]$ и $x, y \in \mathbb{R}$, за које је $|x| \vee |y| \geq \tilde{M}$,*

$$\max\{|f(\tilde{a}x, y)|, |g(\tilde{a}x, y)|\} \geq \frac{1}{\tilde{M}\tilde{a}}|x|^{\delta_1} - \tilde{M}|y|^{\delta_2}. \tag{3.3.10}$$

Тада, за свако $\Delta \in (0,1)$ и свако $x, y \in \mathbb{R}$, за које је $|x| \vee |y| \geq \tilde{M}$, важи да је

$$\max\{|f_\Delta(x,y)|, |g_\Delta(x,y)|\} \geq \frac{1}{\tilde{M}}|x|^{\delta_1} - \tilde{M}|y|^{\delta_2}. \tag{3.3.11}$$

Доказ. Фиксира се произвољно $\Delta \in (0,1)$. За свако $x, y \in \mathbb{R}$, за које важи да је $|x| \vee |y| < \mu^{-1}(h(\Delta))$, на основу услова (3.3.10), неједнакост (3.3.11) очигледно важи за $a = 1$.

Нека је сада $|x| \wedge |y| \geq \mu^{-1}(h(\Delta))$. Тада, на основу (3.3.10), важи да је

$$\begin{aligned}&\max\{|f_\Delta(x,y)|, |g_\Delta(x,y)|\} \\ &\quad = \max\left\{\left|f\left(\frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|}x, \frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|y|}y\right)\right|, \left|g\left(\frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|}x, \frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|y|}y\right)\right|\right\} \\ &\quad \geq \frac{1}{\tilde{M}\frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|}}|x|^{\delta_1} - \tilde{M}\left|\frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|y|}y\right|^{\delta_2} \\ &\quad \geq \frac{1}{\tilde{M}\mu^{-1}(h(\Delta))}|x|^{\delta_1+1} - \tilde{M}\left|\frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|y|}y\right|^{\delta_2} \\ &\quad \geq \frac{1}{\tilde{M}}|x|^{\delta_1} - \tilde{M}|y|^{\delta_1},\end{aligned}$$

где је последња неједнакост добијена на основу услова да је $\frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|} \leq 1$ и $\frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|y|} \leq 1$. Дакле, закључује се да важи (3.3.11).

Са друге стране, ако је $|x| \geq \mu^{-1}(h(\Delta))$ и $|y| < \mu^{-1}(h(\Delta))$, тада услов (3.3.10) имплицира

$$\begin{aligned}\max\{|f_\Delta(x,y)|, |g_\Delta(x,y)|\} &= \max\left\{\left|f\left(\frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|}x, y\right)\right|, \left|g\left(\frac{\mu^{-1}(h(\Delta))}{|x|}x, y\right)\right|\right\} \\ &\geq \frac{1}{\tilde{M}\mu^{-1}(h(\Delta))}|x|^{\delta_1+1} - \tilde{M}|y|^{\delta_2} \\ &\geq \frac{1}{\tilde{M}}|x|^{\delta_1} - \tilde{M}|y|^{\delta_1}.\end{aligned}$$

Аналогно се може доказати да важи (3.3.11) када је $|x| < \mu^{-1}(h(\Delta))$ и $|y| \geq \mu^{-1}(h(\Delta))$. Тиме је доказ завршен. $\square$

Сада се може доказати дивергенција сеченог решења Ојлер–Марујаме које одговара једначини (3.3.1).

Теорема 3.3.1 *Нека важе Претпоставке $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_3$, заједно са условом*

$$P\left\{\omega\in\Omega : \inf_{\theta\in[-\tau,0],\ \tilde{a}\in(0,1]} |g(\tilde{a}\xi(0,\omega),\xi(\theta,\omega))| > 0\right\} > 0. \tag{3.3.12}$$

Такође, претпоставља се да постоје константе $\tilde{M}\geq 1$, и δ_1,δ_2, $\gamma_1,\gamma_2 > 0$, тако да је, $\gamma = \max\{1,\gamma_1,\gamma_2,\delta_2\}$, $\delta_1 > \gamma$ и за свако $\tilde{a}\in(0,1]$ и $x,y\in\mathbb{R}$, за које је $|x|\vee|y|\geq\tilde{M}$, важи да је

$$\min\{|f(x,y)|,|g(x,y)|\} \leq \tilde{M}(|x|^{\gamma_1}+|y|^{\gamma_2}), \tag{3.3.13}$$

$$\max\{|f(\tilde{a}x,y)|,|g(\tilde{a}x,y)|\} \geq \frac{1}{\tilde{M}\tilde{a}}|x|^{\delta_1} - \tilde{M}|y|^{\delta_2}. \tag{3.3.14}$$

Тада постоји константа $b\in(1,+\infty)$ и низ непразних догађаја $\{\Omega_N\in\mathcal{F}, N\in\mathbb{N}\}$, тако да је, за свако $N\in\mathbb{N}$ и свако $\omega\in\Omega_N$,

$$P(\Omega_N) \geq b^{-N^b},$$
$$|X_\Delta(t_N,\omega)| \geq 2^{\gamma^{N-1}}.$$

Ако постоји јединствено глобално решење $\{x(t), t\in[-\tau,T]\}$ које одговара једначини (1.5.24), за које је $E|x(T)|^p<\infty$, за неко $p\in(0,+\infty)$, тада важи да је

$$\lim_{N\to\infty} E|x(T)-X_\Delta(t_N)|^p = +\infty, \tag{3.3.15}$$

$$\lim_{N\to\infty} |E|x(T)|^p - E|X_\Delta(t_N)|^p| = +\infty. \tag{3.3.16}$$

Доказ. Аналогно као у поглављима 3.1 и 3.2, услов (3.3.12) искључује детерминистичке диференцијалне једначине из разматрања и обезбеђује да је апсолутна вредност нумеричког решења након прве итерације довољно велика. Притом је потребно нагласити да је тај услов строжи од услова (3.1.9) и (3.2.7). Штавише, за $p\geq 1$, (3.2.12) представља строгу L^p-дивергенцију сеченог решења Ојлер–Марујаме, док (3.2.13) представља нумерички слабу дивергенцију. Обе врсте дивергенције се односе на крајњу тачку разматраног временског интервала, када величина корака тежи нули.

На основу претпоставки (3.3.12) и $\xi\in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];\mathbb{R})$, постоји константа $K\in[\tilde{M},+\infty)$, тако да је

$$\vartheta := P\left\{\omega\in\Omega : \inf_{\theta\in[-\tau,0],\ \tilde{a}\in(0,1]} |g\left(\tilde{a}\xi(0,\omega),\xi(\theta,\omega)\right)| \geq \frac{1+k}{K},\right.$$
$$\left.\sup_{\theta\in[-\tau,0],\ \tilde{a}\in(0,1]} \left(|\xi(\theta,\omega)| + |f\left(\tilde{a}\xi(0,\omega),\xi(\theta,\omega)\right)|\Delta\right) \leq K\right\} > 0.$$

Нека је

$$r_N = \max\left\{2, \tilde{M}, \left(\tilde{M}^2 K^{\delta_2} + \frac{2\tilde{M}}{\Delta}(1+kK) + 2\tilde{M}^2\left(1+K^{\gamma_2}\right)\right)^{\frac{1}{\delta_1-\gamma}}\right\}. \quad (3.3.17)$$

Дефинише се низ догађаја $\{\Omega_N, N \in \mathbb{N}\}$, тако да је

$$\begin{aligned}\Omega_N = \Bigg\{&\omega \in \Omega : |\Delta B_{n-1}(\omega)| \in [\Delta, 2\Delta], \forall n \in \{2,3,\dots,N\}, |B_1(\omega)| \geq K\left(r_N + 2K\right),\\ &\sup_{\theta\in[-\tau,0],\tilde{a}\in(0,1]} \left(|\xi(\theta,\omega)| + |f\left(\tilde{a}\xi(0,\omega), \xi(\theta,\omega)\right)|\,\Delta\right) \leq K,\\ &\inf_{\theta\in[-\tau,0],\tilde{a}\in(0,1]} |g\left(\tilde{a}\xi(0,\omega), \xi(\theta,\omega)\right)| \geq \frac{1+k}{K}\Bigg\}. \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Најпре се разматра случај када је $n = 1$. Тада се, на основу (3.3.5)-(3.3.7), може уочити да је, за свако $\omega \in \Omega_N$,

$$\begin{aligned}X_\Delta(t_1,\omega) = {}& X_\Delta(t_0,\omega) + u_\Delta\left(X_\Delta(t_0 - I_\Delta[\delta(t_0)]\Delta,\omega)\right) - u_\Delta\left(X_\Delta(t_{-1} - I_\Delta[\delta(t_{-1})]\Delta,\omega)\right)\\ &+ f_\Delta\left(X_\Delta(t_0,\omega), X_\Delta(t_0 - I_\Delta[\delta(t_0)]\Delta,\omega)\right)\Delta\\ &+ g_\Delta\left(X_\Delta(t_0,\omega), X_\Delta(t_0 - I_\Delta[\delta(t_0)]\Delta,\omega)\right)B_1(\omega).\end{aligned}$$

Имајући на уму дефиниције догађаја Ω_N и сечених функција f_Δ, g_Δ и u_Δ,, као и Лему 2.2.1, добија се да је

$$\begin{aligned}|X_\Delta(t_1,\omega)| \geq {}& |g_\Delta\left(X_\Delta(t_0,\omega), X_\Delta(-I_\Delta[\delta(t_0)]\Delta,\omega)\right)|\,|B_1(\omega)|\\ &- |f_\Delta\left(X_\Delta(t_0,\omega), X_\Delta(-I_\Delta[\delta(t_0)]\Delta,\omega)\right)|\,\Delta - |X_\Delta(t_0,\omega)|\\ &- |u_\Delta\left(X_\Delta(-I_\Delta[\delta(t_0)]\Delta,\omega\right) - u_\Delta\left(X_\Delta(t_{-1} - I_\Delta[\delta(t_{-1})]\Delta,\omega\right)|\\ \geq {}& |g\left(\pi_\Delta(\xi(0,\omega)), \pi_\Delta\left(\xi\left(-I_\Delta[\delta(t_0)]\Delta,\omega\right)\right)\right)|\,|B_1(\omega)|\\ &- |f\left(\pi_\Delta(\xi(0,\omega)), \pi_\Delta\left(\xi\left(-I_\Delta[\delta(t_0)]\Delta,\omega\right)\right)\right)|\,\Delta - |\xi(0,\omega)|\\ &- k\,|\xi(-I_\Delta[\delta(t_0)]\Delta,\omega)| - k\,|\xi((-1 - I_\Delta[\delta(t_0)])\Delta,\omega)|\\ \geq {}& \frac{1+k}{K}K\left(r_N + 2K\right) - K - 2kK\\ > {}& r_N. \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

Сада се разматра случај када је $n = 2$. На основу (3.3.6) и (3.3.7) важи да је

$$\begin{aligned}X_\Delta(t_2,\omega) = {}& X_\Delta(t_1,\omega) + u_\Delta\left(X_\Delta(t_1 - I_\Delta[\delta(t_1)]\Delta,\omega)\right) - u_\Delta\left(X_\Delta(-I_\Delta[\delta(t_0)]\Delta,\omega)\right)\\ &+ f_\Delta\left(X_\Delta(t_1,\omega), X_\Delta(t_1 - I_\Delta[\delta(t_1)]\Delta,\omega)\right)\Delta\\ &+ g_\Delta\left(X_\Delta(t_1,\omega), X_\Delta(t_1 - I_\Delta[\delta(t_1)]\Delta,\omega)\right)\Delta B_1.\end{aligned}$$

Применом Леме 2.2.1 и дефиниције (3.3.18) догађаја Ω_N, као и лема 3.3.1

и 3.3.2, следи да је

$$\begin{aligned}
|X_\Delta(t_2,\omega)| \geq{}& |f_\Delta\left(X_\Delta(t_1,\omega), X_\Delta(t_1 - I_\Delta[\delta(t_1)]\Delta,\omega)\right)\Delta \\
&+ g_\Delta\left(X_\Delta(t_1,\omega), X_\Delta(t_1 - I_\Delta[\delta(t_1)]\Delta,\omega)\right)\Delta B_1| - |X_\Delta(t_1,\omega)| \\
&-|u_\Delta\left(X_\Delta(t_1 - I_\Delta[\delta(t_1)]\Delta,\omega)\right) - u_\Delta\left(X_\Delta(-I_\Delta[\delta(t_0)]\Delta,\omega)\right)| \\
\geq{}& \max\{|f_\Delta\left(X_\Delta(t_1,\omega), X_\Delta(t_1 - I_\Delta[\delta(t_1)]\Delta,\omega)\right)\Delta|, \\
&\quad |g_\Delta\left(X_\Delta(t_1,\omega), X_\Delta(t_1 - I_\Delta[\delta(t_1)]\Delta,\omega)\right)||\Delta B_1(\omega)|\} \\
&- \min\{|f_\Delta\left(X_\Delta(t_1,\omega), X_\Delta(t_1 - I_\Delta[\delta(t_1)]\Delta,\omega)\right)\Delta|, \\
&\quad |g_\Delta\left(X_\Delta(t_1,\omega), X_\Delta(t_1 - I_\Delta[\delta(t_1)]\Delta,\omega)\right)||\Delta B_1(\omega)|\} \\
&- |X_\Delta(t_1,\omega)| - k|X_\Delta(t_1 - I_\Delta[\delta(t_1)]\Delta,\omega)| - k|\xi(-I_\Delta[\delta(t_0)]\Delta,\omega)| \\
\geq{}& \Delta\left(\frac{1}{\tilde{M}}|X_\Delta(t_1,\omega)|^{\delta_1} - \tilde{M}|X_\Delta(t_1 - I_\Delta[\delta(t_1)]\Delta,\omega)|^{\delta_2}\right), \\
&- 2\tilde{M}\Delta\left(|X_\Delta(t_1,\omega)|^{\gamma_1} + |X_\Delta(t_1 - I_\Delta[\delta(t_1)]\Delta,\omega)|^{\gamma_2}\right), \\
&- |X_\Delta(t_1,\omega)| - k|X_\Delta(t_1 - I_\Delta[\delta(t_1)]\Delta,\omega)| - k|\xi(-I_\Delta[\delta(t_0)]\Delta,\omega)|.
\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

У наставку се разматрају два случаја.

Случај 1: Нека је $I_\Delta[\delta(t_1)] \geq 1$. Тада је, на основу дефиниције (3.3.18) догађаја Ω_N

$$\begin{aligned}
|X_\Delta(t_2,\omega)| \geq{}& \Delta\left(\frac{1}{\tilde{M}}|X_\Delta(t_1,\omega)|^{\delta_1} - \tilde{M}|\xi((t_1 - I_\Delta[\delta(t_1)])\Delta,\omega)|^{\delta_2}\right) \\
&- 2\Delta\Big(|X_\Delta(t_1,\omega)|^{\gamma_1} + |\xi((t_1 - I_\Delta[\delta(t_1)])\Delta,\omega)|^{\gamma_2}\Big) \\
&- |X_\Delta(t_1,\omega)| - k|\xi((t_1 - I_\Delta[\delta(t_1)])\Delta,\omega)| - k|\xi(-I_\Delta[\delta(t_0)]\Delta,\omega)| \\
\geq{}& \frac{\Delta}{\tilde{M}}|X_\Delta(t_1,\omega)|^{\delta_1} - \Delta\tilde{M}K^{\delta_2} - 2\Delta\tilde{M}|X_\Delta(t_1,\omega)|^{\gamma_1} - 2\Delta\tilde{M}K^{\gamma_2} \\
&- |X_\Delta(t_1,\omega)| - 2kK.
\end{aligned} \tag{3.3.21}$$

На основу (3.3.17) и (3.3.19), а како је $|X_\Delta(t_1,\omega)| > r_N \geq \tilde{M} \geq 1$, следи да је

$$\begin{aligned}
|X_\Delta(t_2,\omega)| &\geq |X_\Delta(t_1,\omega)|^\gamma\left(\frac{\Delta}{\tilde{M}}|X_\Delta(t_1,\omega)|^{\delta_1-\gamma} - \Delta\tilde{M}K^{\delta_2} - 2\Delta\tilde{M}(1+K^{\gamma_2}) - 1 - 2kK\right) \\
&\geq |X_\Delta(t_1,\omega)|^\gamma\left(\frac{\Delta}{\tilde{M}}r_N^{\delta_1-\gamma} - \Delta\tilde{M}K^{\delta_2} - 2\Delta\tilde{M}(1+K^{\gamma_2}) - 1 - 2kK\right) \\
&\geq |X_\Delta(t_1,\omega)|^\gamma, \quad \omega \in \Omega_N.
\end{aligned}$$

Случај 2: Са друге стране, ако се претпостави да је $I_\Delta[\delta(t_1)] = 0$, тада, имајући у виду (3.3.18) и (3.3.19), израз (3.3.20) имплицира

$$\begin{aligned}
|X_\Delta(t_2,\omega)| \geq{}& \frac{\Delta}{\tilde{M}}|X_\Delta(t_1,\omega)|^{\delta_1} - \Delta\tilde{M}|X_\Delta(t_1,\omega)|^{\delta_2} - 2\Delta\tilde{M}|X_\Delta(t_1,\omega)|^{\gamma_1} \\
&- 2\Delta\tilde{M}|X_\Delta(t_1,\omega)|^{\gamma_2} - (1+k)|X_\Delta(t_1,\omega)| - kK.
\end{aligned} \tag{3.3.22}$$

На основу (3.3.17) и како је $|X_\Delta(t_1,\omega)| > r_N \geq \tilde{M} \geq 1$, важи да је

$$\begin{aligned}
|X_\Delta(t_2,\omega)| &\geq |X_\Delta(t_1,\omega)|^\gamma \left(\frac{\Delta}{\tilde{M}} |X_\Delta(t_1,\omega)|^{\delta_1-\gamma} - \Delta\tilde{M} - 4\Delta\tilde{M} - (1+k) - kK \right) \\
&\geq |X_\Delta(t_1,\omega)|^\gamma \left(\frac{\Delta}{\tilde{M}} r_N^{\delta_1-\gamma} - \Delta\tilde{M} - 4\Delta\tilde{M} - (1+k) - kK \right) \\
&\geq |X_\Delta(t_1,\omega)|^\gamma \left(\frac{\Delta}{\tilde{M}} r_N^{\delta_1-\gamma} - \Delta\tilde{M}K^{\delta_2} - 2\Delta\tilde{M}\,(1+K^{\gamma_2}) - 1 - 2kK \right) \\
&\geq |X_\Delta(t_1,\omega)|^\gamma, \quad \omega \in \Omega_N.
\end{aligned}$$

Доказ се наставља индукцијом по $n \in \{3,4,\ldots,N-1\}$. У том смислу, нека је индуктивна претпоставка

$$|X_\Delta(t_{k+1},\omega)| \geq |X_\Delta(t_k,\omega)|^\gamma \geq r_N^{\gamma^k}, \quad \omega \in \Omega_N, \tag{3.3.23}$$

за свако $k \in \{2,3,\ldots,n-1\}$.

Циљ је да се докаже да важи

$$|X_\Delta(t_{n+1},\omega)| \geq |X_\Delta(t_n,\omega)|^\gamma \geq r_N^{\gamma^n}, \quad \omega \in \Omega_N. \tag{3.3.24}$$

Најпре је потребно уочити да је импликација релација (3.3.17), (3.3.19) и индуктивне претпоставке (3.3.23)

$$|X_\Delta(t_{k+1},\omega)| > r_N \geq \tilde{M} \geq 1, \tag{3.3.25}$$

за свако $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ и $\omega \in \Omega_N$. На основу (3.3.7) и дефинијије (3.3.18) догађаја Ω_N, применом лема 2.2.1, 3.3.1 и 3.3.2, може се закључити да је, за $n \in \{2,3,\ldots,N-1\}$,

$$\begin{aligned}
|X_\Delta(t_{n+1},\omega)| &\geq |f_\Delta\left(X_\Delta(t_n,\omega), X_\Delta(t_n - I_\Delta[\delta(t_n)]\Delta,\omega)\right)\Delta \\
&\quad + g_\Delta\left(X_\Delta(t_n,\omega), X_\Delta(t_n - I_\Delta[\delta(t_n)]\Delta,\omega)\right)\Delta B_n(\omega)| - |X_\Delta(t_n,\omega)| \\
&\quad - |u_\Delta\left(X_\Delta(t_n - I_\Delta[\delta(t_n)]\Delta,\omega)\right) - u_\Delta\left(X_\Delta(t_{n-1} - I_\Delta[\delta(t_{n-1})]\Delta,\omega)\right)| \\
&\geq \max\left\{|f_\Delta\left(X_\Delta(t_n,\omega), X_\Delta(t_n - I_\Delta[\delta(t_n)]\Delta,\omega)\right)\Delta|\,,\right. \\
&\qquad\quad \left.|g_\Delta\left(X_\Delta(t_n,\omega), X_\Delta(t_n - I_\Delta[\delta(t_n)]\Delta,\omega)\right)|\,|\Delta B_n(\omega)|\right\} \\
&\quad - \min\left\{|f_\Delta\left(X_\Delta(t_n,\omega), X_\Delta(t_n - I_\Delta[\delta(t_n)]\Delta,\omega)\right)\Delta|\,,\right. \\
&\qquad\quad \left.|g_\Delta\left(X_\Delta(t_n,\omega), X_\Delta(t_n - I_\Delta[\delta(t_n)]\Delta,\omega)\right)|\,|\Delta B_n(\omega)|\right\} \\
&\quad - |X_\Delta(t_n,\omega)| - |u_\Delta\left(X_\Delta(t_n - I_\Delta[\delta(t_n)]\Delta,\omega)\right)| \\
&\quad - |u_\Delta\left(X_\Delta(t_{n-1} - I_\Delta[\delta(t_{n-1})]\Delta,\omega)\right)| \\
&\geq \Delta\left(\frac{1}{\tilde{M}}|X_\Delta(t_n,\omega)|^{\delta_1} - \tilde{M}\,|X_\Delta(t_n - I_\Delta[\delta(t_n)]\Delta,\omega)|^{\delta_2}\right) \\
&\quad - 2\tilde{M}\Delta\left(|X_\Delta(t_n,\omega)|^{\gamma_1} + |X_\Delta(t_n - I_\Delta[\delta(t_n)]\Delta,\omega)|^{\gamma_2}\right) - |X_\Delta(t_n,\omega)| \\
&\quad - k\,|X_\Delta(t_n - I_\Delta[\delta(t_n)]\Delta,\omega)| - k\,|X_\Delta(t_{n-1} - I_\Delta[\delta(t_{n-1})]\Delta,\omega)|\,.
\end{aligned}$$

Сада се разматрају четири случаја.

1. Нека је $I_\Delta[\delta(t_n)] \geq n$ и $I_\Delta[\delta(t_{n-1})] \geq n-1$. Тада се, на основу (3.3.18), (3.3.25) и (3.3.17), респективно, добија да је

$$\begin{aligned}
&|X_\Delta(t_{n+1},\omega)| \\
&\geq \frac{\Delta}{\tilde{M}}\,|X_\Delta(t_n,\omega)|^{\delta_1} - \tilde{M}\Delta\,|\xi((t_n - I_\Delta[\delta(t_n)])\Delta,\omega)|^{\delta_2} \\
&\quad - 2\Delta\tilde{M}\,(|X_\Delta(t_n,\omega)|^{\gamma_1} + |\xi((t_n - I_\Delta[\delta(t_n)])\Delta,\omega)|^{\gamma_2}) - |X_\Delta(t_n,\omega)| \\
&\quad - k\,|\xi((t_n - I_\Delta[\delta(t_n)])\Delta,\omega)| - k\,|\xi(t_{n-1} - I_\Delta[\delta(t_{n-1})])\Delta,\omega)| \\
&\geq \frac{\Delta}{\tilde{M}}\,|X_\Delta(t_n,\omega)|^{\delta_1} - \Delta\tilde{M}K^{\delta_2} - 2\Delta\tilde{M}\,|X_\Delta(t_n,\omega)|^{\gamma_1} - 2\Delta\tilde{M}K^{\gamma_2} - |X_\Delta(t_n,\omega)| \\
&\quad - 2kK \\
&\geq |X_\Delta(t_n,\omega)|^{\gamma}\left(\frac{\Delta}{\tilde{M}}\,|X_\Delta(t_n,\omega)|^{\delta_1-\gamma} - \Delta\tilde{M}K^{\delta_2} - 2\Delta\tilde{M} - 2\Delta\tilde{M}K^{\gamma_2} - 1 - 2kK\right) \\
&\geq |X_\Delta(t_n,\omega)|^{\gamma}\left(\frac{\Delta}{\tilde{M}}r_N^{\delta_1-\gamma} - \Delta\tilde{M}K^{\delta_2} - 2\Delta\tilde{M} - 2\Delta\tilde{M}K^{\gamma_2} - 1 - 2kK\right) \\
&\geq |X_\Delta(t_n,\omega)|^{\gamma}.
\end{aligned}$$

2. Нека је $I_\Delta[\delta(t_n)] < n$ и $I_\Delta[\delta(t_{n-1})] \geq n-1$. Тада, имајући у виду (3.3.26), важи да је

$$\begin{aligned}
|X_\Delta(t_{n+1},\omega)| \geq\ & \frac{\Delta}{\tilde{M}}\,|X_\Delta(t_n,\omega)|^{\delta_1} - \tilde{M}\Delta\,|X_\Delta(t_n - I_\Delta[\delta(t_n)]\Delta),\omega)|^{\delta_2} \\
& - 2\Delta\tilde{M}\,(|X_\Delta(t_n,\omega)|^{\gamma_1} + |X_\Delta(t_n - I_\Delta[\delta(t_n)]\Delta),\omega)|^{\gamma_2}) \\
& - |X_\Delta(t_n,\omega)| - k\,|X_\Delta(t_n - I_\Delta[\delta(t_n)]\Delta),\omega)| \\
& - k\,|\xi(t_{n-1} - I_\Delta[\delta(t_{n-1})])\Delta,\omega)|.
\end{aligned} \tag{3.3.26}$$

Takoђе, може се уочити да је $n - I_\Delta[\delta(t_n)] \leq n$. Према томе, на основу (3.2.19) и индуктивне претпоставке (3.3.23), следи да је

$$|X_\Delta(t_{k+1},\omega)| \geq |X_\Delta(t_k,\omega)|, \quad k \in \{1,2,\ldots,n-1\}. \tag{3.3.27}$$

Специјално, за $k = n-1$, добија се да је

$$|X_\Delta(t_n,\omega)| \geq |X_\Delta(t_{n-1},\omega)| \geq \cdots \geq |X_\Delta(t_n - I_\Delta[\delta(t_n)]\Delta),\omega)|,\ \omega \in \Omega_N. \tag{3.3.28}$$

Применом (3.3.18) и (3.3.28), као и (3.3.25) и (3.3.17), израз (3.3.26) постаје

$$\begin{aligned}
&|X_\Delta(t_{n+1},\omega)| \\
&\geq \frac{\Delta}{\tilde{M}}\,|X_\Delta(t_n,\omega)|^{\delta_1} - \Delta\tilde{M}\,|X_\Delta(t_n,\omega)|^{\delta_2} - 2\Delta\tilde{M}\,(|X_\Delta(t_n,\omega)|^{\gamma_1} + |X_\Delta(t_n,\omega)|^{\gamma_2}) \\
&\quad -(1+k)\,|X_\Delta(t_n,\omega)| - kK. \\
&\geq |X_\Delta(t_n,\omega)|^{\gamma}\left(\frac{\Delta}{\tilde{M}}\,|X_\Delta(t_n,\omega)|^{\delta_1-\gamma} - \Delta\tilde{M} - 4\Delta\tilde{M} - (1+k) - kK\right) \\
&\geq |X_\Delta(t_n,\omega)|^{\gamma}\left(\frac{\Delta}{\tilde{M}}r_N^{\delta_1-\gamma} - \Delta\tilde{M}K^{\delta_2} - 2\Delta\tilde{M}(1+K^{\gamma_2}) - 1 - 2kK\right) \\
&\geq |X_\Delta(t_n,\omega)|^{\gamma}, \quad \omega \in \Omega_N,
\end{aligned}$$

3. Претпоставља се да је $I_\Delta[\delta(t_n)] \geq n$ и $I_\Delta[\delta(t_{n-1})] < n-1$. Имајући у виду (3.3.27), аналогно релацији (3.3.28), важи и

$$|X_\Delta(t_{n+1},\omega))| \geq |X_\Delta(t_{n-1} - I_\Delta[\delta(t_{n-1})]\Delta),\omega)|, \quad \omega \in \Omega_N. \tag{3.3.29}$$

Тада, на основу (3.3.18), (3.3.29), (3.3.25) и (3.3.17), респективно, оцена (3.3.26) имплицира

$$\begin{aligned}
&|X_\Delta(t_{n+1},\omega)|\\
&\geq \frac{\Delta}{\tilde{M}}\,|X_\Delta(t_n,\omega)|^{\delta_1} - \tilde{M}\Delta\,|\xi((t_n - I_\Delta[\delta(t_n)])\Delta,\omega)|^{\delta_2}\\
&\quad - 2\Delta\tilde{M}\,(|X_\Delta(t_n,\omega)|^{\gamma_1} + |\xi((t_n - I_\Delta[\delta(t_n)])\Delta,\omega)|^{\gamma_2}) - |X_\Delta(t_n,\omega)|\\
&\quad - k\,|\xi((t_n - I_\Delta[\delta(t_n)])\Delta,\omega)| - k\,|X_\Delta(t_{n-1} - I_\Delta[\delta(t_{n-1})]\Delta),\omega)|\\
&\geq \frac{\Delta}{\tilde{M}}\,|X_\Delta(t_n,\omega)|^{\delta_1} - \tilde{M}\Delta K^{\delta_2} - 2\Delta\tilde{M}\,|X_\Delta(t_n,\omega)|^{\gamma_1} - 2\Delta\tilde{M}K^{\gamma_2}\\
&\quad - (1+k)\,|X_\Delta(t_n,\omega)| - kK\\
&\geq |X_\Delta(t_n,\omega)|^{\gamma}\left(\frac{\Delta}{\tilde{M}}|X_\Delta(t_n,\omega)|^{\delta_1-\gamma} - \Delta\tilde{M}K^{\delta_2} - 2\Delta\tilde{M}(1+K^{\gamma_2}) - (1+k) - kK\right)\\
&\geq |X_\Delta(t_n,\omega)|^{\gamma}\left(\frac{\Delta}{\tilde{M}}r_N^{\delta_1-\gamma} - \Delta\tilde{M}K^{\delta_2} - 2\Delta\tilde{M}(1+K^{\gamma_2}) - 1 - 2kK\right)\\
&\geq |X_\Delta(t_n,\omega)|^{\gamma}, \quad \omega \in \Omega_N.
\end{aligned} \tag{3.3.30}$$

4. Ако је $I_\Delta[\delta(t_n)] < n$ и $I_\Delta[\delta(t_{n-1})] < n-1$, тада, на основу (3.3.28) и (3.3.29), као и (3.3.25) и (3.3.17), релација (3.3.26) постаје

$$\begin{aligned}
&|X_\Delta(t_{n+1},\omega)|\\
&\geq \frac{\Delta}{\tilde{M}}\,|X_\Delta(t_n,\omega)|^{\delta_1} - \tilde{M}\Delta\,|X_\Delta(t_n,\omega)|^{\delta_2} - 2\Delta\tilde{M}\,(|X_\Delta(t_n,\omega)|^{\gamma_1} + |X_\Delta(t_n,\omega)|^{\gamma_2})\\
&\quad - (1+2k)\,|X_\Delta(t_n,\omega)|\\
&\geq |X_\Delta(t_n,\omega)|^{\gamma}\left(\frac{\Delta}{\tilde{M}}\,|X_\Delta(t_n,\omega)|^{\delta_1-\gamma} - \Delta\tilde{M} - 4\Delta\tilde{M} - 1 - 2k\right)\\
&\geq |X_\Delta(t_n,\omega)|^{\gamma}\left(\frac{\Delta}{\tilde{M}}r_N^{\delta_1-\gamma} - \Delta\tilde{M} - 4\Delta\tilde{M} - 1 - 2k\right)\\
&\geq |X_\Delta(t_n,\omega)|^{\gamma}\left(\frac{\Delta}{\tilde{M}}r_N^{\delta_1-\gamma} - \Delta\tilde{M}K^{\delta_2} - 2\Delta\tilde{M}\,(1+K^{\gamma_2}) - 1 - 2kK\right)\\
&\geq |X_\Delta(t_n,\omega)|^{\gamma}, \quad \omega \in \Omega_N.
\end{aligned}$$

Тиме је доказано да је

$$|X_\Delta(t_{n+1},\omega)| \geq |X_\Delta(t_n,\omega)|^{\gamma}, \quad \omega \in \Omega_N. \tag{3.3.31}$$

На основу (3.3.17), следи да је $r_N \geq 2$ за свако $N \in \mathbb{N}$. Применом (3.3.31) и индуктивне претпоставке (3.3.23), као и релације (3.3.25), важи да је

$$|X_\Delta(t_N,\omega)| \geq r_N^{\gamma^{N-1}} \geq 2^{\bar{\gamma}^{N-1}}, \qquad \omega \in \Omega_N,\ N \in \mathbb{N}.$$

Наставак доказа је потпуно аналоган завршном делу доказа Теореме 3.2.1, због чега се изоставља. □

Резултати претходне теореме важе и у случају када је $d > 1$ у смислу Напомене 3.1.1.

Напомена 3.3.1 *Поређењем услова (3.2.9), уз изостављање прелаза Маркова, и (3.3.14), може се уочити да је класа неутралних СДЈ са временски зависним кашњењем за коју одговарајућа сечена решења Ојлер–Марујаме дивергирају, ужа у односу на класу једначина истог типа за које класична решења Ојлер–Марујаме дивергирају. Та чињеница указује, између осталих, на предност сечене методе Ојлер–Марујаме над класичном методом Ојлер–Марујаме.*

Закључак

У овој дисертацији су разматране различите нумеричке апроксимације тачних решења неутралних СДЈ са временски зависним кашњењем (и прелазима Маркова). Већи део резултата изложених у овој дисертацији је добијен под претпоставком да су коефицијенти преноса и дифузије одговарајућих једначина са високим степеном нелинеарности, док је неутрални члан контрактивно пресликавање. Притом су проучаване експлицитне методе, и то класична и сечена метода Ојлер–Марујаме, као и семиимплицитна Ојлерова метода. У том смислу, одређена је класа неутралних СДЈ са временски зависним кашњењем за које класична и сечена метода Ојлер–Марујаме конвергирају у L^p-смислу за $p > 0$. Такође, одређен је ред L^q-конвергенције сечене методе Ојлер–Марујаме за $q > 2$. Поред класа једначина за које класична и сечена метода Ојлер–Марујаме конвергирају, одређене су и класе једначина истог типа за које поменуте нумеричке методе дивергирају у строгом L^p-смислу и нумерички слабом смислу. Класична метода Ојлер–Марујаме у контексту дивергенције је разматрана за СДЈ са временски зависним кашњењем и прелазима Маркова, док је дивергенција сечене методе Ојлер–Марујаме доказана за исти тип једначина без прелаза Маркова. Поред тога, доказане су и строга L^p-дивергенција и нумерички слаба дивергенција семиимплицитне Ојлерове методе за класу неутралних СДЈ са временски зависним кашњењем. Тиме су сужене класе поменутих типова једначина у оквиру којих треба трагати за оним једначинама за које наведене нумеричке методе конвергирају у L^p-смислу.

Између осталог, доказано је да класе једначина поменутих типова са јединственим глобалним решењем, коначним апсолутним моментима првог реда тачног решења и бесконачним моментима првог реда решења генерисаних семиимплицитном Ојлеровом методом, као и класичном методом Ојлер–Марујаме, нису празне. Како је прва метода имплицитна, узети су у обзир и услови који гарантују егзистенцију и јединственост одговарајућег нумеричког решења. Добијени резултати су илустровани кроз примере и нумеричке симулације, при чему је у примерима примењиван приступ Хасминског. Међутим, како је дивергенција поменутих метода доказана за једнодимензионалне СДЈ, даља истраживања могу се усмерити на дивергенцију одговарајућих нумеричких метода у вишедимензионалном случају када коефицијент дифузије није дијагонална матрица.

Технике које су примењиване при доказивању главних резултата дисертације су условљене типом једначине која се разматра, као и условима који су претпостављени за њене коефицијенте. Сходно томе, даља истраживања могу се проширити на друге типове СДЈ, као што су на пример, СДЈ са Левијевим или Пуасоновим скоком и backward СДЈ, док се услови које задовољавају коефицијенти једначина могу заменити другим, општијим условима или условима који одређују другачије класе једначина. Поред тога, теме наредних истраживања могу бити и друге нумеричке методе које немају уочене недостатке наведених метода. Познато је да постоје и стохастички интеграли засновани на произвољном мартингалу, те за даља изучавања могу бити од интереса СДЈ са мартингалним мерама, као и одговарајуће нумеричке методе.

Литература

[1] G. K. Basak, A. Bisi, M.K. Ghosh, *Stability of a random diffusion with linear drift*, J. Math. Anal. Appl. (1996), 604–622.

[2] A. Bahar, X. Mao, *Stochastic delay Lotka-Volterra model,* J. Math. Anal. Appl., **292** (2004), 364–380.

[3] A. Bahar, X. Mao, *Stochastic delay population dynamics,* International J. Pure and Applied Math., **11** (2004), 377–400.

[4] I.I. Gikhman, A.V. Skorokhod, *Stochastic differential equations and their applications*, Naukova Dumka, Kiev, 1982 (на руском).

[5] S. Gan, X. Wang, *The tamed Milstein method for commutative stochastic differential equations with non-globally Lipschitz continuous coefficients,* J. Difference Equ. Appl. (2015), http://dx.doi.org/10.1080/10236198.2012.656617.

[6] Q. Guo, X. Mao, R. Yue, *The truncated Euler–Maruyama method for stochastic differential delay equations,* Numerical Algorithms, **78** (2018), 599–624.

[7] M. Hutzenthaler, A. Jentzen, P. E. Kloeden, *Strong and weak divergence in finite time of Euler's method for stochastic differential equations with non-globally Lipschitz continuous coefficients*, Proc. R. Soc. A, **467** (2011), 1563–1576.

[8] M. Hutzenthaler, A. Jentzen, *Convergence of the Stochastic Euler Scheme for Locally Lipschitz Coefficients*, Foundations of Computational Mathematics, **11** (2011), 657–706.

[9] M. Hutzenthaler, A. Jentzen, P. Kloeden, *Strong convergence of an explicit numerical method for SDEs with non-globally Lipschitz continuous coefficients,* Ann. Appl. Probab., **22** (2012), 1611–1641.

[10] M. Hutzenthaler, A. Jentzen, P. E. Kloeden, *Divergence of the multilevel Monte Carlo Euler method for nonlinear stochastic differential equations*, The Annals of Applied Probability, **23** (2013), 1913–1966.

[11] M. Hutzenthaler, A. Jentzen, *Numerical approximations of stochastic differential equations with nonglobally Lipschitz continuous coefficients*, Memoirs of the Amererican Mathematical Society, **236** (2015), no. 1112.

[12] M. Hutzenthaler, A. Jentzen, *On a perturbation theory and on strong convergence rates for stochastic ordinary and partial differential equations with non-globally monotone coefficients*, Ann. Probab., **48** (2020), 53–93.

[13] L. Hu, X. Mao, Y. Shen, *Stability and boundedness of nonlinear hybrid stochastic differential delay equations,* Systems Control Lett., **62** (2013), 178–187.

[14] L. Hu, X. Li, X. Mao, *Convergence rate and stability of the truncated Euler–Maruyama method for stochastic differential equations*, J. Comput. Appl. Math., **337** (2018), 274–289, DOI: https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.01.017.

[15] D. J. Higham, X. Mao, A. M. Stuart, *Strong convergence of Euler-type methods for nonlinear stochastic differential equations*, SIAM J. Numer. Anal., **40** (2002), 1041–1063 (electronic).

[16] D. J. Higham, X. Mao, A. M. Stuart, *Exponential mean-square stability of numerical solutions to stochastic differential equations*, LMS J. Comput. Math. **6** (2003), 297–313 (electronic), https://doi.org/10.1112/S1461157000000462

[17] Z. Hao, H. Yaozhong, L. Yanghui, *Backward Euler method for stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients driven by fractional Brownian motion*, Numerical Mathematics, **63** (2023), no. 40. https://doi.org/10.1007/s10543-023-00981-z

[18] N. Jacob, Y. Wang, C. Yuan, *Stochastic differential delay equations with jumps, under nonlinear growth condition*, Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastics Processes, **81** (2009), 571–588.

[19] S. Janković, M. Jovanović, *Analytic approximations of solutions to stochastic differential equations,* Faculty of Science and Mathematics, University of Niš, 2008.

[20] S. Kanagawa, *On the rate of convergence for Maruyama's approximate solutions of stochastic differential equations*, Yokohama Math. J., **36** (1988), 79–85.

[21] S. Kanagawa, *The rate of convergence for approximate solutions of stochastic differential equations*, Tokyo J. Math., **12** (1989), 31–48.

[22] P. E. Kloeden, E. Platen, *Numerical solution of stochastic differential equations*, Applications of Mathematics (New York) 23, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[23] G. Lan, C. Yuan, *Exponential stability of the exact solutions and θ–EM approximations to neutral SDDEs with Markov switching*, J. Comput. Appl. Math., **285** (2015), 230–242.

[24] H. Liu, F. Wu, and M. Wu. *The tamed Euler-Maruyama approximation of Mckean-Vlasov stochastic differential equations and asymptotic error analysis*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - S, **16** (2023), 1014–1040, DOI: https://doi.org/10.3934/dcdss.2023029.

[25] H. Liu, B. Shi, and F. Wu, *Tamed Euler-Maruyama approximation of McKean-Vlasov stochastic differential equations with super-linear drift and Holder diffusion coefficients*, Applied Numerical Mathematics, **183** (2023), DOI: https://doi.org/10.1016/j.apnum.2022.08.012.

[26] Q. Luo, X. Mao, Y. Shen, *New criteria on exponential stability of neutral stochastic differential delay equations,* Systems Control Lett., **55** (2006), 826–834.

[27] W. Liu, X. Mao, *Strong convergence of the stopped Euler-Maruyama method for nonlinear stochastic differential equations,* Appl. Math. Comput. **223** (2013), 389–400.

[28] Y. Li, X. Mao, Q. Song, F. Wu, and G. Yin, *Strong convergence of Euler-Maruyama schemes for McKean-Vlasov stochastic differential equations under local Lipschitz conditions of state variables*, IMA Journal of Numerical Analysis, **43** (2023), 1001–1035, DOI: https://doi.org/10.1093/imanum/drab107.

[29] S. E. A., Mohammed, *Stochastic functional differential equations*, Harlow, UK: Longman Scientific and Tehnical, 1986.

[30] X. Mao, *Stochastic Differential Equations and Applications,* Horvood, Chichester, UK, 1997.

[31] X. Mao, *Stability of stochastic differential equations with Markovian switching,* Stochastic Process. Appl., **79** (1999), 45–67.

[32] X. Mao, *Asymptotic properties of neutral stochastic differential delay equations,* Stoch. Stoch. Rep., **68** (2000), 273–295.

[33] X. Mao, *Numerical solutions of stochastic differential delay equations under local Lipschitz condition,* J. Comput. Appl. Math., **151** (2003), 215–227.

[34] X. Mao, *Numerical solutions of stochastic functional differential equations,* LMS J. Comput. Math., **6** (2003), 141–161.

[35] X. Mao, M.J. Rassias, *Khasminskii-type theorems for stochastic differential delay equations,* Stoch. Anal. Appl., (2005), 1045–1069.

[36] X. Mao, C. Yuan, *Stochastic Differential Equations with Markovian Switching,* Imperical college press, London, 2006.

[37] X. Mao, *Exponential stability of equidistant Euler–Maruyama approximations of stochastic differential delay equations,* J. Comput. Appl. Math., **200** (2007), 297–316.

[38] X. Mao, *Numerical solutions of stochastic differential delay equations under the generalized Khasminskii-type conditions*, Appl. Math. Comput., **217** (2011), 5512–5524.

[39] X. Mao, *The truncated Euler–Maruyama method for stochastic differential equations,* J. Comput. Appl. Math., **290** (2015), 370–384.

[40] G. Maruyama, Continuous Markov processes and stochastic equations, Rend. Circ. math. Palermo, **4** (1955), 48–90.

[41] J. C. Mattingly, A. M. Stuart, D. J. Higham, *Ergodicity for SDEs and approximations: locally Lipschitz vector fields and degenerate noise*, Stochastic Process. Appl. **101** (2002) 185–232. https://doi.org/10.1016/S0304-4149(02)00150-3

[42] M. Milošević, *Highly nonlinear neutral stochastic differential equations with time-dependent delay and the Euler–Maruyama method*, Math. Comput. Modelling, **54** (2011), 2235–2251.

[43] M. Milošević, *Almost sure exponential stability of solutions to highly nonlinear neutral stochastic differential equations with time-dependent delay and the Euler-Maruyama approximation*, Math. Comput. Model., **57** (2013), 887–899.

[44] M. Milošević, *Implicit numerical methods for highly nonlinear neutral stochastic differential equations with time-dependent delay,* Applied Mathematics and Computation, **244** (2014), 741–760. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.07.042

[45] M. Milošević, *Convergence and almost sure polynomial stability of the backward and forward-backward Euler methods for highly nonlinear pantograph stochastic differential equations*, Mathematics and Computers in Simulation, **150** (2018), 25–48.

[46] M. Milošević, *Divergence of the backward Euler method for ordinary stochastic differential equations*, Numerical Algorithms, **82** (2019), 1395–1407.

[47] G. N. Milstein, *Numerical integration of stochastic differential equations*, Mathematics and its Applications 313, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1995.

[48] M. Obradović, M. Milošević, *Stability of a class of neutral stochastic differential equations with unbounded delay and Markovian switching and the Euler-Maruyama method*, J. Comput. Appl. Math. 309 (2017), 244–266.

[49] A. Petrović, M. Milošević, *The truncated Euler–Maruyama method for highly nonlinear neutral stochastic differential equations with time-dependent delay*, **35** Filomat, (2021), 2457–2484.

[50] A. Petrović, *Convergence rate of the truncated Euler–Maruyama method for highly nonlinear neutral stochastic differential equations with time-dependent delay*, Open Mathematics, **22** (2024), no. 1, 20240038, DOI: https://doi.org/10.1515/math-2024-0038.

[51] A. Petrović, M. Milošević, *Strong and weak divergence of the backward Euler method for neutral stochastic differential equations with time-dependent delay*, Stochastic Analysis and Applications, DOI: https://doi.org/10.1080/07362994.2024.2396093.

[52] A. Petrović, M. Milošević, *Divergence of the Euler-Maruyama method for neutral stochastic differential equations with unbounded delay and Markovian switching*, (у припреми).

[53] A. Petrović, M. Milošević, *Divergence of the truncated Euler–Maruyama method for neutral stochastic differential equations with time-dependent delay*, (у припреми).

[54] G. O. Roberts, R. L. Tweedie, *Exponential convergence of Langevin distributions and their discrete approximations*, Bernoulli, **2** (1996), 341–363, https://doi.org/10.2307/3318418.

[55] S. Sabanis, *A note on tamed Euler approximations*, Electron. Comm. Probab. **18** (2013), 1–10.

[56] L. Tan, C. Yuan, *Convergence rates of truncated EM scheme for NSDDEs,* arXiv:1801.05952v1.

[57] N. Wiener, *Differential spaces,* J. Math. Phys., **2** (1923), 131–174.

[58] N. Wiener, *The homogeneous chaos,* Amer. J. Math., **60** (1930), 897–936.

[59] F. Wu, X. Mao, *Numerical solutions of neutral stochastic functional differential equations,* SIAM J. NUMER. ANAL., **46** (2008), 1821–1841.

[60] F. Wu, X. Mao, L. Szpruch, *Almost sure exonential stability of numerical solutions for stochastic delay differential equations*, Numer. Math., 115 (2010), 681–697.

[61] X. Wang, S. Gan, *The improved split-step backward Euler method for stochastic differential delay equations*, International Journal of Computer Mathematics, **88** (2011), no. 11, 2359-2378, https://doi.org/10.1080/00207160.2010.538388.

[62] M. Xue, S. Zhou, S. Hu, *Stability of nonlinear neutral stochastic functional differential equations*, J. Appl. Math. (2010), DOI: 10.1155/2010/425762.

[63] C. Yuan, X. Mao, *Robust stability and controllability of stochastic differential delay equations with Markovian switching*, Automatica, **40** (2004), 343–354.

[64] C. Yuan, X. Mao, *Convergence of the Euler–Maruyama method for stochastic differential equations with Markovian switching,* Math. Comput. Simulation, **64** (2004), 223–235.

[65] H. Yang, F. Wu, P. E. Kloeden, and X. Mao, *The truncated Euler-Maruyama method for stochastic differential equations with Holder diffusion coefficients*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **366** (2020), no. 112379, DOI: https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112379.

[66] Z. Yu, *Almost surely asymptotic stability of exact and numerical solutions for neutral stochastic pantograph equations,* Abstract and Applied Analysis, (2011), doi:10.1155/2011/14079.

[67] C. Ziheng, G. Siqing, *Convergence and stability of the backward Euler method for jump-diffusion SDEs with super-linearly growing diffusion and jump coefficients*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **363** (2020), 350–369, https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.06.018.

[68] W. Zhang, *Convergence rate of the truncated Euler–Maruyama method of neutral stochastic differential delay equations with Markovian switching,* J. Comput. Math., **38** (2020), 874–904, DOI: https://doi:10.4208/jcm.1906-m2018-0237.

Биографија

Александра Петровић је рођена 28.09.1993. године у Лесковцу. Завршила је основну школу "8. Октобар" и Гимназију "Стеван Јаковљевић" у Власотинцу, обе са просеком 5.00 као носилац Вукове дипломе и ученик генерације. Током школовања је била добитник многобројних диплома на такмичењима из математике и биологије. Основне академске студије је завршила на Природно-математичком факултету у Нишу, студијски програм Математика, од академске 2012/13. до академске 2014/15. године. Остварила је просечну оцену 9.40. Мастер академске студије је уписала школске 2015/16. године и завршила новембра 2017. године са просечном оценом 9.75. Мастер рад под називом "VIX" одбранила је са највишом оценом. Докторске студије уписала је академске 2017/18. године на истом факултету и положила све испите предвиђене програмом студија.

Школске 2019/20. и 2020/21. године била је ангажована у Гимназији "Светозар Марковић" за извођење наставе из предмета Математика у I и III разреду, у одељењу за ученике са посебним способностима за физику. На Природно-математичком факултету у Нишу изводи вежбе од школске 2016/2017. године. До сада је била ангажована на предметима: Вероватноћа (Департман за рачнарске науке) и Елементи финансијске математике (Департман за математику) и Послона математика (Департман за географију).

Учествовала је на пројекту: "Функционална анализа, стохастичка анализа и примене", ОН 174007, Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије. Аутор је или коаутор три научна рада у медународним часописима који су на SCI листи.

Учествовала је на разним фестивалима који промовишу науку и била је део тима "Прве школе природно–математичких наука", Природно–математичког факултета у Нишу.

Резултате својих истраживања је презентовала на следећим међународним конгресима и конференцијама:

1. Congress of young mathematicians in Novi Sad, 2019, Novi Sad, Serbia.

2. A. Petrović, M. Milošević, *L^p-convergence of the truncated Euler-Maruyama approximate solutions for a class of highly nonlinear neutral stochastic differential equations with time-dependent delay, International Conference of Young Mathematicians*, 2021, National Academy of Sciences of Ukraine, Institute of Mathematics.

3. A. Petrović, M. Milošević, *Divergence result on the backward Euler approximation for neutral stochastic differential equations with time-dependent delay*, International Workshop on NONLINEAR ANALYSIS AND ITS APPLICATIONS (IWNAA), 2021, Niš, Serbia.

4. A. Petrović, *The truncated Euler–Maruyama approximate solutions for neutral stochastic differential equations with time-dependent delay and convergence rate*, 7th CROATIAN MATHEMATICAL CONGRESS, 2022, Split, Croatia.

Библиографија научних радова

1. A. Petrović, M. Milošević, *The truncated Euler-Maruyama method for highly nonlinear neutral stochastic differential equations with time-dependent delay*, **35** Filomat, no. 7 (2021), 2457–2484. **(M22)**

2. A. Petrović, *Convergence rate of the truncated Euler–Maruyama method for highly nonlinear neutral stochastic differential equations with time-dependent delay*, Open Mathematics, **22** (2024). no. 1, 20240038, DOI: https://doi.org/10.1515/math-2024-0038. **(M21)**

3. A. Petrović, M. Milošević, *Strong and weak divergence of the backward Euler method for neutral stochastic differential equations with time-dependent delay*, Stochastic Analysis and Applications, (2024), DOI: https://doi.org/10.1080/07362994.2024.2396093. **(M22)**

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

Нумеричке методе Euler-овог типа за стохастичке диференцијалне једначине са кашњењем

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао/ла на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 02.30.2024.

Потпис аутора дисертације:

А. Петровић

Александра М. Петровић

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ЕЛЕКТРОНСКОГ И ШТАМПАНОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Наслов дисертације:

Нумеричке методе Euler-овог типа за стохастичке диференцијалне једначине са кашњењем

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу,** истоветан штампаном облику.

У Нишу, 02.09.2024.

Потпис аутора дисертације:

Александра М. Петровић

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

Нумеричке методе Euler-овог типа за стохастичке диференцијалне једначине са кашњењем

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство **(CC BY)**
2. Ауторство – некомерцијално **(CC BY-NC)**
3. **Ауторство – некомерцијално – без прераде (CC BY-NC-ND)**
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима **(CC BY-NC-SA)**
5. Ауторство – без прераде **(CC BY-ND)**
6. Ауторство – делити под истим условима **(CC BY-SA)**[4]

У Нишу, 02.09.2024.

Потпис аутора дисертације:

А. Петровић

Александра М. Петровић