



УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ГРАЂЕВИНСКО-АРХИТЕКТОНСКИ ФАКУЛТЕТ



Степа М. Пауновић

**Нова конструкција и математички модел
пијезоелектричног динамичког апсорбера за
контролу вибрација мостовских конструкција**

Докторска дисертација

Ниш, 2023.



UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY FOR CIVIL ENGINEERING AND
ARCHITECTURE



Stepa M. Paunović

**A novel construction and mathematical model of
piezoelectric dynamic absorber for vibration
control of bridges**

Doctoral dissertation

Niš, 2023

Подаци о ментору и члановима комисије

Ментор:

Др Марина Мијалковић, редовни професор,
Универзитет у Нишу, Грађевинско-архитектонски факултет

Чланови комисије:

Др Марина Мијалковић, редовни професор,
Универзитет у Нишу, Грађевинско-архитектонски факултет

Др Душан Зорица, редовни професор,
Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет

Др Биљана Младеновић, доцент,
Универзитет у Нишу, Грађевинско-архитектонски факултет

Др Драган Златков, ванредни професор у пензији,
Универзитет у Нишу, Грађевинско-архитектонски факултет

Датум одбране: _____

Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	Др Марина Мијалковић, редовни професор, Универзитет у Нишу, Грађевинско архитектонски факултет
Наслов:	Нова конструкција и математички модел пијезоелектричног динамичког апсорбера за контролу вибрација мостовских конструкција
Резиме:	<p>У дисертацији је изложена иновативна конструкција динамичког апсорбера за контролу вибрација мостовских конструкција, при чему су апсорберима додати пијезоелектрични елементи у виду система повезаних биморфних греда. Додавањем пијезо-елемената се део механичке енергије вибрација моста претвара у електричну енергију, која се потом може користити за напајање уређаја за мониторинг конструкције, сигнализацију и расвету. Развијен је детаљан математички модел за описивање електро-механичког понашања представљеног новог типа пијезоелектричног динамичког апсорбера (ПЕДА), и ваљаност модела испитана је поређењем резултата са резултатима експеримената доступним у литератури. Модел дозвољава и унапређење перформанси ПЕДА употребом материјала који се моделирају уз примену извода нецелог реда. Једначине кретања су изведене применом Хамилтоновог варијационог принципа, а решене Галеркиновом методом за дискретизацију проблема у просторном домену, и потом Њумарковим поступком у временском домену, док су решења у фреквентном домену добијена Лапласовом трансформацијом, уз претпоставку квазистационарног режима вибрација. У дисертацији је описан и поступак оптимизације геометријских и материјалних параметара ПЕДА, као и оптимизације броја и распореда апсорбера на мосту у циљу највећег ублажавања вибрација моста и производње највеће количине електричне енергије. Приказан је и пример примене новог типа апсорбера за контролу вибрација постојеће мостовске конструкције, као и могући начини да се ефикасност ПЕДА додатно повећа. Резултати указују да се применом ПЕДА динамичке карактеристике мостовске конструкције могу знатно унапредити, уз истовремено стварање електричне енергије, за широк опсег фреквенци побуде, што чини да ПЕДА имају потенцијал да допринесу и остваривању одрживог развоја.</p>
Научна област:	Грађевинско инжењерство
Научна дисциплина:	Техничка механика и теорија конструкција
Кључне речи:	динамички апсорбери, контрола вибрација, пијезоелектрични елементи, сакупљачи енергије, фракциони рачун, хибридни системи
УДК:	625.745.12:534(043.3)
CERIF класификација:	T 220 Грађевинарство, хидраулика, приборална технологија, механика тла
Тип лиценце Креативне заједнице:	CC BY-NC-NC

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	Dr Marina Mijalković, full professor University of Niš, Faculty of Civil Engineering and Architecture
Title:	Novel Construction and Mathematical Model for Piezoelectric Dynamic Absorbers for Vibration Control of Bridges
Abstract:	<p>In the dissertation a novel construction of a dynamic absorber for bridge vibration control is presented, with piezoelectric elements, in a form of connected bimorph beams, added to the absorbers. Through adding the piezo-elements, part of the mechanical energy of bridge vibrations is transformed into electrical energy, turning the piezoelectric dynamic absorber (PEDA) into an energy harvesting device. Generated electric energy is able to power bridge monitoring devices and signalisation. A thorough mathematical model of PEDA is devised and then validated by comparing the results to the ones in the literature. The model also allows for improvement of the PEDA performance by the use of materials modelled with derivatives of non-integer order. The governing equations are derived through the Hamilton's principle, and then solved via the Galerkin spatial discretization and Newmark numerical integration procedure in the time domain, and by assuming the quasi-stationary vibration state for the solution in the frequency domain. In the dissertation, the procedure is also presented for optimizing geometrical and material parameters of the PEDA model, as well as optimizing the number and disposition of the absorbers on the bridge, with the goal to minimize bridge vibrations and maximize generated electrical power. An example of application of PEDA for bridge vibration control is also provided, and several possible ways for further improving the PEDA performance are included. The results show that bridge dynamic characteristics can be significantly improved through the use of PEDA, while at the same time generating a meaningful amount of electrical energy for a wide range of forcing load frequencies, making PEDA a potentially valuable asset in achieving sustainable development.</p>
Scientific Field:	Civil engineering
Scientific Discipline:	Engineering Mechanics and Theory of Structures
Keywords:	dynamic absorbers, vibration control, piezoelectric devices, energy harvesting, fractional calculus, hybrid systems
UDC:	625.745.12:534(043.3)
CERIF Classification:	T 220 Civil engineering, hydraulic engineering, offshore technology, soil mechanics
Creative Commons Licence Type:	CC BY-NC-NC

Захвалност

Др Марини Мијалковић, редовном професору Грађевинско-архитектонског факултета Универзитета у Нишу, изражавам велику захвалност на свесрдној помоћи, усмеравању и вођству током истраживања и израде ове докторске тезе. Њена стална подршка, поверење и подстрек умногоме су ми били од пресудне помоћи да истрајем у овом истраживењу и уобличим дисертацију у форму коју сада има. Такође, према професорки Мијалковић осећам дубоку захвалност и због дугогодишње сарадње и стрпљивог подучавања, како у области теорије конструкција, тако и у вештини преношења знања и развоју људских квалитета и врлина чији значај је и шири од оквира саме дисертације и представља одраз менторства у правом смислу те речи.

Др Душану Зорици, редовном професору Природно-математичког факултета Универзитета у Новом Саду, се посебно захваљујем на отворености и огромној помоћи у разумевању и савладавању теоријских основа неопходних за спровођење овог истраживања, као и за ригорозну и стручну проверу најважнијих делова дисертације, и бројним корисним сугестијама које су знатно допринеле да ова дисертација има свој тренутни облик и садржину.

Др Биљани Младеновић, доценту Грађевинско-архитектонског факултета Универзитета у Нишу, изражавам велику захвалност на подршци, разумевању и свим саветима везаним за дисертацију који су умногоме помогли повећању прегледности и организације текста тезе.

Др Драгану Златкову, ванредном професору Грађевинско-архитектонског факултета Универзитета у Нишу, се захваљујем на изузетном доприносу у погледу анализе практичности и применљивости идејних решења представљених у овом истраживању, као и на бројним разговорима и предлозима према којима је направљена спона између теоријских разматрања и примене тако добијених решења у инжењерској пракси.

Др Милану Цајићу, вишем научном сараднику на Математичком институту САНУ, од срца се захваљујем на усмеравању, небројеним дискусијама и стручној и научној помоћи везаној за усвајање основа теорије фракционог рачуна и примене извода нецелог реда у моделирању материјала, као и савладавање изазова везаних за решавање фракционих парцијалних диференцијалних једначина које се при том поступку јављају.

Др Данилу Карличићу, вишем научном сараднику на Математичком институту САНУ, дугујем велику захвалност за бројне савете и препоруке везане за развој математичког модела приказаног у овој дисертацији, а нарочито на пољу примене и разраде нумеричких

метода за решавање једначина којима се овде развијени модел описује.

Др Катици (Стевановић) Хедрих, редовном професору Машинског факултета Универзитета у Нишу у пензији, захваљујем на поверењу, подстреку и подршци које је и мени, као и многим младим истраживачима и научницима, указала на почетку моје научне каријере, затим на плодном тлу за научни рад које је створила и одржавала, али и на пресудном утицају у кључним тренуцима и прилици да истраживања вршим у за то веома погодним условима, без којих би израда ове дисертације несумњиво била сасвим другачије искуство.

Највећу захвалност дугујем својој породици, пријатељима и кумовима, који су ми својом љубављу и неисцрпним разумевањем, стрпљењем и добронамерношћу пружали подршку и ослонац на сваком кораку овог пута, професору Љубомиру Китићу што ми је помогао да одржим усредсређеност на постављене циљеве и не залутам, као и свим осталим учесницима који су, непосредно или посредно, допринели настанку ове дисертације.

Степа Пауновић,
Мастер инжењер грађевинарства

У Нишу, 12.11.2023.

Садржај

1	Уводна разматрања	17
1.1	Поставка проблема и тема истраживања	17
1.1.1	Динамички апсорбери	17
1.1.2	Пијезоелектрични сакупљачи енергије	20
1.1.3	Комбиновање пијезоелектричних сакупљача енергије са динамичким апсорберима	22
1.1.4	Напредно моделирање материјала уз примену извода нецелог реда	23
1.2	Хипотезе и циљеви истраживања	27
1.3	Коришћена методологија истраживања	28
1.4	Кратак преглед структуре дисертације	28
2	Теоријске основе	30
2.1	Основе фракционог рачуна	30
2.1.1	Дефиниција извода и интеграла нецелог реда	32
2.2	Вибрације греда као система са бесконачно много степени слободе	34
2.2.1	Једначина кретања греде	35
2.2.2	Вибрације греде са додатим концентрисаним масама	41
2.2.3	Вибрације греде са додатим динамичким апсорберима	42
2.3	Основе пијезоелектричности	44
3	Нови тип пијезоелектричног динамичког апсорбера	50
3.1	Додавање пијезоелектричних својстава динамичком апсорберу	50
3.1.1	Математичко моделирање понашања биморфних греда	52
3.1.1.1	Једначина електричног кола за један пијезоелектричан слој	53
3.1.1.2	Једначина електричног кола за биморфну греду са редном везом пијезо-слојева	56
3.1.1.3	Електрична једначина за биморфну греду са паралелном везом пијезо-слојева	56
3.2	Предлог нове конструкције динамичког апсорбера са пијезоелектричним својствима	58
3.3	Математички модел предложеног типа ПЕДА	61
3.3.1	Извођење једначине кретања	61

3.3.2	Једначина електричног кола за систем биморфних греда са паралелном везом пијезо-слојева	65
3.3.3	Решавање добијеног система једначина	67
3.3.4	Галеркинов апроксимативни метод	68
3.4	Апроксимација фракционог извода	73
3.5	Примена апроксимације фракционог извода на претходно добијени систем једначина	78
3.6	Решавање добијеног система једначина у временском домену	81
3.7	Решавање добијеног система једначина у фреквентном домену	83
4	Валидација модела предложеног типа пијезоелектричног динамичког апсорбера	88
4.1	Поређење резултата за случај вибрација једне биморфне греде	89
4.1.1	Поређење за случај једне биморфне греде без додате масе	89
4.1.2	Поређење за случај једне биморфне греде са додатом масом на слободном крају	92
4.2	Поређење резултата за случај система биморфних конзола еластично повезаних на слобоним крајевима	95
4.3	Поређење за случај једне фракционо вискоеластичне греде са додатом концентрисаном масом на слободном крају	98
5	Примена предложеног типа динамичког апсорбера за контролу вибрација мостовских конструкција	100
5.1	Математички модел греде са динамичким апсорберима	101
5.2	Решење добијеног система једначина	102
5.2.1	Решење у фреквентном домену	103
5.2.2	Решење у временском домену	104
5.3	Валидација предложеног модела међудејства мостовске конструкције и динамичких апсорбера	108
6	Анализа утицаја параметара предложеног модела на динамичка својства система	112
6.1	Анализа утицаја ПЕДА на динамику моста	112
6.1.1	Динамичка анализа греде без апсорбера	113
6.1.2	Утицај масе и крутости апсорбера	117
6.1.3	Утицај броја и положаја апсорбера	119
6.2	Оптимизација параметара појединачних ПЕДА	122
6.2.1	Утицај броја греда	122
6.2.2	Утицај слоја спрезања	123
6.2.3	Утицај броја, величине и положаја додатих маса	125

6.3	Пример и опис поступка могуће примене предложеног типа апсорбера за контролу вибрација мостовске конструкције	126
7	Закључна разматрања	132
7.1	Рекапитулација резултата истраживања	135
7.2	Могући правци даљег истраживања	137
	Биографија аутора	156

Листа коришћених симбола и ознака

A	површина попречног пресека
b	ширина попречног пресека
h	висина (дебљина)
I	момент инерције попречног пресека с обзиром на осу око које се врши савијање
L	дужина
ρ	специфична маса (густина масе)
m	маса по јединици дужине
Y	модуо еластичности / продужени модуо релаксације
u	подужно померање
w	попречно (трансферзално) померање
x	подужна координата
t	време
z	трансферзална координата
ε	подужна дилатација
σ	нормални напон
T	кинетичка енергија
Π	потенцијална енергија
W	рад спољашњих сила
f	спољашње расподељено оптерећење
c_0	кофицијент вискозног пригушења околне средине (медијума)
c_s	кофицијент вискозног пригушења самог материјала конструкције
c_a	кофицијент вискозног пригушења самог материјала конструкције
τ	време ретардације
α, β	ред фракционог извода
δ	варијациони оператор
M_L	момент савијања на слободном крају конзоле
V_L	трансверзална сила на слободном крају конзоле
$\varphi(x)$	угао нагиба тангенте на еластичну линију носача
$M(x)$	момент савијања у попречном пресеку носача

N_m	број додатих концентрисаних маса
$\delta(x)$	Диракова делта функција
N_a	број додатих динамичких апсорбера
$z_a(t)$	апсолутно вертикално померање динамичког апсорбера
F	концентрисана сила
t_j	вектор тоталног напона за пресечну раван са нормалом n_j
n_j	вектор нормале на граничну површ
φ	скаларни потенцијал електричног поља
D_j	вектор електричног помераја
E_j	вектор јачине електричног поља
S_{ij}	тензор деформације
T_{ij}	тензор напона
ϵ_0	пермитивност
κ_e	диелектрична константа материјала
c	брзина светлости у вакууму
H	енталпија
C_{ijkl}	тензор еластичности
e_{ijk}	тензор пијезоелектричности
ϵ_{ij}	тензор диелектричности
d	пијезоелектрична константа материјала
\bar{q}_{el}	количина наелектрисања на површини тела
\bar{t}_k	вектор површинских сила
g	убрзање Земљине теже
$v(t)$	електрични напон
Q	количина наелектрисања
i_R	јачина електричне струје која протиче кроз отпорник
i_C	јачина електричне струје која протиче кроз кондензатор
R	електрична отпорност
C_p	капацитивност
i_p	јачина струје која се ствара у пијезоелектричном слоју биморфне греде
$H(x)$	Хевисајдова функција
$\phi(x)$	пробна функција у Галеркиновој апроксимацији
$q(t)$	временска функција у Галеркиновој апроксимацији
ω	сопствена фреквенца
δ_{ij}	Кронекеров симбол
κ	модуо стишљивости слоја спрезања између биморфних греда

M	матрица маса система
C	матрица пригушења система
K	матрица крутости система
q	вектор непознатих временских функција у Галеркиновој апроксимацији
f	вектор слободних чланова система
χ	вектор електро-механичког спрезања
N_b	број повезаних биморфних греда у систему
GL	Грнвалд-Летњиковљев коефицијент
Δt	инкремент времена при нумеричкој интеграцији у временском домену
h_N	корак дискретизације временског домена при апроксимацији фракционог извода
p	однос корака у грубој и финој дискретизацији временског домена
T_I	основни период осциловања конструкције
N_c	број претходних корака који се обухватају корективним чланом при апроксимацији фракционог извода
H	матрица чланова развоја у Телјоров ред
D	вектор апроксимације фракционог извода
u	вектор непознатих временских функција у Галеркиновој апроксимацији проширен непознатом функцијом електричног напона
β_N, γ_N	коефицијенти у Њумарковом поступку нумеричке интеграције
\mathbf{A}_N	матрица система у Њумарковој методи
\mathbf{b}_N	вектор слободних чланова у Њумарковој методи
Ω	кружна фреквенца померања ослонца конзолне греде
ι	имагинарна јединица
V_F	брзина кретања покретног оптерећења
Ω_F	кружна фреквенца осциловања интензитета покретног оптерећења
μ_a	однос масе апсорбера и масе основне конструкције
λ_a	одно крутости везног елемента апсорбера и крутости на савијање основне конструкције

Списак слика

1.1	Примери изведених објеката са динамичким апсорберима	20
1.2	Реолошки модели материјала, (a) Максвелов модел, (b) Келвин-Војтов модел, (c) Зенеров модел, две варијанте - опруга везана редно са Келвин-Војтовим моделом и опруга везана паралелно са Максвеловим моделом, (d) анти-Зенеров модел, две варијанте - пригушница везана редно са Келвин-Војтовим моделом и пригушница везана паралелно са Максвеловим моделом (e) Бургерсов модел, две варијанте - модел за релаксацију (лево) и пужење (десно) материјала	25
2.1	Померања тачака греде током деформације	36
2.2	Греда са N_m додатих концентрисаних маса	41
2.3	Греда са N_a додатих динамичких апсорбера повезаних на различите начине	43
3.1	Шематски приказ динамичког апсорбера са додатим пијезоелектричним претварачем енергије - основни концепт ПЕДА	52
3.2	Униморфна конзолна греда са додатом концентрисаном масом на слободном крају и њен попречни пресек	53
3.3	Замењујуће електрично коло за униморфну греду	55
3.4	Биморфна греда са редном везом пијезо-слојева и одговарајуће замењујуће струјно коло	56
3.5	Биморфна греда са паралелном везом пијезо-слојева и одговарајуће замењујуће струјно коло	57
3.6	Систем од N_b повезаних биморфних греда са додатим концентрисаним масама; пијезо-слојеви су везани паралелно, а пригушење носећег слоја греда као и повезујућих слојева између греда моделирани су уз примену фракционих извода	59
3.7	Биморфна греда са паралелном везом пијезо-слојева и одговарајуће замењујуће струјно коло	66
3.8	Шематски приказ двоструке дискретизације временског домена, предложеног од стране Евангелатоса и Спаноса	74

4.1	Поређење резултата за остварени електрични напон ПЕДА модела са резултатима експеримената Ертурка и Инмана [1] за случај једне биморфне греде без додатих маса, са различитим вредностима електричне отпорности кола R	91
4.2	Поређење резултата за релативна померања слободног краја греде ПЕДА модела са резултатима експеримената Ертурка и Инмана [1] за случај једне биморфне греде без додатих маса, са различитим вредностима електричне отпорности кола R	92
4.3	Поређење резултата за остварени електрични напон ПЕДА модела са резултатима експеримената Ертурка и Инмана [2] за случај једне биморфне греде са додатом масом на слободном крају, за различите вредности електричне отпорности кола R	94
4.4	Поређење резултата за остварени електричну снагу ПЕДА модела са резултатима експериментата Меруанеа и Пикаре [3] за случај система биморфних греда са по једном додатом масом и еластично повезаних на слободним крајевима. Испрекидана линија - повезане греде, пуна линија - неповезане греде	97
4.5	Померање слободног краја конзоле са једном додатом масом на слободном крају. Плава линија - тачно аналитичко решење из литературе [4], жута линија - решење добијено применом ПЕДА модела за случај биморфне греде са електричним колом у кратком споју	99
5.1	Одређивање почетних услова, (а) Проста греда оптерећена сопственом тежином и тежином додатих динамичких апсорбера, (б) Принцип суперпозиције - функције момента савијања греде услед задатог оптерећења, (с) Принцип суперпозиције - укупан угиб греде једнак је збиру угиба услед сопствене тежине и угиба услед сваке од N_a тежина додатих апсорбера, (д) Одређивање статичког угиба a -тог апсорбера	108
5.2	Поређење резултата Саманија и Пеликана [5] са резултатима овде предложеног модела за максималне амплитуде вибрација зависно од брзине покретног оптерећења	110
6.1	а) Попречни пресек мостовске греде, б) Схематски приказ усвојеног модела покретног оптерећења	113
6.2	Анализа утицаја фреквенце и брзине покретног оптерећења на динамички одзив моста	114
6.3	Одзив конструкције у временском домену услед преласка једног типског возила	116
6.4	Померања средине греде нормирана у односу на статички угиб средине греде $w_0(L/2)$, уз присуство једног динамичког апсорбера са различитим односом масе апсорбера према укупној маси греде μ_a	118

6.5	Померања средине греде нормирана у односу на статички угиб средине греде $w_0(L/2)$, уз присуство једног подешеног динамичког апсорбера са различитим односом масе апсорбера према укупној маси греде μ_a и одговарајућом крутошћу тако да се погађа основна сопствена фреквенца греде	119
6.6	Нормирана померања средине греде уз присуство различитог броја апсорбера (N_a), при чему је укупна маса апсорбера увек једнака 0.5% масе греде	121
6.7	Утицај броја повезаних греда на укупну генерисану количину електричног напона (а) и електричне снаге (б) при хармонијском померању ослонаца греда $w_b(t) = W_0 \sin(2t)$ у трајању од 10s	123
6.8	Утицај материјалних карактеристика слоја спрезања на динамичка својства ПЕДА	124
6.9	Утицај положаја додатих концентрисаних маса на динамичка својства система	126
6.10	Попречни пресек челичног носача мостовске конструкције разматране у овом примеру	127
6.11	а) Дијаграм померања средине носача мостовске греде $w(0.5L, t)$, б) Дијаграм померања трећег апсорбера, који се налази на средини распона мостовске греде, с) дијаграм генерисане електричне снаге у једном апсорберу. Сви дијаграми приказују утицај преласка једног типског возила преко моста.	131

Списак табела

4.1	Усвојене редности параметара из књиге Ертурка и Инмана	90
4.2	Усвојене вредности параметара за случај једне греде са масом	93
4.3	Усвојене вредности параметара из рада Меруанеа и Пикаре	96
4.4	Усвојене редности параметара из рада Фројндлиха	98
5.1	Усвојене вредности параметара за случај једне греде са масом	109
6.1	Број, величина и распоред додатих концентрисаних маса	124
6.2	Број величина и распоред додатих концентрисаних маса	125
6.3	Геометријске и материјалне карактеристике система ПЕДА примењеног за контролу вибрација многостовске конструкције	128

Глава 1

Уводна разматрања

1.1 Поставка проблема и тема истраживања

Вибрације мостовских конструкција представљају проблем који се активно истражује [6--10, 10--12]. Различита корисна оптерећења и услови током експлоатације могу довести конструкцију у стање блиско резонантном стању и изазвати деформације и померања која могу бити неугодна за кориснике или чак угрозити и стабилност самог објекта [13, 14]. Поред тога, високоциклична оптерећења доводе и до замора материјала, па вибрације моста могу узроковати прекорачење носивости и оштећење носећих елемената чак и при релативно малим амплитудама осцилација [15, 16]. Стога је важно пројектовати мостове тако да разлика између сопствених фреквенција конструкције и очекиваних фреквенција побуде током експлоатационог века моста буде што већа, као и предузети одговарајуће мере да се амплитуде вибрација моста умање чак и ако се конструкција приближи резонантном стању. Један од начина да се то постигне јесте примена динамичких апсорбера.

1.1.1 Динамички апсорбери

Концепт динамичке апсорпције већ се дуго користи у грађевинарству и њиме се успешно постиже контрола вибрација основне конструкције, што конструкцију чини поузданијом и економичнијом [17--19]. У најопштијем, динамички апсорбери се могу разврстати на активне и пасивне.

Код активних динамичких апсорбера контрола вибрација се остварује уз активно довођење додатне количине енергије у систем путем актуатора. Најчешће су то апсорбери који користе материјале са електро-механичким или магнетним својствима [20], због релативно једноставног начина контроле актуатора. Актуатори код активних динамичких апсорбера се могу користити на два начина. Један начин подразумева изазивање жељене деформације апсорбера па тиме и унос пројектоване силе у систем којом се смањују померања основне конструкције. Други начин подразумева промену вискоеластичних својстава материјала апсорбера [21] и прилагођавање његових динамичких карактеристика тренутним условима вибрација основне конструкције како би се постигло веће ублажавање

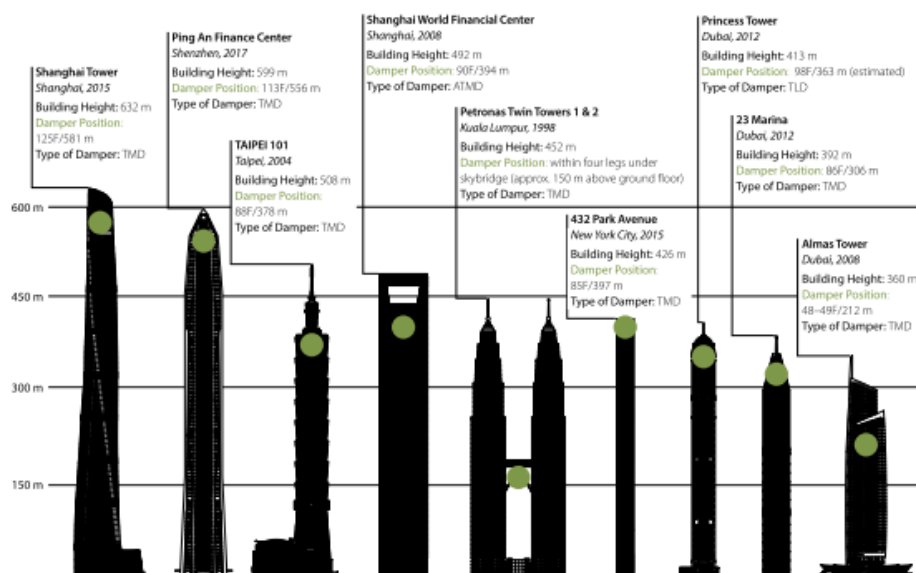
њених вибрација, чиме се остварује управљање понашањем основне конструкције у реалном времену. Активни динамички апсорбери углавном се користе код робота [22], мотора и машина [23] за контролу вибрација изазваних инерцијалним силама, или код авиона, за контролу вибрација које се јављају услед "ефекта поветарца", односно "флатер-ефекта" (енг. *flutter effect*) [24, 25]. Активни динамички апсорбери се код грађевинских конструкција користе најчешће за контролу статичких и динамичких карактеристика конструкције путем електрогеолошких и магнетореолошких материјала [26], као и за активну контролу и ублажавање вибрација приликом земљотреса [27], како је детаљно описано у прегледним радовима Коркмаза [28] и Саеда и осталих [29] и у тамо наведеној литератури. Ипак, примена ових апсорбера је далеко бројнија код машинских и мехатроничких система, те ће у даљем тексту пажња бити посвећена искључиво пасивним динамичким апсорберима, чија је употреба у грађевинским конструкцијама знатно заступљенија.

Пасивни динамички апсорбери представљају елементе који су на одређени начин повезани са основном конструкцијом у циљу преузимања и дисипације дела механичке енергије њених вибрација. Контрола вибрација се применом пасивних апсорбера остварује без додатног увођења енергије у систем, али се механичке карактеристике самих апсорбера не могу мењати у реалном времену и прилагодити тренутним условима вибрација основне конструкције, већ о оптималном учинку апсорбера треба водити рачуна у фази њиховог пројектовања. У зависности од принципа рада, постоје различите конструкције динамичких апсорбера. Најчешће се користе механички пасивни апсорбери, односно апсорбери код којих је тело знатне масе механички повезано са основном конструкцијом путем еластичних [30--32] или вискоеластичних елемената који дозвољавају релативно померање апсорбера у односу на основну конструкцију. Такође, постоје и конструкцијска решења која користе инерцију клатна, полуге или других механичких елемената и система како би изазвали динамичку апсорпцију вибрација основне конструкције [33--40], а развијени су и апсорбери код којих се користи инерција воде или вискозност одређених уља [41--43] како би се енергија вибрација основне конструкције дисипирала. Поред тога, у литератури се могу наћи и решења где се контрола вибрација основне конструкције остварује користећи инерцију апсорбера и вискоеластичне деформације везних елемената [44]. Овакви уређаји се претежно користе за контролу вибрација вишеспратних објеката у случају земљотреса [45--47].

За контролу вибрација грађевинских конструкција најчешће се користе механички пасивни динамички апсорбери са подешеном масом (енг. *tuned mass dynamic absorbers* или *tuned mass dampers*), због своје поузданости, једноставности, дуготрајности и релативно лаког одржавања. Код оваких апсорбера, маса апсорбера се пројектује тако да се, у комбинацији са механичким и материјалним карактеристикама везних елемената, постигну динамичка својства апсорбера која ће обезбедити највеће могуће ублажавање вибрација основне конструкције. То најчешће подразумева да се основна сопствена фреквенца апсорбера поклопи са неком од сопствених фреквенци основне конструкције, и то најчешће са њеном основном сопственом фреквенцом. При оваким условима су померања апсор-

бера, па тиме и њихов учинак у контроли вибрација, највећа када се основна конструкција налази у стању блиском свом резонантном стању, када је динамичка апсорпција најпотребнија. Постоје бројна истраживања у смеру оптимизације механичких и материјалних параметара апсорбера са подешеном (усклађеном) масом [48--54] и ови апсорбери нашли су врло широку примену у контроли вибрација грађевинских конструкција [55--61], а нарочито мостова [6, 7, 9--12, 18, 19, 62--65]. Стога ће истраживања у оквиру ове дисертације бити ограничена на овај тип динамичких апсорбера. У складу са тим, у наставку текста ће се појам "динамички апсорбери" односити на механичке пасивне динамичке апсорбере са подешеном масом, уколико није другачије наглашено.

Динамички апсорбери (са подешеном масом) се могу условно поделити у две класе - масивни и расподељени апсорбери. Масивни динамички апсорбери представљају релативно велике предмете, углавном тешке челичне или оловне кугле, са знатном масом која је самерљива са масом објекта чије се вибрације апсорбују. Ове кугле су на одговарајућ начин повезане са основном конструкцијом, најчешће преко клизних лежишта, јакних опруга или челичних каблова, при чему је дозвољено релативно померање апсорбера и основне конструкције. Овакав тип динамичких апсорбера углавном се користи за ублаживање утицаја земљотреса или јакних ветрова на високе зграде. Примери за то су бројни, а неки од њих приказани су на Слици 1.1а [66], међу којима су и вишеспратница Тајпех 101 у граду Тајпеху, Република Кина, Петронас куле близнакиње у Куала Лумпуру, и друге. У данашње време, пројектовање вишеспратних зграда и објеката висине преко 100 метара практично је незамисливо без употребе ових апсорбера. Другу класу динамичких апсорбера чине елементи многоструко мање масе од основне конструкције, а пригушење вибрација основне конструкције се тада постиже применом већег броја оваквих апсорбера на конструкцији. И ови динамички апсорбери нашли су веома широку примену, а у грађевинарству се углавном користе код мостовских конструкција или других дугачких и витких конструкција попут високих димњака [67]. Као примери примене оваквих апсорбера код мостова могу се навести *Мост Миленијум*, Лондон, УК [68], *Пешачки мост Јан Винцел вијадукт*, Хаг, Холандија [69], *Краљевски међуопштински мост Александра*, Отава, Канада [70], и други. У оквиру ове дисертације биће разматрана само потоња група динамичких апсорбера.



(a) Примери високих зграда са динамичким апсорберима [66]



(b) Пример моста са динамичким апсорберима: Мост Миленијум, Лондон, УК [68]

Слика 1.1 Примери изведених објеката са динамичким апсорберима

1.1.2 Пијезоелектрични сакупљачи енергије

Примена динамичких апсорбера са подешеном масом показала се као врло ефикасан начин контроле вибрација мостовских конструкција. Међутим, сва механичка енергија вибрација коју апсорбери преузму од основне конструкције се дисипира кроз кретање апсорбера и унутрашње трење у везним елементима. Са друге стране, у последњих неколико деценија, све је израженија тежња за остваривањем одрживог развоја, што подразумева и добијање што је могуће већег удела електричне енергије из обновљивих извора. Са тог становишта, било би пожељно да се део механичке енергије вибрација коју апсорбер преузме од основне конструкције, уместо што се кроз трење расипа у виду топлотне енергије,

претвори у електричну енергију. То се може постићи на више начина. Као што је опште познато, механичка енергија се може претворити у електричну применом различитих врста генератора. На пример, за генерисање електричне струје може се користити енергија кретања текућих вода, ветра, морских таласа, гасова итд. Ова енергија се углавном користи за покретање ротора у генераторима релативно великих димензија. Поред тога, у доступној литератури постоји велики број решења како се електрична енергија може добити из механичке користећи различите природне ефекте [71]. На пример, може се користити фотоелектрични ефекат, где се енергија фотона сунчеве светлости директно претвара у електричну струју у фотонапонским ћелијама. Овим поступком се добија далеко мања количина електричне струје у односу на претходно поменуте начине, али без обзира на то, соларна енергија представља један од обновљивих извора електричне енергије. Такође, постоје уређаји који користе електромагнетни [72--74], термоелектрични [75] или трибоелектрични ефекат [76], али најшири радни опсег и степен искоришћења имају уређаји који користе пијезоелектрични ефекат [1, 77--83] и ови уређаји ће бити разматрани у даљем тексту.

Код пијезоелектричних материјала деформација материјала доводи до електричне поларизације материјала и изазива стварање електричног напона [1, 84]. Уколико се пијезоелектрични материјал изложи деформацији и повеже у електрично коло, кроз електрично коло ће тећи струја, те се и овакви материјали могу користити као обновљив извор електричне енергије. Насупрот описаном, директном пијезоелектричном ефекту, код оваквих материјала се јавља и обрнути пијезоелектрични ефекат, који подразумева да се довођењем електричног напона изазива деформација у материјалу. Обрнути пијезоелектрични ефекат може се користити за производњу актуатора, који су, између осталог, нашли широку примену у стварању ултразвучних таласа.

Директан пијезоелектрични ефекат се може користити за производњу уређаја којима се део механичке енергије вибрација преводи у електричну енергију. Ти уређаји се на енглеском језику називају "energy harvesters". За сада још не постоји званичан, општеприхваћени превод овог израза на српски језик. "Жетва" (енг. *harvest*) енергије се састоји у претварању дела механичке енергије вибрација основне конструкције у електричну енергију посредством пијезоелектричних елемената. Међутим, уколико се, у складу са основном идејом и темом ове дисертације, ови елементи користе у спреси са динамичким апсорберима, основна улога тако добијених, сложених система јесте претварање механичке енергије вибрација у електричну енергију, али такође и њено сакупљање у циљу напајања уређаја за освету или мониторинг конструкција или друге намене. Стога ће у оквиру ове дисертације такви уређаји бити називани "пијезоелектрични сакупљачи енергије".

Пијезоелектрични сакупљачи енергије имају врло широко поље примене и постоји много различитих типова и конструкција оваквих уређаја. Тако се за добијање електричне енергије могу користити пијезоелектрични елементи типа греде [1, 2, 85--89], плоче [90--92] или лука [77, 93], а примењују се и закривљене греде [94], греде променљивог

попречног пресека [95--97] или уређаји сложенијих облика [98--104]. У пијезоелектричним сакупљачима енергије се могу користити аксијалне деформације пијезоелектричних елемената [105, 106], али се много чешће електрична енергија добија на рачун торзије [71, 107] или деформације савијања [86]. Најчешће су у употреби биморфне конзолне греде, односно греде које се састоје од једног металног носећег слоја и два пијезоелектрична слоја која су залепљена на тај носећи слој [1, 2]. Са страна сваког пијезоелектричног слоја налазе се електроде које су на одређени начин повезане у електрично коло, кроз које приликом деформисања биморфне греде протиче електрична струја. Одговарајућим избором електричне шеме електричног кола може се повећати ефикасност производње електричне енергије за сваки конкретан случај [108--111].

1.1.3 Комбиновање пијезоелектричних сакупљача енергије са динамичким апсорберима

Идеја да се пијезоелектрични сакупљачи енергије примене за искоришћење вибрација мостовских конструкција развија се све више протеклих пар деценија и у доступној литератури већ постоје истраживања у том смеру. Предлагана су решења када се користе вибрације основне конструкције моста [19, 112--118], каблова код висећих мостова [7], али и саме коловозне конструкције [119, 120]. У наведеним примерима, део механичке енергије вибрација моста јесте искоришћен за стварње електричне енергије, али је маса пијезоелектричних уређаја премала да би имала било какав утицај на кретање мостовске конструкције, тако да нема никакве динамичке апсорпције. Са друге стране, постоје и истраживања која комбинују пијезоелектричне сакупљаче енергије са динамичким апсорберима [121--124], тако да успешно остварују и контролу вибрација и добијање електричне енергије. Међутим, ефикасност оваквих динамичких апсорбера са придодатим пијезоелектричним елементима у стварању електричне енергије релативно је мала [125], што представља проблем и препреку за њихову ширу примену. Наиме, наведени примери подразумевају додавање појединачних пијезоелектричних уређаја уз сваки од примењених динамичких апсорбера, а притом сви сакупљачи остају у границама малих деформација где важе претпоставке линеарне теорије греда. Будући да су саобраћајно оптерећење и оптереће ветром најчешћи узрок вибрација мостовске конструкције, а оба оптерећења су по својој природи непредвидива (случајна, стохастичка), пијезоелектрични сакупљачи енергије који остају у линеарном режиму рада најчешће се налазе у не-резонантном стању па су им деформације, а тиме и количина произведене електричне енергије релативно мали. Проблем уског радног опсега може се решити било увођењем нелинеарности у систем [12, 126, 127], било повезивањем више пијезоелектричних сакупљача енергије у јединствен систем на одговарајућ начин. Као примери потоњег начина проширења радног опсега сакупљача енергије могу послужити решења где се више биморфних конзолних греда повезује еластичним опругама на својим крајевима, било у равни осциловања [3, 128], било ван равни осциловања [129]. Теоријска и експериментална истраживања су показала да се наведеним методама ефикасност сакупљача енергије може знатно пове-

ћати, али добијена количина електричне енергије остаје релативно мала да би оправдала широку примену оваквих уређаја.

Други начин за унапређење пијезоелектричних сакупљача енергије је примена нових материјала, посебно пројектованих и изведених за примену у одговарајућим пијезоелектричним уређајима. У скорије време постоје бројна истраживања на пољу науке о материјалима и извесни материјали показују потенцијал за примену у описаном смислу, нарочито одређене врсте гума, силикона и гелова [130]. Показало се да је за математичко моделирање оваквих материјала погодно, а у појединим случајевима и неопходно, користити рачун са изводима нецелог реда.

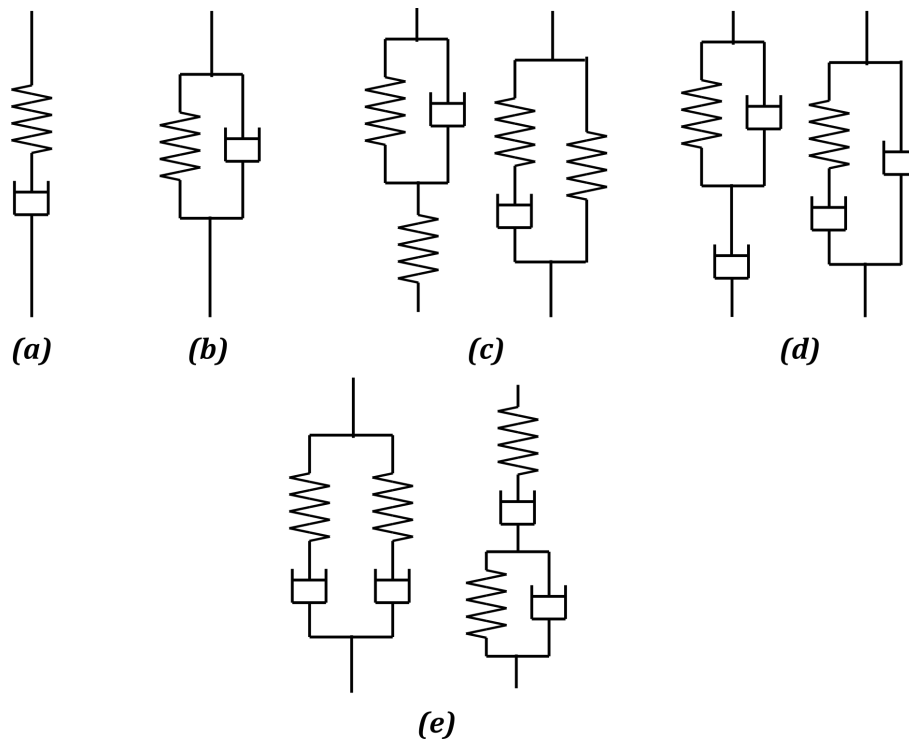
1.1.4 Напредно моделирање материјала уз примену извода нецелог реда

У механици чврстог тела постоје две групе закона према којима се развијају сви модели материјала. Прву групу чине фундаментални закони механике, попут првог и другог закона термодинамике, закона о одржању масе, закона о промени количине кретања и закона о промени момента количине кретања. Ови закони су општи јер су последица фундаменталних закона и полазних претпоставки теоријске физике и људског поимања стварности [131, 132], и они важе за свако чврсто тело које се моделира као непрекидна средина, без обзира на материјал од којег је оно сачињено. Са друге стране, из механике непрекидних средина је познато [133] да је за потпуно решавање проблема у механици чврстог тела неопходно установити одређену везу између напона и деформација, односно увести у систем одређене информације о природи и понашању самог материјала. Ово се најчешће постиже увођењем конститутивних релација, и оне чине другу групу закона који се користе при моделирању материјала. Међутим, ови закони нису фундаментални, већ феноменолошки. Другим речима, они нису изведени из основних претпоставки теоријске физике, већ су дефинисани емпиријски, на основу експеримената и посматрања. Заправо, конститутивне релације представљају само корисне апроксимације и претпоставке о понашању материјала и зато је и њихова област важења релативно уска - не постоји једна, општа конститутивна релација која би описала понашање једног материјала у свим његовим могућим стањима, већ се уводе посебне релације за еластичну област, пластичну област, материјале са оштећењем или дисконтинуитетима, грануларне, хомогене, хетерогене материјале, вискозне флуиде, флуиде при ламинарном течењу, флуиде при турбулентном течењу итд. Један исти материјал се може описивати различитим конститутивним релацијама у зависности од свог тренутног стања напона и стања деформација. Стога ови закони из друге групе заправо уносе одређени ниво неодређености и грешке у апроксимацији при моделирању, јер заправо представљају одраз нашег тренутног незнавања суштинских механизма и закона по којима се материјал понаша. У новије време се јавља све више истраживања на тему превазилажења ових ограничења. Развијају се савремени реолошки модели који прецизније и поузданије описују понашање материјала при одређеним специфичним условима експлоатације, као и нових материјала посебних

својстава и намена.

Тако је примећено да се понашање извесних материјала најбоље може описати применом конститутивних релација у којима се уместо целобројних, користе изводи нецелог реда. Ово се у првом реду односи на материјале код којих се јавља пужење или релаксација напона [134] и, уопштено, на материјале "са памћењем" [135]. Такође, као што је познато из реологије [136], унутрашња дисипација енергије се у макроскопским, феноменолошким моделима материјала најчешће моделира увођењем вискозног пригушења.

Два стандардна модела материјала који се најчешће користе за то су Максвелов и Келвин-Војтов модел, који су шематски приказани на Слици 1.2 а) и б). Еластична својства материјала су представљена еластичном опругом, а вискозна својства вискозном пригушницом. Оба ова стандардна модела уводе по два параметра у конститутивну релацију - моду еластичности опруге и коефицијент вискозног пригушења пригушнице. Као што је напоменуто, као и сви реолошки модели, и ова два модела имају релативно ограничену област важења. Тако се Максвелов модел најчешће користи за описивање вискозних флуида при ламинарном течењу, а Келвин-Војтов модел за описивање чврстих тела при малим деформацијама. Међутим, за другачије материјале или другачија напонско-деформацијска стања, ови модели не одговарају стварном понашању материјала. Стога су уведени нови модели са сложенијим конститутивним везама, које подразумевају примену три, четири, па и више параметара. Од ових, напреднијих модела материјала често се користе Зенеров, анти-Зенеров и Бургерсов модел материјала, који су шематски приказани на Слици 1.2, с, d, е. Као што се може видети, прва два модела уводе по 3, док последњи уводи 4 параметра за описивање материјала. У општем случају, може се користити произвољан (али коначан) број елемената у моделу материјала повезаних на одређени начин, односно конститутивна веза са произвољно много параметара, у циљу што бољег усклађивања предвиђања модела са стварним понашањем материјала опаженим у експериментима. Међутим, то знатно усложњава процес решавања добијених једначина, а у извесним случајевима чак и није могуће добити задовољавајуће поклапање са мереним резултатима. Стога су описани, класични вискоеластични модели материјала проширени на "фракционе вискоеластичне моделе", односно моделе који користе конститутивне везе где се јављају изводи напона и/или деформација који су нецелог реда. Тако се јављају фракциони Максвелов модел материјала, фракциони Келвин-Војтов модел, фракциони Зенеров модел итд. Притом, показано је да су и ови модели термодинамички засновани [137]. Ови модификовани модели често су у стању да са знатно мањим бројем параметара од класичних модела веома добро опишу опажено понашање материјала, нарочито при појединим специфичним условима.



Слика 1.2 Реолошки модели материјала, (a) Максвелов модел, (b) Келвин-Војтов модел, (c) Зенеров модел, две варијанте - опруга везана редно са Келвин-Војтовим моделом и опруга везана паралелно са Максвеловим моделом, (d) анти-Зенеров модел, две варијанте - пригушница везана редно са Келвин-Војтовим моделом и пригушница везана паралелно са Максвеловим моделом (e) Бургерсов модел, две варијанте - модел за релаксацију (лево) и пужење (десно) материјала

На пример, Мецлер и Ноненмахер су још 2003. године показали [138] да су фракциони Зенеров модел и модификовани фракциони Зенеров модел знатно прикладнији за описивање понашања дугачких полимера, гелова и природне гуме, као и за материјале код којих је присутно споро пужење, а показано је и да су предвиђања поуздана и веома прецизна чак и за период од чак 14 деценија. Такође, Белтемпо и сарадници [139] су показали да се модели са фракционим пригушењем успешно примењују и за описивање бетона, узимајући у обзир деформације пужења, за период од 30 година. Са друге стране, Сумелка је предложио [140] нови фракциони вископластични модел материјала, а Леи, Лијанг и Шјао су развили фракционо вискоеласто-пластични модел [141, 142] за описивање аморфних структура и термопластичних материјала. Материјали чије се механичке карактеристике мењају са временом, а нарочито материјали код којих је присутно омекшање (*енг.* strain softening) могу се веома прецизно описати фракционим вискоеластичним моделима [143], а показано је да се овакви модели могу применити и за описивање дуктилних метала [143], гума и меких земљишта [144]. Поред тога, фракциони модели су се показали као погоднији за описивање и сложених динамичких проблема код материјала где се јављају феномени релаксације [145--147], а успешно су примењени и код нелинеарних динамичких проблема [148]. Росикин и Шитикова су дали [149, 150]

детаљан преглед примене модела са фракционим пригушењем у проблемима динамике чврстих тела и конструкција. Такође, модели са фракционим пригушењем дају знатно боље резултате од класичних модела са вискозним пригушењем и код анализе меморијских пена и материјала са памћењем [141, 151, 152]. Овакви материјали би се могли користити за израду пијезоелектричних сакупљача енергије или њихово повезивање у сложене системе, што би отворило нове могућности за повећање ефикасности пијезоелектричних динамичких апсорбера. Поред тога, постоје истраживања код којих су фракциони модели материјала примењени за описивање пијезоелектричних уређаја [153]. Кумар и Прасуд су показали [154] да се код пијезоелектричних материјала јавља феномен пијезоелектричне релаксације, односно смањења вредности пијезоелектричне константе материјала током времена и услед високоцикличног оптерећења, и то по закону који се описује изводима нецелог реда. Виноградов и сарадници су експериментално доказали [155] да механичка и електрична својства пијезоелектричних полимера зависе од фреквенце и да се мењају током времена у условима високоцикличног оптерећења и нагласили да се добијени резултати знатно боље могу описати моделом са фракционим изводима, у односу на моделе са стандардним експоненцијалним функцијама, односно изводима целобројног реда. Галуцио и други [156] су теоријски и експериментално испитали примену биморфних пијезоелектричних греда током дугог временског периода и закључили да су модели са фракционим пригушењем подобнији за употребу код тог типа проблема. Катин и др. су истражили [157] примену фракционих модела код пијезоелектричних материјала изложених ниско-фреквентним оптерећењима, док су Душарн и остали [158] успешно применили моделе са фракционим пригушењем за описивање промена хистерезисних својстава пијезокерамика током времена. Стога Цао, Џоу, Инман и Јан истичу [159] да је за динамичко моделирање пијезоелектричних материјала који се примењују код система за мониторинг конструкције, будући да се ови уређаји пројектују на радни век од више деценија, чак неопходно користити моделе са фракционим пригушењем како би се добили поуздани резултати и предвиђање понашања ових уређаја.

Међутим, до сада у доступној литератури није било истраживања у циљу повезивања пијезоелектричних елемената, моделираних уз примену извода нецелог реда, са динамичким апсорберима и пројектовању уређаја за производњу електричне енергије из механичке енергије вибрација. **Ова дисертација има за циљ** да премости тај недостатак, те је њена **тема** управо развој иновативне конструкције и модела пијезоелектричног динамичког апсорбера (ПЕДА), који укључује коришћење модела са фракционим изводима, и као такав поседује шири радни опсег и обухвата могућност примене нових материјала у циљу повећања продуктивности ПЕДА у генерисању електричне енергије.

1.2 Хипотезе и циљеви истраживања

Према свему изложеном, истраживање представљено у овој дисертације одређено је следећим хипотезама:

- Динамички апсорбери са пијезоелектричним својствима, одговарајуће конструкције и материјала, који се моделирају уз примену извода нецелог реда, могу бити ефикаснији и продуктивнији од конвенционалних апсорбера и конвенционалних сакупљача енергије.
- Знатан део механичке енергије вибрација главних носача мостова може се превести у електричну енергију применом одговарајућег броја и типа пијезоелектричних динамичких апсорбера, чиме се основној конструкцији додају и својства генератора електричне енергије.
- Оптимизацијом броја и положаја пијезоелектричних динамичких апсорбера могу се побољшати динамичке карактеристике мостовске конструкције, уз истовремено повећање ефикасности и продуктивности разматраног сложеног система који чине мост и апсорбери.
- Могуће је развити математички модел и поступак за анализу међудејства моста и апсорбера са пијезоелектричним својствима, поступак за пројектовање оваквог сложеног система и методологију за предвиђање механичког и електричног понашања тог система зависно од задатих услова коришћења.

Циљеви приказаног научног истраживања су:

- Изложити предлог нове конструкције пијезоелектричног динамичког апсорбера који је ефикасан, начињен од широко доступних материјала, компактан, издржљив и једноставан за израду и коришћење.
- Развити математички модел за описивање понашања пијезоелектричних динамичких апсорбера нове конструкције, са вискоеластичним елементима представљеним конститутивном везом са изводом нецелог реда.
- Развити математички модел и методологију за анализу међудејства пијезоелектричних динамичких апсорбера и главних гредних носача флексибилних мостова, уз предвиђање количине произведене електричне енергије у пијезоелектричним динамичким апсорберима зависно од задатог корисног оптерећења моста.
- Развити методологију за оптимизацију броја и положаја новог типа апсорбера у циљу ефикасне контроле вибрација моста и производње што веће количине електричне енергије према задатим условима коришћења моста.

1.3 Коришћена методологија истраживања

С обзиром на предмет дисертације, полазне хипотезе и циљеве, у истраживању је коришћено више метода научног сазнања. При прегледу постојеће литературе, као и при изради и примени развијеног модела коришћене су анализа и синтеза за растављање сложеног система на функционалне јединице, њиховог проучавања и коначно синтезе резултата при одређивању глобалног понашања целог система. Такође, примењена је метода моделовања при развијању математичког модела за описивање понашања динамичких апсорбера и њиховог међудејства са мостовском конструкцијом. Због теоријске природе самог истраживања, имплицитно су примењене и методе дедукције и индукције, јер је математички модел развијен коришћењем већ постојећих конститутивних једначина, чиме се имплицира да је понашање примењеног материјала исто као и понашање сваког другог материјала тог типа (што подразумева дедукцију), а на крају изведени закључци и методологија применљиви су на све типове система разматране у овом раду (што представља индукцију). Валидација предложеног математичког модела извршена је применом компаративне анализе, будући да је модел оцењен поређењем резултата са резултатима из постојеће литературе. Поред тога, у истраживању је спроведен и већи број нумеричких експеримената у циљу оптимизације појединих параметара предложеног модела.

1.4 Кратак преглед структуре дисертације

У Поглављу 1 описана је мотивација за представљено истраживање и изложен је проблем који се у овој дисертацији обрађује. Дат је преглед литературе и истакнути су тренутни оквири и достигнућа у свету у областима значајним за предмет истраживања у овој тези, као и недостаци постојећих решења у доступној литератури. Према свему изложеном, одређени су тема дисертације, полазне хипотезе и циљеви истраживања, уз кратак осврт на структуру дисертације.

У Поглављу 2 изложене су теоријске основе потребне за одређивање математичког и механичког модела динамичког апсорбера са пијезоелектричним својствима, сачињеног од материјала са пригушењем представљеним уз примену извода нецелог реда. Најпре су дате математичке основе рачуна са изводима нецелог реда. Затим је приказан извод из теорије вибрација чврстих тела и описан поступак извођења диференцијалних једначина кретања за греде посматране као непрекидна тела, како без динамичких апсорбера, тако и уз њихово присуство. На крају поглавља су изложене основе теорије пијезоелектричности и формулисан је модел понашања пијезоелектричних материјала и биморфних пијезоелектричних греда које се најчешће користе код уређаја за претварање дела механичке енергије вибрација основне конструкције у електричну енергију.

У Поглављу 3 је поступно развијен механички и математички модел за нову конструкцију динамичког апсорбера са пијезоелектричним својствима. Најпре је приказан поступак извођења диференцијалних једначина којима се описује постављени проблем вибрација новог система за динамичку апсорпцију и сакупљање електричне енергије, а потом је

детаљно описан и поступак решавања изведених једначина, чиме је постављени проблем у потпуности одређен и решен.

У Поглављу 4 је извршена провера ваљаности модела развијеног у претходном поглављу. Будући да нови модел ПЕДА представља општије решење у односу на решења доступна у литератури, провера је извршена за различите посебне случајеве који се одговарајућим избором вредности параметара могу добити из новог модела ПЕДА, а за које у литератури постоје резултати теоријских и експерименталних истраживања. Провера је извршена поређењем резултата за случај једне биморфне греде са концентрисаном масом на слободном крају, за случај система биморфних греда еластично повезаних на слободним крајевима и за случај једне фракционо пригушене конзолне греде (без пијезоелектричних својстава).

У Поглављу 5 је нови модел ПЕДА употребљен за контролу вибрација мостовске конструкције. Најпре је изведен математички модел и једначине којима се описује понашање сложеног континуално-дискретног система који чине мостовска конструкција и ПЕДА, а затим је изложен и поступак решавања добијених једначина. На крају, описани поступак је проверен поређењем резултата за посебан случај једне класично пригушене вискоеластичне греде са једним класично пригушеним вискоеластичним динамичким апсорбером.

У Поглављу 6 је изложена детаљна анализа утицаја различитих параметара модела на његову учинковитост, а описан је и поступак за оптимизацију појединих параметара у циљу побољшања перформанси система ПЕДА-основна конструкција. На крају поглавља је дат и свеобухватан пример примене новог динамичког апсорбера са пијезоелектричним својствима који се у оквиру ове дисертације предлаже, на конкретној мостовској конструкцији Тврђавског моста у Нишу, са анализом учинка примене ПЕДА по питању смањења амплитуда вибрација моста, као и количине произведене електричне енергије.

У Поглављу 7 су дате закључне напомене и разматрања и извршена је рекапитулација поставки и резултата спроведеног истраживања. Такође, наведени су и уочени недостаци модела у његовом тренутном облику, односно предложени су начини за његово даље унапређење, а изложени су и неки могући правци даљег истраживања у области теме ове дисертације.

Глава 2

Теоријске основе

У овом одељку биће изложене теоријске основе коришћене при развијању математичког модела у дисертацији, што обухвата основе рачуна са изводима нецелог реда, динамику греда као система са бесконачно много степени слободе кретања и основе пијезоелектричности, као и електромеханичког спрезања. У изводу теорије везане за вибрације греда биће изведене диференцијалне једначине кретања греде услед дејства покретног оптерећења, као и услед динамичког померања ослонаца, а биће разматране и греде са додатим концентрисаним масама и греде са додатим динамичким апсорберима.

2.1 Основе фракционог рачуна

Дефиниције, нотација и изрази наведени у овом одељку преузети су из књиге Игора Подлубнија "Увод у фракционе диференцијалне једначине" [160].

Најпре треба напоменути да се целобројни изводи и интегрални могу представити обједињено, једним изразом. Наиме, полазећи од Њутн-Лајбницево дефиниције извода, познато је да важи:

$$\begin{aligned} f'(t) &\equiv \frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}, \\ f''(t) &\equiv \frac{d^2f}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}, \\ f'''(t) &\equiv \frac{d^3f}{dt^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

и аналогно за више целобројне изводе $n \in \mathbb{N}$, што се може уопштити са:

$$f^{(p)}(t) \equiv \frac{d^p f(t)}{dt^p} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh), \quad (2.2)$$

где су $p, n \in \mathbb{N}$ и где је искоришћена формула за биномни коефицијент $\binom{p}{r} = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-r+1)}{r!}$, уз напомену да је $\binom{p}{r} = 0$, $r > p$ и да број чланова у наведеној суми не мора бити једнак

реду извода функције. Ова чињеница није неопходна за дефинисање извода пошто ће сви чланови суме након $\binom{p}{r}$ бити једнаки нули, али јесте неопходна да би се објединила ознака извода и интеграла, како ће бити показано у наставку текста. Наиме, ако се примети да је:

$$\binom{-p}{r} = \frac{-p(-p-1)(-p-2)\cdots(-p-r+1)}{r} = (-1)^r \frac{p(p+1)(p+2)\cdots(p+r-1)}{r} = (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

израз (2.3) се може даље уопштити и за негативне целобројне вредности изложиоца, тј:

$$f^{(-p)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{-p}} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{-p}{r} f(t-rh) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{-p}} \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) = \lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(-p)}(t). \quad (2.4)$$

Ако се интервал $[a, t]$ подели на бесконачно много сегмената, тј. $t-a = nh$, $n \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$, може се увести ознака за управо дефинисану операцију над функцијом $f_h(t)$, са терминалима a и t :

$${}_a D_t^{-p} f(t) \stackrel{def}{=} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-n)}(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \frac{1}{h^{-p}} \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh). \quad (2.5)$$

Ако се, примера ради, посматра случај за $p = 1$:

$${}_a D_t^{-1} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \frac{1}{h^{-1}} \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \sum_{r=0}^n h f(t-h) = \int_0^{t-a} f(t-x) dx = \int_a^t f(\tau) d\tau, \quad (2.6)$$

види се да је заправо у питању одређени интеграл функције $f(t)$ на интервалу $[a, t]$.

Може се показати [160] да у општем случају важи:

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{p!} \int_a^t (t-a)^{p-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.7)$$

као и да је то заправо p -гоструки интеграл функције $f(t)$, односно:

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \int_a^t dt {}_a D_t^{-p} f(t) = \int_a^t dt \int_a^t dt {}_a D_t^{-p+2} f(t) = \cdots = \underbrace{\int_a^t dt \cdots \int_a^t dt}_{p\text{-fold}} f(t), \quad (2.8)$$

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \int_a^t dt' {}_a D_t^{-p} f(t') = \int_a^t dt' \int_a^{t'} dt'' {}_a D_t^{-p+2} f(t'') = \cdots = \underbrace{\int_a^t dt' \cdots \int_a^{t''}}_{p\text{-fold}} d\tau f(\tau). \quad (2.9)$$

Према томе, у коначном, операција дефинисана изразом:

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^n \binom{p}{r} f(t-rh), \quad p \in \mathbb{Z} \quad (2.10)$$

представља p -ти извод функције $f(t)$ уколико је $p > 0$, односно p -тоструки интеграл те функције ако је $p < 0$, чиме је обједињена ознака извода и интеграла.

Управо дефинисана операција се може уопштити са целобројних редова $p \in \mathbb{Z}$, на изводе и интеграле нецелог реда, тј. за случајеве $p \in \mathbb{R}$, па чак и комплексног реда, али ће у оквиру ове дисертације бити разматрани само реални редови извода и интеграла. Постоји на десетине различитих дефиниција извода и интеграла нецелог реда, тзв. фракционих извода и интеграла, а у наставку ће бити наведене три дефиниције које су најчешће у употреби и које ће бити коришћене у оквиру ове дисертације.

2.1.1 Дефиниција извода и интеграла нецелог реда

За негативне вредности изложиоца се применом Летњиковљеве теореме (Letnikoff) [160] може одредити гранична вредност израза (2.10) као:

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \binom{p}{r} f(t - rh) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.11)$$

где је $\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt$ Гама функција.

Ако је функција $f(t)$ диференцијабилна $(m + 1)$ пута на интервалу $[a, t]$ и ако су ти изводи непрекидни, претходни образац може се записати и у облику:

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{(t - a)^{p+k} f^{(k)}(a)}{\Gamma(p + k + 1)} + \frac{1}{\Gamma(p + m + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{p+m} f^{(p+m)}(\tau) d\tau, \quad (2.12)$$

који је погодан за одређивање асимптота на почетку интервала, односно на терминалу a .

Такође, за позитивне вредности изложиоца се може писати:

$$\begin{aligned} {}_a D_t^p f(t) &= h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh) = \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{(t - a)^{-p+k} f^{(k)}(a)}{\Gamma(-p + k + 1)} + \frac{1}{\Gamma(-p + m + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{-p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Према томе, израз (2.13) показује да се и за интеграле и изводе нецелог реда може увести обједињена ознака у облику сличном једначини (2.13), што представља **Гринвалд-Летњиковљеву дефиницију** (Anton Karl Grünwald, Aleksey Vasilievich Letnikov) фракционог извода и интеграла, уз напомену да је $p \in \mathbb{R}$ и $m < p < m + 1$.

Општији облик ове релације даје **Риман-Љувилова дефиниција** (Bernhard Riemann, Joseph Liouville) фракционог извода, која се може записати у облику:

$${}^{RL} D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k - p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t - \tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau = \frac{d^k}{dt^k} \left({}_a^{RL} D_t^{-(k-p)} f(t) \right), \quad k - 1 \leq p < k. \quad (2.14)$$

која је погоднија за манипулацију пошто нема сумирања чланова, а поменуте две дефи-

ниције су међусобно еквивалентне уколико диференциране функције имају непрекидне (целобројне) изводе до потребног реда на посматраном домену.

Међутим, и Риман-Љувилова, као и Гринвалд-Летњиковљева дефиниција, захтевају дефинисање почетних услова у којима фигуришу изводи нецелог реда, који, као такви, немају директну физичку интерпретацију, па је тиме употреба ових дефиниција фракционих извода отежана код практичних, инжењерских проблема и прорачуна. Наиме, код Риман-Љувиллове дефиниције, за фракциони извод реда α , $n - 1 \leq \alpha < n$, неопходно је задати n почетних услова у облику:

$$\lim_{t \rightarrow a} {}^{RL}D_t^{\alpha-k} f(t) = b_k, \quad b_k = \text{const}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.15)$$

што се може видети ако се потражи Лапласова трансформација Риман-Љувиловог фракционог извода. Наиме, Лапласова трансформација је дефинисана изразом:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \bar{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (2.16)$$

а примењена на целобројни извод функције даје:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n \bar{f}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^1(0) - \dots - f^{n-1} = s^n \bar{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0). \quad (2.17)$$

Примењена на Риман-Љувиллов извод нецелог реда, Лапласова трансформација биће:

$$\int_0^\infty e^{-st} {}^{RL}D_t^\alpha f(t) dt = s^\alpha \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k ({}^{RL}D_t^{\alpha-k-1} f(t))|_{t=a}, \quad n - 1 \leq \alpha < n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.18)$$

Овај проблем може се превазићи уколико се примени **Капутова дефиниција** (Michele Caputo) фракционог извода, која се може изразити у облику:

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t (t - \tau)^{-(\alpha-n+1)} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad n - 1 \leq \alpha < n, \quad (2.19)$$

што такође представља интерполацију између околних целобројних извода. Лапласова трансформација Капутовог фракционог извода даје:

$$\int_0^\infty e^{-st} {}^C D_t^\alpha f(t) dt = s^\alpha \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(t)|_{t=a}, \quad n - 1 \leq \alpha < n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.20)$$

одакле се види да је за почетне услове потребно дефинисати целобројне изводе функције на терминалу a , све до реда најближег траженом фракционом изводу са доње стране. Како целобројни изводи функција у Механици имају физичку интерпретацију, Капутова дефиниција фракционог извода је погодна за инжењерску примену. Поред тога, још једна карактеристика Капутовог фракционог извода је да је извод константе једнак нули, док је

код Риман-Љувиллове дефиниције извод константе једнак:

$${}^RL D_t^\alpha c = \frac{c t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad c = \text{const}, \quad (2.21)$$

па је за нехомогене почетне услове потребно посматрати целокупну историју система, односно померити леви терминал у бесконачност, тј. $a \rightarrow -\infty$, што омогућава анализу стационарних режима вибрација, али анализу транзијентних проблема применом потоње дефиниције фракционог извода чини немогућом [160].

Може се успоставити и веза између појединих дефиниција фракционих извода, у извесним случајевима и уз одговарајуће услове. Тако су Капутов и Риман-Љувиллов фракциони извод међусобно еквивалентни уколико се у оба извода за леви терминал узме $a \rightarrow -\infty$, односно:

$${}^RL D_t^\alpha f(t) = {}^C D_t^\alpha f(t), \quad (2.22)$$

док су Риман-Љувиллов и Гринвалд-Летњиковљев фракциони извод међусобно еквивалентни за функције са непрекидним изводима на разматраном домену $t \in [a, T]$, у случају $0 \leq m-1 \leq \alpha < m \leq n$, $m, n \in \mathbb{N}$, када се може писати:

$${}^RL D_t^\alpha f(t) = {}_a D_t^\alpha f(t). \quad (2.23)$$

2.2 Вибрације греда као система са бесконачно много степени слободе

Греде се са довољном тачношћу могу моделирати као линијски системи уколико је једна од димензија изразито већа од остале две димензије, што је најчешће случај у грађевинарству. У оквиру ове дисертације, све греде мостовских конструкција, као и све греде у самим динамичким апсорберима биће моделиране као линијски системи. Притом ће све греде бити анализирани као системи са бесконачно много степени слободе кретања, тј. као континуална, непрекидна тела, а уз увођење следећих претпоставки и упрошћења:

- Бернулијева претпоставка о равним пресецима;
- претпоставка о малим деформацијама;
- претпоставка о малим померањима;
- инерцијалне силе услед обртања пресека се занемарују;
- материјал од којег је греда сачињена је хомоген и изотропан.

Другим речима, биће коришћена Ојлер-Бернулијева теорија греде, при чему се остаје у домену линеарне анализе конструкција.

Имајући наведено у виду, у наставку ће бити изведена једначина кретања греде зависно од граничних услова, оптерећења и својстава материјала од којег је греда сачињена, а

потом ће изведене једначине бити проширене и за случај када се на греди налазе додате концентрисане масе и динамички апсорбери.

Такође, треба напоменути и да се извођења диференцијалних једначина кретања греда као система са бесконачно много степени слободе кретања за случај када је греда сачињена од еластичног или вискоеластичног материјала могу наћи у бројним уџбеницима и научним радовима из области механике и динамике, на пример [161--163], па се може сматрати да су ове једначине опште познате. Међутим, у оквиру овог поглавља, ова извођења ће бити сажето приказана у циљу увођења конзистентне нотације и давања логичке основе за праћење даљег тока извођења једначина у преосталом делу дисертације, за конкретан случај модела динамичког апсорбера са пијезоелектричним својствима који се у овом раду предлаже.

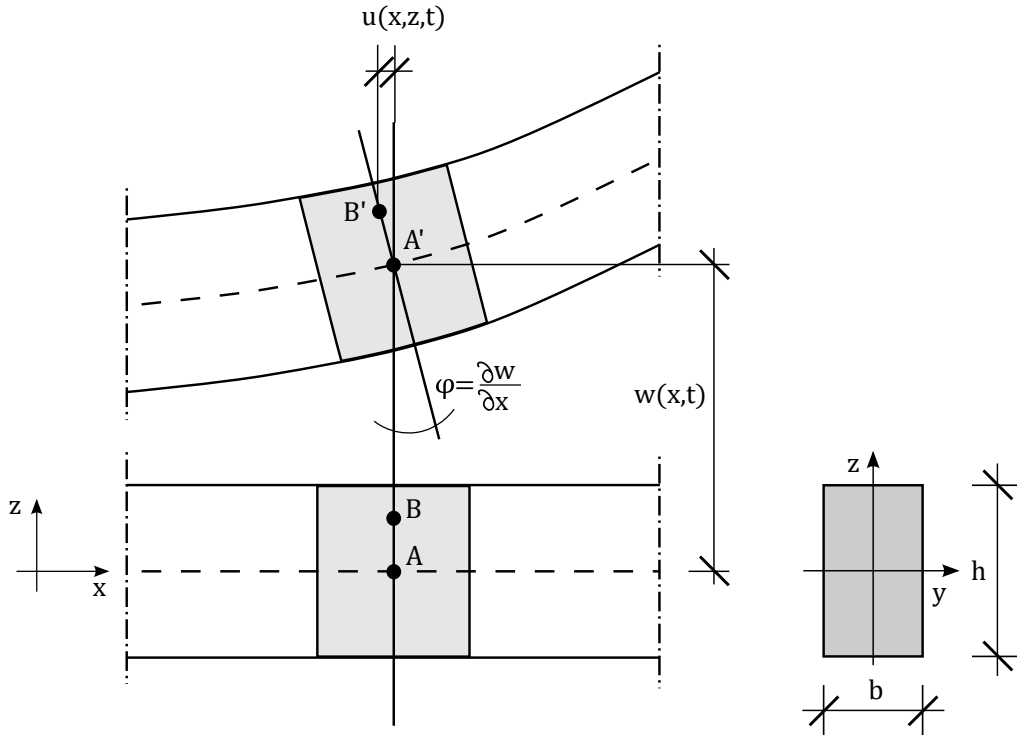
Осим еластичних и класичних вискоеластичних материјала, биће разматрани и материјали код којих је пригушење моделирано применом фракционих извода, што превазилази оквиру највећег броја поменутих уџбеника, премда се и таква извођења могу наћи у литератури [160, 164--166]. И једначине фракционог типа ће такође бити сажето приказане у оквиру овог поглавља.

Требало би напоменути још и то да ће, због природе проблема који се разматра у оквиру ове дисертације, модели материјала са фракционим пригушењем бити коришћени за описивање савремених полимера, гума, силикона и материјала са својствима сличним њиховим. Из реологије материјала је познато [167, 168] да се овакви материјали могу моделирати Келвин-Војтовим (Lord Kelvin, Woldemar Voigt) вискоеластичним моделом материјала, те ће у оквиру ове дисертације у свим извођењима везаним за фракционо пригушене материјале бити коришћен управо Келвин-Војтов модел материјала. Основе фракционог Келвин-Војтовог модела такође су обрађене у доступној литератури [134, 169, 170], одакле ће у овом поглављу бити приказан сажет извод. Према томе, извођења приказана у оквиру овог поглавља, као што је случај и са онима у претходном потпоглављу, не представљају оригиналан допринос аутора дисертације, већ само систематичан приказ резултата из наведене литературе, релевантних за проблем који се у оквиру ове дисертације обрађује, а организованих од стране аутора тако да дају прегледну слику поступка извођења потребних једначина код оваквог типа проблема.

2.2.1 Једначина кретања греде

На Слици 2.1 је приказан део греде у почетном тренутку и крајњем посматраном тренутку кретања. За потребе ове дисертације биће разматране само греде правоугаоног попречног пресека, али се приказана анализа лако може уопштити и за случајеве греда са другачијим попречним пресеком. Висина попречног пресека означена је са h , ширина са b , површина са A , а аксијални момент инерције у односу на осу око које се врши савијање са I , док је дужина греде означена са L , а запремина целе греде са V . Узето је да се греда у почетном тренутку налази у хоризонталном положају и усвојен је правоугли Декартов координатни систем тако да је оса x у правцу дужине греде, док је оса z усмерена нави-

ше. Померања тачака осе греде у правцу z осе обележена су са $w = w(x, t)$, где t означава време. Као што је већ напоменуто, узима се да је материјал греде хомоген и изотропан, са специфичном масом ρ и модулом еластичности Y , док је маса греде по јединици дужине означена са $m = \rho A$.



Слика 2.1 Померања тачака греде током деформације

Са обзиром на то да се користи Ојлер-Бернулијева теорија греде и да су греде оптерећене само у својој равни, померања тачака пресека управно на раван греде биће једнака нули, вертикална померања тачака истог попречног пресека биће иста и једнака вертикалном померању продора осе греде кроз тај пресек $w(x, t)$, док се померања тачака пресека у правцу осе греде могу изразити као:

$$u(x, z, t) = -zw'(x, t), \quad (2.24)$$

где је $w' \equiv \frac{\partial w}{\partial x}$ (видети Сliku 2.1 и [161]). У наставку овог поглавља, уколико није другачије назначено, биће подразумевано да је $w = w(x, t)$. И уопштено, у оквиру ове дисертације, за просторне изводе по подужној координати биће коришћена ознака $(\bullet)' \equiv \frac{\partial}{\partial x}(\bullet)$, док ће временски извод променљиве бити означаваан са $\dot{(\bullet)} \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\bullet)$. Имајући наведено у виду, дилатација у правцу осе греде ε_x се може изразити преко вертикалног померања тачака осе греде као [161]:

$$\varepsilon_x(x, z, t) = u'(x, z, t) = -zw''(x, t). \quad (2.25)$$

Диференцијална једначина кретања греде биће изведена применом Хамилтоновог варијационог принципа, а за то је најпре потребно одредити кинетичку енергију греде T ,

потенцијалну енергију деформације греде (деформациони рад) Π и рад спољашњих сила W . Имајући у виду полазне претпоставке, ове величине се, уз занемаривање утицаја трансверзалних и нормалних сила на деформацију греде, могу срачунати као [161]:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{w}^2 dV = \frac{1}{2} \int_0^L m \dot{w}^2 dx, \\ \Pi &= \frac{1}{2} \int_V \vec{\sigma} \vec{\varepsilon} dV \approx \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \sigma_x \varepsilon_x dA dx, \\ W &= \int_0^L f w dx + \int_0^L c_a \dot{w} dx, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где је $\vec{\sigma}(x, z, t) = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}]^T$ вектор напона за пресечне равни управне на правце координатних оса, $\vec{\varepsilon}(x, z, t) = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}]^T$ вектор деформација греде, при чему је и свака од компонентних деформација и компонентних напона такође функција просторних координата x и z као и времена t , $f(x, t)$ је функција спољног оптерећења по јединици дужине греде, а c_a коефицијент вискозног пригушења средине (у оквиру ове дисертације, ако није другачије наглашено, ваздуха).

Зависно од начина моделирања материјала, могу се применити различите конститутивне релације. За хомоген, изотропан и идеално еластичан материјал са модулом еластичности Y , имајући у виду једначине (2.24) и (2.25), важи релација:

$$\sigma_x^{el} = Y \varepsilon_x = -Y z w'' . \quad (2.27)$$

Слично, за хомоген, изотропан, вискоеластичан материјал Келвин-Војтовог (Kelvin-Voigt) типа важи:

$$\sigma_x^{visc} = Y \varepsilon_x + c_s \dot{\varepsilon}_x = -Y z w'' - c_s z \dot{w}'' , \quad (2.28)$$

где је са c_s означен коефицијент унутрашњег вискозног пригушења материјала греде.

Уколико се материјал моделира применом извода нецелог реда, и ако се узме да Y , уместо модула еластичности, представља продужени модуо релаксације, за фракциони Келвин-Војтов модел материјала биће [4, 149]:

$$\sigma_x^{frac} = Y \varepsilon_x + \tau \alpha Y D^\alpha \varepsilon_x = -Y z w'' - z \tau \alpha Y D^\alpha w'' , \quad (2.29)$$

где је τ време релаксације, а α ред фракционог извода.

Хамилтонов принцип се може изразити преко екстремизације Лагранжовог функционала енергије система у посматраном временском интервалу - од тренутка t_1 до тренутка t_2 , односно:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi + W) dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta \Pi + \delta W) dt = 0 . \quad (2.30)$$

Коришћењем парцијалне интеграције и имајући у виду да је варијација независне променљиве на границама домена интеграције по времену једнака нули, варијација кинетичке

енергије и варијација рада спољашњих сила се могу одредити као:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt &= \int_0^L m \int_{t_1}^{t_2} \dot{w}(\delta \dot{w}) dt dx = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L m \dot{w} \delta w dx dt, \\ \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L f(x, t) \delta w dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L c_a \dot{w} \delta w dx dt,\end{aligned}\quad (2.31)$$

док ће варијација потенцијалне енергије деформације зависити од примењене конститутивне релације. Тако ће за еластичан материјал потенцијална енергија деформације бити дата изразом:

$$\Pi_{el} = \frac{1}{2} \int_V \vec{\sigma}_{el} \vec{\varepsilon} dV \approx \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \sigma_x^{el} \varepsilon_x dA dx, \quad (2.32)$$

за класичан вискоеластичан материјал изразом:

$$\Pi_{visc} = \frac{1}{2} \int_V \vec{\sigma}^{visc} \vec{\varepsilon} dV \approx \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \sigma_x^{visc} \varepsilon_x dA dx, \quad (2.33)$$

а за фракционо вискоеластични материјал изразом:

$$\Pi_{frac} = \frac{1}{2} \int_V \vec{\sigma}^{frac} \vec{\varepsilon} dV \approx \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \sigma_x^{frac} \varepsilon_x dA dx. \quad (2.34)$$

За еластичан материјал, уз уважавање једначина (2.25) и (2.27) и примену парцијалне интеграције, важи [161]:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \delta \Pi_{el} dt &= I_{el} = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \delta \int_0^L \int_A (Y \varepsilon_x) \varepsilon_x dA dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_A Y \varepsilon_x \delta \varepsilon_x dA dx dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L Y I w''(\delta w)'' dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L Y I w'''' \delta w dx + Y I w''(\delta w)' \Big|_0^L - Y I w'''(\delta w) \Big|_0^L \right) dt.\end{aligned}\quad (2.35)$$

Слично, за класичан вискоеластичан материјал моделиран конститутивном релацијом (2.28), имајући у виду да је варијација променљиве на границама домена интеграције по времену једнака нули, важи [162]:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \delta \Pi_{visc} dt &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \delta \int_0^L \int_A (Y \varepsilon_x + c_s \dot{\varepsilon}_x) \varepsilon_x dA dx dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \delta \int_0^L \int_A Y \varepsilon_x^2 dA dx dt + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \delta \int_0^L \int_A c_s \dot{\varepsilon}_x \varepsilon_x dA dx dt = \\ &= I_{el} + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_A c_s (\delta \dot{\varepsilon}_x \varepsilon_x + \dot{\varepsilon}_x \delta \varepsilon_x) dA dx dt = \\ &= I_{el} + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L c_s I (w''(\delta \dot{w})'' + \dot{w}''(\delta w)'') dx dt = \\ &= I_{el} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L c_s I \dot{w}'''' \delta w dx + c_s I \dot{w}''(\delta w)' \Big|_0^L - c_s I \dot{w}'''(\delta w) \Big|_0^L \right) dt,\end{aligned}\quad (2.36)$$

где је са I_{el} означен интеграл варијације потенцијалне енергије за еластичан материјал у

посматраном временском интервалу од t_1 до t_2 , дат изразом (2.35).

Аналогно претходном, може се извести и израз за материјал моделиран конститутивном релацијом у којој се примењује пригушење са изводом нецелог реда, датом једначином (2.29), односно:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \delta \Pi_{frac} dt &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \delta \int_0^L \int_A (Y \varepsilon_x + \tau_1^\alpha Y D^\alpha \varepsilon_x) \varepsilon_x dA dx dt = \\
&= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \delta \int_0^L \int_A Y \varepsilon_x^2 dA dx dt + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \delta \int_0^L \int_A \tau_1^\alpha Y D^\alpha \varepsilon_x \varepsilon_x dA dx dt = \\
&= I_{el} + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_A \tau_1^\alpha Y (D^\alpha \delta \varepsilon_x \varepsilon_x + D^\alpha \varepsilon_x \delta \varepsilon_x) dA dx dt = \\
&= I_{el} + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \tau_1^\alpha Y I (w'' D^\alpha (\delta w)'' + D^\alpha w'' (\delta w)'') dx dt = \\
&= I_{el} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \tau_1^\alpha Y I D^\alpha w'''' \delta w dx + \tau_1^\alpha Y I D^\alpha w'' (\delta w)' \Big|_0^L - \tau_1^\alpha Y I D^\alpha w'''' (\delta w) \Big|_0^L \right) dt.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Када су одређене кинетичка енергија, рад спољашњих сила, потенцијална енергија система зависно од примењеног модела материјала и интегрални њихових варијација у одређеном временском интервалу (једначине (2.31)-(2.36)), може се применити Хамилтонов варијациони принцип дат једначином (2.30), чиме се добијају диференцијална једначина кретања и одговарајући гранични услови.

Тако, за еластичан материјал важи:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta \Pi_{el} + \delta W) dt &= 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L (m \ddot{w} + Y I w'''' - f - c_a \dot{w}) \delta w dx + Y I w'' (\delta w)' \Big|_0^L - Y I w'''' (\delta w) \Big|_0^L \right) dt &= 0,
\end{aligned} \tag{2.38}$$

одакле се, као услов екстремизације функционала, добија диференцијална једначина кретања за еластичну греду:

$$m \ddot{w} + Y I w'''' - f - c_a \dot{w} = 0, \quad x \in [0, L], \tag{2.39}$$

као и одговарајући гранични услови:

$$\begin{aligned}
Y I w'' (\delta w)' \Big|_0^L &= 0, \\
Y I w'''' (\delta w) \Big|_0^L &= 0.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Гранични услови (2.40) могу бити задовољени било да су задата померања или нагиби греде на крајевима ($w(0, t)$, $w'(0, t)$, $w(L, t)$, $w'(L, t)$), чиме се добијају геометријски гранични услови, било да су задате функције момента савијања или трансверзалне силе на крајевима греде ($Y I w''(0, t)$, $Y I w''(L, t)$, $Y I w''''(0, t)$, $Y I w''''(L, t)$), чиме се добијају природни гранични услови. За решавање диференцијалне једначне (2.39) довољна је ма која

комбинација четири гранична услова. На пример, за конзолну греду ће на укљештеном крају бити задата два геометријска услова: $w(0, t) = w_0(t)$, $w'(0, t) = \varphi_0(t)$, док ће на слободном крају бити задата два природна услова: $YIw''(L, t) = M_L(t)$, $YIw'''(L, t) = V_L(t)$, где су унапред познате функција померања $w_0(t)$ и обртања $\varphi_0(t)$ укљештеног краја, као и вредност момента савијања $M_L(t)$ и трансверзалне силе $V_L(t)$ на слободном крају греде. Слично, за просту греду би на оба краја био задат по један геометријски и по један природни гранични услов: $w(0, t) = w_0(t)$, $YIw''(0, t) = M_0(t)$, $w(L, t) = w_L(t)$, $YIw'''(L, t) = M_L(t)$, итд.

За греду сачињену од вискоеластичног материјала важи:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta \Pi_{visc} + \delta W) dt = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L (m \ddot{w} + c_s I \dot{w}'''' + YIw'''' - f - c_a \dot{w}) \delta w dx + \right. & (2.41) \\ \left. + (YIw'' + c_s I \dot{w}'') (\delta w)' \Big|_0^L - (YIw''' + c_s I \dot{w}''') (\delta w) \Big|_0^L \right) dt = 0, & \end{aligned}$$

односно, диференцијална једначина кретања за вискоеластичну греду гласи:

$$m \ddot{w} + c_s I \dot{w}'''' + YIw'''' - f - c_a \dot{w} = 0, \quad x \in [0, L], \quad (2.42)$$

уз граничне услове:

$$\begin{aligned} (YIw'' + c_s I \dot{w}'') (\delta w)' \Big|_0^L &= 0, \\ (YIw''' + c_s I \dot{w}''') (\delta w) \Big|_0^L &= 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Аналогно, за греду са материјалом чије је пригушење моделирано фракционо вискоеластичним Келвин-Војтовим моделом материјала биће:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta \Pi_{frac} + \delta W) dt = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L (m \ddot{w} + \tau_1^\alpha YID^\alpha w'''' + YIw'''' - f - c_a \dot{w}) \delta w dx + \right. & (2.44) \\ \left. + (YIw'' + \tau_1^\alpha YID^\alpha w'') (\delta w)' \Big|_0^L - (YIw''' + \tau_1^\alpha YID^\alpha w''') (\delta w) \Big|_0^L \right) dt, & \end{aligned}$$

што даје диференцијалну једначину кретања за фракционо вискоеластичну греду у облику:

$$m \ddot{w} + \tau_1^\alpha YID^\alpha w'''' + YIw'''' - f - c_a \dot{w} = 0, \quad x \in [0, L], \quad (2.45)$$

уз граничне услове:

$$\begin{aligned} (YIw'' + \tau_1^\alpha YID^\alpha w'') (\delta w)' \Big|_0^L &= 0, \\ (YIw''' + \tau_1^\alpha YID^\alpha w''') (\delta w) \Big|_0^L &= 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

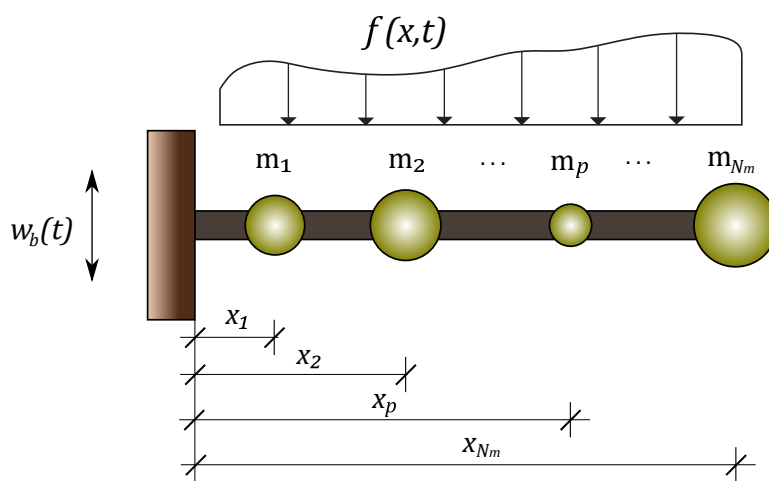
Без обзира на коришћени тип материјала, одговарајућој диференцијалној једначини кретања греде и просторним граничним условима добијеним директно применом Хамилтоновог принципа треба придружити и два почетна услова у облику:

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= w_0(x), \\ \dot{w}(x, 0) &= v_0(x), \end{aligned} \quad (2.47)$$

чиме је постављени динамички проблем у потпуности одређен и који се потом може решавати различитим методама. У оквиру ове дисертације биће коришћена Галеркинова аналитичка апроксимативна метода отежаног остатка. Описани поступак биће коришћен у Поглављу 3 приликом формирања математичког модела пијезоелектричног динамичког апсорбера за контролу вибрација мостовских конструкција.

2.2.2 Вибрације греде са додатим концентрисаним масама

Уколико се на греди налази N_m концентрисаних маса m_p повезаних са гредом на позицијама x_p , $p = 1, 2, \dots, N_m$, као на Слици 2.2, њихова инерција ће утицати на кретање греде па ће се и диференцијална једначина кретања греде променити. Ако се због релативно малих обртања попречних пресека занемари ротациона инерција додатих концентрисаних маса, утицај ових маса може се узети у обзир у једначини кретања уводећи инерцијалне силе одговарајућих интензитета на одговарајућим местима на греди, што се може постићи коришћењем Диракове делта функције, како је, на пример, урађено у [171--174].



Слика 2.2 Греда са N_m додатих концентрисаних маса

Наиме, ако се за пример узме конзолна греда сачињена од материјала са пригушењем моделираним фракционим изводима, као што је показано у претходном тексту, кретање

греде без додатих маса се описује једначином (2.45). Међутим, уколико се тој конзолној греди придода N_m концентрисаних маса, то ће утицати на укупну кинетичку енергију приликом кретања, тако да диференцијална једначина кретања греде тада гласи:

$$\left(m + \sum_{p=1}^{N_m} m_p \delta(x - x_p) \right) \ddot{w} + \tau_1^\alpha Y I D^\alpha w'''' + Y I w'''' - f - c_a \dot{w} = 0, \quad x \in [0, L], \quad (2.48)$$

где је $\delta(x)$ Диракова делта функција.

Потребно је истаћи да додавање концентрисаних маса математички моделираних на поменут начин не утиче на граничне услове диференцијалне једначине кретања, тако да су они за наведени пример такође дати једначином (2.46).

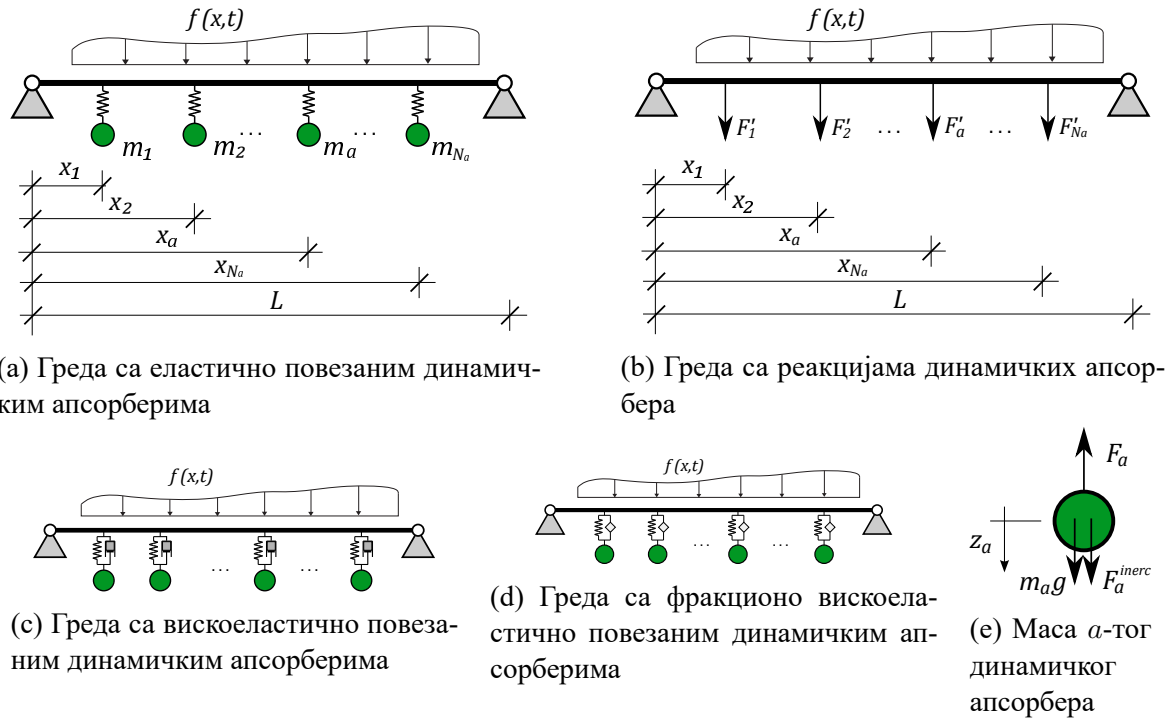
2.2.3 Вибрације греде са додатим динамичким апсорберима

Уколико се на греди налази N_a динамичких апсорбера, везаних за греду на позицијама $x_a \in [0, L]$, $a = 1, 2, \dots, N_a$, као на Слици 2.3(a), тада се дата конструкција моделира као сложени, хибридни систем који обухвата греду као континуалан елемент са бесконачно много степени слободе кретања и апсорбере моделиране као систем од N_a дискретних маса m_a , $a = 1, 2, \dots, N_a$, повезаних са гредом на одређени начин. У зависности од карактеристика апсорбера, њихова веза са основном конструкцијом може бити моделирана на различите начине. За апсорбере код којих је маса идеално еластично везана за греду, веза се може моделирати идеално еластичним елементом, обично представљеним опругом, Слика 2.3(a). Ако материјал апсорбера није идеално еластичан већ показује и вискозна својства, примењује се класичан вискоеластичан модел материјала и у моделу се користе вискозне пригушнице, Слика 2.3(c), а уколико је материјал апсорбера такав да при моделирању захтева примену фракционих извода, у моделу се користе фракциони вискоеластични елементи, Слика 2.3(d).

Ако се за масу сваког од апсорбера уведе по једна додатна координата $z_a = z_a(t)$, $a = 1, 2, \dots, N_a$, која дефинише апсолутно вертикално померање те масе у вертикалном правцу, сила F_a којом апсорбер делује на греду, Слика 2.3(b), односно греда на апсорбер, Слика 2.3(e), биће сразмерна релативном померању концентрисане масе апсорбера у односу на греду, тј. разлици апсолутног померања греде на месту на којем је за њу везан апсорбер $w(x_a, t)$ и апсолутног померања масе тог апсорбера $z_a(t)$, а фактор пропорционалности зависиће од карактеристика материјала апсорбера. За случај идеално еластичног апсорбера ова сила има облик:

$$F_a^{elast} = k_a (w(x_a, t) - z_a), \quad (2.49)$$

где је k_a крутост опруге, односно моду еластичности материјала a -тог апсорбера, као што је приказано на Слици 2.3(a). Уколико је материјал апсорбера вискоеластичан и моделиран класичним Келвин-Војтовим моделом материјала, сила међудејства апсорбера и



Слика 2.3 Греда са N_a додатих динамичких апсорбера повезаних на различите начине

основне конструкције има и одговарајаћи вискозни члан:

$$F_a^{visc} = (k_a + c_a \frac{\partial}{\partial t}) (w(x_a, t) - z_a(t)) , \quad a = 1, 2, \dots, N_a , \quad (2.50)$$

а уколико је материјал апсорбера моделиран Келвин-Војтовим моделом фракционог типа, сила међудејства између апсорбера и основне конструкције има одговарајаћи фракциони члан:

$$F_a^{frac} = k_a(1 + \tau_1^\alpha D^\alpha) (w(x_a, t) - z_a(t)) , \quad a = 1, 2, \dots, N_a . \quad (2.51)$$

Пошто се систем састоји од греде и N_a апсорбера, за потпуно описивање кретања свих елемената система биће потребно $N_a + 1$ диференцијалних једначина кретања, и то: једна која ће описивати кретање греде као система са бесконачно много степени слободe кретања, и по једна једначина за сваку од маса N_a додатих апсорбера. Диференцијална једначина кретања греде може се извести применом Хамилтоновог варијационог принципа за сваки од разматраних модела материјала греде истом процедуром описаном у претходном тексту, уз ту разлику што сада на греду од спољашњих сила, поред задатог трансверзалног оптерећења $f(x, t)$ и отпора средине $c_a \dot{w}(x, t)$, делују и динамички апсорбери концентрисаним силама F_a , $a = 1, 2, \dots, N_a$, које врше рад на померањима греде у својим нападним тачкама. Зависно од материјала апсорбера, силе међудејства апсорбера и конструкције описују се једном од једначина (2.49)-(2.51).

Дакле, диференцијална једначина кретања греде од материјала са фракционим пригушењем са динамичким апсорберима од материјала са фракционим пригушењем се може

записати у облику:

$$YI(1 + \tau_1^\alpha D^\alpha)w'''' + m\ddot{w} + \sum_{a=1}^{N_a} k_a(1 + \tau_a^{\beta_a} D^{\beta_a})(w(x_a, t) - z_a(t)) - c_a\dot{w} = f, \quad (2.52)$$

где су τ_a и β_a време ретардације и ред фракционог извода a -тог апсорбера, респективно. Овакав математички модел описује најопштији разматрани случај, јер дозвољава да фракциона својства материјала греде и сваког апсорбера понаособ буду међусобно различита. Међутим, уколико је, рецимо, греда моделирана као идеално еластично тело и ако су сви апсорбери израђени од истог материјала, претходна једначина се поједностављује и постаје:

$$YIw'''' + m\ddot{w} + \sum_{a=1}^{N_a} k_a(1 + \tau_2^\beta D^\beta)(w(x_a, t) - z_a(t)) = f, \quad (2.53)$$

при чему је занемарен отпор средине, а са τ и β су обележени време ретардације и степен фракционог извода материјала апсорбера, респективно.

Такође, треба нагласити и да присуство динамичких апсорбера не утиче на граничне услове тако да они остају исти као и код одговарајуће греде без додатих апсорбера.

Као што је напоменуто, поред ове једначине потребно је формирати и по једну једначину кретања за масу сваког од N_a апсорбера, што се може урадити применом Даламберовог принципа, Слика 2.3(е), чиме се добија:

$$m_a\ddot{z}_a - k_a(1 + \tau_a^{\beta_a} D^{\beta_a})(w(x_a, t) - z_a(t)) = m_ag, \quad a = 1, 2, \dots, N_a, \quad (2.54)$$

где је g убрзање Земљине теже.

Једначина (2.52), односно (2.53), заједно са једначинама (2.54), чини систем од $N_a + 1$ симултаних (спрегнутих) диференцијалних једначина по исто толико непознатих функција $w(x, t), z_1(t), z_2(t), \dots, z_{N_a}(t)$, чиме је постављени проблем, уз одговарајуће граничне и почетне услове, потпуно одређен. Овај приступ биће коришћен при формирању математичког модела у наредним одељцима, при дефинисању и примени пијезоелектричних динамичких апсорбера за контролу вибрација мостовских конструкција, при чему ће овакви системи једначина бити решавани применом Галеркинове апроксимативне аналитичке методе отежаног остатка за сваки од појединачних случајева који буду разматрани.

2.3 Основе пијезоелектричности

Пијезоелектрични материјали су они код којих услед деформације долази до електричне поларизације унутар кристалне структуре материјала и обратно, довођење пијезоелектричних материјала у електрично поље изазива њихову деформацију. У ову групу материјала спадају углавном одређене врсте керамика и вештачки добијених материјала.

У овом одељку су изложене основне једначине којима се описује електро-механичко понашање оваквих материјала и ове једначине ће бити коришћене за дефинисање својста-

ва пијезоелектричног динамичког апсорбера. Једначине приказане у овом одељку представљају уређени извод из одговарајуће литературе [1, 84, 175]. Извођења која следе углавном прате поступак дат у књизи "Пијезоелектрично сакупљање енергије" Алпера Ертурка и Данијела Инмана [1], а допуњена су одређеним појашњењима из остале наведене литературе.

Закон одржања енергије у пијезоелектричној средини може се исказати на следећи начин: "Брзина промене укупне енергије (кинетичке и потенцијалне) једнака је брзини вршења рада од стране површинских сила које делују на тело запремине V са границом S , умањеној за флуks отицања електричне енергије кроз ту границу S ." [1].

Ако се усвоји стандардна тензорска нотација за коваријантне тензоре у тродимензионалном правоугаоном Декартовом координатном систему [175], управо наведени закон одржања енергије се математички може изразити као:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \rho (\dot{u}_j)^2 + \Pi \right) dV = \int_S \left(t_j \dot{u}_j - n_j \varphi \dot{D}_j \right) dS, \quad (2.55)$$

где је ρ маса по јединици запремине тела, u_j вектор померања тачака тела, $\Pi = \Pi_{el} = \frac{1}{2} \int_V \vec{\sigma}_{el} \vec{\varepsilon} dV \approx \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \sigma_x^{el} \varepsilon_x dA dx$ потенцијална енергија деформације тела, t_j вектор тоталног напона за пресечну раван са нормалом n_j , n_j вектор нормале на граничну површ S , φ скаларни потенцијал електричног поља и D_j вектор електричног помераја.

Из теорије елестичности и електростатике познато је [84, 175] да за изотропан хомоген материјал без дисперзије и нулти векторски потенцијал електричног поља, у одсуству запреминских сила важе и следеће релације:

$$\begin{aligned} T_{ij,j} &= \rho \ddot{u}_j, \\ t_j &= n_i T_{ij}, \\ D_{i,i} &= 0, \\ E_k &= -\varphi_{,k}, \\ S_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \\ D_i &= \varepsilon_0 E_i + p_i = \varepsilon_0 \kappa_e E_i, \end{aligned} \quad (2.56)$$

где је T_{ij} тензор напона, S_{ij} тензор деформације, E_j вектор јачине електричног поља, p_i вектор поларизације пијезоелектричног материјала, κ_e диелектрична константа материјала, а ε_0 константа која износи $\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \left[\frac{\text{Farrad s}}{m} \right]$, где је c брзина светлости у вакууму изражена у метрима по секунди.

Када се ове релације уврсте у једначину (2.55), уз примену Гринеове дивергенционе теореме добија се:

$$\rho \ddot{u}_j \dot{u}_j + \dot{\Pi} = (T_{ij} \dot{u}_j)_{,i} - (\varphi \dot{D}_j)_{,i}, \quad (2.57)$$

односно:

$$\dot{\Pi} = (T_{ij,i} - \rho \ddot{u}_j) \dot{u}_j + T_{ij} \dot{u}_{j,i} - \varphi \dot{D}_{i,i} - \varphi_{,i} \dot{D}_i, \quad (2.58)$$

што у коначном даје први закон термодинамике формулисан за пијезоелектричну средину:

$$\dot{\Pi} = T_{ij}\dot{S}_{ij} + E_i\dot{D}_i. \quad (2.59)$$

За пијезоелектричан материјал се енталпија (ослобађање унутрашње енергије) може дефинисати као:

$$H = \Pi - E_i D_i. \quad (2.60)$$

Ако се потражи први извод претходног израза по времену, уз уважавање релације (2.59), добија се:

$$\dot{H} = \dot{\Pi} - \dot{E}_i D_i - E_i \dot{D}_i = T_{ij}\dot{S}_{ij} - \dot{E}_i D_i. \quad (2.61)$$

Имајући у виду да се енталпија може изразити као функција тензора деформације и електричног поља $H = H(S_{ij}, E_i)$, њен први извод по времену се тражи као извод сложене функције:

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial S_{ij}} \dot{S}_{ij} + \frac{\partial H}{\partial E_i} \dot{E}_i. \quad (2.62)$$

Упоредивањем једначина (2.61) и (2.62) може се уочити да важи:

$$T_{ij} = \frac{\partial H}{\partial S_{ij}} \quad \wedge \quad D_i = \frac{\partial H}{\partial E_i}. \quad (2.63)$$

Ако се претпостави симетрична квадратна форма енталпије исказана као:

$$H = \frac{1}{2} c_{ijkl} S_{ij} S_{kl} - e_{ijk} E_i S_{jk} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} E_i E_j, \quad (2.64)$$

где су c_{ijkl} еластичне константе материјала, e_{ijk} пијезоелектричне константе материјала и ε_{ij} диелектричне константе материјала, добија се веза између напона и померања наелектрисања у пијезоелектричном материјалу са деформацијом и електричним пољем у облику:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= c_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} E_k, \\ D_i &= e_{ikl} S_{kl} + \varepsilon_{ik} E_k. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Међутим, за експериментално одређивање пијезоелектричних и диелектричних константи материјала погодније је користити инверзан облик ових релација, тј. изразити деформацију и померање наелектрисања у функцији напона и електричног поља, па се претходне једначине могу формулисати и у облику:

$$\begin{aligned} S_{ij} &= s_{ijkl}^E T_{kl} + d_{kij} E_k, \\ D_i &= d_{ikl} T_{kl} + \varepsilon_{ik}^T E_k, \end{aligned} \quad (2.66)$$

где су s_{ijkl}^E одговарајуће еластичне константе материјала мерене при константном електричном пољу, ε_{ik}^T одговарајуће диелектричне константе материјала мерене при константном напону, а d_{kij} одговарајуће пијезоелектричне константе материјала.

Ако се примени Војтова (Voigt) нотација за сажимање индекса:

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ 2S_{23} \\ 2S_{13} \\ 2S_{12} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\gamma_{yz} \\ 2\gamma_{xz} \\ 2\gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad \vec{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ 2T_{23} \\ 2T_{13} \\ 2T_{12} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ 2\tau_{yz} \\ 2\tau_{xz} \\ 2\tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2.67)$$

претходна релација се може записати и матрично као:

$$\begin{bmatrix} \vec{S} \\ \vec{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{s}^E & \vec{d}^{transpose} \\ \vec{d} & \vec{\varepsilon}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{E} \end{bmatrix}, \quad (2.68)$$

односно, за изотропан материјал, у развијеној форми биће:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{21}^E & s_{22}^E & s_{23}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{32} \\ s_{31}^E & s_{32}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{35} & 0 & \varepsilon_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{34} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{22}^T & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}. \quad (2.69)$$

У случају танке, Ојлер-Бернулијеве греде, ако су електроде постављене управно на осу 3 тако да је електрично поље оријентисано управо у правцу те осе, претходни систем једначина се редукује на свега две једначине, и то:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & d_{31} \\ d_{31} & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ E_3 \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

Једначина (2.70) уствари изражава везу (2.66) за случај Ојлер-Бернулијеве греде од изотропног еластичног пијезоелектричног материјала. Користећи једначине (2.70) може се извести и веза:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11}^E & -\bar{e}_{31} \\ \bar{e}_{31} & \bar{\varepsilon}_{33}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ E_3 \end{bmatrix}, \quad (2.71)$$

што заправо представља једначину (2.65) изражену за поменути случај Ојлер-Бернулијеве греде од изотропног еластичног пијезоелектричног материјала, уз напомену да важе сле-

деће везе између коришћених константи материјала:

$$\begin{aligned}\bar{c}_{11}^E &= \frac{1}{s_{11}^E}, \\ \bar{e}_{31} &= \frac{d_{31}}{s_{11}^E}, \\ \bar{\epsilon}_{33}^S &= \epsilon_{33}^T - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E}.\end{aligned}\tag{2.72}$$

У коначном, добијене једначине:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \bar{c}_{11}^E \epsilon_x \mp \bar{e}_{31} E_3, \\ D_3 &= \pm \bar{e}_{31} S_1 + \bar{\epsilon}_{33}^T E_3,\end{aligned}\tag{2.73}$$

могу се применити за одређивање диференцијалне једначине кретања греде применом Хамилтоновог варијационог принципа, аналогно поступку описаном у претходном одељку, уз напомену да знак пијезоелектричне константе \bar{e}_{31} зависи од оријентације поларизације материјала, што је наглашено знаком \pm , односно \mp у претходне две једначине. Међутим, услед присуства електричне енергије у материјалу, и математички израз Хамилтоновог принципа мора бити на одговарајућ начин прилагођен, тако да ће Лагранжијан за пијезоелектрични материјал имати облик:

$$L = \int_V (T - H(S_{kl}, E_k)) dV = \int_V \left(\frac{1}{2} \rho (\dot{u}_j)^2 - \Pi + E_i D_i \right) dV, \tag{2.74}$$

а израз за рад спољашњих сила постаје:

$$\delta W = \int_S (\bar{t}_k \delta u_k - \bar{q}_{el} \delta \varphi) dS, \tag{2.75}$$

где је \bar{t}_k вектор површинских сила, тј. унапред задато оптерећење на граници тела S , а \bar{q}_{el} количина наелектрисања на површини тела, тј. унапред задато наелектрисање по јединици површине на граници тела. Сада се Хамилтонов принцип може исказати као:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0, \tag{2.76}$$

а поступак даљег извођења диференцијалне једначине кретања греде аналоган је поступку описаном у одељку 2.2.1, уз поштовање веза (2.74) и (2.75).

Овине су постављене теоријске основе за развијање математичког модела нове конструкције динамичког апсорбера са пијезоелектричним својствима који се предлаже у оквиру ове тезе. У наставку дисертације биће описана предложена конструкција апсорбера, а потом ће, користећи поступке и једначине изложене у овом поглављу, бити изведене и решене једначине којима се описује електро-механичко понашање таквог система.

Глава 3

Нови тип пијезоелектричног динамичког апсорбера

У овом поглављу ће бити описана нова конструкција пијезоелектричног динамичког апсорбера (ПЕДА) и развијен математички модел за његову анализу.

3.1 Додавање пијезоелектричних својстава динамичком апсорберу

Динамички апсорбери су са основном конструкцијом по правилу повезани вискоеластично, тако да се током вибрације у систему јавља трансфер енергије са основне конструкције на апсорбер, при чему се енергија услед пригушења поступно дисипира и прелази у топлотну енергију. Међутим, уколико би се динамичком апсорберу додао и пијезоелектрични претварач енергије, део енергије преузете од основне конструкције могао би се претворити у електричну енергију и затим искористити за напајање уређаја за мониторинг конструкције, расвету на конструкцији или друге намене. У даљем тексту биће најпре описани најчешће коришћени пијезоелектрични материјали и пијезоелектрични претварачи енергије, а потом и описан принцип њиховог садејства са динамичким апсорбером.

Пијезоелектрични ефекат је први пут уочен код кварца 1880. године и код још неких природних кристала у потоњим деценијама, а у другој половини XX века су откривена и вештачка једињења која поседују пијезоелектрична својства [1], код којих је електро-механичко спрезање знатно израженије, те је и степен претварања енергије знатно већи него код природних пијезоелектричних кристала. До сада, најширу примену у техници нашао је олово-цирконит-титанат, $\text{Pb}(\text{ZrTi})_3\text{O}_2$, једињење које се у литератури обично означава као PZT. Наведени материјал је изузетно погодан за употребу, релативно је једноставан за израду и најефикаснији је досада познати пијезоелектрични материјал у погледу количине механичке енергије коју претвара у електричну енергију (поседује релативно велику вредност диелектричне константе) [176]. Међутим, у последње две деце-

није интензивно се истражују и алтернативни, еколошки прихватљиви и биоразградиви пијезоелектрични материјали [176--180], који не садрже олово и друге супстанце чија је употреба ограничена савременим прописима. Досад је откривено на десетине оваквих материјала, али њихова ефикасност и трајност, за сада, нису на довољно високом нивоу, што ограничава ширу примену ових материјала. Стога ће у оквиру ове дисертације пажња бити усмерена на PZT, уз напомену да се овде описани принципи и решења могу применити и на друге пијезоелектричне материјале, уз одговарајуће моделирање њихових материјалних својстава.

Код пијезоелектричних претварача енергије који користе деформацију савијања за генерисање електричне енергије, PZT се углавном користи у виду пијезокерамичких плочица које се одговарајућим адхезивним средством залепе на носећу конструкцију, најчешће танку лимену плочицу од алуминијума или неког другог метала, чији је један крај укљештен а други слободан [1]. Тако добијена конзола се назива *униморфна греда*. Уколико се са обе стране носеће конструкције залепе пијезокерамичке плочице, добијена греда се назива *биморфна греда*.

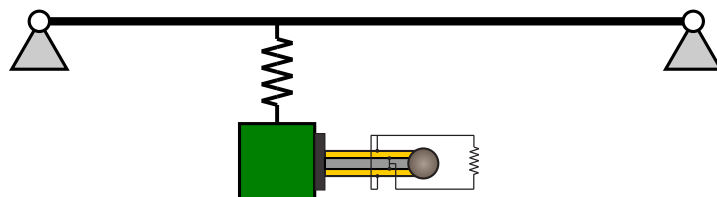
Основна замисао при примени оваквих сакупљача енергије је да се они пројектују тако да се током експлоатације *што чешће налазе у резонантном стању*, јер су тада амплитуде вибрација претварача највеће, па је тиме највећа и деформација пијезоелектричних плочица, а самим тим и количина произведене електричне енергије. На пример, уколико се пијезоелектрични сакупљачи користе код машина са релативно устаљеном радном фреквенцом, пожељно је да се сакупљач енергије пројектује тако да управо при тој фреквенци уђе у резонантно стање, чиме се максимизира његова ефикасност.

Треба напоменути и да се понекад користе и PZT плочице чија је дужина мања од дужине носећег слоја биморфне или униморфне греде. Тада пијезокерамика покрива само одређени део греде и механичке вибрације тог дела греде се преводе у електричну енергију. У том случају, и позиционирање пијезокерамичких делова на греди утиче на ефикасност сакупљања енергије и потребно је наћи оптималан положај пијезо-делова на греди [181]. Поред тога, треба имати у виду да се при вишим тоновима осциловања код конзолних греда на различитим деловима греде јављају деформације супротног знака. Дакле, уколико би се користили пијезоелектрични слојеви исте дужине као и носећи слој, који су повезани са њим целом дужином, при вишим фреквенцама осциловања долазило би до поништавања произведеног електричног напона и драстичног пада ефикасности биморфне греде као целине [1]. Овај проблем би се могао превазићи поделом пијезо-слојева на више делова који би се независно један од другог повезивали са носећим слојем [1] и тако сваки понаособ производио електричну енергију која би се формирањем одговарајућег електричног кола могла усмерити у истом смеру, чиме би се могао остварити кумулативни ефекат. Међутим, то би знатно усложнило и поскупело процес производње PZT гредица. Такође, ови сакупљачи енергије се најчешће пројектују тако да претежно раде у околини своје *основне сопствене фреквенце* осциловања, пошто су тада амплитуде вибрација, па тиме и количина произведене електричне енергије највеће. Како су при првом тону осци-

ловања трансверзална померања свих тачака греде увек истог смера, то у овом случају не долази до потирања произведеног електричног напона. Због тога ће у оквиру ове дисертације бити разматране само биморфне греде код којих су пијезоелектрични слојеви исте дужине као и носећи слој, и повезани су са њим целом дужином греде.

Потребно је истаћи и да се конзолни пијезоелектрични претварачи енергије углавном користе у комбинацији са додатим концентрисаним масама. Најчешће је у питању једна концентрисана маса на слободном крају греде, али постоје и случајеви када се користе две, три па и више додатих маса [129]. Додавањем концентрисаних маса се повећавају амплитуде вибрација греде, па тиме и деформације пијезо-слојева, односно количина произведене електричне енергије. Такође, тиме се и снижава основна фреквенца греде па се и пројектовани радни опсег претварача енергије помера ка нижим фреквенцама, што олакшава примену ових уређаја у грађевинским конструкцијама. Дакле, додавањем различитог броја и величине концентрисаних маса могу се постићи жељена динамичка својства пијезоелектричног претварача енергије.

Према томе, уколико се на динамички апсорбер дода и једна биморфна греда са додатим концентрисаним масама, добијени систем заправо представља динамички апсорбер са пијезоелектричним својствима и може се шематски приказати као на Слици 3.1.



Слика 3.1 Шематски приказ динамичког апсорбера са додатим пијезоелектричним претварачем енергије - основни концепт ПЕДА

Међутим, појединачна биморфна греда има врло уске фреквентне области при којима улази у резонантно стање, и то у околини својих сопствених фреквенци, што чини да је биморфна греда ефикасна само у врло уском радном опсегу. Уколико би се она у овом облику користила на мостовским конструкцијама, услед непредвидљивог оптерећења и побуде са променљивом фреквенцом, она би најчешће радила у не-резонантном стању те би и ефикасност таквог сакупљања енергије била врло мала. Ипак, постоје начини да се превазиђе ово ограничење и управо је то тема овог истраживања. У наставку текста биће најпре дат опис и математички модел понашања биморфних греда, а потом ће бити изложен и предлог нове конструкције динамичког апсорбера са пијезоелектричним својствима.

3.1.1 Математичко моделирање понашања биморфних греда

Будући да су у систему присутни и пијезоелектрични материјали у виду пијезокерамичких плочица у оквиру сваке биморфне греде, потребно је и њихово понашање описати одговарајућим математичким моделом. Ако се ти пијезо-слојеви повежу за електрич-

ни отпорник, кроз добијено електрично коло ће приликом деформације греда протичати електрична струја, односно јавиће се одређени електрични напон. У наставку ће бити изведене једначине којима се описује јачина електричне струје односно величина електричног напона у таквом колу. Међутим, ове величине зависиће од начина повезивања пијезо-слојева биморфних греда у електрично коло. Стога ће најпре бити изведене једначине за један пијезо-слој, независно од остатка система, тј. за случај једне униморфне греде, а потом ће бити изведене једначине за биморфну греду са редном, односно паралелном везом пијезо-слојева.

3.1.1.1 Једначина електричног кола за један пијезоелектричан слој

На Слици 3.2 је шематски приказана униморфна гред, односно гред са једним носећим слојем и једним пијезоелектричним слојем. Слојеви су исте дужине L и ширине b , а пијезо-слој је дебљине h_p . Електроде су постављене са горње и доње стране пијезо-слоја и повезане су у струјно коло са отпорником електричне отпорности R . Спољне нормале на равани електрода су у правцу осе z . Приликом деформације греде, у пијезо-слоју ће се услед директног пијезоелектричног ефекта јавити померање наелектрисања, приказано вектором електричног помераја \vec{D} . Међутим, пошто су обе електроде паралелне са равни xy , само ће компонента вектора електричног помераја у правцу нормале на електроде, тј. у правцу осе z односно главне централне осе $3 - 3$, бити различита од нуле и износиће:

$$D_3 = e_{31}\varepsilon_1 + \bar{\varepsilon}_{33}^s E_3, \quad (3.1)$$

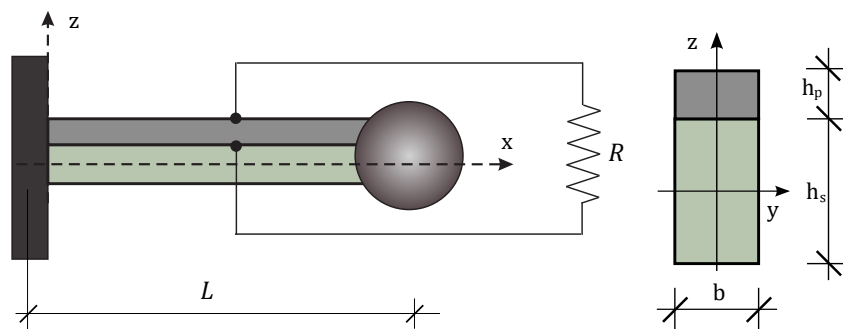
што је приказано и једначинама (2.70) и (2.71). Такође, према једначини (2.25), за Ојлер-Бернулијеву греду биће:

$$\varepsilon_x = -zw'', \quad (3.2)$$

а јачина електричног поља $E_3(t)$ између електрода ће, с обзиром на геометрију проблема, бити једнака:

$$E_3(t) = \frac{v(t)}{h_p}, \quad (3.3)$$

где је $v(t)$ електрични напон који се јавља на електродама.



Слика 3.2 Униморфна конзолна гред са додатом концентрисаном масом на слободном крају и њен попречни пресек

Гаусов закон за приказано електрично коло може се изразити као:

$$\int_A \vec{D} \cdot \vec{n} dA = Q, \quad (3.4)$$

где је Q количина наелектрисања. Диференцирањем Гаусовог закона (3.4) и имајући у виду Омов закон који даје везу између јачине електричне струје $i_R(t)$ на електричном отпорнику отпорности R и електричног напона на крајевима тог елемента $v(t)$:

$$i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R}, \quad (3.5)$$

може се писати:

$$\frac{d}{dt} \int_A \vec{D} \cdot \vec{n} dA = \frac{v(t)}{R}. \quad (3.6)$$

Узимајући у обзир једначине (3.1) и (3.6), за $z = h_{pc} = \frac{h_s}{2} + \frac{h_p}{2}$, тј. у нивоу тежишта пијезо-слоја биће:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_A \vec{D} \cdot \vec{n} dA &= \frac{d}{dt} \int_A D_3 dA = \frac{d}{dt} b \int_0^L (e_{31}\varepsilon_1 + \bar{\varepsilon}_{33}^s E_3) = \\ &= -\frac{d}{dt} e_{31} b h_{pc} \int_0^L w'' dx - \frac{d}{dt} b \bar{\varepsilon}_{33}^s L \frac{v}{h_p} = -\frac{\bar{\varepsilon}_{33}^s b L}{h_p} \dot{v} - e_{31} b h_{pc} \int_0^L w'' dx. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Сада једначина (3.6) постаје:

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{33}^s b L}{h_p} \dot{v} + \frac{1}{R} v + e_{31} b h_{pc} \int_0^L w'' dx = 0. \quad (3.8)$$

Анализирајући једначину (3.8), може се видети да сваки од сабирака представља израз за јачину електричне струје у одговарајућем елементу струјног кола. Према Омовом закону (3.5), други сабирак представља јачину струје која протиче кроз електрични отпорник $i_R(t)$. Са друге стране, имајући у виду да је напон на плочама кондензатора једнак $v_c(t) = \frac{Q(t)}{C_p}$, где је $Q(t)$ количина наелектрисања, а C_p капацитивност кондензатора, јачина струје која протиче кроз кондензатор $i_C(t)$ једнака је промени количине наелектрисања у времену, односно:

$$i_C = \dot{Q} = C_p \dot{v}. \quad (3.9)$$

Одавде се може закључити да први сабирак у једначини (3.8) представља јачину струје која протиче кроз кондензатор капацитивности:

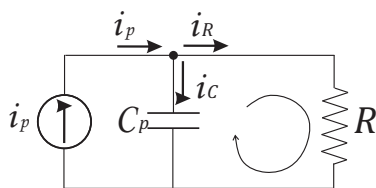
$$C_p = \frac{\bar{\varepsilon}_{33}^s b L}{h_p}. \quad (3.10)$$

Аналогно, како и трећи сабирак у једначини (3.8) мора представљати јачину електричне струје, а у њему не фигурише електрични напон, то се може закључити да овај сабирак

заправо представља јачину електричне струје електричног генератора, тј. извора, што је и очекивано с обзиром на то да се у овом сабирку јавља утицај пијезоелектричног ефекта преко пијезоелектричне константе e_{31} и утицај деформације пијезо-слоја у виду промене закривљености греде \dot{w}'' . Дакле, цео пијезо-слој се понаша и као извор наизменичне струје јачине:

$$i_p = -e_{31}bh_{pc} \int_0^L \dot{w}'' dx. \quad (3.11)$$

Према изложеној анализи, може се закључити да се електрична својства система приказаног на Слици 3.2 могу моделирати преко замењујућег (евивалентног) струјног кола које се састоји од извора електричне струје јачине $i_p(t)$, дате изразом (3.11), кондензатора капацитивности C_p дате изразом (3.10) и електричног отпорника отпорности R , а електрична шема оваквог кола приказана је на Слици 3.3.



Слика 3.3 Замењујуће електрично коло за униморфну греду

Посматрајући замењујуће струјно коло на Слици 3.3, ако се примени друго Кирхофово правило на десну грану електричног кола, биће:

$$v_R - v_C = 0 \quad \Rightarrow \quad v_R = v_C = v(t). \quad (3.12)$$

А ако се примени прво Кирхофово правило на чвор А означен на Слици 3.3 добиће се:

$$i_p - i_C - i_R = 0. \quad (3.13)$$

Уврстивши једначине (3.9), (3.5) и (3.12) у једначину (3.13), добија се једначина:

$$C_p \dot{v} + \frac{1}{R}v - i_p = 0, \quad (3.14)$$

што у потпуности одговара једначини (3.8), изведеној применом Гаусовог и Омовог закона на систем приказан на Слици 3.2, уколико важи:

$$C_p = \frac{\bar{\epsilon}_{33}^s bL}{h_p}, \quad (3.15)$$

$$i_p = -e_{31}bh_{pc} \int_0^L \dot{w}'' dx.$$

Дакле, једначина електричног кола може се извести и посматрајући замењујуће струјно коло ако се успоставе везе (3.15). Једначине (3.8) и (3.14) изведене су за један пијезо-слој, али поступак се може применити и када је више пијезо-слојева повезано у струјно коло.

Односно, једначина електричног кола може се извести и посматрајући искључиво замењујуће електрично коло, уколико се сваки пијезо-слој представи једним кондензатором и једним извором електричне струје карактеристика датих једначином (3.15), што је веома корисно када се ради о сложеним системима са више пијезо-слојева повезаних у електрично коло на различите начине. Стога ће у наставку све једначине разматраних електричних кола бити изведене на одговарајућим замењујућим струјним колима, најпре на примеру једне биморфне греде чији су пијезо-слојеви у коло повезани редно, односно паралелно, а потом и на систем састављен од више међусобно повезаних биморфних греда.

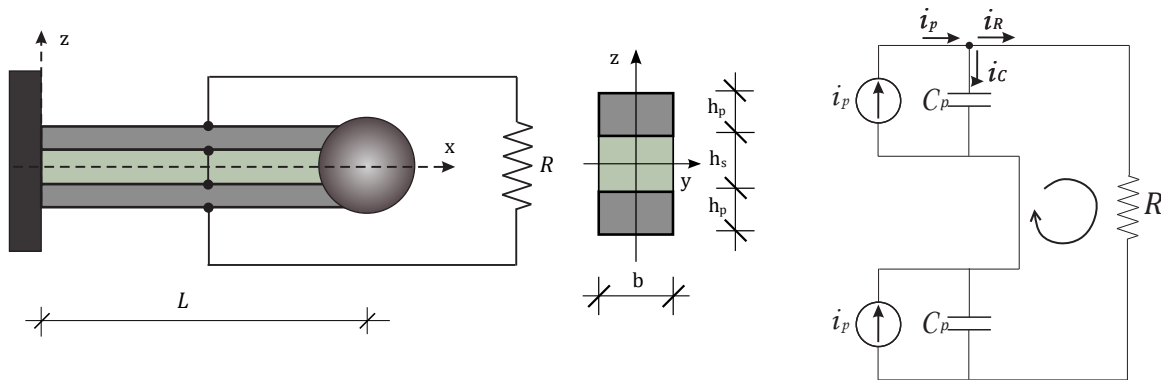
3.1.1.2 Једначина електричног кола за биморфну греду са редном везом пијезо-слојева

Биморфна гред са редном везом пијезо-слојева и одговарајуће замењујуће електрично коло приказани су на Слици 3.4. Друго Кирхофово правило исписано за десну грану кола даће:

$$v_R - v_C - v_C = 0 \Rightarrow v_C = \frac{1}{2}v_R = \frac{1}{2}v, \quad (3.16)$$

док ће Прво Кирхофово правило исписано за чвор означен на слици дати:

$$i_p - i_C - i_R = 0. \quad (3.17)$$



Слика 3.4 Биморфна гред са редном везом пијезо-слојева и одговарајуће замењујуће струјно коло

Комбинујући једначине (3.9), (3.5), (3.16) и (3.17), добија се тражена електрична једначина у облику:

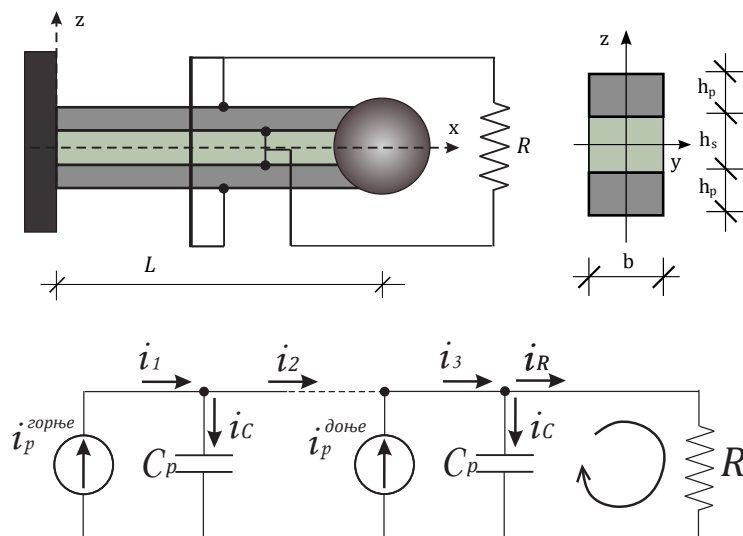
$$i_C + i_R - i_p = C_p \dot{v}_C + \frac{1}{R}v_R - i_p = 0 \Rightarrow \frac{C_p}{2}\dot{v} + \frac{1}{R}v - i_p = 0, \quad (3.18)$$

при чему и даље важе релације (3.15).

3.1.1.3 Електрична једначина за биморфну греду са паралелном везом пијезо-слојева

Биморфна гред са паралелном везом пијезо-слојева и одговарајуће замењујуће електрично коло приказани су на Слици 3.5. Када су слојеви повезани паралелно, на свим

электродама, односно на границама пијезо-слојева, влада исти напон, док ће се јачина струје разликовати од слоја до слоја.



Слика 3.5 Биморфна греда са паралелном везом пијезо-слојева и одговарајуће замењујуће струјно коло

Друго Кирхофово правило исписано за крајњу десну грану кола даће:

$$v_R - v_C = 0 \quad \Rightarrow \quad v_C = v_R = v, \quad (3.19)$$

док ће Прво Кирхофово правило примењено на чворове у горњој грани кола редом дати јачине струје:

$$\begin{aligned} i_1 &= i_p, \\ i_2 &= i_1 - i_C = i_p - i_C, \\ i_3 &= i_1 + i_p = 2i_p - i_C, \\ i_R &= i_3 - i_C = 2(i_p - i_C). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Види се да ће при паралелној вези пијезо-слојева сваки од њих придодати јачину струје од $(i_p - i_C)$, односно да ће свака биморфна греда дати струју на излазу од $2(i_p - i_C)$.

Омов закон (3.5) на отпорнику, имајући у виду једначине (3.9), (3.19) и (3.20), даје:

$$i_R = \frac{v_R}{R} \quad \Rightarrow \quad 2(i_p - i_C) = \frac{v_R}{R}, \quad (3.21)$$

односно, у коначном се добија тражена електрична једначина у облику:

$$\frac{v}{R} - 2(C_p \dot{v} - i_p) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_p \dot{v} + \frac{1}{2R} v - i_p = 0, \quad (3.22)$$

где такође важе релације (3.15).

Треба напоменути и то да ће се у горњем и доњем пијезоелектричном слоју једне, k -те, биморфне греде система греда (уколико су слојеви истих димензија) јавити струја исте јачине, тј. биће $i_{p(k)}^{gornje} = i_{p(k)}^{donje} = i_{p(k)}$, пошто ће и једна и друга пијезоелектрична

плочица доживети исту деформацију $w_{(k)}$.

* * * * *

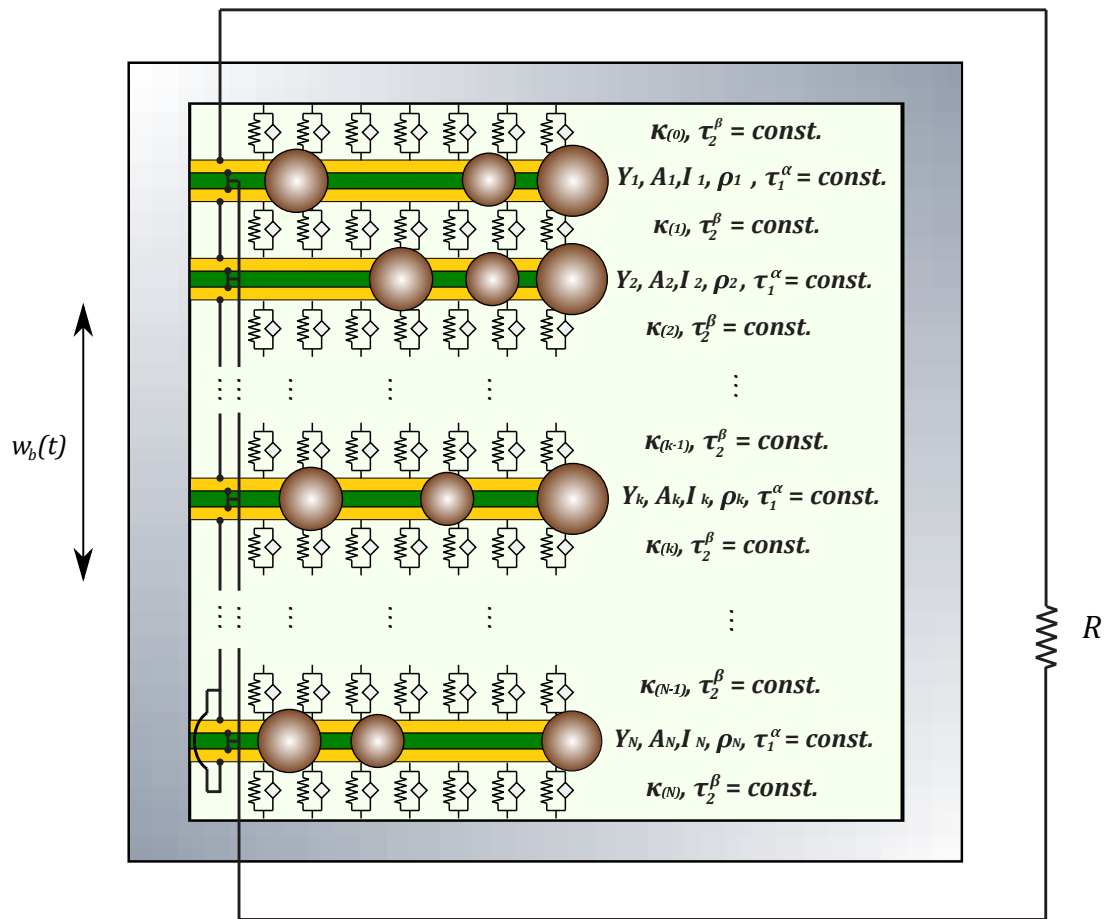
(3.23)

Једначинама изложеним у овом поглављу математички су моделирана електрична својства и понашање биморфних греда. У наставку текста ће бити описан модел новог динамичког апсорбера са придодатим пијезоелектричним својствима који садржи систем од више повезаних биморфних греда, а принципи изложени у овом одељку биће коришћени при описивању електричних својстава ПЕДА.

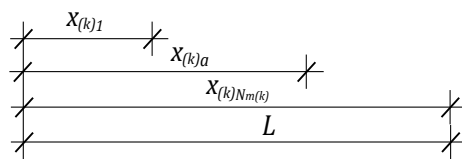
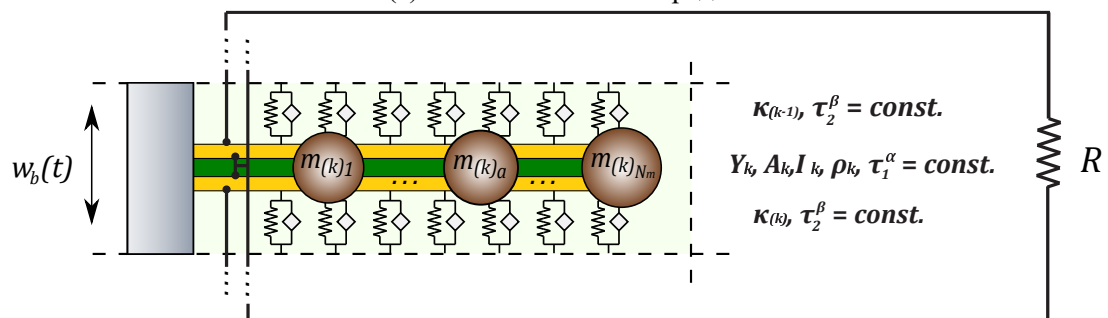
3.2 Предлог нове конструкције динамичког апсорбера са пијезоелектричним својствима

У Поглављу 3.1 је описано како се додавањем биморфне греде расподељеним динамичким апсорберима добијеном систему придодају пијезоелектрична својства и омогућује претварање дела механичке енергије вибрација у електричну енергију. Такође је истакнуто и да би примена оваквог, конвенционалног типа ПЕДА код мостовских конструкција била веома неефикасна пошто би ПЕДА, због променљивог саобраћајног оптерећења, најчешће радио у нерезонантном режиму те би његова померања, па тиме и деформација биморфне греде и произведена електрична енергија, били релативно мали. Стога се у оквиру ове дисертације предлаже нови тип ПЕДА за који се очекује да превазиђе наведене недостатке и буде ефикаснији него претходно описани конвенционални ПЕДА. Шематски приказ предлога нове конструкције ПЕДА дат је на Слици 3.6.

Основна замисао је да се динамичком апсорберу у виду тешког држача (контејнера) који је повезан са мостовском конструкцијом на одговарајућ начин, дода систем од *више* повезаних биморфних пијезоелектричних греда које би механичку енергију кретања динамичког апсорбера преводиле у електричну енергију. Ове биморфне греде могу бити исте величине и облика и израђене од истог материјала, али би требало да имају различит број и величину додатих концентрисаних маса на себи, па тиме и различита динамичка својства, односно сопствене фреквенце. У оквиру приказане анализе, узето је да су све биморфне греде једнаке дужине L и ширине b , и да све на себи имају по два пијезо-слоја једнаке дебљине h_p . Дебљина носећих слојева биморфних греда $h_{s(k)}$ може бити различита код различитих греда, што омогућава да се разликују и њихов момент инерције $I_{s(k)}$ и површина $A_{(k)}$ попречног пресека. Такође, у најопштијем разматраном случају, узето је да је носећи слој сваке од биморфних греда сачињен од фракционо вискоелеастичног материјала, са временом ретардације τ_1 и редом фракционог извода α који су исти код свих греда, а да се продужени модуо релаксације $Y_{s(k)}$ и специфична маса $\rho_{s(k)}$ носећег



(a) Систем повезаних греда



(b) k -та греда система

Слика 3.6 Систем од N_b повезаних биморфних греда са додатим концентрисаним масама; пијезо-слојеви су везани паралелно, а пригушење носећег слоја греда као и повезујућих слојева између греда моделирани су уз примену фракционих извода

слоја могу разликовати од греде до греде.

Биморфне греде су распоређене у низ и свака греда је са суседним гредама повезана одређеним вискоеластичним силиконским или гуменим слојем, па све греде чине једин-

ствен систем, који, последично, има више сопствених фреквенци у оквиру фреквентног опсега у којем су се налазиле основне сопствене фреквенце појединачних греда пре повезивања. Другим речима, када се више биморфних греда повеже у једну целину, уколико при одређеној фреквенци побуде једна од њих уђе у резонантно стање та побуда се преноси и на остале греде система, иако се основна фреквенца сваке од њих понаособ разликује од фреквенце те побуде. Услед овог преноса енергије кроз систем повезаних биморфних греда, радни опсег система се знатно проширује и ефикасност сакупљања енергије се у великој мери повећава, чак и за нестална и непредвидљива оптерећења и побуде какве се очекују при експлоатацији мостовских конструкција. Такође, жељена динамичка својства система повезаних греда могу се постићи једноставним померањем и различитим комбинавањем броја и величине додатих концентрисаних маса, без икакве промене геометрије или материјала самих греда, што додатно поједностављује пројектовање и извођење оваквих система.

Идеја о повезивању више биморфних греда у јединствен систем ради повећања ефикасности у сакупљању енергије већ постоји у доступној литератури. Разматрано је како повезивање греда у равни у којој се греде налазе [3], тако и повезивање ван равни греда [129] и резултати су показали знатно побољшање карактеристика система у погледу производње електричне енергије. Међутим, у наведеним радовима, греде су међусобно биле повезане само на слободним крајевима, и то искључиво еластичним елементима (опругама).

Потребно је истаћи и да начин повезивања греда у систем, као и својства самих елемената за повезивање умногоме утичу на крајње динамичке карактеристике система као целине. Да би се побуда система што равномерније и потпуније пренела са греде на греду, потребно је да греде буду повезане на оптималан начин. Стога се у оквиру ове дисертације предлаже модел код којег су *биморфне греде повезане целом својом дужином* преко одређеног слоја спрезања од гуме или силикона. Овај слој се може моделирати као еластичан материјал, али овде предложени модел омогућава да се уведе и одговарајуће вискозно пригушење слоја, класично или фракционо, чиме се већ постојећи модел из наведене литературе уопштава и знатно проширује, а што се потврђује и чињеницом да се модел представљен у овој дисертацији може свести на моделе приказане у наведеној литератури [3] једноставним увођењем Диракове делта функције, како ће бити описано у наредном поглављу. У најопштијем разматраном случају, модел дозвољава да релаксирани коефицијент стишљивости слоја спрезања буде различит између сваке од биморфних греда, али је узето да су време ретардације τ_2 и ред фракционог извода β исти у целом спрежућем слоју. У описаном систему, одговарајућим избором параметара попут геометрије биморфних греда, распореда и величине додатих концентрисаних маса и пригушења и модула еластичности слоја спрезања, могу се постићи оптималне карактеристике пијезоелектричног динамичког апсорбера и остварити максималан учинак превођења механичке енергије вибрација мостовске конструкције у електричну енергију.

У наставку текста биће изведене једначине којима се описује електро-механичко пона-

шаће овде описане конструкције ПЕДА, а затим ће бити приказана и нумеричка анализа и поступак оптимизације параметара модела за конкретне случајеве примене код мостовских конструкција различитих статичких система.

3.3 Математички модел предложеног типа ПЕДА

3.3.1 Извођење једначине кретања

Диференцијална једначина кретања система, као што је описано у Поглављу 2, може се извести применом Хамилтоновог варијационог принципа, који подразумева да је варијација лагранжијана на неком посматраном временском интервалу једнака нули.

За систем приказан на Слици 3.6, уз увођење претпоставки описаних у Поглављу 2, кинетичка енергија $T_{(k)}$, деформациони рад $\Pi_{(k)}$ и рад спољашњих сила $W_{(k)}$ за k -ту греду система могу се приказати као:

$$\begin{aligned} T_{(k)} &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\rho_k A_k + \sum_{a=1}^{N_{m(k)}} m_{a(k)} \delta(x - x_{a(k)}) \right) \dot{w}_{(k)}^2 dx, \\ \Pi_{(k)} &\approx \frac{1}{2} \int_{V_{(k)}} \varepsilon_{x_{(k)}} \sigma_{x_{(k)}} dV, \\ W_{(k)} &= \int_0^L (f_{(k-1)} - f_{(k)} - \rho_{(k)} A_{(k)} g) w_{(k)} dx, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где се приликом одређивања потенцијалне енергије деформације користи одговарајућа конститутивна релација за сваки од слојева биморфне греде, приказаних на Слици 3.5. Наведени изрази ће овде бити поновљени ради прегледности. Конститутивна релација за пијезоелектричан материјал и материјал моделиран фракционим Келвин-Војтовим моделом могу се изразити као:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{piezo} &= \bar{c}_{11}^E \varepsilon_x \mp \bar{e}_{31} E_3, \\ \sigma_x^{frac} &= Y \varepsilon_x + \tau \alpha Y D^\alpha \varepsilon_x = -Y z w'' - z \tau \alpha Y D^\alpha w''. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Веза између деформације и померања греде потребна за даља извођења је:

$$u(x, z, t) = -z w'(x, t). \quad (3.26)$$

Такође, пошто су греде међусобно повезане слојем спрезања, утицај једне греде на другу јавиће се у виду расподељене силе дуж греде $f(x)$, која ће бити сразмерна разлици померања греда које интерагују, а с обзиром на фракционо вискоеластична својства слоја спрезања, расподељена сила којом $(k-1)$ -ва греда делује на k -ту греде може се представити као:

$$f_{(k-1)}(x, t) = \kappa_{k-1} (1 + \tau_2^\beta D^\beta) (w_{(k)} - w_{(k-1)}), \quad (3.27)$$

док се расподељена сила којом $(k + 1)$ -ва греда делује на k -ту греду може одредити као:

$$f_{(k)}(x, t) = \kappa_k(1 + \tau_2^\beta D^\beta)(w_{(k+1)} - w_{(k)}) . \quad (3.28)$$

Имајући у виду једначине (3.24)-(3.28), варијација кинетичке енергије, деформационог рада и рада спољашњих сила за k -ту греду се, уз примену парцијалне интеграције, може

одредити као:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \delta T_{(k)} dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\rho_k A_k + \sum_{a=1}^{N_{m(k)}} m_a \delta(x - x_a) \right) \dot{w}_{(k)} \delta \dot{w}_{(k)} dx dt \\
&= \int_0^L \left(\rho_k A_k + \sum_{a=1}^{N_{m(k)}} m_a \delta(x - x_a) \right) \int_{t_1}^{t_2} \dot{w}_{(k)} \delta \dot{w}_{(k)} dt dx \\
&= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\rho_k A_k + \sum_{a=1}^{N_{m(k)}} m_a \delta(x - x_a) \right) \ddot{w}_{(k)} \delta w_{(k)} dx dt, \\
\int_{t_1}^{t_2} \delta \Pi_{(k)} &= \int_{t_1}^{t_2} \delta \frac{1}{2} \int_0^L b \left(\int_{-h_p - \frac{h_s}{2}}^{-\frac{h_s}{2}} \varepsilon_x \sigma_x^{piezo} dz + \int_{-\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}} \varepsilon_x \sigma_x^{frac} dz + \int_{\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2} + h_p} \varepsilon_x \sigma_x^{piezo} dz \right) dx dt = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \delta \frac{1}{2} \int_0^L b \left[\int_{-h_p - \frac{h_s}{2}}^{-\frac{h_s}{2}} w''_{(k)} z (c_{11}^E w''_{(k)} z - e_{31} E_3 (H(x-0) - H(x-L))) dz + \right. \\
&\quad + \int_{-\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}} w''_{(k)} z Y_s (1 + \tau_1^\alpha D^\alpha) w''_{(k)} z dz + \\
&\quad \left. + \int_{\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2} + h_p} w''_{(k)} z (c_{11}^E w''_{(k)} z + e_{31} E_3 (H(x-0) - H(x-L))) dz \right] dx dt = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \delta \frac{1}{2} \int_0^L \left[b \left(\int_{-h_p - \frac{h_s}{2}}^{-\frac{h_s}{2}} c_{11}^E z^2 dz + \int_{-\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}} Y_s z^2 dz + \int_{\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2} + h_p} c_{11}^E z^2 dz \right) w''_{(k)} \right]^2 + \\
&\quad + \left(b \int_{-\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}} Y_s z^2 dz \right) \tau_1^\alpha w''_{(k)} (w''_{(k)})^{(\alpha)} + \\
&\quad + \left(-b e_{31} E_3 \int_{-h_p - \frac{h_s}{2}}^{-\frac{h_s}{2}} z dz + b e_{31} E_3 \int_{\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2} + h_p} z dz \right) (H(x-0) - H(x-L)) w''_{(k)} \Big] dx dt = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L Y I_k w''_{(k)} \delta w''_{(k)} dx + \int_0^L c_s \tau_1^\alpha w''_{(k)}^{(\alpha)} \delta w''_{(k)} dx + \right. \\
&\quad + \int_0^L \frac{e_{31} b}{2} (h_p^2 + h_s h_p) E_3 (H(x-0) - H(x-L)) \delta w''_{(k)} dx \Big] dt = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L \left(Y I_k w'''_{(k)} + c_s \tau_1^\alpha w'''_{(k)}^{(\alpha)} \frac{e_{31} b}{2} (h_p^2 + h_s h_p) E_3 ((H''(x-0) - H''(x-L))) \right) \delta w_{(k)} dx + \right. \\
&\quad + \left(Y I_k w''_{(k)} + c_s \tau_1^\alpha w''_{(k)}^{(\alpha)} + \frac{e_{31} b}{2} (h_p^2 + h_s h_p) E_3 (H(x-0) - H(x-L)) \right) \delta w'_{(k)} \Big|_0^L - \\
&\quad \left. - \left(Y I_k w'''_{(k)} + c_s \tau_1^\alpha w'''_{(k)}^{(\alpha)} + \frac{e_{31} b}{2} (h_p^2 + h_s h_p) E_3 (H'(x-0) - H'(x-L)) \right) \delta w_{(k)} \Big|_0^L \right] dt, \\
\int_{t_1}^{t_2} \delta W dt &= \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \delta \int_0^L \left(\kappa_{k-1} (1 + \tau_2^\beta D^\beta) (w_{(k)} - w_{(k-1)}) - \kappa_k (1 + \tau_2^\beta D^\beta) (w_{(k+1)} - w_{(k)}) - \rho_k A_k g \right) w_{(k)} dx dt = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\kappa_{k-1} (1 + \tau_2^\beta D^\beta) (w_{(k)} - w_{(k-1)}) - \kappa_k (1 + \tau_2^\beta D^\beta) (w_{(k+1)} - w_{(k)}) - \rho_k A_k g \right) \delta w_{(k)} dx dt,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

где је искоришћена нотација $(\bullet)' \equiv \frac{\delta}{\delta x}(\bullet)$ и $(\bullet)^{(\alpha)} \equiv D^\alpha(\bullet)$. Потребно је напоменути и да је приликом варијације потенцијалне енергије код члана који представља електромеханичко спрезање, односно утицај присутног електричног поља $E(t)$ на деформацију греде, уведено и просторно одређење области дејства електричног поља, и то применом Хевисајдових функција $H(x)$, што је стандардна процедура у литератури [1]. Тиме се обезбеђује да и овај члан остане присутан након просторне диференцијације израза приликом парцијалне интеграције. Такође, напомиње се да је први извод Хевисајдове функције заправо Диракова делта функција, односно:

$$H'(x) = \delta(x). \quad (3.30)$$

Поред тога, у једначинама (3.29) уведене су и ознаке:

$$YI_k = b \left(\int_{-h_p - \frac{h_s}{2}}^{-\frac{h_s}{2}} c_{11}^E z^2 dz + \int_{-\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}} Y_s z^2 dz + \int_{\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2} + h_p} c_{11}^E z^2 dz \right) = \frac{2b}{3} \left[Y_s \left(\frac{h_s}{2} \right)^3 + c_{11}^E \left(\left(h_p + \frac{h_s}{2} \right)^3 - \left(\frac{h_s}{2} \right)^3 \right) \right],$$

$$c_s = b \int_{-\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}} Y_s z^2 dz = Y_s I_s, \quad (3.31)$$

где су Y_s и I_s релаксирани модуо еластичности материјала и момент инерције попречног пресека носећег дела биморфне греде, респективно.

Хамилтонов принцип (2.30) се коришћењем једначина (3.29) може изразити као:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L \left(\left(\rho_k A_k + \sum_{a=1}^{N_{m(k)}} m_a \delta(x - x_a) \right) \ddot{w}_{(k)} + c_s \tau_1^\alpha (w_{(k)}'''')^{(\alpha)} + YI_{(k)} w_{(k)}'''' + \right. \right. \\ \left. \left. + \kappa_{k-1} (1 + \tau_2^\beta D^\beta) (w_{(k)} - w_{(k-1)}) - \kappa_k (1 + \tau_2^\beta D^\beta) (w_{(k+1)} - w_{(k)}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \rho_k A_k g + \frac{e_{31} b}{2} (h_p^2 + h_s h_p) E_3 (\delta'(x - 0) - \delta'(x - L)) \right) dx \delta w_{(k)} + \right. \\ \left. + \left(YI_k w_{(k)}'' + c_s \tau_1^\alpha w_{(k)}''^{(\alpha)} + \frac{e_{31} b}{2} (h_p^2 + h_s h_p) E_3 (H(x - 0) - H(x - L)) \right) \delta w_{(k)} \Big|_0^L - \right. \\ \left. - \left(YI_k w_{(k)}'' + c_s \tau_1^\alpha w_{(k)}''^{(\alpha)} + \frac{e_{31} b}{2} (h_p^2 + h_s h_p) E_3 (\delta(x - 0) - \delta(x - L)) \right) \delta w_{(k)} \Big|_0^L \right] dt = 0, \\ k = 1, 2, \dots, N_b.$$

Одавде се директно добија систем диференцијалних једначина кретања ПЕДА у облику:

$$\left(\rho_k A_k + \sum_{a=1}^{N_{m(k)}} m_a \delta(x - x_a) \right) \ddot{w}_{(k)} + c_s \tau_1^\alpha (w_{(k)}'''')^{(\alpha)} + YI_{(k)} w_{(k)}'''' + \kappa_{k-1} (1 + \tau_2^\beta D^\beta) (w_{(k)} - w_{(k-1)}) - \\ - \kappa_k (1 + \tau_2^\beta D^\beta) (w_{(k+1)} - w_{(k)}) - \rho_k A_k g + \frac{e_{31} b}{2} (h_p^2 + h_s h_p) E_3 (\delta'(x - 0) - \delta'(x - L)) = 0, \\ k = 1, 2, \dots, N_b, \quad (3.33)$$

уз граничне услове:

$$\begin{aligned} \left(Y I_k w''_{(k)} + c_s \tau_1^\alpha w''_{(k)}^{(\alpha)} \right) \delta w'_{(k)} \Big|_0^L &= 0, \\ \left(Y I_k w'''_{(k)} + c_s \tau_1^\alpha w'''_{(k)}^{(\alpha)} \right) \delta w_{(k)} \Big|_0^L &= 0 \quad k = 1, 2, \dots, N_b. \end{aligned} \quad (3.34)$$

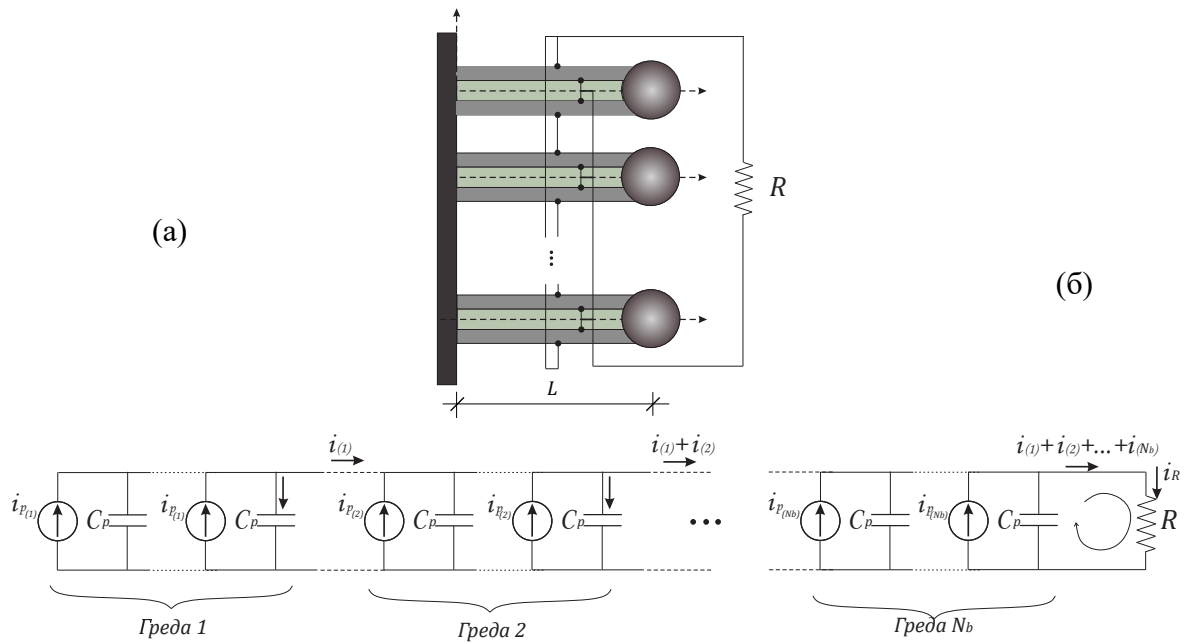
Једначинама (3.33) и (3.34) уз одговарајуће почетне услове одређено је механичко понашање система. Међутим, с обзиром на то да су пијезоелектрични слојеви биморфних греда система повезани у електрично коло отпорности R , поменути једначинама је потребно придружити и једначину електричног кола како би проблем био у потпуности одређен. Стога ће у наставку текста бити изведена и једначина електричног кола за систем повезаних биморфних греда, коришћењем замењујућег струјног кола како је описано на примеру једне биморфне греде у Поглављу 3.1.1.3. С обзиром на то да су у конструкцији ПЕДА која се овде предлаже, пијезо-слојеви биморфних греда у електрично коло повезани паралелно, то ће и једначина електричног кола бити изведена за овај случај, уз напомену да се приказани поступак може применити и на случај редне или мешовите везе пијезо-слојева, уколико се замењујуће струјно коло формира на одговарајућ начин.

3.3.2 Једначина електричног кола за систем биморфних греда са паралелном везом пијезо-слојева

Систем повезаних биморфних греда са паралелном везом пијезо-слојева и одговарајуће замењујуће електрично коло приказани су на Слици 3.7. У складу са напоменама изнетим у Поглављу 3.1.1.3, сваки пијезо-слој се у замењујућем електричном колу представља у виду кондензатора капацитивности C_p и извора електричне струје јачине i_p , при чему је потребно да важе релације:

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{\bar{\epsilon}_{33}^s b L}{h_p}, \\ i_{p(k)} &= -e_{31} b h_{pc} \int_0^L \dot{w}''_{(k)} dx. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Пошто су сви пијезо-слојеви повезани паралелно, на свим електродама влада исти напон v , док ће се јачина струје разликовати од греде до греде. Такође, у пијезо-слојевима једне исте биморфне греде ће се јавити струја исте јачине $i_{p(k)}^{gornje} = i_{p(k)}^{donje} = i_{p(k)}$, $k = 1, 2 \dots N_b$, док ће се, у општем случају, услед различите деформације појединих греда, јачина произведене струје разликовати у слојевима различитих греда, тј. у општем случају биће $i_{p(1)} \neq i_{p(2)} \neq \dots \neq i_{p(N_b)}$. Са друге стране, ако су сви пијезо-слојеви сачињени од материјала истих својстава, ефективна капацитивност сваког слоја биће иста, односно $C_{p(1)}^{gornje} = C_{p(1)}^{donje} = C_{p(2)}^{gornje} = C_{p(2)}^{donje} = \dots = C_{p(N_b)}^{donje} = C_p$. Имајући то у виду, очигледно је да ће свака греда, према првом Кирхофовом правилу, укупном струјном току у колу придодати струју јачине $i_{(k)} = 2(i_{p(k)} - i_C) = 2(i_{p(k)} - C_p v)$, као и да ће укупна јачина



Слика 3.7 Биморфна греда са паралелном везом пијезо-слојева и одговарајуће замењујуће струјно коло

струје која пролази кроз отпорник бити једнака:

$$i_R = \sum_{k=1}^{N_b} i_{(k)} = 2 \sum_{k=1}^{N_b} \left(i_{p(k)} - C_p \dot{v} \right) . \quad (3.36)$$

Ако се узме у обзир да ће друго Кирхофово правило исписано за контуру I електричног кола на Слици 3.7 дати:

$$v_R - v_C = 0 \quad \Rightarrow \quad v_C = v_R = v , \quad (3.37)$$

јасно је да ће Омов закон исписан за отпорник гласити:

$$I_R = \frac{v_R}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{R} = 2 \sum_{k=1}^{N_b} \left(i_{p(k)} - C_p \dot{v} \right) , \quad (3.38)$$

чиме се добија тражена електрична једначина у облику:

$$N_b C_p \dot{v} + \frac{1}{2R} v - \sum_{k=1}^{N_b} i_{p(k)} = 0 , \quad (3.39)$$

где, као и до сада, за сваку од греда и даље важе релације (3.15), односно:

$$C_p = \frac{\bar{\epsilon}_{33}^s b L}{h_p} , \quad (3.40)$$

$$i_{p(k)} = -e_{31} b h_{pc} \int_0^L \dot{w}_{(k)}'' dx .$$

3.3.3 Решавање добијеног система једначина

За предложени модел динамичког апсорбера биће коришћена паралелна веза пијезо-слојева биморфних греда, тако да ће све једначине у наставку овог поглавља бити изведене за тај случај. Притом се напомиње да, уколико се користи редна или мешовита веза пијезо-слојева, поступак решавања једначина остаје принципијелно исти, али се мењају изрази за јачину електричног поља и електрични напон на електродама појединих пијезо-слојева, па би, у том случају, требало прилагодити једначине. Дакле, за паралелну везу пијезо-слојева, у слојевима различитих греда протицаће електрична струја различите јачине $i_{p(k)}(t)$, али ће притом на свим електродама владати исти електрични напон $v(t)$, а како је усвојено да су сви пијезо-слојеви исте дебљине h_p , то ће у сваком слоју важити:

$$E(t) = \frac{v(t)}{h_p}. \quad (3.41)$$

Поређења ради, у случају редне везе два пијезо-слоја ова једначина би гласила $E(t) = \frac{v(t)}{2h_p}$, док би у сваком од слојева протицала електрична струја исте јачине $i_R(t)$, али би се електрични напон $v_{(k)}(t)$ разликовао од греде до греде.

За овде разматрани случај паралелне везе пијезоелектричних слојева, диференцијална једначина кретања греда система дата је једначином (3.33) која, имајући у виду једначину (3.41) постаје:

$$\left(\rho_k A_k + \sum_{a=1}^{N_{m(k)}} m_a \delta(x - x_a) \right) \ddot{w}_{(k)} + c_s \tau_1^\alpha (w_{(k)}''''^{(\alpha)}) + Y I_{(k)} w_{(k)}'''' + \kappa_{k-1} (1 + \tau_2^\beta D^\beta) (w_{(k)} - w_{(k-1)}) - \kappa_k (1 + \tau_2^\beta D^\beta) (w_{(k+1)} - w_{(k)}) - \rho_k A_k g - \vartheta v (\delta'(x - 0) - \delta'(x - L)) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N_b, \quad (3.42)$$

уз граничне услове:

$$\begin{aligned} x = 0 : w_{(k)}(0, t) &= w_b(t), & w'_{(k)}(0, t) &= 0, \\ x = L : Y I_k w_{(k)}''(L, t) + c_s \tau_1^\alpha w_{(k)}''^{(\alpha)}(L, t) &= 0, & Y I_k w_{(k)}'''(L, t) + c_s \tau_1^\alpha w_{(k)}'''^{(\alpha)}(L, t) &= 0, \end{aligned} \quad (3.43)$$

где је уведена ознака:

$$\vartheta = e_{31} b h_{pc}, \quad (3.44)$$

а $h_{pc} = \frac{h_s}{2} + \frac{h_p}{2}$, како је раније већ напоменуто.

За разматрани случај, електрична једначина имаће облик (3.39), као што је изведено у претходном поглављу, а овде ће бити поновљена ради прегледности:

$$N_b C_p \dot{v} + \frac{1}{2R} v + \sum_{k=1}^{N_b} \vartheta \int_0^L \dot{w}_{(k)}'' dx = 0. \quad (3.45)$$

Као што је описано у Поглављу 2, гранични услови (3.43) се могу хомогенизовати уколико се апсолутна померања $w_{(k)}(x, t)$ прикажу као суперпозиција кретања греде као

крутог тела и релативних померања тачака греде у односу на укљештени крај, односно:

$$w_{(k)}(x, t) = w_b(t) + w_{rel(k)}(x, t). \quad (3.46)$$

Тада систем једначина (3.42) прелази у:

$$\begin{aligned} & \left(\rho_k A_k + \sum_{a=1}^{N_{m(k)}} m_a \delta(x - x_a) \right) \ddot{w}_{rel(k)} + c_s \tau_1^\alpha (w_{rel(k)}'''')^{(\alpha)} + Y I_k w_{rel(k)}'''' - \\ & - \kappa_{k-1} (1 + \tau_2^\beta D^\beta) (w_{rel(k)} - w_{rel(k-1)}) + \kappa_k (1 + \tau_2^\beta D^\beta) (w_{rel(k+1)} - w_{rel(k)}) - \\ & - \vartheta_V (\delta'(x - 0) - \delta'(x - L)) = F_{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N_b, \end{aligned} \quad (3.47)$$

где је уведена ознака:

$$F_{(k)} = F_{(k)}(x, t) = \rho_k A_k g - \left(\rho_k A_k + \sum_{a=1}^{N_{m(k)}} m_a \delta(x - x_a) \right) \dot{w}_b, \quad (3.48)$$

уз граничне услове:

$$\begin{aligned} x = 0 : w_{rel(k)}(0, t) = 0, & \quad w'_{rel(k)}(0, t) = 0 \\ x = L : Y I_k w_{rel(k)}''(L, t) + c_s \tau_1^\alpha w_{rel(k)}''^{(\alpha)}(L, t) = 0, & \quad Y I_k w_{rel(k)}''''(L, t) + c_s \tau_1^\alpha w_{rel(k)}''''^{(\alpha)}(L, t) = 0, \end{aligned} \quad (3.49)$$

и једначину електричног кола:

$$N_b C_p \dot{v} + \frac{1}{2R} v + \sum_{k=1}^{N_b} \vartheta \int_0^L \dot{w}_{rel(k)}'' dx = 0. \quad (3.50)$$

3.3.4 Галеркинов апроксимативни метод

Са тренутним рачунарским капацитетима, тачно решење за проблем са више додатих концентрисаних маса на гредама са порастом броја додатих маса брзо постаје превише сложено за практичну примену и решавање једначина у реалном времену. Стога ће бити употребљена Галеркинова аналитичка апроксимативна метода отежаног остатка, па ће релативна померања тачака реда у односу на укљештени крај бити апроксимирана коначним редовима:

$$w_{rel(k)}(x, t) \approx \sum_{i=1}^n \phi_{(k)i}(x) q_{(k)i}(t), \quad (3.51)$$

где су $\phi_{(k)i}(x)$ помоћне, пробне функције, а $q_{(k)i}(t)$ непознате временске функције које треба одредити. Код Галеркинове методе, пробне функције се могу бирати произвољно, али из скупа "компаративних" функција (*eng comparisson functions*), односно функција које на границама домена строго задовољавају постављене граничне услове и које су међусобно ортогоналне. Пошто је у анализи која се овде приказује утицај додатих концентрисаних маса на гредама уведен преко Диракових делта функција, као пробне функције за Галеркинову апроксимацију биће коришћене функције облика тонова осциловања *празних греда*,

односно одговарајућих греда без додатих концентрисаних маса [161]:

$$\phi_{(k)i}(x) = \sqrt{\frac{1}{\rho_k A_k L}} \left(\cos \bar{\beta}_i x - \cosh \bar{\beta}_i x + \frac{\cos \bar{\beta}_i L + \cosh \bar{\beta}_i L}{\sin \bar{\beta}_i L + \sinh \bar{\beta}_i L} (\sin \bar{\beta}_i x - \sinh \bar{\beta}_i x) \right), \quad (3.52)$$

при чему је:

$$\bar{\beta}_i^4 = \bar{\omega}_{(k)i}^2 \frac{\rho_k A_k}{Y I_k}, \quad (3.53)$$

i -ти бездимензијски параметар фреквенце, а $\bar{\omega}_{(k)i}$ је i -та сопствена фреквенца k -те греде кад она не би имала додате концентрисане масе. Бездимензиони фреквентни параметри $\bar{\beta}_i$ су заправо корени фреквентне једначине, која за празну конзолну греду [161] (без додатих концентрисаних маса) има облик:

$$1 + \cos \bar{\beta}_i L \cosh \bar{\beta}_i L = 0. \quad (3.54)$$

Овако дефинисане функције задовољавају граничне услове за $x = 0$ и $x = L$, и притом су међусобно ортонормиране у односу на масу греде, што је обезбеђено константом $\sqrt{\frac{1}{\rho_k A_k L}}$, односно важи:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho_k A_k \phi_{(k)i}(x) \phi_{(k)j}(x) dx &= \delta_{ij}, \\ \int_0^L Y I_k \phi_{(k)i}''(x) \phi_{(k)j}''(x) dx &= \bar{\omega}_{(k)i}^2 \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.55)$$

где је δ_{ij} Кронекеров делта симбол. Треба још напоменути и то да ће у оквиру модела ПЕ-ДА који се разматра у овој дисертацији, будући да све греде система имају исте граничне услове, за сваку од греда система бити коришћен исти скуп пробних функција. Међутим, ради очувања општости, у наредном тексту ће једначине бити изведене за случај да се за различите греде користе различити скупови пробних функција, а у нумеричким анализама датим у наредним поглављима биће изричито наведено о којим се пробним функцијама ради и како се овде приказани изрази поједностављују за сваки од тих посебних случајева.

Увођењем описане апроксимације, разматрани полазни систем једначина прелази у:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\rho_k A_k + \sum_{a=1}^{N_{m(k)}} m_a \delta(x - x_a) \right) \phi_{(k)i} \ddot{q}_{(k)i} + \sum_{i=1}^n c_s \tau_1^\alpha \phi_{(k)i}''' q_{(k)i}^{(\alpha)} + \sum_{i=1}^n Y I_k \phi_{(k)i}''' q_{(k)i} + \\ + \sum_{i=1}^n \kappa_{k-1} (1 + \tau_2^\beta D^\beta) (\phi_{(k)i} q_{(k)i} - \phi_{(k-1)i} q_{(k-1)i}) - \\ - \sum_{i=1}^n \kappa_k (1 + \tau_2^\beta D^\beta) (\phi_{(k+1)i} q_{(k+1)i} - \phi_{(k)i} q_{(k)i}) - \\ - \vartheta v (\delta'(x - 0) - \delta'(x - L)) - F_{(k)} = R_{(k)}^* \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, N_b, \end{aligned} \quad (3.56)$$

где је са $R_{(k)}^* \neq 0$ означен остатак, тј. грешка апроксимације.

Постављајући услов да укупан отежани остатак, тј. одступање од тачног решења, на

целом домену греде буде једнак нули, свака од једначина система (3.56) се помножи сукцесивно сваком од n пробних функција $\phi_{(k)j}(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$ и интегрални у границама $[0, L]$, чиме се за сваку од N_b греда система добија систем од n једначина, и то:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \int_0^L \left(\rho_k A_k + \sum_{a=1}^{N_m(k)} m_a \delta(x - x_a) \right) \phi_{(k)i} \phi_{(k)j} dx \ddot{q}_{(k)i} + \\
& + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^L c_s \tau_1^\alpha \phi_{(k)i}'''' \phi_{(k)j} dx \right) q_{(k)i}^{(\alpha)} + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^L Y I_k \phi_{(k)i}'''' \phi_{(k)j} dx \right) q_{(k)i} - \\
& - \sum_{i=1}^n \left(\int_0^L \kappa_{k-1} \phi_{(k-1)i} \phi_{(k)j} dx \right) (1 + \tau_2^\beta D^\beta) q_{(k-1)i} + \\
& + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^L (\kappa_{k-1} + \kappa_k) \phi_{(k)i} \phi_{(k)j} dx \right) (1 + \tau_2^\beta D^\beta) q_{(k)i} - \\
& - \sum_{i=1}^n \left(\int_0^L \kappa_k \phi_{(k+1)i} \phi_{(k)j} dx \right) (1 + \tau_2^\beta D^\beta) q_{(k+1)i} - \\
& - \left(\int_0^L \vartheta \phi_{(k)j} (\delta'(x-0) - \delta'(x-L)) dx \right) v - \left(\int_0^L F_{(k)} \phi_{(k)j} dx \right) = 0, \\
& \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
& \quad k = 1, 2, \dots, N_b,
\end{aligned} \tag{3.57}$$

који се матрично може представити као:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{M}^{(k)}_k] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_{k-1} \\ \ddot{\mathbf{q}}_k \\ \ddot{\mathbf{q}}_{k+1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{C}_{\alpha^{(k)}}_k] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} D^\alpha \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{k-1} \\ \mathbf{q}_k \\ \mathbf{q}_{k+1} \end{Bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} [\mathbf{C}_{\beta^{(k)}}_{k-1}] & [\mathbf{C}_{\beta^{(k)}}_k] & [\mathbf{C}_{\beta^{(k)}}_{k+1}] \end{bmatrix} D^\beta \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{k-1} \\ \mathbf{q}_k \\ \mathbf{q}_{k+1} \end{Bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} [\mathbf{K}^{(k)}_{k-1}] & [\mathbf{K}^{(k)}_k] & [\mathbf{K}^{(k)}_{k+1}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{k-1} \\ \mathbf{q}_k \\ \mathbf{q}_{k+1} \end{Bmatrix} = \mathbf{f}_k, \\
& \quad k = 1, 2, \dots, N_b.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

За усвојене пробне функције, дате једначином (3.52), елементи матрица у једначини

(3.58) се могу одредити као:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{M}^{(k)k}]_{ij} &= \int_0^L \left(\rho_k A_k + \sum_a^{N_{m(k)}} m_{(k)a} \delta(x - x_{(k)a}) \right) \phi_{(k)i}(x) \phi_{(k)j}(x) dx = \\
&= \begin{cases} 1 + \sum_a^{N_{m(k)}} m_{(k)a} \phi_{(k)i}^2(x_{(k)a}) & \text{за } i = j \\ \sum_a^{N_{m(k)}} m_{(k)a} \phi_{(k)i}(x_{(k)a}) \phi_{(k)j}(x_{(k)a}) & \text{за } i \neq j \end{cases}, \\
[\mathbf{C}_{\alpha(k)k}]_{ij} &= \int_0^L \tau_1^\alpha Y_s I_s \phi_{(k)i}'''(x) \phi_{(k)j}(x) dx = \begin{cases} \tau_1^\alpha \bar{\omega}_{(k)i}^2 & \text{за } i = j \\ 0 & \text{за } i \neq j \end{cases}, \\
[\mathbf{C}_{\beta(k)k-1}]_{ij} &= - \int_0^L \tau_2^\beta \kappa_{(k-1)} \phi_{(k-1)i} \phi_{(k)j} dx = \begin{cases} -\tau_2^\beta \frac{\kappa_{(k-1)}}{\sqrt{\rho_{k-1} A_{k-1}} \sqrt{\rho_k A_k}} & \text{за } i = j \\ 0 & \text{за } i \neq j \end{cases}, \\
[\mathbf{C}_{\beta(k)k}]_{ij} &= \int_0^L \tau_2^\beta (\kappa_{(k)} + \kappa_{(k-1)}) \phi_{(k)i} \phi_{(k)j} dx = \begin{cases} \tau_2^\beta \frac{(\kappa_{(k)} + \kappa_{(k-1)})}{\rho_k A_k} & \text{за } i = j \\ 0 & \text{за } i \neq j \end{cases}, \\
[\mathbf{C}_{\beta(k)k+1}]_{ij} &= - \int_0^L \tau_2^\beta \kappa_k \phi_{(k+1)i} \phi_{(k)j} dx = \begin{cases} -\tau_2^\beta \frac{\kappa_{(k)}}{\sqrt{\rho_k A_k} \sqrt{\rho_{k+1} A_{k+1}}} & \text{за } i = j \\ 0 & \text{за } i \neq j \end{cases}, \\
[\mathbf{K}^{(k)k-1}]_{ij} &= - \int_0^L \kappa_{(k-1)} \phi_{(k-1)i} \phi_{(k)j} dx = \begin{cases} -\frac{\kappa_{(k-1)}}{\sqrt{\rho_{k-1} A_{k-1}} \sqrt{\rho_{k-1} A_{k-1}}} & \text{за } i = j \\ 0 & \text{за } i \neq j \end{cases}, \\
[\mathbf{K}^{(k)k}]_{ij} &= \int_0^L Y I_k \phi_{(k)i}'''(x) \phi_{(k)j}(x) dx + (\kappa_k + \kappa_{k-1}) \int_0^L \phi_{(k)i} \phi_{(k)j} dx = \\
&= \begin{cases} \bar{\omega}_{(k)i}^2 + \frac{(\kappa_{(k)} + \kappa_{(k-1)})}{\rho_k A_k} & \text{за } i = j \\ 0 & \text{за } i \neq j \end{cases}, \\
[\mathbf{K}^{(k)k+1}]_{ij} &= - \int_0^L \kappa_{(k)} \phi_{(k-1)i} \phi_{(k)j} dx = \begin{cases} -\frac{\kappa_{(k)}}{\sqrt{\rho_k A_k} \sqrt{\rho_k A_{k+1}}} & \text{за } i = j \\ 0 & \text{за } i \neq j \end{cases}, \\
\{\boldsymbol{\chi}_k\}_j &= \vartheta \int_0^L \phi_{(k)j} (\delta'(x-0) - \delta(x-L)) dx = \vartheta \int_0^L \phi dx''_{(k)j}(x)_{(k)} dx, \\
\{\mathbf{f}_k\}_j &= f_{(k)j}(t) = \int_0^L f_{(k)}(x, t) \phi_{(k)j}(x) dx + \int_0^L F_{(k)}(x, t) \phi_{(k)j}(x) dx, \\
\{\mathbf{q}_k\}_j &= q_{(k)j}(t) \Leftrightarrow \mathbf{q}_k^T = [q_{(k)1}, q_{(k)2}, \dots, q_{(k)n}], \\
i &= 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, N_b.
\end{aligned} \tag{3.59}$$

разматраног система повезаних биморфних пијезоелектричних греда.

Међутим, због присутног електро-механичког спрезања, као и спрезања између појединих временских функција у Галеркиновој апроксимацији померања греда, овако добијен систем фракционих диференцијалних једначина не може се у општем случају решити директно, односно није могуће извршити дијагонализацију матрица система. Стога ће најпре фракциони изводи који фигуришу у једначини (3.60) бити апроксимирани преко целобројних извода, а онда ће за решавање целокупног система једначина, укључујући и једначину за електрично коло, бити примењена Њумаркова нумеричка метода, као што је описано у наставку текста.

3.4 Апроксимација фракционог извода

За решавање система једначина изведеног у Поглављу 3.3.1 биће коришћен поступак који су предложили Евангелатос и Спанос (Evangelatos, Spanos) [182], а који се заснива на коришћењу Гринвалд-Летњиковљеве дефиниције фракционог извода и његове апроксимације околним изводима целобројног реда, чиме се систем фракционих, своди на систем обичних диференцијалних једначина. Овај систем једначина се потом може решити применом Њумаркове методе за директну нумеричку интеграцију у разматраном временском домену.

Ради прегледности, овде ће бити поновљена Гринвалд-Летњиковљева дефиниција фракционог извода дата у Поглављу 2:

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = t - a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n_h \rightarrow \infty} (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh), \quad (3.63)$$

уз $p \in \mathbb{R}$ и $m < p < m + 1$.

Уколико се за леви терминал узме почетни тренутак, тј. $a = 0$, а разматрани временски домен се подели на коначан број сегмената трајања h , вредност фракционог извода реда α за временску функцију $q(t)$ се нумерички може одредити као:

$${}_0 D_t^\alpha q(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ N_{GL} h = t - 0}} h^{-\alpha} \sum_{r=0}^{N_{GL}} (-1)^r \binom{\alpha}{r} q(t - rh) \approx \sum_{r=0}^{N_{GL}} \frac{1}{h^\alpha} GL_r q(t - rh), \quad (3.64)$$

где је N_{GL} број чланова у наведеној суми којом се одређује нумеричка вредност Гринвалд-Летњиковљевог фракционог извода.

Имајући у виду да је формула за биномни коефицијент:

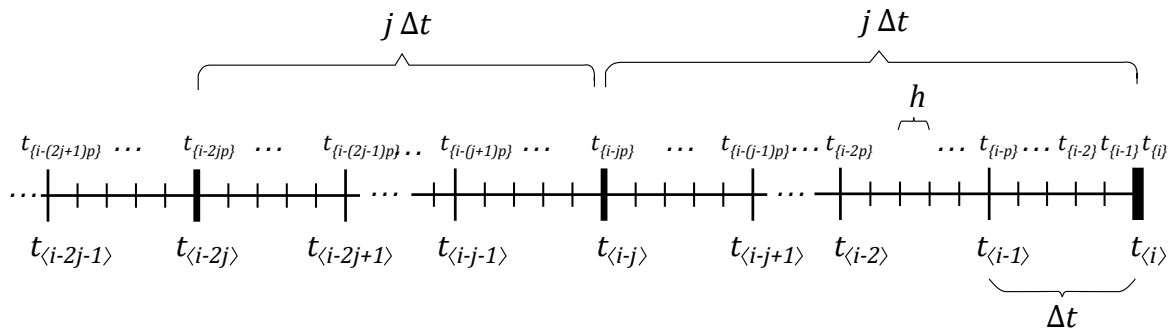
$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)}{r!}, \quad (3.65)$$

јасно је да се Гринвалд-Летњиковљеви коефицијенти GL_r , $r = 1, 2, \dots, N_{GL}$ могу срачу-

нати као:

$$GL_r = \begin{cases} 1, & r = 0 \\ -\alpha, & r = 1 \\ \frac{r-\alpha-1}{r} GL_{r-1}, & r = 2, 3, \dots, N_{GL} \end{cases}. \quad (3.66)$$

Суштина метода који су предложили Евангелатос и Спанос састоји се у примени двоструке дискретизације временског домена. Наиме, за довољно тачну апроксимацију фракционог извода потребно је узети релативно врло фину поделу временског домена, односно релативно малу вредност интервала h . Међутим, у циљу побољшања нумеричке ефикасности прорачуна, поменути аутори предложили су да се за нумеричку интеграцију користи друга, грубља дискретизација временског домена, као што је приказано на Слици 3.8.



Слика 3.8 Шематски приказ двоструке дискретизације временског домена, предложеног од стране Евангелатоса и Спаноса

У тренутку $t_{\langle i \rangle}$ свака од разматраних временских функција се развије у Тејлоров ред унатраг, узимајући у обзир грубљу дискретизацију времена, на интервалу Δt . Величина овог грубљег временског корака се усваја тако да важи:

$$\Delta t \leq \frac{T}{10}, \quad (3.67)$$

где је T основни период осциловања еквивалентног еластичног система за разматрани систем. Притом је потребно да однос грубог и финог корака буде у границама:

$$\frac{\Delta t}{h} = p \approx 5 \div 20. \quad (3.68)$$

Када се функција развије у Тејлоров ред унатраг у тренутку $t_{\langle i \rangle}$, узима се да тај ред даје довољно добру апроксимацију у претходних j грубих корака Δt . Након тога, у тренутку $t_{\langle i-j \rangle}$, потребно је поново развити функцију у Тејлоров ред унатраг, при чему ће тај ред дати довољно добру апроксимацију све до тренутка $t_{\langle i-2j \rangle}$, када је потребно поново развити функцију и тако даље, на сваких j корака, све док се не узме у обзир довољно дуга историја оптерећења да би се фракциони извод у тренутку $t_{\langle i \rangle}$ апроксимирао са задовољавајућом тачношћу.

Теоретски гледано, по дефиницији фракционог извода [160] требало би узети у обзир

целокупну историју процеса од тренутка $t \rightarrow -\infty$. Према томе, у нумеричким прорачунима, што се дужа историја узме у обзир, то се апроксимативно решење више приближава тачном решењу. Тако на пример, ако би се у тренутку $t_{\langle i \rangle}$ посматрала само историја процеса на претходном интервалу $j\Delta t$ на којем развој у Тејлоров ред у тренутку $t_{\langle i \rangle}$ даје довољно добру апроксимацију, фракциони извод у том тренутку био би апроксимиран са свега $N_{GL} = jp$ Гринвалд-Летњиковљевих коефицијената у изразу (3.64), што не даје задовољавајућу тачност апроксимације [182]. Стога је потребно узети у обзир више таквих интервала $jph \equiv j\Delta t$, чиме се уводи неопходна корекција у апроксимацију.

Нека је за довољно добру апроксимацију фракционог извода у тренутку $t_{\langle i \rangle}$ потребно узети у обзир претходних $N_c + 1$ интервала $j\Delta t$, односно посматрати историју у укупном трајању од $(N_c + 1)j\Delta t \equiv (N_c + 1)jph$. То значи да је потребно посматрати почетни, нулти интервал апроксимације, и још N_c додатних, корекционих интервала. Према томе, у изразу (3.64) ће фракциони извод бити апроксимиран са укупно $N_{GL} = (N_c + 1)jp$ Гринвалд-Летњиковљевих коефицијената, од којих ће се првих jp коефицијената односити на временски интервал $[t_{\langle i \rangle} - j\Delta t, t_{\langle i \rangle}]$, других jp на интервал $[t_{\langle i \rangle} - 2j\Delta t, t_{\langle i \rangle} - j\Delta t]$, и тако редом, све до последњег уведеног корекционог интервала $[t_{\langle i \rangle} - N_c j\Delta t, t_{\langle i \rangle} - (N_c - 1)j\Delta t]$. При решавању практичних проблема, углавном је довољно узети $N_c = 3 \div 10$ [182].

Ако се приликом апроксимације у сваком посматраном тренутку $t_{\langle i \rangle}$ за дискретизацију временског домена усвоје увек исте вредности h и Δt , могу се унапред одредити вектори апроксимације који ће бити исти у сваком од посматраних тренутака времена, чиме се поступак прорачуна даље поједностављује и убрзава.

Наиме, у тренутку $t_{\langle i \rangle}$ временска функција $q(t)$ се може развити у Тејлоров ред унатраг као:

$$\begin{aligned}
 q(t_{\langle i \rangle} - h) &\equiv q(t_{\langle i-1 \rangle}) \equiv q_{\langle i-1 \rangle} \approx q_{\langle i \rangle} - h\dot{q}_{\langle i \rangle} + \frac{h^2}{2!}\ddot{q}_{\langle i \rangle} + \dots \\
 q(t_{\langle i \rangle} - 2h) &\equiv q(t_{\langle i-2 \rangle}) \equiv q_{\langle i-2 \rangle} \approx q_{\langle i \rangle} - 2h\dot{q}_{\langle i \rangle} + \frac{(2h)^2}{2!}\ddot{q}_{\langle i \rangle} + \dots \\
 &\vdots \\
 q(t_{\langle i \rangle} - (jp - 1)h) &\equiv q(t_{\langle i-(jp-1) \rangle}) \equiv q_{\langle i-(jp-1) \rangle} \approx q_{\langle i \rangle} - (jp - 1)h\dot{q}_{\langle i \rangle} + \frac{(jp - 1)^2 h^2}{2!}\ddot{q}_{\langle i \rangle} + \dots,
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

где је у индексима коришћена ознака $\langle \bullet \rangle$ за обележавање тренутака уколико се користи фина подела, а $\langle \bullet \rangle$ за обележавање тренутака времена уколико се користи груба подела временског домена. Тако се, на пример, вредност функције $q(t)$ у једном истом тренутку времена $t_{\langle i \rangle} - 2\Delta t \equiv t_{\langle i \rangle} - 2ph$ може означити као $q(t_{\langle i \rangle} - 2\Delta t) \equiv q(t_{\langle i \rangle} - 2ph) \equiv q_{\langle i-2p \rangle} \equiv q_{\langle i-2 \rangle}$, Слика 3.8, и тако редом, аналогно, и за све остале посматране тренутке времена.

Наведена апроксимација важи све до тренутка $t_{\langle i-j \rangle}$, када се функција поново мора развити у Тејлоров ред унатраг, али овог пута користећи вредности функције и њених

извода у том тренутку, односно биће:

$$\begin{aligned}
q(t_{\langle i \rangle} - jph) &\equiv q(t_{\{i-jp\}}) \equiv q(t_{\langle i-j \rangle}) \equiv q_{\langle i-j \rangle}, \\
q(t_{\langle i \rangle} - (jp+1)h) &\equiv q(t_{\{i-jp-1\}}) \equiv q_{\{i-jp-1\}} \approx q_{\langle i-j \rangle} - h\dot{q}_{\langle i-j \rangle} + \frac{h^2}{2!}\ddot{q}_{\langle i-j \rangle} + \dots, \\
q(t_{\langle i \rangle} - (jp+2)h) &\equiv q(t_{\{i-jp-2\}}) \equiv q_{\{i-jp-2\}} \approx q_{\langle i-j \rangle} - 2h\dot{q}_{\langle i-j \rangle} + \frac{(2h)^2}{2!}\ddot{q}_{\langle i-j \rangle} + \dots, \\
&\vdots \\
q(t_{\langle i \rangle} - (2jp-1)h) &\equiv q(t_{\{i-(2jp-1)\}}) \equiv q_{\{i-(2jp-1)\}} \approx q_{\langle i-j \rangle} - (jp-1)h\dot{q}_{\langle i-j \rangle} + \frac{(jp-1)^2h^2}{2!}\ddot{q}_{\langle i-j \rangle} + \dots,
\end{aligned} \tag{3.70}$$

и ова апроксимација ће важити све до тренутка $t_{\langle i \rangle} - 2jph$ када је поново потребно развити функцију у Тејлоров ред, сада користећи вредности функције и њених извода у том тренутку и тако редом, N_c пута, све док се не апроксимира цела разматрана прошлост за тренутак $t_{\langle i \rangle}$.

Једначине (3.69) и (3.70) могу се представити матрично као:

$$\begin{bmatrix} q(t_{\langle i \rangle}) \\ q(t_{\langle i \rangle} - h) \\ q(t_{\langle i \rangle} - 2h) \\ \vdots \\ q(t_{\langle i \rangle} - (jp-1)h) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} q_{\{i\}} \\ q_{\{i-1\}} \\ q_{\{i-2\}} \\ \vdots \\ q_{\{i-(jp-1)\}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -h & h^2/2 \\ 1 & -2h & (2h)^2/2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -(jp-1)h & \frac{(jp-1)^2h^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{\langle i \rangle} \\ \dot{q}_{\langle i \rangle} \\ \ddot{q}_{\langle i \rangle} \end{bmatrix}, \tag{3.71}$$

$$\begin{bmatrix} q(t_{\langle i \rangle} - jph) \\ q(t_{\langle i \rangle} - (jp+1)h) \\ q(t_{\langle i \rangle} - (jp+2)h) \\ \vdots \\ q(t_{\langle i \rangle} - (2jp-1)h) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} q_{\{i-jp\}} \\ q_{\{i-jp-1\}} \\ q_{\{i-jp-2\}} \\ \vdots \\ q_{\{i-2jp+1\}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -h & h^2/2 \\ 1 & -2h & (2h)^2/2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -(jp-1)h & \frac{(jp-1)^2h^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{\langle i-j \rangle} \\ \dot{q}_{\langle i-j \rangle} \\ \ddot{q}_{\langle i-j \rangle} \end{bmatrix}, \tag{3.72}$$

а слични изрази се аналогно могу исписати и за све остале тренутке разматране историје у којима се анализирана функција развија у Тејлоров ред.

Може се закључити да матрица чланова развоја у Тејлоров ред:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -h & h^2/2 \\ 1 & -2h & (2h)^2/2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -(jp-1)h & \frac{(jp-1)^2h^2}{2} \end{bmatrix}, \tag{3.73}$$

даје везу између fine и грубе дискретизације временског домана и да важи на сваком од $(N_c + 1)$ интервала $j\Delta t$ посматране историје процеса. Такође, примећује се и да ова матрица реда $jp \times 3$ остаје иста за сваки посматрани тренутак времена, уколико се усвоји

хомогена дискретизација временског домена и задрже прва три члана у Тејлоровим редовима, односно уколико се усвоји квадратна апроксимација временских функција.

Као што је већ напоменуто, уколико се посматра укупна историја процеса у трајању од $(N_c + 1)j\Delta t$, она се може поделити на почетни, нулти интервал апроксимације, и на још N_c додатних, корекционих интервала. Тако се и Гринвалд-Летњиковљеви коефицијенти, којих укупно има $(N_c + 1)jp$, могу разврстати у векторе дужине jp , према интервалу којем припадају, односно:

$$\begin{aligned}\vec{GL}_0^\alpha &= \{GL_0^\alpha, GL_1^\alpha, \dots, GL_{jp-1}^\alpha\}, \\ \vec{GL}_1^\alpha &= \{GL_{jp}^\alpha, GL_{jp+1}^\alpha, \dots, GL_{2jp-1}^\alpha\}, \\ &\dots \\ \vec{GL}_{N_c}^\alpha &= \{GL_{(N_c-1)jp}^\alpha, GL_{(N_c-1)jp+1}^\alpha, \dots, GL_{N_cjp-1}^\alpha\}.\end{aligned}\tag{3.74}$$

Имајући све претходно наведено у виду, фракциони извод реда α функције $q(t)$ се у тренутку $t = t_{\langle i \rangle}$, исказан једначином (3.64), може приказати као:

$$\begin{aligned}q^{(\alpha)}(t)|_{t=t_{\langle i \rangle}} &\equiv q_{\langle i \rangle}^{(\alpha)} \equiv {}_0D_{t_{\langle i \rangle}}^\alpha q(t) \approx \sum_{r=0}^{N_{GL}} \frac{1}{h^\alpha} GL_r q(t - rh) = \\ &= \frac{1}{h^\alpha} [GL_0 GL_1 GL_2 \dots GL_{jp-1}] \mathbf{H} \begin{bmatrix} q_{\langle i \rangle} \\ \dot{q}_{\langle i \rangle} \\ \ddot{q}_{\langle i \rangle} \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{1}{h^\alpha} [GL_{jp} GL_{jp+1} GL_{jp+2} \dots GL_{2jp-1}] \mathbf{H} \begin{bmatrix} q_{\langle i-j \rangle} \\ \dot{q}_{\langle i-j \rangle} \\ \ddot{q}_{\langle i-j \rangle} \end{bmatrix} + \dots + \\ &+ \frac{1}{h^\alpha} [GL_{(N_c-1)jp} GL_{(N_c-1)jp+1} GL_{(N_c-1)jp+2} \dots GL_{N_cjp-1}] \mathbf{H} \begin{bmatrix} q_{\langle i-N_cj \rangle} \\ \dot{q}_{\langle i-N_cj \rangle} \\ \ddot{q}_{\langle i-N_cj \rangle} \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{3.75}$$

Узимајући у обзир једначине (3.73) и (3.74), могу се одредити вектори апроксимације за почетни, нулти интервал апроксимације, и за сваки од додатних N_c корекционих интервала дужине трајања $j\Delta t$, односно:

$$\begin{aligned}\vec{D}_0 &= \frac{1}{h^\alpha} \vec{GL}_0^\alpha \mathbf{H} = \{D_{01}, D_{02}, D_{03}\}, \\ \vec{D}_c &= \frac{1}{h^\alpha} \vec{GL}_c^\alpha \mathbf{H} = \{D_{c1}, D_{c2}, D_{c3}\}, \quad c = 1, 2, \dots, N_c.\end{aligned}\tag{3.76}$$

Уколико се ови изрази за векторе апроксимације уврсте у једначину (3.75), у коначном

се фракциони извод функције у тренутку $t = t_{(i)}$ може апроксимирати као:

$$q^{(\alpha)}(t_{(i)}) \equiv q_{(i)}^{(\alpha)} \approx D_{03} \ddot{q}_{(i)} + D_{02} \dot{q}_{(i)} + D_{01} q_{(i)} + \sum_{c=1}^{N_c} (D_{c3} \ddot{q}_{(i-cj)} + D_{c2} \dot{q}_{(i-cj)} + D_{c1} q_{(i-cj)}) . \quad (3.77)$$

Примећује се да је фракциони извод апроксимиран преко околних целобројних извода, као и да је поред апроксимације на почетном, нултом интервалу, у којој фигуришу вредности функције и њених (целобројних) извода у посматраном тренутку, потребно узети у обзир још и N_c корекционих интервала, где фигуришу вредности функције и њених извода на крајевима тих интервала.

3.5 Примена апроксимације фракционог извода на претходно добијени систем једначина

Сада је потребно описани поступак апроксимације фракционог извода применити на претходно изведени систем једначина (3.60) и (3.62), који ће овде бити исписан поново ради прегледности:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_\alpha \mathbf{q}^{(\alpha)} + \mathbf{C}_\beta \mathbf{q}^{(\beta)} + \mathbf{K} \mathbf{q} - \boldsymbol{\chi} \mathbf{v} = \mathbf{f}, \quad (3.78)$$

$$N_b C_p \dot{\mathbf{v}} + \frac{1}{2R} \mathbf{v} + \sum_{k=1}^{N_b} \sum_{j=1}^n \left(\vartheta \int_0^L \phi_{(k)j}'' dx \right) \dot{q}_{(k)j} = 0. \quad (3.79)$$

Пошто се у једначини (3.78) јављају два фракциона извода, реда α и реда β , поступак апроксимације описан у Поглављу 3.4 биће потребно применити два пута, односно за сваки од фракционих извода посебно биће потребно одредити векторе апроксимације.

Поступак прорачуна је следећи. Најпре се усвоји одговарајућа дискретизација временског домена. Затим се одреде вредности Гринвалд-Летњиковљевих коефицијената за сваки од фракционих извода у једначини (3.78), и то:

$$\begin{aligned} GL_0^\alpha &= 1, \\ GL_1^\alpha &= -\alpha, \\ GL_r^\alpha &= \frac{r - \alpha - 1}{r} GL_{r-1}^\alpha, \quad r = 2, 3, \dots, N_{GL}, \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} GL_0^\beta &= 1, \\ GL_1^\beta &= -\beta, \\ GL_r^\beta &= \frac{r - \beta - 1}{r} GL_{r-1}^\beta, \quad r = 2, 3, \dots, N_{GL}. \end{aligned}$$

Затим се ови коефицијенти разврстају у векторе дужине jp :

$$\begin{aligned}
\vec{GL}_0^\alpha &= \{GL_0^\alpha, GL_1^\alpha, \dots, GL_{jp-1}^\alpha\}, \\
\vec{GL}_1^\alpha &= \{GL_{jp}^\alpha, GL_{jp+1}^\alpha, \dots, GL_{2jp-1}^\alpha\}, \\
&\dots \\
\vec{GL}_{N_c}^\alpha &= \{GL_{(N_c-1)jp}^\alpha, GL_{(N_c-1)jp+1}^\alpha, \dots, GL_{N_cjp-1}^\alpha\}, \\
\end{aligned} \tag{3.81}$$

$$\begin{aligned}
\vec{GL}_0^\beta &= \{GL_0^\beta, GL_1^\beta, \dots, GL_{jp-1}^\beta\}, \\
\vec{GL}_1^\beta &= \{GL_{jp}^\beta, GL_{jp+1}^\beta, \dots, GL_{2jp-1}^\beta\}, \\
&\dots \\
\vec{GL}_{N_c}^\beta &= \{GL_{(N_c-1)jp}^\beta, GL_{(N_c-1)jp+1}^\beta, \dots, GL_{N_cjp-1}^\beta\}.
\end{aligned}$$

Како је матрица коефицијената развоја у Тејлоров ред \mathbf{H} иста без обзира на ред фракционог извода, то се вектори апроксимације одмах могу одредити као:

$$\begin{aligned}
\vec{D}_0^\alpha &= \frac{1}{h^\alpha} \vec{GL}_0^\alpha \mathbf{H} = \{D_{01}^\alpha, D_{02}^\alpha, D_{03}^\alpha\}, \\
\vec{D}_c^\alpha &= \frac{1}{h^\alpha} \vec{GL}_c^\alpha \mathbf{H} = \{D_{c1}^\alpha, D_{c2}^\alpha, D_{c3}^\alpha\}, \quad c = 1, 2, \dots, N_c, \\
\end{aligned} \tag{3.82}$$

$$\begin{aligned}
\vec{D}_0^\beta &= \frac{1}{h^\beta} \vec{GL}_0^\beta \mathbf{H} = \{D_{01}^\beta, D_{02}^\beta, D_{03}^\beta\}, \\
\vec{D}_c^\beta &= \frac{1}{h^\beta} \vec{GL}_c^\beta \mathbf{H} = \{D_{c1}^\beta, D_{c2}^\beta, D_{c3}^\beta\}, \quad c = 1, 2, \dots, N_c.
\end{aligned}$$

На крају, имајући у виду да је у једначини (3.78) са:

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_{(1)} \ \mathbf{q}_{(2)} \ \dots \ \mathbf{q}_{(N_b)}]^\mathbf{T} = [q_{(1)_1} \ q_{(1)_2} \ \dots \ q_{(1)_n} \ q_{(2)_1} \ q_{(2)_2} \ \dots \ q_{(2)_n} \ q_{(3)_1} \ \dots \ q_{(N_b)_n}]^\mathbf{T} \tag{3.83}$$

обележен вектор непознатих временских функција у Галеркиновој апроксимацији, на сваку од ових временских функција треба применити апроксимацију фракционог извода дату једначином (3.77), и то за сваки од два различита реда фракционог извода α и β . Тако се добија:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_{(i)}^{(\alpha)} &\approx D_{03}^\alpha \ddot{\mathbf{q}}_{(i)} + D_{02}^\alpha \dot{\mathbf{q}}_{(i)} + D_{01}^\alpha \mathbf{q}_{(i)} + \sum_{c=1}^{N_c} \left(D_{c3}^\alpha \ddot{\mathbf{q}}_{(i-cj)} + D_{c2}^\alpha \dot{\mathbf{q}}_{(i-cj)} + D_{c1}^\alpha \mathbf{q}_{(i-cj)} \right), \\
\mathbf{q}_{(i)}^{(\beta)} &\approx D_{03}^\beta \ddot{\mathbf{q}}_{(i)} + D_{02}^\beta \dot{\mathbf{q}}_{(i)} + D_{01}^\beta \mathbf{q}_{(i)} + \sum_{c=1}^{N_c} \left(D_{c3}^\beta \ddot{\mathbf{q}}_{(i-cj)} + D_{c2}^\beta \dot{\mathbf{q}}_{(i-cj)} + D_{c1}^\beta \mathbf{q}_{(i-cj)} \right).
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Када се ови изрази уврсте у једначину (3.78) добија се нова матрична једначина си-

стема у облику:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{M} + D_{03}^{\alpha} \mathbf{C}_{\alpha} + D_{03}^{\beta} \mathbf{C}_{\beta} \right) \ddot{\mathbf{q}}_{\langle i \rangle} + \left(D_{02}^{\alpha} \mathbf{C}_{\alpha} + D_{02}^{\beta} \mathbf{C}_{\beta} \right) \dot{\mathbf{q}}_{\langle i \rangle} + \\ + \left(\mathbf{K} + D_{01}^{\alpha} \mathbf{C}_{\alpha} + D_{01}^{\beta} \mathbf{C}_{\beta} \right) \mathbf{q}_{\langle i \rangle} - \chi v_{\langle i \rangle} = \mathbf{f}_{\langle i \rangle} - \mathbf{f}_{\langle i \rangle}^{corr}, \end{aligned} \quad (3.85)$$

односно:

$$\mathbf{M}_{eff} \ddot{\mathbf{q}}_{\langle i \rangle} + \mathbf{C}_{eff} \dot{\mathbf{q}}_{\langle i \rangle} + \mathbf{K}_{eff} \mathbf{q}_{\langle i \rangle} - \chi v = \mathbf{f}_{\langle i \rangle} - \mathbf{f}_{\langle i \rangle}^{corr}, \quad (3.86)$$

где су уведене ознаке:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{eff} &= \mathbf{M} + D_{03}^{\alpha} \mathbf{C}_{\alpha} + D_{03}^{\beta} \mathbf{C}_{\beta}, \\ \mathbf{C}_{eff} &= D_{02}^{\alpha} \mathbf{C}_{\alpha} + D_{02}^{\beta} \mathbf{C}_{\beta}, \\ \mathbf{K}_{eff} &= \mathbf{K} + D_{01}^{\alpha} \mathbf{C}_{\alpha} + D_{01}^{\beta} \mathbf{C}_{\beta}, \\ \mathbf{f}_{\langle i \rangle}^{corr} &= \sum_{c=1}^{N_c} \left((D_{c3}^{\alpha} + D_{c3}^{\beta}) \ddot{\mathbf{q}}_{\langle i-cj \rangle} + (D_{c2}^{\alpha} + D_{c2}^{\beta}) \dot{\mathbf{q}}_{\langle i-cj \rangle} + (D_{c1}^{\alpha} + D_{c1}^{\beta}) \mathbf{q}_{\langle i-cj \rangle} \right). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Овим поступком добијен је систем обичних диференцијалних једначина по непознатим временским функцијама $\mathbf{q}(t)$ и електричном напону $v(t)$, односно:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{eff} \ddot{\mathbf{q}}_{\langle i \rangle} + \mathbf{C}_{eff} \dot{\mathbf{q}}_{\langle i \rangle} + \mathbf{K}_{eff} \mathbf{q}_{\langle i \rangle} - \chi v = \mathbf{f}_{\langle i \rangle} - \mathbf{f}_{\langle i \rangle}^{corr}, \\ N_b C_p \dot{v} + \frac{1}{2R} v - \sum_{k=1}^{N_b} \sum_{j=1}^n \chi_{(k)j} \dot{q}_{(k)j} = 0, \end{aligned} \quad (3.88)$$

где је уочено да је:

$$\chi_{(k)j} = -\vartheta \int_0^L \phi_{(k)j} (\delta'(x-0) - \delta(x-L)) dx = -\vartheta \int_0^L \phi_{(k)j}'' dx = -e_{31} b h_{pc} \int_0^L \phi_{(k)j}'' dx. \quad (3.89)$$

Уколико се све непознате величине сложе у један вектор $\mathbf{u}(t) = [\mathbf{q}(t) \ v(t)]^T$, у коначном се добија матрична једначина за цео систем у облику:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{eff} & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_{\langle i \rangle} \\ v_{\langle i \rangle} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{eff} & \vec{0} \\ -\chi^T & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{\langle i \rangle} \\ v_{\langle i \rangle} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{eff} & \chi \\ \vec{0}^T & \frac{1}{2R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{\langle i \rangle} \\ v_{\langle i \rangle} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\langle i \rangle} - \mathbf{f}_{\langle i \rangle}^{corr} \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

односно:

$$\bar{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{u}}_{\langle i \rangle} + \bar{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{u}}_{\langle i \rangle} + \bar{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{\langle i \rangle} = \bar{\mathbf{f}}_{\langle i \rangle}, \quad (3.90)$$

где су:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{M}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{eff} & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 0 \end{bmatrix}, \\
\bar{\mathbf{C}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{eff} & \vec{0} \\ -\boldsymbol{\chi}^T & C_p \end{bmatrix}, \\
\bar{\mathbf{K}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{eff} & \boldsymbol{\chi} \\ \vec{0}^T & \frac{1}{2R} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{u}_{\langle i \rangle} &\equiv \mathbf{u}(t_{\langle i \rangle}) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{\langle i \rangle} \\ \mathbf{v}_{\langle i \rangle} \end{bmatrix}, \\
\bar{\mathbf{f}}_{\langle i \rangle} &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\langle i \rangle} - \mathbf{f}_{\langle i \rangle}^{corr} \\ 0 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{3.91}$$

а $\vec{0}$ је нула вектор реда nN_b .

Овај систем једначина сада се може решити применом Њумарковог итеративног поступка за нумеричку интеграцију диференцијалних једначина.

3.6 Решавање добијеног система једначина у временском домену

За примену Њумарковог поступка потребно је у тренутку $t = t_{\langle i+1 \rangle}$ посматрану временску функцију и њен први извод развити у Тејлоров ред, чиме се добија:

$$\begin{aligned}
u_{\langle i+1 \rangle} &\approx u_{\langle i \rangle} + \Delta t \dot{u}_{\langle i \rangle} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_{\langle i \rangle} + \beta_N (\Delta t)^3 \ddot{\ddot{u}}_{\langle i \rangle}, \\
\dot{u}_{\langle i+1 \rangle} &\approx \dot{u}_{\langle i \rangle} + \Delta t \ddot{u}_{\langle i \rangle} + \gamma_N (\Delta t)^2 \ddot{\ddot{u}}_{\langle i \rangle}.
\end{aligned} \tag{3.92}$$

Могу се изабрати различите вредности коефицијената β_N и γ_N , али конвергенција решења је осигурана [182] уколико се усвоје вредности:

$$\beta_N = \frac{1}{4}, \quad \gamma_N = \frac{1}{2}, \tag{3.93}$$

тако да ће у свим даљим нумеричким анализама бити усвојене управо ове вредности.

Уколико се сада, користећи метод коначних разлика, трећи извод разматране функције у тренутку $t = t_{\langle i \rangle}$ представи преко другог извода у том, и у наредном тренутку $t = t_{\langle i+1 \rangle}$, односно:

$$\ddot{\ddot{u}}_{\langle i \rangle} \approx \frac{\ddot{\ddot{u}}_{\langle i+1 \rangle} - \ddot{\ddot{u}}_{\langle i \rangle}}{\Delta t}, \tag{3.94}$$

једначине (3.92) постају:

$$\begin{aligned}
u_{\langle i+1 \rangle} &\approx u_{\langle i \rangle} + \Delta t \dot{u}_{\langle i \rangle} + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta_N \right) \ddot{u}_{\langle i \rangle} + \beta_N (\Delta t)^2 \ddot{\ddot{u}}_{\langle i+1 \rangle}, \\
\dot{u}_{\langle i+1 \rangle} &\approx \dot{u}_{\langle i \rangle} + \Delta t (1 - \gamma_N) \ddot{u}_{\langle i \rangle} + \gamma_N \Delta t \ddot{\ddot{u}}_{\langle i+1 \rangle}.
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Једначина (3.90) исписана за тренутак $t = t_{\langle i+1 \rangle}$ гласиће:

$$\bar{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{u}}_{\langle i+1 \rangle} + \bar{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{u}}_{\langle i+1 \rangle} + \bar{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{\langle i+1 \rangle} = \bar{\mathbf{f}}_{\langle i+1 \rangle}. \quad (3.96)$$

Ако се сада једначине (3.95) уврсте у једначину (3.96), након сређивања добија се:

$$\begin{aligned} & \bar{\mathbf{M}} \left(\frac{1}{\beta_N \Delta t^2} (\mathbf{u}_{\langle i+1 \rangle} - \mathbf{u}_{\langle i \rangle}) - \frac{1}{\beta_N \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_{\langle i \rangle} + \left(1 - \frac{1}{2\beta_N}\right) \ddot{\mathbf{u}}_{\langle i \rangle} \right) + \\ & + \bar{\mathbf{C}} \left(\frac{\gamma_N}{\beta_N \Delta t} (\mathbf{u}_{\langle i+1 \rangle} - \mathbf{u}_{\langle i \rangle}) + \left(1 - \frac{\gamma_N}{\beta_N}\right) \dot{\mathbf{u}}_{\langle i \rangle} + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma_N}{2\beta_N}\right) \ddot{\mathbf{u}}_{\langle i \rangle} \right) + \\ & + \bar{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{\langle i+1 \rangle} = \bar{\mathbf{f}}_{\langle i+1 \rangle}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Ако се уведу ознаке:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_N &= \frac{1}{\beta_N (\Delta t)^2} \bar{\mathbf{M}} + \frac{\gamma_N}{\beta_N \Delta t} \bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{K}}, \\ \mathbf{b}_{\langle i+1 \rangle} &= \bar{\mathbf{f}}_{\langle i+1 \rangle} + \bar{\mathbf{M}} \left(\frac{1}{\beta_N (\Delta t)^2} \mathbf{u}_{\langle i \rangle} + \frac{1}{\beta_N \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_{\langle i \rangle} + \left(\frac{1}{2\beta_N} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_{\langle i \rangle} \right) + \\ & + \bar{\mathbf{C}} \left(\frac{\gamma_N}{\beta_N \Delta t} \mathbf{u}_{\langle i \rangle} - \left(1 - \frac{\gamma_N}{\beta_N}\right) \dot{\mathbf{u}}_{\langle i \rangle} - \Delta t \left(1 - \frac{\gamma_N}{2\beta_N}\right) \ddot{\mathbf{u}}_{\langle i \rangle} \right), \end{aligned} \quad (3.98)$$

у коначном се добијају изрази за итеративно одређивање вредности временских функција и њиховог првог и другог извода у облику:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\langle i+1 \rangle} &= \mathbf{A}_N^{-1} \mathbf{b}_{\langle i \rangle}, \\ \dot{\mathbf{u}}_{\langle i+1 \rangle} &= \frac{\gamma_N}{\beta_N \Delta t} (\mathbf{u}_{\langle i+1 \rangle} - \mathbf{u}_{\langle i \rangle}) + \left(1 - \frac{\gamma_N}{\beta_N}\right) \dot{\mathbf{u}}_{\langle i \rangle} + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma_N}{2\beta_N}\right) \ddot{\mathbf{u}}_{\langle i \rangle}, \\ \ddot{\mathbf{u}}_{\langle i+1 \rangle} &= \frac{1}{\beta_N (\Delta t)^2} (\mathbf{u}_{\langle i+1 \rangle} - \mathbf{u}_{\langle i \rangle}) - \frac{1}{\beta_N \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_{\langle i \rangle} - \left(\frac{1}{2\beta_N} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_{\langle i \rangle}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Када су познате вредности вектора $\mathbf{u}^T = \{\mathbf{q} \ v\}$ у сваком разматраном тренутку времена, напон је директно дат последњим чланом вектора \mathbf{u} , док се временске функције \mathbf{q} користе да би се одредила релативна померања сваке од греда система према једначини (3.51), односно:

$$\begin{aligned} v(t_{\langle i \rangle}) &\equiv v_{\langle i \rangle} = \{\mathbf{u}_{\langle i \rangle}\}_{nN_b+1} \\ w_{rel(k)}(x, t_{\langle i \rangle}) &\approx \sum_{r=1}^n \phi_{(k)r}(x) q_{(k)r}(t_{\langle i \rangle}) = \sum_{r=1}^n \phi_{(k)r}(x) u_{(k)\langle i \rangle r}, \end{aligned} \quad (3.100)$$

уз напомену да су:

$$w_{(k)}(x, t_{\langle i \rangle}) = w_b(t_{\langle i \rangle}) + w_{rel(k)}(x, t_{\langle i \rangle}), \quad k = 1, 2, \dots, N_b, \quad (3.101)$$

што представља решење постављеног проблема у временском домену.

3.7 Решавање добијеног система једначина у фреквентном домену

За изучавање динамичких карактеристика механичког система корисно је одредити амплитудно-фреквентне функције (АФФ) и њихове дијаграме, односно наћи решење проблема у фреквентном домену. Тиме се успоставља директна веза између фреквенције принудне силе и амплитуде одзива система, што ће у наставку текста бити учињено и за овде разматрани случај предложеног динамичког апсорбера са пијезоелектричним својствима.

Наиме, за одређивање амплитудно-фреквентних функција претпоставља се хармонијска побуда, односно, у овом конкретном случају, хармонијска функција трансверзалног померања укљештених крајева греда система:

$$w_b(t) = w_0 e^{i\Omega t}, \quad (3.102)$$

где је са w_0 означена амплитуда померања ослонаца, Ω је кружна фреквенца померања ослонаца, а са i је означена имагинарна јединица.

При оваквом померању ослонаца, систем ће након извесног времена ући у квазистационаран режим вибрација (енг. *steady state*), па се претпоставља да је и одговор конструкције такође хармонијска функција, синхрона и синфазна са функцијом принуде, односно:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 e^{i\Omega t}, \quad v(t) = v_0 e^{i\Omega t}, \quad (3.103)$$

где су \mathbf{q}_0 и v_0 вектор амплитуда временских функција у Галеркиновој апроксимацији и амплитуда електричног напона, респективно.

Полазећи од диференцијалне једначине кретања греда система (3.42), након разлагања апсолутних померања греде на померања греда као крутих тела и релативна померања сваке од греда у односу на њен укљештен крај како је приказано једначином (3.46), добија се једначина (3.47), која ће овде бити поновљена ради прегледности:

$$\begin{aligned} & \left(\rho_k A_k + \sum_{a=1}^{N_{m(k)}} m_a \delta(x - x_a) \right) \ddot{w}_{rel(k)} + c_s \tau_1^\alpha (w_{rel(k)}'''')^{(\alpha)} + Y I_k w_{rel(k)}'''' - \\ & - \kappa_{k-1} (1 + \tau_2^\beta D^\beta) (w_{rel(k)} - w_{rel(k-1)}) + \kappa_k (1 + \tau_2^\beta D^\beta) (w_{rel(k+1)} - w_{rel(k)}) - \\ & - \vartheta v (\delta'(x - 0) - \delta'(x - L)) = F_{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N_b, \end{aligned} \quad (3.104)$$

где је за принудну силу k -те греде била уведена ознака:

$$F_{(k)} = F_{(k)}(x, t, \Omega) = \left(\rho_k A_k + \sum_{a=1}^{N_{m(k)}} m_a \delta(x - x_a) \right) (g - \ddot{w}_b). \quad (3.105)$$

Уколико се сада претпостави хармонијско померање ослонаца (3.102), у стационар-

ном режиму вибрација систем ће осциловати око положаја статичке равнотеже, односно равнотежног положаја који систем заузима услед сопствене тежине греда и додатих концентрисаних маса у посматраном гравитационом пољу, а принудна сила тада обухвата само инерцијалне силе система које се јављају као последица преласка са апсолутних померања греда на релативна померања, и може се одредити као:

$$F_{(k)}(x, t) = - \left(\rho_k A_k + \sum_{a=1}^{N_{m(k)}} m_a \delta(x - x_a) \right) w_0 e^{i\Omega t} = F_{0(k)} e^{i\Omega t}, \quad (3.106)$$

где је узето да је:

$$F_{0(k)} = - \left(\rho_k A_k + \sum_{a=1}^{N_{m(k)}} m_a \delta(x - x_a) \right) w_0. \quad (3.107)$$

Након примене Галеркинове апроксимативне методе за просторну дискретизацију проблема, добија се систем једначина који се матрично може приказати у форми једначине (3.60), која се такође овде поновља ради прегледности:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_\alpha \mathbf{q}^{(\alpha)} + \mathbf{C}_\beta \mathbf{q}^{(\beta)} + \mathbf{K} \mathbf{q} - \boldsymbol{\chi} \mathbf{v} = \mathbf{f}. \quad (3.108)$$

Уз хармонијско померање ослонаца, вектор принудних сила постаје:

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_0 e^{i\Omega t}, \quad (3.109)$$

где се елементи вектора амплитуда принудних сила:

$$\mathbf{f}_0 = [f_{0(1)_1} \ f_{0(1)_2} \ \dots \ f_{0(1)_n} \ f_{0(2)_1} \ f_{0(2)_2} \ \dots \ f_{0(2)_n} \ f_{0(3)_1} \ \dots \ f_{0(N_b)_n}]^T \quad (3.110)$$

одређују као:

$$f_{0(k)_j} = \int_0^L F_{0(k)} \phi_{(k)j}(x) dx = - \left(\int_0^L (\rho_k A_k \phi_{(k)j}) dx + \sum_{a=1}^{N_{m(k)}} m_a \phi_{(k)j}(x_a) \right) w_0 \quad (3.111)$$

$$j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, N_b.$$

Након увођења апроксимације за фракционе изводе (3.84) и слагања свих непознатих временских функција и електричног напона у један вектор реда $(N_b n + 1)$, добија се матрична једначина за цео систем (3.90), која се такође овде понавља ради прегледности:

$$\bar{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{u}}_{\langle i \rangle} + \bar{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{u}}_{\langle i \rangle} + \bar{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{\langle i \rangle} = \bar{\mathbf{f}}_{\langle i \rangle}, \quad (3.112)$$

где су вектор непознатих функција и вектор принудних сила, респективно, дати као:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\langle i \rangle} &\equiv \mathbf{u}(t_{\langle i \rangle}) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{\langle i \rangle} \\ \mathbf{v}_{\langle i \rangle} \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{f}}_{\langle i \rangle} &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\langle i \rangle} - \mathbf{f}_{\langle i \rangle}^{corr} \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.113)$$

а вектор корекционих сила је уведен у облику:

$$\mathbf{f}_{\langle i \rangle}^{corr} = \sum_{c=1}^{N_c} \left((D_{c3}^\alpha + D_{c3}^\beta) \ddot{\mathbf{q}}_{\langle i-cj \rangle} + (D_{c2}^\alpha + D_{c2}^\beta) \dot{\mathbf{q}}_{\langle i-cj \rangle} + (D_{c1}^\alpha + D_{c1}^\beta) \mathbf{q}_{\langle i-cj \rangle} \right), \quad (3.114)$$

где је j број претходних корака Δt у којима развој функције у Тејлоров ред унатраг од тренутка $t_{\langle i \rangle}$ даје задовољавајућу тачност апроксимације, како је описано у Поглављу 3.4.

Имајући у виду једначине (3.103), вектор корекционих сила постаје:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\langle i \rangle}^{corr} &= \sum_{c=1}^{N_c} \left((D_{c3}^\alpha + D_{c3}^\beta) (\iota\Omega)^2 \mathbf{q}_0 e^{\iota\Omega t_{\langle i-cj \rangle}} + (D_{c2}^\alpha + D_{c2}^\beta) (\iota\Omega) \mathbf{q}_0 e^{\iota\Omega t_{\langle i-cj \rangle}} + (D_{c1}^\alpha + D_{c1}^\beta) \mathbf{q}_0 e^{\iota\Omega t_{\langle i-cj \rangle}} \right) = \\ &= \sum_{c=1}^{N_c} \left((D_{c3}^\alpha + D_{c3}^\beta) (\iota\Omega)^2 + (D_{c2}^\alpha + D_{c2}^\beta) (\iota\Omega) + (D_{c1}^\alpha + D_{c1}^\beta) \right) \mathbf{q}_0 e^{\iota\Omega t_{\langle i-cj \rangle}}. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Са друге стране, како је:

$$t_{\langle i-cj \rangle} = t_{\langle i \rangle} - cj \Delta t \quad \Rightarrow \quad e^{\iota\Omega t_{\langle i-cj \rangle}} = e^{\iota\Omega t_{\langle i \rangle}} e^{-\iota\Omega cj \Delta t}, \quad (3.116)$$

претходна једначина постаје:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\langle i \rangle}^{corr} &= \left[\sum_{c=1}^{N_c} \left((D_{c3}^\alpha + D_{c3}^\beta) (\iota\Omega)^2 + (D_{c2}^\alpha + D_{c2}^\beta) (\iota\Omega) + (D_{c1}^\alpha + D_{c1}^\beta) \right) e^{-\iota\Omega cj \Delta t} \right] \mathbf{q}_0 e^{\iota\Omega t_{\langle i \rangle}} = \\ &= D(\Omega) \mathbf{q}_0 e^{\iota\Omega t_{\langle i \rangle}}, \end{aligned} \quad (3.117)$$

где је уведена ознака:

$$D(\Omega) = \sum_{c=1}^{N_c} \left((D_{c3}^\alpha + D_{c3}^\beta) (\iota\Omega)^2 + (D_{c2}^\alpha + D_{c2}^\beta) (\iota\Omega) + (D_{c1}^\alpha + D_{c1}^\beta) \right) e^{-\iota\Omega cj \Delta t}. \quad (3.118)$$

Ова константа зависи од фреквенце померања ослонаца, као и усвојене дискретизације временског домена и параметара апроксимације присутних фракционих извода, али не зависи од времена, тако да је довољно срачунати је једном, на почетку поступка нумеричке интеграције, а њена вредност биће иста за све временске функције у свим посматраним тренуцима времена.

Према томе, с обзиром на једначине (3.103), (3.109), (3.113) и (3.117), једначина (3.112)

у стационарном режиму вибрација постаје:

$$(\bar{\mathbf{M}} \mathbf{u}_0(\iota\Omega)^2 + \bar{\mathbf{C}} \mathbf{u}_0(\iota\Omega) + \bar{\mathbf{K}} \mathbf{u}_0) e^{\iota\Omega t(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 - D(\Omega) \mathbf{q}_0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{\iota\Omega t(i)}, \quad (3.119)$$

односно:

$$(\bar{\mathbf{M}}(\iota\Omega)^2 + \bar{\mathbf{C}}(\iota\Omega) + \bar{\mathbf{K}}) \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ 0 \end{bmatrix} - D(\Omega) \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.120)$$

Након пребацивања свих непознатих временских функција са исте стране знака једнакости и сређивања претходног израза добија се:

$$(\bar{\mathbf{M}}(\iota\Omega)^2 + \bar{\mathbf{C}}(\iota\Omega) + \bar{\mathbf{K}} + D(\Omega)\mathbf{I}_0) \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.121)$$

где је са \mathbf{I}_0 означена јединична матрица \mathbf{I} реда $N_b n \times N_b n$ проширена нулом, односно:

$$\mathbf{I}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.122)$$

На крају, ако се уведу ознаке:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\Omega) &= \bar{\mathbf{M}}(\iota\Omega)^2 + \bar{\mathbf{C}}(\iota\Omega) + \bar{\mathbf{K}} + D(\Omega)\mathbf{I}_0, \\ \mathbf{b}_0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.123)$$

у коначном се може написати:

$$\mathbf{A}(\Omega) \mathbf{u}_0 = \mathbf{b}_0, \quad (3.124)$$

па се амплитудно-фреквентне функције одређују као:

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{A}^{-1}(\Omega) \mathbf{b}_0, \quad (3.125)$$

На крају, када су познате амплитуде $\mathbf{u}_0^T = \{\mathbf{q}_0 v_0\}$, амплитудно-фреквентне функције за електрични напон и релативна померања греда система добијају се као

$$\begin{aligned} v(\Omega) &= \{\mathbf{u}_0\}_{nN_b+1} \\ w_{rel(k)}(x, \Omega) &\approx \sum_{i=1}^n \phi_{(k)_i}(x) q_{0(k)_i}(\Omega) = \sum_{i=1}^n \phi_{(k)_r}(x) u_{0(k)_i} \end{aligned} \quad (3.126)$$

уз напомену да су

$$w_{(k)}(x, \Omega) = w_0 + w_{rel(k)}(x, \Omega), \quad k = 1, 2, \dots, N_b, \quad (3.127)$$

што представља решење постављеног проблема у фреквентном домену.

* * * * *

Користећи једначине изведене у овом поглављу могуће је одредити величину померања сваке од греда пијезоелектричног динамичког апсорбера, као и величину електричног напона произведеног у пијезо-слојевима греда. У наредном поглављу биће приказана валидација предложеног математичког модела, а затим ће, у Поглављу 5, бити приказано како се овде предложени ПЕДА може применити за контролу вибрација мостовских конструкција.

Глава 4

Валидација модела предложеног типа пијезоелектричног динамичког апсорбера

У овом поглављу биће приказана валидација математичког модела изведеног у Поглављу 3, којим се описује понашање предложеног новог типа динамичког апсорбера са пијезоелектричним својствима. Валидација модела биће извршена поређењем резултата добијених на предложеном моделу са резултатима из експеримената доступним у литератури. У доступној литератури, за сада, нема публикација о динамичким апсорберима са пијезоелектричним својствима и пригушењем моделираним уз коришћење фракционих извода (фракционим пригушењем). Међутим, постоје радови у којима је, засебно, разматрано понашање динамичких апсорбера, биморфних греда и система повезаних биморфних греда *са вискозним пригушењем* конструкције. Сви наведени примери који постоје у литератури могу се извести као посебни случајеви модела фракционог пијезоелектричног динамичког апсорбера (ПЕДА) који се предлаже у овој дисертацији. Стога је и валидација предложеног модела урађена у више корака, најпре поредећи резултате модела са резултатима из литературе за случај једне биморфне греде, а потом и за случај система биморфних конзолних греда повезаних еластичним опругама на слободним крајевима. Међутим, пошто у литератури није пронађен ниједан пример са истовременом применом биморфних греда *и* фракционог пригушења, приликом валидације *пијезоелектричних својстава* модела коришћени су целобројни изводи, односно модел класичног вискозног пригушења конструкције. На крају, провера *фракционих својстава* предложеног модела урађена је за случај струјног кола у кратком споју, услед чега је електрични напон који се генерише при деформацији греда у сваком тренутку једнак нули. У овом случају се електро-механичко спрезање може занемарити, па се систем од $N_b n + 1$ једначина којима се описује понашање ПЕДА своди на систем од свега $N_b n$ једначина кретања греда. Овде је потребно напоменути и то да се у описаном случају добија систем једначина потпуно еквивалентан оном описаном у раду: Пауновић и др. "*Dynamics of fractional-order multi-beam-mass system excited by base motion*" [183]. Ипак, у поменутом раду је коришћен другачији при-

ступ за решавање добијеног система једначина, тако да је и математички модел који се у овој дисертацији предлаже било потребно проверити, и та валидација приказана је на крају овог поглавља.

4.1 Поређење резултата за случај вибрација једне биморфне греде

Биморфне греде детаљно су анализиране у бројним радовима, како теоријски, тако и експериментално [77, 82, 108, 184--186]. У области математичког моделирања и примене пијезоелектричних материјала у конструкторству, као водећи ауторитети издвајају се имена Алпера Ертурка (Alper Erturk) и Данијела Инмана (Daniel Inmann). Ови аутори су веома подробно истражили понашање, пијезоелектрична својства и примену различитих типова биморфних греда и своја истраживања су изложили у бројним публикацијама [1, 2, 187--194], од којих је једна и врло опсежна књига [1] у којој је систематски обрађена методологија примене, теоријског и математичког моделирања и оптимизације својстава биморфних греда. Из наведених разлога одлучено је да се поређење резултата добијених на моделу који се предлаже у овој дисертацији, врши управо са резултатима објављеним од стране Ертурка и Инмана, и то у две независне публикације - у поменутој књизи "Пијезоелектрично сакупљање енергије" (Erturk, A., Inman, D. J. (2011). *Piezoelectric energy harvesting*. John Wiley and Sons) [1], и у раду под називом "Експериментално потврђен модел биморфне конзолне греде за пијезоелектрично сакупљање енергије вибрација од вибрација услед померања ослонца" (Erturk, A., Inman, D. J. (2009). *An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations*. Smart materials and structures, 18(2), 025009) [2]. У књизи је, поред осталог, приказан и случај биморфне греде без додатих маса, док је у раду разматрана биморфна греда са једном масом везаном за слободан крај конзоле. Оба случаја су потврђена експериментима, због чега су изабрани за проверу тачности модела ПЕДА предложеног у овој дисертацији.

4.1.1 Поређење за случај једне биморфне греде без додате масе

У наведеној књизи, поред детаљног излагања теоријских основа и извођења математичких модела за описивање понашања биморфних греда, аутори су приказали и параметарску студију својих математичких модела на крају Поглавља 3, док је у Поглављу 4 дата и експериментална потврда тих резултата. У Табели 4.1 је дат преглед усвојених вредности геометријских параметара и карактеристика материјала који су коришћени при овој валидацији.

Као што је напоменуто, при валидацији је најпре разматран случај једне биморфне греде без додате масе као најосновнији посебан случај, који се може добити из општег модела ПЕДА изложеног у Поглављу 3 ове дисертације, уколико се усвоје одговарајуће

Табела 4.1: Усвојене редности параметара из књиге Ертурка и Инмана

Параметар	Ознака	Мерна јединица	Пијезокерамика	Носећи слој
Дужина	L	mm	30	30
Ширина	b	mm	5	5
Дебљина	h_p, h_s	mm	0.15	0.05
Материјал	-	-	PZT-5A	Алуминијум
Модуло еластичности	Y_p, Y_s	GPa	61	70
Специфична маса	ρ_p, ρ_s	kg/m^3	7750	2700
Пијезоелектрична константа	\bar{e}_{31}	C/m	-10.4	-
Пермитивност	$\bar{\epsilon}_{33}^S$	nF/m	13.3	-

вредности параметара. За то је, поред параметара који су приказани у Табели 4.1 и који су заједнички за ПЕДА модел и Ертурков и Инманов модел, потребно усвојити и одговарајуће вредности осталих параметара специфичних за ПЕДА модел, и то: број греда у систему $N_b = 1$, број чланова у Галеркиновој апроксимацији функција релативног померања греда $n = 5$, број додатих маса на греди $N_{m(1)} = 0$, ред извода у моделу материјала носећег слоја биморфне греде $\alpha = 1.0$ и ред извода и време ретардације у моделу материјала слојева спрезања $\beta = 1.0$, $\tau_2^\beta = 0.0$, респективно.

Посебну пажњу је потребно обратити на моделирање пригушења материјала носећег слоја биморфне греде, јер ту долази до изражаја основна разлика у ПЕДА моделу и моделу Ертурка и Инмана. Наиме, Ертурк и Иманан су дали *тачно, аналитичко* решење проблема, односно применили су модалну анализу и одредили тачне облике осциловања и модалне координате за разматрани случај. Због тога су користили и *модално пригушење*, уводећи у сваком тону одговарајући коефицијент пригушења, чију су вредност експериментално утврдили. За конкретне прорачуне који се овде наводе користили су 5 тонова осциловања, са коефицијентима модалног пригушења: $\xi_1 = 0.010$, $\xi_2 = 0.012$, $\xi_3 = 0.030$, $\xi_4 = 0.059$, $\xi_5 = 0.097$. Међутим, у ПЕДА моделу је пригушење материјала носећег слоја биморфне греде моделирано кроз конститутивну једначину са фракционим изводом, са временом ретардације τ_1^α као фактором пропорционалности, а за решавање добијеног система једначина је коришћена *приближна, апроксимативна* метода Галеркинове дискретизације. Овим поступком се не добијају стварни облици осциловања и модалне координате, већ се одређују само помоћне, пробне функције и временске функције које тек у коначном збиру дају тражене функције померања греда и електричног напона (видети Поглавље 3.3.4). Због тога, у општем случају, није могуће применити модално пригушење код ПЕДА модела.

Ипак, у овом конкретном случају једне биморфне греде, пошто нема утицаја других греда преко слојева спрезања и пошто је отпор средине занемарен, пригушење система биће пропорционално крутости, а како нема додатих маса на греди и једначине система након Галеркинове апроксимације биће међусобно независне, а матрице \mathbf{M}_{eff} , \mathbf{C}_{eff} и \mathbf{K}_{eff} дијагоналне. Другим речима, Галеркиново апроксимативно решење у овом случају

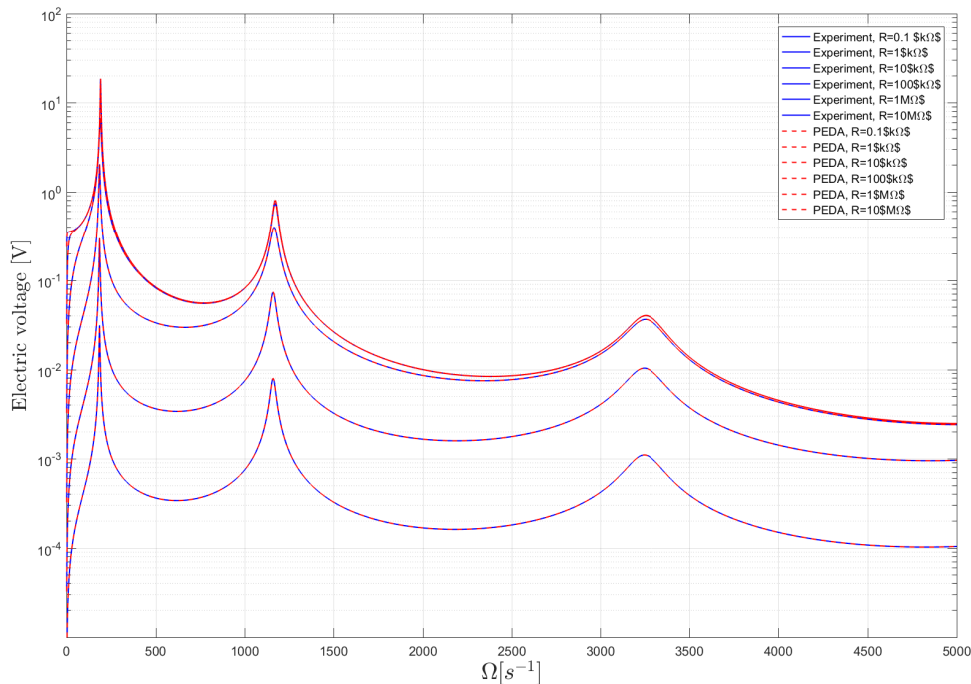
ју заправо се поклапа са тачним решењем, тако да је ипак могуће применити вредности коефицијената модалног пригушења које су навели Ертурк и Инман. Дакле, елементи матрице пригушења услед вискозности материјала конструкције ће у овом случају бити директно задати као:

$$[C_{eff}]_{i,j} = 2\xi_i\omega_i\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

где је δ_{ij} Кронекеров делта симбол, а ω_i је i -та сопствена фреквенца еквивалентног еластичног система. У складу са избором Ертурка и Инмана, пијезо-слојеви биморфне греде су у електрично коло повезани редно, тако да се еквивалентна капацитивност и коефицијент директног електро-механичког спрезања одређују као:

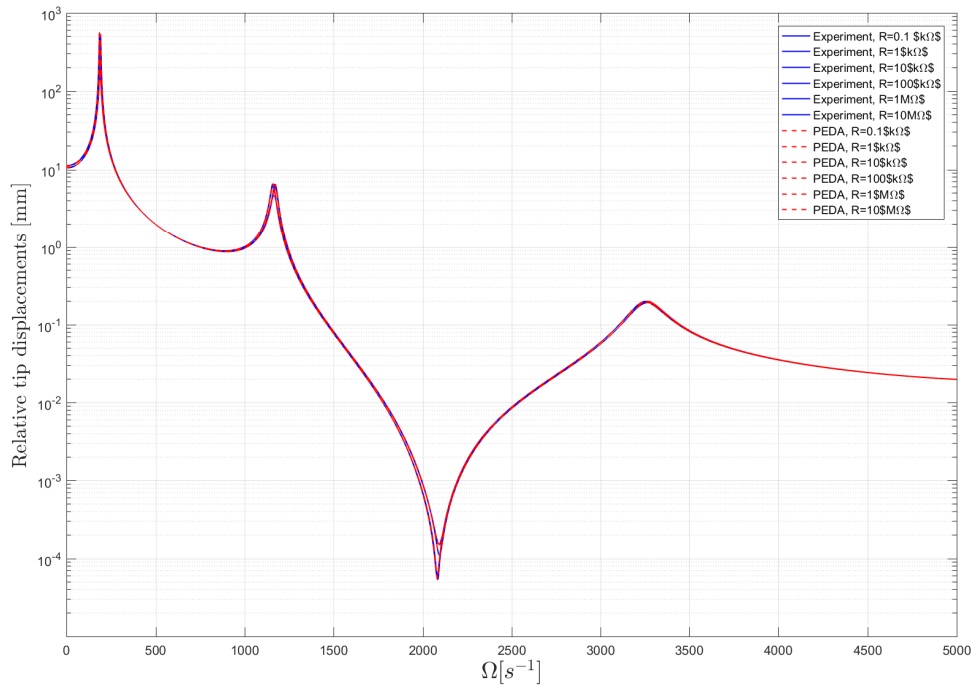
$$C_p = \frac{\bar{\varepsilon}_{33}^s b L}{h_p}, \quad \vartheta = e_{31} b h_{pc} = e_{31} b \left(\frac{h_s}{2} + \frac{h_p}{2} \right) \quad (4.2)$$

Електрична отпорност електричног кола је варирана како би се показао њен утицај на одзив конструкције и укупну произведену количину електричне енергије. Разматрани су случајеви $R \in \{0.1, 1, 10, 100, 1000, 10000\} k\Omega$. Поређење резултата извршено је упоређивањем дијаграма амплитудно-фреквентних функција за електрични напон и за релативно померање слободног краја биморфне греде (Слике 3.5 и 3.15 у књизи [1]).



Слика 4.1 Поређење резултата за остварени електрични напон ПЕДА модела са резултатима експеримената Ертурка и Инмана [1] за случај једне биморфне греде без додатих маса, са различитим вредностима електричне отпорности кола R

Добијени резултати приказани су на Сликама 4.1 и 4.2. Као што се може видети, по-



Слика 4.2 Поређење резултата за релативна померања слободног краја греде ПЕДА модела са резултатима експеримената Ертурка и Инмана [1] за случај једне биморфне греде без додатих маса, са различитим вредностима електричне отпорности кола R

клапање резултата ПЕДА модела и резултата експеримената Ертурка и Инмана је потпуно у случају једне биморфне греде без додатих маса, пошто се при овим условима Галеркиново приближно решење поклапа са тачним, аналитичким решењем.

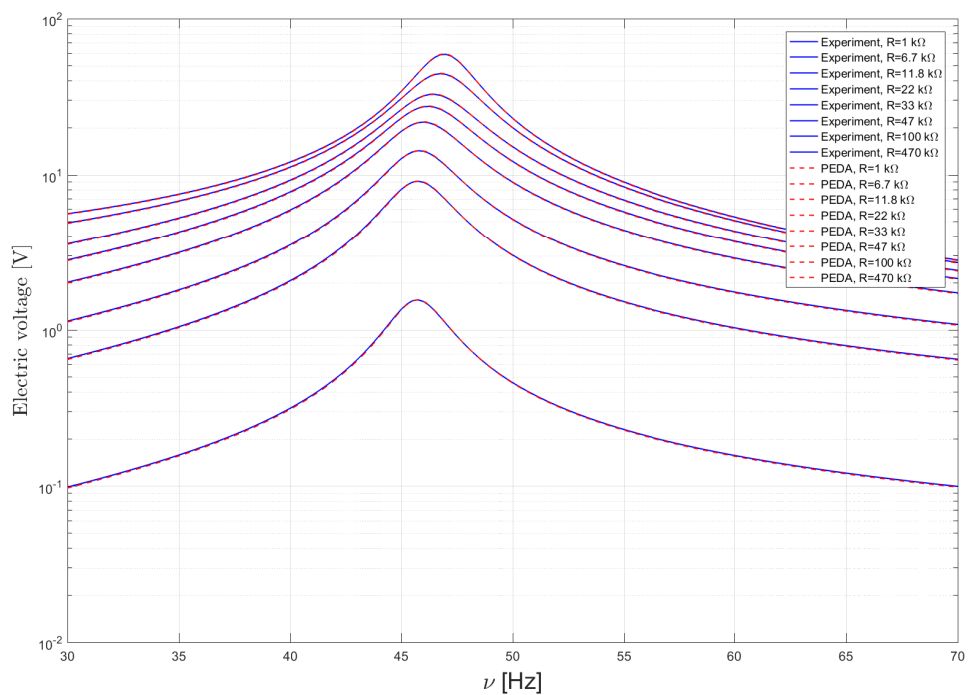
4.1.2 Поређење за случај једне биморфне греде са додатом масом на слободном крају

Валидација ПЕДА модела за овај посебан случај биће извршена поређењем резултата са резултатима из рада "Експериментално потврђен модел биморфне конзолне греде за пијезоелектрично сакупљање енергије вибрација од вибрација услед померања ослонаца" А. Ертурка и Д. Инмана [2]. У наведеном раду, аутори су најпре дали теоријске основе везане за математичко описивање пијезоелектричних својстава материјала, затим су приказали поступно извођење једначина којима се описује понашање биморфне конзолне греде услед померања ослонаца са једном концентрисаном масом додатом греди на њеном слободном крају, и на крају су изложили и потврду свог модела експериментима. Како би провера ПЕДА модела била што ригорознија, поређење резултата биће извршено са резултатима експеримента приказаним у наведеном раду. Геометријске и материјалне карактеристике биморфне греде које су коришћене у овој анализи приказане су у Табели 4.2.

У наведеном раду, аутори истичу да је чест проблем са моделима пијезоелектричних биморфних греда који се срећу у литератури њихова немогућност да опишу важан феномен утицаја електричне отпорности R електричног кола на вредност основне сопствене фреквенце биморфне греде. Наиме, аутори наведеног рада наглашавају да са повећањем електричне отпорности електричног кола долази до повећања вредности њене основне сопствене фреквенце, односно "помрања резонанце" (енг. "resonance shift"). Аутори су у наведеном раду приказали дијаграм промене амплитудно-фреквентног одзива греде у зависности од промене електричне отпорности и тај дијаграм потврдили експериментима. Будући да само модели који су механички (и математички) ваљано засновани могу да обухвате и опишу ово повећање крутости услед промене електричне отпорности, поређење резултата ПЕДА модела са резултатима експеримента биће извршено управо на овом дијаграму. На Слици 4.3 је приказан поменути дијаграм промене амплитудно-фреквентног одзива греде за различите вредности електричне отпорности R . Као што се може видети, поклапање резултата ПЕДА модела и резултата експеримента из наведене литературе је изврсно. Пошто је и ПЕДА модел успешно и веома прецизно предвидео повећање крутости система са повећањем електричне отпорности, може се закључити да је ПЕДА модел заснован на исправним (електро)механичким принципима и да је математички ваљано изведен за случај једне биморфне греде. Имајући то у виду, наредни корак у потврђивању предложеног модела је његова провера за случај када се систем за сакупљање енергије састоји од више међусобно повезаних биморфних греда.

Табела 4.2: Усвојене вредности параметара за случај једне греде са масом

Параметар	Ознака	Мерна јединица	Пијезокерамика	Носећи слој
Дужина	L	mm	50.8	50.8
Ширина	b	mm	31.8	31.8
Дебљина	h_p, h_s	mm	0.26	0.14
Материјал	-	-	PZT-5A	Месинг
Модуло еластичности	Y_p, Y_s	GPa	66	105
Специфична маса	ρ_p, ρ_s	kg/m^3	7800	9000
Пијезоелектрична константа	\bar{e}_{31}	C/m	-10.4	-
Пермитивност	$\bar{\epsilon}_{33}^S$	F/m	$1500\epsilon_0$	-
Пермитивност празног простора	ϵ_0	pF/m	8.854	-



Слика 4.3 Поређење резултата за остварени електрични напон ПЕДА модела са резултатима експеримената Ертурка и Инмана [2] за случај једне биморфне греде са додатом масом на слободном крају, за различите вредности електричне отпорности кола R

4.2 Поређење резултата за случај система биморфних конзола еластично повезаних на слобоним крајевима

Након поређења резултата за случај једне биморфне греде, предложени модел биће проверен и за случај система повезаних биморфних греда. Међутим, у доступној литератури постоји врло мало радова у којима је разматран овај случај, и сви се односе на конзолне греде повезане на својим слободним крајевима, било у равни осциловања [3], било ван ње [129]. С обзиром на то да је у предложеном моделу ПЕДА веза између греда остварена у равни осциловања, то ће валидација модела бити урађена за тај случај, који је обрађен у раду Меруанеа и Пикаре "A Broadband Vibration-Based Energy Harvester Using an Array of Piezoelectric Beams Connected by Springs" [3].

Потребно је поново напоменути да су у поменутом раду греде биморфне и да је веза између греда остварена само на слободним крајевима конзола и то еластичним опругама. Ово представља један од посебних случајева предложеног модела ПЕДА, уколико се искључи пригушење, узевши да је за носећи слој биморфних греда ред фракционих извода у моделу једнак $\alpha = 1.0$ и користећи коефицијент класичног вискозног пригушења c_s уместо времена ретардације τ_1^α , док се слој спрезања између греда узима као еластичан. Такође, пошто су у раду Меруанеа и Пикаре греде повезане само на својим крајевима, а у предложеном моделу ПЕДА је веза остварена слојем спрезања читавом дужином греда, потребно је донекле изменити једначине ПЕДА модела како би он одговарао моделу из цитираног рада. Еквивалентност се може постићи увођењем Диракове делта функције у члановима везаним за утицај слоја спрезања. Имајући наведено у виду, диференцијалне једначине кретања греда система у ПЕДА моделу (3.47) за овај посебан случај постају:

$$\begin{aligned} & \left(\rho_k A_k + \sum_{a=1}^{N_{m(k)}} m_a \delta(x - x_a) \right) \ddot{w}_{rel(k)} + c_s \dot{w}_{rel(k)}'''' + Y I_k w_{rel(k)}'''' - \\ & - \left(\kappa_{k-1} (w_{rel(k)} - w_{rel(k-1)}) - \kappa_k (w_{rel(k+1)} - w_{rel(k)}) \right) \delta(x - L) - \\ & - \vartheta v (\delta'(x - 0) - \delta'(x - L)) = F_{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N_b, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где је као и раније коришћена ознака:

$$F_{(k)} = F_{(k)}(x, t) = \rho_k A_k g - \left(\rho_k A_k + \sum_{a=1}^{N_{m(k)}} m_a \delta(x - x_a) \right) \ddot{w}_b, \quad (4.4)$$

док једначина за електрично коло (3.50) остаје непромењена:

$$N_b C_p \dot{v} + \frac{1}{2R} v + \sum_{k=1}^{N_b} \vartheta \int_0^L \dot{w}_{rel(k)}'' dx = 0. \quad (4.5)$$

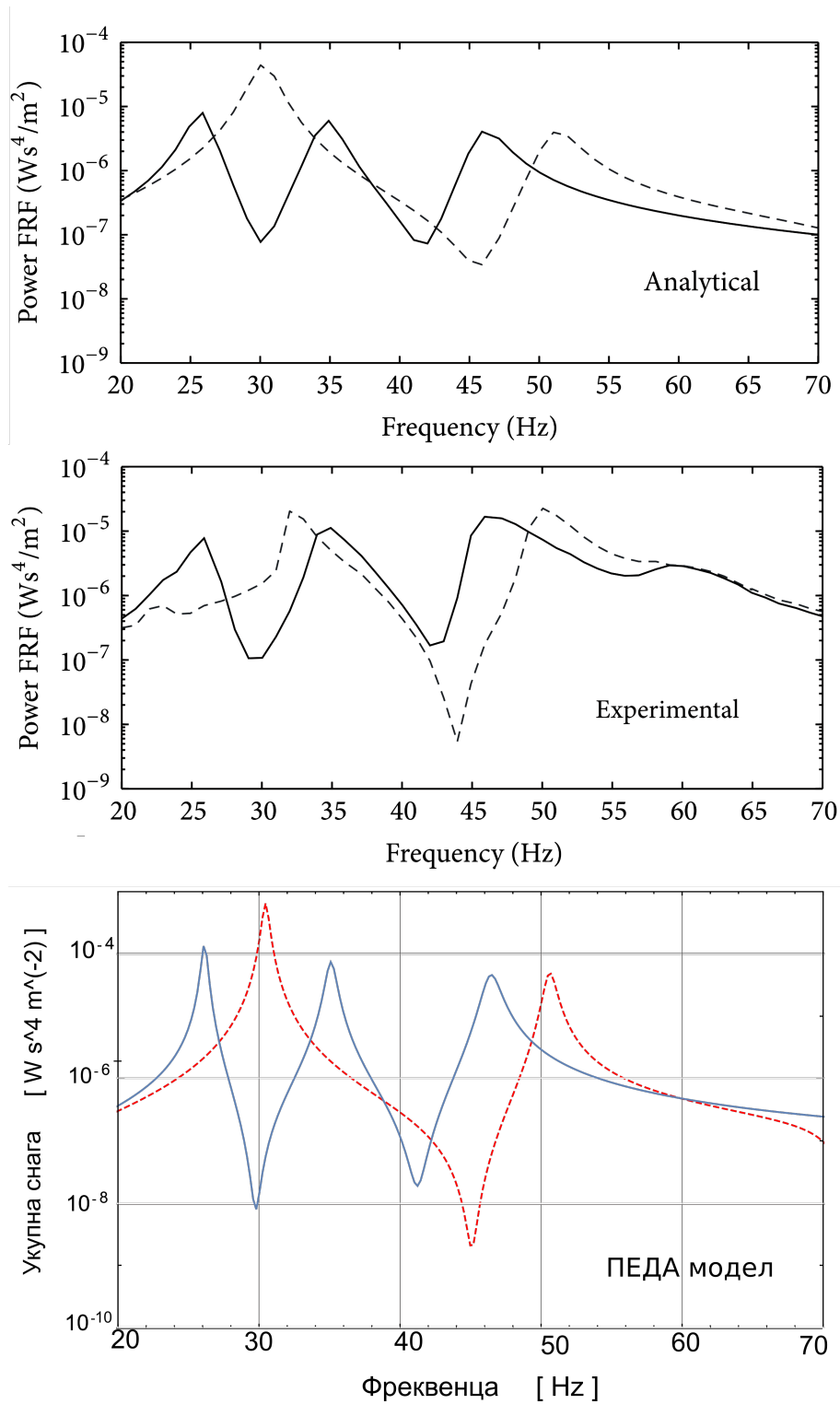
Поред тога, у раду Меруанеа и Пикаре све биморфне греде имају додатну само једну центрисану масу на свом слободном крају, тако да је у ПЕДА моделу потребно узети да

је $Na \equiv 1$. У наведеном раду, аутори су најпре развили механички и математички модел за описани систем, а потом приказали и потврду модела поређењем са резултатима експеримента за случај са 3 повезане биморфне греде (Слика 14 у поменутом раду). За валидацију ПЕДА модела биће коришћени управо ови подаци, будући да су потврђени експериментом. У Табели 4.3 су приказане геометријске и материјалне карактеристике греда система за разматрани случај, заједно са усвојеним вредностима одговарајућих параметара у ПЕДА моделу. На слободним крајевима конзолних греда додате су масе $m_{(1)1} = 6.5m_bL$, $m_{(2)1} = 3.5m_bL$, $m_{(3)1} = 1.9m_bL$, повезане еластичним опругама крутости $k \equiv 2.92YI/L^3$.

Табела 4.3: Усвојене вредности параметара из рада Меруанеа и Пикаре

Параметар	Ознака	Мерна јединица	Пијезокерамика	Носећи слој
Дужина	L	mm	48.2	48.2
Ширина	b	mm	10	10
Дебљина	h_p, h_s	mm	0.24	0.19
Материјал	-	-	PZT-5A	Месинг
Модуо еластичности	Y_p, Y_s	GPa	55.0	40.4
Специфична маса	ρ_p, ρ_s	kg/m^3	8140	1519
Пијезоелектрична константа	\bar{e}_{31}	C/m	-10.4	-
Пермитивност	$\bar{\epsilon}_{33}^S$	nF/m	13.28	-
Коефицијент пригушења	$c_s I_s$	kgm^4/s	-	1.16×10^{-6}

На Слици 4.4 су приказани амплитудно-фреквентни дијаграми генерисане електричне снаге описаног система греда дати од стране Меруанеа и Пикаре добијени аналитички и експериментално, као и резултати добијени применом ПЕДА модела. Пуном линијом су приказани резултати добијени за случај повезаних, а испрекиданим линијама резултати за случај засебних (неповезаних) биморфних греда. Са слике се може уочити да се дијаграми слажу по облику, као и да су сопствене фреквенце модела одређене тачно, док у вредностима амплитуда у близини резонантног стања постоје извесне разлике у резултатима ПЕДА модела у односу на резултате дате у наведеном раду. Наиме, ово одступање је највероватније последица различитог приступа у моделирању пригушења модела, будући да су аутори наведеног рада користили модалне коефицијенте вискозног пригушења, који су одређени експериментално, док је у ПЕДА моделу коришћен глобални коефицијент, који није могуће у потпуности прилагодити моделу са модалним пригушењем за све тонове осциловања истовремено, што у коначном доводи до одређене разлике у резултатима. Међутим, с обзиром на то да су карактер дијаграма и фреквентне карактеристике система практично идентични, а одступања у вредностима амплитуда не прелазе 10%, може се сматрати да је ПЕДА модел потврђен и за разматрани случај система биморфних греда са једном концентрисаном масом, еластично повезаних на слободним крајевима.



Слика 4.4 Поређење резултата за остварени електричну снагу ПЕДА модела са резултатима експериментата Меруанеа и Пикаре [3] за случај система биморфних греда са по једном додатом масом и еластично повезаних на слободним крајевима. Испрекидана линија - повезане греде, пуна линија - неповезане греде

4.3 Поређење за случај једне фракционо вискоеластичне греде са додатом концентрисаном масом на слободном крају

Као што је напоменуто, у доступној литератури није пронађен пример комбиновања биморфних греда са пригушењем моделираним уз примену извода нецелог реда. Стога ће валидација ПЕДА модела бити настављена поређењем резултата за случај једне обичне греде (без пијезоелектричних слојева и ефекта) са фракционим вискоеластичним пригушењем и једном додатом концентрисаном масом на слободном крају. За фракциони Келвин-Војтов модел пригушења, какав је коришћен у овој дисертацији, у литератури постоји рад Фројндлиха [4], у којем је аутор приказао тачно аналитичко решење за описани случај.

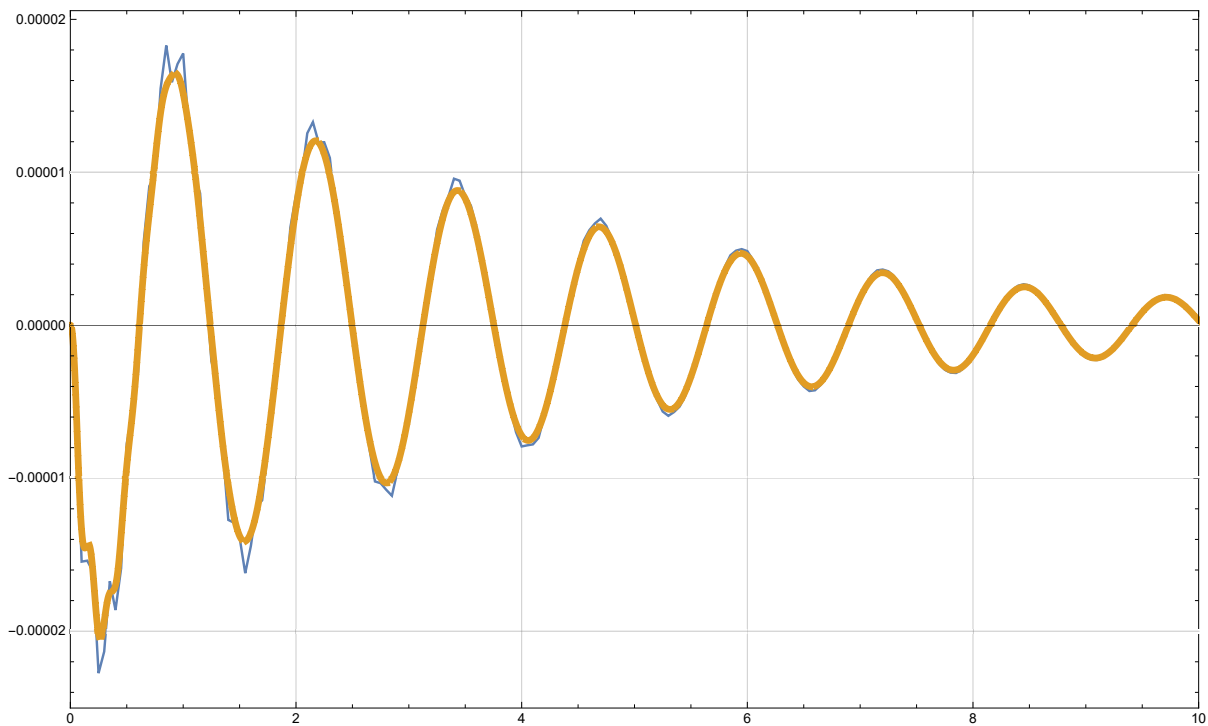
Као и до сада, потребно је ПЕДА модел на одређени начин прилагодити за овај посебан случај. Најпре, у моделу треба усвојити да је број греда једнак јединици, односно $N_b = 1$, чиме се истовремено искључује и деловање слоја спрезања. Такође, како би се искључило електро-механичко спрезање носећег и пијезоелектричних слојева у ПЕДА моделу, потребно је узети да је електрична отпорност електричног кола, у које су повезане електроде биморфне греде, једнака нули, односно $R \rightarrow 0 \Rightarrow v(t) \rightarrow 0$. Остале геометријске и материјалне карактеристике модела усвојене су као у цитираном раду Фројндлиха. Преглед усвојених параметара модела дат је у Табели 4.4.

Табела 4.4: Усвојене редности параметара из рада Фројндлиха

Параметар	Ознака	Мерна јединица	Пијезокерамика	Носећи слој
Дужина	L	mm	800	800
Ширина	b	mm	25	25
Дебљина	h_p, h_s	mm	0.24	0.00
Материјал	-	-	PZT-5A	Легура
Модуо еластичности	Y_p, Y_s	GPa	0	3.2
Специфична маса	ρ_p, ρ_s	kg/m^3	0	1190
Пијезоелектрична константа	\bar{e}_{31}	C/m	-10.4	-
Пермитивност	$\bar{\epsilon}_{33}^S$	nF/m	13.28	-

Поред овога, узето је да је на слободном крају додата концентрисана маса $m_{(1)1} = 0.2m_bL$, и да носећи слој биморфне греде има време ретардације $\tau_1^\alpha = 0.002s^\alpha$, и ред фракционог извода $\alpha = 0.8$. Такође, у Фројндлиховом решењу је искључена ротациона инерција додате масе, како би модел био упоредив са ПЕДА моделом. На Слици 4.5 су приказана померања слободног краја конзоле добијена тачним аналитичким решењем Фројндлиха (пуна линија) и ПЕДА моделом (испрекидана линија).

Као што се може видети, слагање је одлично, на основу чега се може закључити да је валидација предложеног модела ПЕДА остварена и за случај једне биморфне греде са фракционим вискозним пригушењем. На основу свих приказаних валидација, са довољ-



Слика 4.5 Померање слободног краја конзоле са једном додатом масом на слободном крају. Плава линија - тачно аналитичко решење из литературе [4], жута линија - решење добијено применом ПЕДА модела за случај биморфне греде са електричним колом у кратком споју

ном поузданошћу се може тврдити да је потврђена ваљаност предложеног модела ПЕДА, као и да ће он давати поуздане резултате чак и за најопштији случај повезаних система биморфних греда са фракционим пригушењем. Овиме је валидација ПЕДА модела извршена и у наредном поглављу ће бити приказана примена ових динамичких апсорбера за контролу вибрација мостовских конструкција.

Глава 5

Примена предложеног типа динамичког апсорбера за контролу вибрација мостовских конструкција

У Поглављима 3 и 4 је изложен предлог нове конструкције динамичких апсорбера са пијезоелектричним елементима и развијен је и потврђен математички и механички модел ових апсорбера. Као што је напоменуто, утицај ових апсорбера на динамичка својства и вибрације основне конструкције, односно, у овде разматраном случају, мостовске греде, остварује се тежином кућишта сваког од апсорбера, које је на одговарајућ начин повезано са гредом. Имајући у виду полазне претпоставке под којима је развијен модел у оквиру ове дисертације (Поглавље 2.2), овакав концепт омогућава да се сложен проблем међудејства ПЕДА и основне конструкције разложи на два проблема који се могу решавати одвојено. Наиме, у првој фази се посматра основна конструкција заједно са свим додатим динамичким апсорберима и пројектованим оптерећењем. Када се тај динамички проблем у потпуности реши у временском домену, познате су функције померања кућишта сваког од апсорбера. Потом се у другој фази за сваки од апсорбера понаособ примени решење описано у Поглављу 3, узимајући за функцију померања ослонца одговарајућу функцију померања кућишта тог апсорбера одређену у првој фази анализе. На овом моделу се онда одреди добијена количина електричне енергије у сваком од ПЕДА током посматраног временског интервала, чиме се у коначном добија кумулативна количина електричне енергије која се може ускладиштити у одговарајући акумулатор, односно батерију. Описани поступак представља потпуно решење постављеног проблема и управо ће он бити примењен и детаљније разрађен у остатку наредном тексту.

Како је у Поглављу 3 већ изложен модел и поступак којим се друга фаза анализе може у потпуности решити, сада ће бити развијен модел и поступак за решавање прве фазе анализе, односно решавање динамичког проблема вибрација мостовске конструкције са додатим динамичким апсорберима и одговарајућим оптерећењем.

5.1 Математички модел греде са динамичким апсорберима

У Поглављу 2.2.3 је описан поступак извођења диференцијалних једначина сложеног, хибридног система сачињеног од мостовске греде, која се моделира као континуални елемент са бесконачно много степени слободe кретања, и N_a динамичких апсорбера, који се моделирају као систем концентрисаних маса од којих свака има по један степен слободe кретања. За описивање апсолутних померања маса апсорбера уведене су нове координате z_a , $a = 1, 2, \dots, N_a$. Као што је наведено у Поглављу 2.2.3, зависно од материјала елемента којим је сваки од апсорбера повезан са основном конструкцијом, разликоваће се и реолошки модел везе масе сваког од апсорбера са мостовском гредом у датом механичком моделу. У поменутом поглављу изведена је једначина кретања греде и концентрисаних маса за најопштији случај разматран у оквиру ове дисертације, тј. случај када су и греда и сви везни елементи сачињени од фракционо вискоеластичног материјала, при чему се реолошке карактеристике везног елемента за сваки од апсорбера могу међусобно разликовати. Ове једначине су дате изразима (2.52) и (2.54), који ће овде бити поновљени ради прегледности:

$$YI(1 + \tau_1^\alpha D^\alpha)w'''' + m\ddot{w} + \sum_{a=1}^{N_a} k_a(1 + \tau_a^{\beta_a} D^{\beta_a})(w(x_a, t) - z_a(t)) - c_a\dot{w} = f, \quad (5.1)$$

$$m_a\ddot{z}_a - k_a(1 + \tau_a^{\beta_a} D^{\beta_a})(w(x_a, t) - z_a(t)) = m_ag, \quad a = 1, 2, \dots, N_a.$$

За решавање овог система једначина биће коришћена Галеркинова аналитичка апроксимациона метода као и у претходним разматрањима. Међутим, ако се на ове једначине примени поступак апроксимације фракционих извода околним изводима целобројног реда као што је детаљно описано у Поглављу 3.4 на примеру једног ПЕДА, једначине ће добити исти облик као да је у систему присутно само класично вискозно пригушење са изводима целобројног реда. Дакле, узимајући у обзир да се најопштији овде разматрани случај са фракционо вискоеластичним материјалима описаним поступком може свести на случај са класичним вискозним пригушењем, у наставку ће ради једноставности, а без губитка општости, бити разматран случај када су и мостовска греда и везни елементи апсорбера сачињени од вискоеластичног материјала класичног Келвин-Војтовог типа, односно материјала чије се пригушење моделира уз примену целобројних извода. У том случају, једначине 5.1 постају:

$$m_b\ddot{w}_b + c_s I_b \dot{w}'''' + Y_b I_b w'''' - \sum_{a=1}^{N_a} \left(k_a + c_a \frac{d}{dt} \right) (w_b(x_a, t) - z_a(t)) = f - m_b g, \quad (5.2)$$

$$m_a \ddot{z}_a + \left(k_a + c_a \frac{d}{dt} \right) (w_b(x_a, t) - z_a(t)) = m_a g, \quad a = 1, 2, \dots, N_a,$$

где је m_b маса мостовске греде по јединици дужине, $w_b(x, t)$ апсолутно, вертикално по-

мерање неутралне осе греде, Y_b и c_s модуо еластичности и коефицијент вискозног пригушења материјала греде, респективно, I_b аксијални момент инерције попречног пресека греде у односу на осу управну на раван одређену гредом и апсорберима, k_a и c_a модуо еластичности и коефицијент пригушења материјала везног елемента a -тог апсорбера, респективно, $z_a(t)$ апсолутно, вертикално померање a -тог апсорбера, m_a маса a -тог апсорбера, а $f(x, t)$ функција оптерећења које делује на мостовску греду. У једначинама (5.2) је узето у обзир дејство сопствене тежине конструкције, при чему је убрзање Земљине теже обележено са g . Отпор средине је занемарен у овој анализи због релативно малог утицаја на одзив конструкције у поређењу са осталим елементима. Једначинама (5.2), уз одговарајуће граничне и почетне услове, проблем је у потпуности одређен. У наставку ће бити описан поступак решавања овог система једначина применом Галеркинове методе.

5.2 Решење добијеног система једначина

Уколико се уведе Галеркинова дискретизација просторног домена, померања мостовске греде могу се приказати као:

$$w_b(x, t) \approx \sum_{i=1}^n \phi_{b_i}(x) q_{b_i}(t), \quad (5.3)$$

са пробним функцијама $\phi_{b_i}(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, за које су усвојени облици осциловања греде без апсорбера и оптерећења, и непознатим временским функцијама $q_{b_i}(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Као што је већ описано у Поглављу 3.3.4, примена методе отежаног остатка подразумева да се прва једначина у систему (5.2) редом помножи сваком од пробних функција $\phi_{b_j}(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, и да се свака тако добијена једначина интегрални у границама разматраног просторног домена, чиме се обезбеђује да је укупна грешка апроксимације посматрано на домену као целини једнака нули. Овим поступком се добија систем од n обичних диференцијалних једначина по непознатим временским функцијама $q_{b_i}(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, тако да систем (5.2) постаје:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left(\int_0^L m_b \phi_{b_i} \phi_{b_j} dx \right) \ddot{q}_{b_i} + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^L c_s I_b \phi_{b_i}'''' \phi_{b_j} dx + \sum_{a=1}^{N_a} c_a \phi_{b_j}(x_a) \phi_{b_j}(x_a) \right) \dot{q}_{b_i} + \\ & + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^L Y_b I_b \phi_{b_i}'''' \phi_{b_j} dx + \sum_{a=1}^{N_a} k_a \phi_{b_j}(x_a) \phi_{b_j}(x_a) \right) q_{b_i} - \sum_{a=1}^{N_a} (c_a \phi_{b_j}(x_a)) \dot{z}_a - \\ & - \sum_{a=1}^{N_a} (k_a \phi_{b_j}(x_a)) z_a = \int_0^L \phi_{b_j}(x) f(x, t) dx - \int_0^L m_b g \phi_{b_j}(x) dx, \quad j = 1, 2, \dots, \\ & m_a \ddot{z}_a + c_a \dot{z}_a + k_a z_a - \sum_{i=1}^n (c_a \phi_{b_i}(x_a)) \dot{q}_{b_i} - \sum_{i=1}^n (k_a \phi_{b_i}(x_a)) q_{b_i} = -m_a g, \quad a = 1, 2, \dots, N_a. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Уколико се непознате временске функције $q_{b_i}(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ и непознате функције померања апсорбера $z_a(t)$, $a = 1, 2, \dots, N_a$ сложе у један вектор \mathbf{u} , претходни систем

једначина се може записати у матричном облику као:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{M}_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_b \\ \mathbf{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{bb} & \mathbf{C}_{ba} \\ \mathbf{C}_{ab} & \mathbf{C}_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_b \\ \mathbf{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{ba} \\ \mathbf{K}_{ab} & \mathbf{K}_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_b \\ \mathbf{z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{f}_a \end{Bmatrix}, \quad (5.5)$$

односно:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (5.6)$$

где су:

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}_{bb}]_{ij} &= \xi\omega_i^2\delta_{ij} + \sum_{a=1}^{N_a} c_a\phi_i(x_a)\phi_j(x_a), & [\mathbf{K}_{bb}]_{ij} &= \omega_i^2\delta_{ij} + \sum_{a=1}^{N_a} k_a\phi_i(x_a)\phi_j(x_a), \\ [\mathbf{C}_{ba}]_{ja} &= -c_a\phi_j(x_a), & [\mathbf{K}_{ba}]_{ja} &= -k_a\phi_j(x_a), \\ [\mathbf{C}_{ab}]_{ai} &= -c_a\phi_i(x_a), & [\mathbf{K}_{ab}]_{ai} &= -k_a\phi_i(x_a), \\ [\mathbf{C}_{aa}] &= \text{diag}(c_a), & [\mathbf{K}_{aa}] &= \text{diag}(k_a), \\ \mathbf{f}_b &= \mathbf{f}_F + \mathbf{f}_g, & [\mathbf{M}_{bb}]_{ij} &= \delta_{ij}, \\ \mathbf{f}_{Fj} &= \int_0^L f\phi_{bj}dx, & [\mathbf{M}_{aa}] &= \text{diag}(m_a) \\ \mathbf{f}_{gj} &= -m_b g \int_0^L \phi_j dx, & \mathbf{q}_b &= [q_{b1} q_{b2} \dots q_{bn}]^T, \\ \mathbf{f}_{aa} &= -m_a g, & \mathbf{z} &= [z_1 z_2 \dots z_n]^T, \\ \mathbf{f} &= [\mathbf{f}_b \mathbf{f}_a]^T, & \mathbf{u} &= [\mathbf{q} \mathbf{z}]^T, \\ \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{M}_{aa} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{bb} & \mathbf{C}_{ba} \\ \mathbf{C}_{ab} & \mathbf{C}_{aa} \end{bmatrix}, & \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{ba} \\ \mathbf{K}_{ab} & \mathbf{K}_{aa} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

и где је $\mathbf{0}$ нула-матрица реда $n \times N_a$, ω_i је i -та сопствена фреквенца мостовске греде, а $\xi = c_s I_b / Y_b I_b$ је коефицијент глобалног пригушења материјала од којег је сачињена греда.

5.2.1 Решење у фреквентном домену

За решење у фреквентном домену, посматра се квази-стационаран режим вибрација система, где систем услед дејства хармонијског оптерећења осцилује око свог равнотежног положаја, односно положаја који би систем заузео услед дејства силе Земљине теже, када на њега не би деловало дато хармонијско оптерећење. Овакви услови осциловања могу се описати једначином која се изводи из једначине (5.6), уколико се узме да је $f(x, t) = f_0(x)e^{i\Omega_F t}$, $\mathbf{f}_{gj} = \mathbf{f}_{aa} = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, $a = 1, 2, \dots, N_a$, при чему су $f_0(x)$ и Ω_F амплитуда и кружна фреквенца осциловања датог хармонијског оптерећења. У квази-стационарном режиму конструкција осцилује синхроно и синфазно са хармонијском побудом, тако да се може писати да је $\mathbf{u}_{ss}(x, \Omega_F, t) = \mathbf{u}_0(x, \Omega_F)e^{i\Omega_F t}$, и тада се једначина (5.6) своди на:

$$(-\Omega_F^2 \mathbf{M} + (i\Omega_F) \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{u}_0 = \mathbf{f}_0, \quad (5.8)$$

односно:

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{A}^{-1}(\Omega_F)\mathbf{f}_0, \quad (5.9)$$

где су $\mathbf{A}(\Omega_F) = -\Omega_F^2\mathbf{M} + (\nu\Omega_F)\mathbf{C} + \mathbf{K}$, и $\mathbf{f}_0 = [\mathbf{f}_{F_0} \vec{0}]^T$, односно $\mathbf{f}_{F_0j} = \int_0^L f_0 \phi_{b_j} dx$, а $\vec{0}$ је нула-вектор реда N_a .

Када су једначином (5.9) одређене амплитуде временских функција $\mathbf{q}_0(\Omega_F)$ и функција померања апсорбера $\mathbf{z}_a(\Omega_F)$, амплитуде вибрација греде могу се одредити из једначине (5.3) као:

$$w_{b_{ss}}(x, \Omega_F, t) \approx \sum_{i=1}^n \phi_{b_i}(x) q_{0i}(\Omega_F) e^{i\Omega_F t}. \quad (5.10)$$

Амплитудно-фреквентна функција померања греде изражена једначином (5.10) представља решење проблема у квазистационарном режиму осциловања.

5.2.2 Решење у временском домену

Како би био узет у обзир и најопштији разматрани случај када се у математичком моделу јављају и изводи нецелог реда, за решавање једначине (5.6) у временском домену биће примењена Њумаркова апроксимативна метода нумеричке интеграције, како је описано у Поглављу 3.4 - 3.6. Узимајући у обзир дискретизацију временског домена, једначина (5.6) исписана за тренутак $t_{\langle i+1 \rangle}$ постаје:

$$\bar{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{u}}_{\langle i+1 \rangle} + \bar{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{u}}_{\langle i+1 \rangle} + \bar{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{\langle i+1 \rangle} = \bar{\mathbf{f}}_{\langle i+1 \rangle}. \quad (5.11)$$

Када су познате вредности временских функција и вредности померања ослонаца у почетном тренутку t_0 , као и вредности њихових првих и других извода по времену у том тренутку, за сваки наредни тренутак t_{i+1} се ове вредности могу одредити итеративно применом једначина (3.99), које ће овде бити поновљене ради прегледности:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\langle i+1 \rangle} &= \mathbf{A}_N^{-1} \mathbf{b}_{\langle i \rangle}, \\ \dot{\mathbf{u}}_{\langle i+1 \rangle} &= \frac{\gamma_N}{\beta_N \Delta t} (\mathbf{u}_{\langle i+1 \rangle} - \mathbf{u}_{\langle i \rangle}) + \left(1 - \frac{\gamma_N}{\beta_N}\right) \dot{\mathbf{u}}_{\langle i \rangle} + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma_N}{2\beta_N}\right) \ddot{\mathbf{u}}_{\langle i \rangle}, \\ \ddot{\mathbf{u}}_{\langle i+1 \rangle} &= \frac{1}{\beta_N (\Delta t)^2} (\mathbf{u}_{\langle i+1 \rangle} - \mathbf{u}_{\langle i \rangle}) - \frac{1}{\beta_N \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_{\langle i \rangle} - \left(\frac{1}{2\beta_N} - 1\right) \ddot{\mathbf{u}}_{\langle i \rangle}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

уз подсећање да су:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_N &= \frac{1}{\beta_N (\Delta t)^2} \bar{\mathbf{M}} + \frac{\gamma_N}{\beta_N \Delta t} \bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{K}}, \\ \mathbf{b}_{\langle i+1 \rangle} &= \bar{\mathbf{f}}_{\langle i+1 \rangle} + \bar{\mathbf{M}} \left(\frac{1}{\beta_N (\Delta t)^2} \mathbf{u}_{\langle i \rangle} + \frac{1}{\beta_N \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_{\langle i \rangle} + \left(\frac{1}{2\beta_N} - 1\right) \ddot{\mathbf{u}}_{\langle i \rangle} \right) + \\ &+ \bar{\mathbf{C}} \left(\frac{\gamma_N}{\beta_N \Delta t} \mathbf{u}_{\langle i \rangle} - \left(1 - \frac{\gamma_N}{\beta_N}\right) \dot{\mathbf{u}}_{\langle i \rangle} - \Delta t \left(1 - \frac{\gamma_N}{2\beta_N}\right) \ddot{\mathbf{u}}_{\langle i \rangle} \right). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Када су познате вредности вектора \mathbf{u} у сваком тренутку дискретизованог временског

домена, тиме су директно одређена и апсолутна померања динамичких апсорбера, док се померања мостовске греде могу одредити као:

$$w_b(x, t_{\langle i \rangle}) \approx \sum_{r=1}^n \phi_{b_r}(x) q_{b_r}(t_{\langle i \rangle}) = \sum_{r=1}^n \phi_{b_r}(x) u_{b_r \langle i \rangle}. \quad (5.14)$$

Да би описани поступак могао бити спроведен, неопходно је одредити вредности временских функција $q_{b_r}(0)$ и положаја апсорбера $z_a(0)$ у тренутку t_0 , односно дефинисати почетне услове кретања.

Одређивање почетних услова

У даљем тексту ће бити изведени изрази за одређивање почетних услова за мостовску греду статичког система просте греде са N_a додатих динамичких апсорбера. У оквиру ове дисертације биће разматран само овај случај, али се напомиње да се овде изложени поступак може применити и за мостовске греде другачијег статичког система.

Проста греда са додатих N_a апсорбера приказана је на Слици 5.1(a). Систем се налази у пољу Земљине теже и претпоставља се да се на почетку осциловања налази у стању мировања. Стога се почетни услови одређују према равнотежном положају који систем заузима услед (статичког) дејства сопствене тежине његових елемената. Мостовска греда оптерећена је сопственом тежином мостовске конструкције и саме греде, као и тежинама додатих апсорбера. У овде разматраном примеру, претпоставља се да је мостовска греда константног попречног пресека дуж целе своје дужине, тако да се сопствена тежина мостовске конструкције и греде моделирана једнакоподељеним оптерећењем интензитета mg . Динамички апсорбери су у овом, глобалном механичком моделу моделирани као концентрисане масе, повезане са гредом вискоеластичним елементима на местима x_a , тако да су њихове тежине моделиране као концентрисане силе интензитета $m_a g$ које делују на одговарајућим местима на греди. Мостовска греда са оптерећењем које на њу делује приказана је на Слици 5.1(a),(b). Почетни услови ће бити одређени на основу деформисаног облика носача, односно статичких угиба греде услед дејства наведених тежина. На основу претпоставки наведених у Поглављу 2, може се применити принцип суперпозиције, те ће укупан статички угиб греде бити одређен као:

$$w_0(x) = w_0^{mg}(x) + \sum_{a=1}^{N_a} w_0^{F_a}(x), \quad (5.15)$$

где је $w_0(x) = w_b(x, 0)$ једначина еластичне линије мостовске греде, w_0^{mg} угиб греде услед сопствене тежине, а $w_0^{F_a}$ угиб греде услед дејства тежине a -тог апсорбера.

Из Теорије еластичности је познато да једначина еластичне линије просте греде услед једнакоподељеног оптерећења има облик:

$$w_0^m g(x) = -\frac{mg}{YI} \left(\frac{1}{24} x^4 - \frac{L}{12} x^3 + \frac{L^3}{24} x \right). \quad (5.16)$$

Једначина еластичне линије греде услед дејства тежине a -тог апсорбера биће одређена коришћењем везе између момента савијања $M(x)$, угла нагиба тангенте на еластичну линију $\varphi(x)$ и угиба греде $w(x)$, уз претпоставку да је мостовска греда сачињена од еластичног материјала. Под описаним условима биће:

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx}w(x) \equiv w'(x) \quad , \quad (YI)^{-1} M(x) = \frac{d}{dx}\varphi(x) \equiv \varphi'(x) = w''(x) . \quad (5.17)$$

Једначина момента савијања за греду оптерећену концентрисаном силом F_a на растојању x_a од њеног левог краја гласи:

$$M(x) = \begin{cases} \frac{L-x_a}{L}m_ag x , & x \in [0, x_a] , \\ \frac{L-x_a}{L}m_ag x - m_ag(x - x_a) = \left(\frac{L-x_a}{L} - 1\right)x + m_ag x_a , & x \in [x_a, L] . \end{cases} \quad (5.18)$$

На основу веза (5.17), изрази за угао нагиба тангенте на еластичну линију и угиб носача се могу одредити интеграцијом израза (5.18), чиме се добија:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{L-x_a}{L}m_ag \frac{1}{2}x^2 + c_1 = \varphi_1(x) , & x \in [0, x_a] , \\ \left(-\frac{x_a}{L}\right)\frac{1}{2}x^2 + m_ag x_a x + c_2 = \varphi_2(x) , & x \in [x_a, L] , \end{cases} \quad (5.19)$$

$$w(x) = \begin{cases} \frac{L-x_a}{L}m_ag \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_3 = w_1(x) , & x \in [0, x_a] , \\ \left(-\frac{x_a}{L}\right)\frac{1}{6}x^3 + m_ag x_a \frac{1}{2}x^2 + c_2 x + c_4 = w_2(x) , & x \in [x_a, L] . \end{cases} \quad (5.20)$$

Непознате константе интеграције одређују се из граничних услова:

$$w_1(0) = 0 , \quad w_2(L) = 0 , \quad w_1(x_a) = w_2(x_a) , \quad \varphi_1(x_a) = \varphi_2(x_a) \quad , \quad (5.21)$$

чиме се добија:

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{m_ag}{6L}x_a^3 + \frac{m_ag}{2}x_a^2 - \frac{m_ag}{3}Lx_a , \\ c_2 &= -\frac{m_ag}{6L}x_a^3 - \frac{m_ag}{3}Lx_a , \\ c_3 &= 0 , \\ c_4 &= \frac{m_ag}{6}x_a^3 . \end{aligned} \quad (5.22)$$

У коначном, након сређивања, добија се израз за једначину еластичне линије носача услед дејства тежине a -тог апсорбера у облику:

$$w_0^{F_a}(x) = \begin{cases} \frac{1}{YI} \left[\left(\frac{L-x_a}{L} \frac{m_ag}{6}\right) x^3 + \left(-\frac{m_ag}{6L}x_a^3 + \frac{m_ag}{2}x_a^2 - \frac{m_ag}{3}Lx_a\right) x \right] & x \in [0, x_a] , \\ \frac{1}{YI} \left[-\frac{m_ag}{6L}x_a^3 + \left(\frac{m_ag}{2}x_a\right) x^2 + \left(-\frac{m_ag}{6L}x_a^3 - \frac{m_ag}{3}Lx_a\right) x + \frac{m_ag}{6}x_a^3 \right] & x \in [x_a, L] , \end{cases} ,$$

$$a = 1, 2, \dots, N_a . \quad (5.23)$$

Описани поступак схематски је приказан на Слици 5.1(c).

Када су познати угиби греде услед сваке од разматраних тежина засебно, они се могу

суперпонирати и дати укупан статички угиб мостовске греде како је приказано изразом (5.15). Потом се почетни услови неопходни за решавање система једначина (5.12) могу одредити увођењем Галеркинове апроксимације у израз (5.15), односно:

$$w_b(x, 0) = w_0(x) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(0) = w_0(x). \quad (5.24)$$

Ако се једначина (5.24) помножи са масом по јединици дужине мостовске конструкције m и потом редом са сваком од n пробних функција $\phi_j(x)$ у Галеркиновој апроксимацији, па се затим тако добијени изрази интеграле у границама $[0, L]$, пошто су пробне функције $\phi_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$ међусобно ортонормиране у односу на масу греде, директно се добијају изрази за вредности непознатих временских функција Галеркинове апроксимације у почетном тренутку $q_j(0)$ као:

$$q_j(0) = m \int_0^L \phi_j(x) w_0(x) dx. \quad (5.25)$$

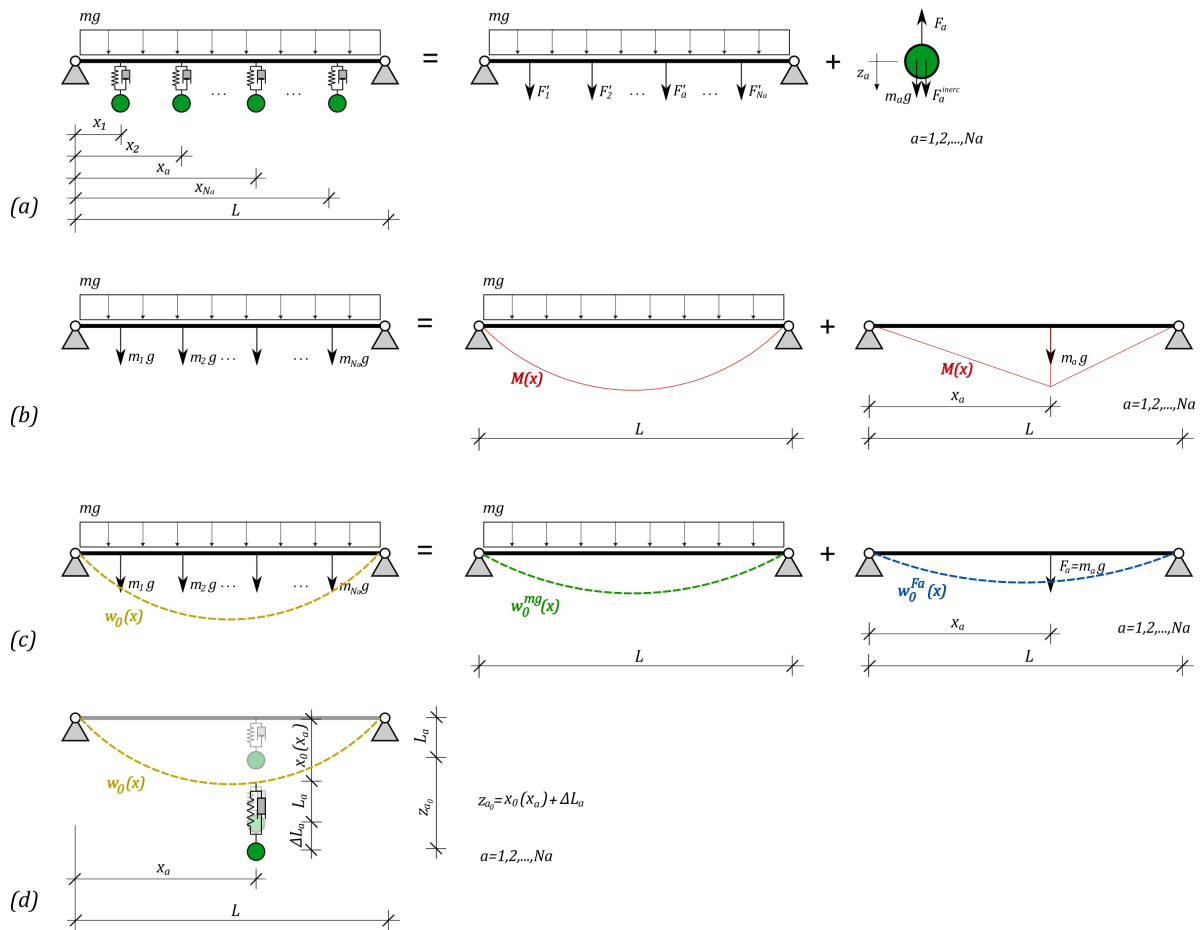
Почетни положај a -тог апсорбера у односу на линију недеформисаног носача може се одредити као:

$$z_a(0) = w(x_a, 0) - \frac{m_a g}{k_a}, \quad (5.26)$$

као што се може видети на Слици 5.1(d), а при чему је k_a модуло еластичности материјала елемента којим је маса апсорбера повезана са мостовском гредом. Када су одређене временске функције у Галеркиновој апроксимацији једначином (5.25) и положаји маса апсорбера $z_a(0)$ једначином (5.26) у почетном посматраном тренутку, тиме је потпуно одређен вектор \mathbf{u} који фигурише у систему једначина (5.12). Ако се претпостави да се конструкција у почетном тренутку налази у стању мировања, то значи да су и брзине и убрзања система у том тренутку једнака нули, па се, у коначном, почетни услови за решавање система једначина (5.12) могу изразити као:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(0)} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_b(0) \\ \mathbf{z}(0) \end{Bmatrix}, \\ \dot{\mathbf{u}}_{(0)} &\equiv 0, \\ \ddot{\mathbf{u}}_{(0)} &\equiv 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Овиме је постављени проблем у потпуности одређен тако да се вредности непознатих функција могу итеративно одредити у сваком наредном тренутку $t_{(i+1)}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, применом израза (5.12), што уједно представља и коначно решење постављеног проблема.



Слика 5.1 Одређивање почетних услова, (a) Проста греда оптерећена сопственом тежином и тежином додатих динамичких апсорбера, (b) Принцип суперпозиције - функције момента савијања греде услед задатог оптерећења, (c) Принцип суперпозиције - укупан угиб греде једнак је збиру угиба услед сопствене тежине и угиба услед сваке од N_a тежина додатих апсорбера, (d) Одређивање статичког угиба a -тог апсорбера

5.3 Валидација предложеног модела међудејства мостовске конструкције и динамичких апсорбера

Применљивост предложеног приступа за моделирање међудејства мостовске конструкције и динамичких апсорбера биће проверена поређењем резултата са резултатима доступним у литератури, који су такође потврђени и експериментално. Поређење ће бити извршено са резултатима које су приказали Самани и Пеликано у свом раду "Ублажавање вибрација греда услед покретног оптерећења применом линеарних и нелинеарних динамичких апсорбера" из 2009. године [5], за посебан случај вискоеластичне греде са једним додатим вискоеластичним динамичким апсорбером.

У поменутом раду разматране су вибрације просте греде дужине L , површине попречног пресека и момента инерције I , услед покретне трансверзалне силе интензитета F_0 која се креће брзином V у позитивном смеру подужне координате греде x , уз присуство динамичког апсорбера масе m_0 који се налази на растојању d од левог краја греде. Греда

је сачињена од вискоеластичног материјала густине ρ , модула еластичности Y и коефицијента модалног пригушења у p -том тону осциловања ξ_p . У цитираном раду аутори су показали да је први тон осциловања далеко најутицајнији у овом случају, па су се одлучили за апроксимативно решење које узима у обзир само осцилације у првом тону. Маса апсорбера је са гредом повезана еластичном опругом крутости k и вискозном пригушницом коефицијента пригушења λ . Сви наведени параметри модела Саманија и Пеликана имају одговарајуће парњаке и у моделу који се предлаже у овој дисертацији, тако да се вредности могу усвојити директно. Једина разлика је што је код цитираних аутора уведено модално пригушење, док се у овој дисертацији користи глобални коефицијент пригушења који је изведен из примењених конститутивних релација за сваки од материјала. Међутим, пошто су се аутори наведеног рада одлучили за једно-тоналну апроксимацију проблема, коефицијент модалног пригушења за први тон осциловања који су они користили могао је бити усвојен као коефицијент глобалног пригушења у овде предложеном моделу, а како је у наведеним околностима, као што је напоменуто, први тон осциловања далеко најутицајнији, то је и грешка оваквог упрошћавања била прихватљиво мала.

У Табели 5.1 су приказане вредности параметара модела Саманија и Пеликана за случај који ће бити коришћен за проверу овде предложеног модела мостовске конструкције са апсорберима, уз истовремено приказивање и одговарајућих парњака ових параметара у овде предложеном моделу.

Табела 5.1: Усвојене вредности параметара за случај једне греде са масом

Параметар	Ознака у [5]	Усвојена ознака	Мерна јединица	Вредност
Дужина	L	L	m	4.0
Ширина	b	b	m	0.03
Висина	h	h	m	0.03
Модуо еластичности	E	Y	GPa	206.80
Специфична маса	ρ	ρ	kg/m^3	7820.00
Маса динамичког апсорбера	m_0	m_a	kg	1.406
Коефицијент крутости опруге апсорбера	k	k_a	N/m'	877.67
Коефицијент пригушења пригушнице апсорбера	ξ_p	c_a	Ns/m'	12.980
Амплитуда покретне концентрисане силе	F_0	F_0	N	9.8
Брзина кретања покретног оптерећења	V	V	m/s	21.5
Релативни положај апсорбера на греди	d	x_a	-	0.5

У цитираном истраживању је усвојено да је брзина кретања концентрисане силе константна, а интензитет брзине је мењан и праћене су највеће забележене вредности амплитуда осцилација греде, у циљу одређивања критичне брзине покретног оптерећења, односно брзине при којој су амплитуде осциловања греде највеће. Функција покретног оптерећења дата је изразом:

$$F(t) = F_0 \phi_p(V \cdot t) H\left(\frac{L}{V} - t\right), \quad (5.28)$$

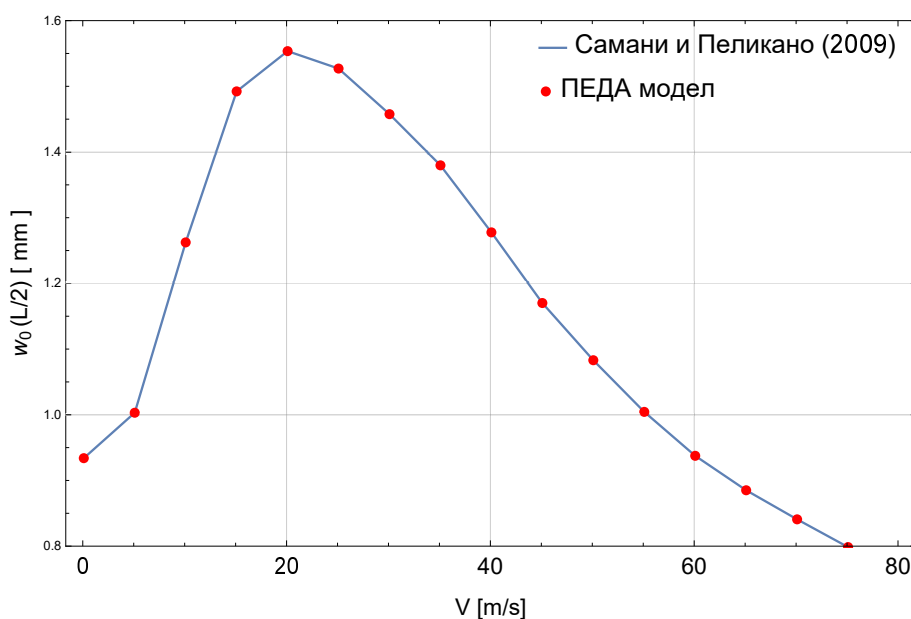
где је $\phi_p(x)$ функција облика осциловања греде у p -том тону осциловања, а Хевисајдова функција обезбеђује да сила делује на греду од почетка посматраног временског интервала

до тренутка када пређе целу греду, након чега систем наставља да осцилује слободно. Да би се у овде предложеном моделу добило оптерећење таквог облика, узима се да је полазна функција оптерећења греде која фигурише у једначини (5.1) дата изразом:

$$f(x, t) = F_0 \delta(x - V \cdot t) H\left(\frac{L}{V} - t\right) \quad (5.29)$$

чиме се након увођења Галеркинове просторне дискретизације домена добија израз идентичан изразу (5.28). Потребно је напоменути још и то да Самани и Пеликано нису узимали у обзир утицај сопствене тежине система, што се у овде предложеном моделу може постићи уколико се узме да је убрзање Земљине теже $g = 0$.

На Слици 5.2 су приказани резултати који показују како се максимална амплитуда вибрација мења у зависности од брзине кретања покретног оптерећења. Пошто су Самани и Пеликано у цитираном раду дали аналитичко апроксимативно решење те је могла бити изведена функција зависности амплитуда од брзине кретања оптерећења, њихови резултати су приказани непрекидном линијом. Са друге стране, с обзиром да је у оквиру ове дисертације примењена нумеричка интеграција једначина, решење је добијено у облику дискретних вредности за више различитих вредности брзина покретног оптерећења. За брзине оптерећења узете су вредности од $0 \frac{m}{s}$ до $80 \frac{m}{s}$, са кораком од $5 \frac{m}{s}$, и прорачун је спроведен засебно за сваку од њих. Резултати добијени применом овде предложеног модела приказани су тачкама на Слици 5.2.



Слика 5.2 Поређење резултата Саманија и Пеликана [5] са резултатима овде предложеног модела за максималне амплитуде вибрација зависно од брзине покретног оптерећења

Као што се може видети на слици, слагање резултата је одлично, што указује на поузданост и применљивост овде предложеног модела.

* * * * *

У коначном, овиме је потврђена основаност и математичка ваљаност предложеног начина моделирања мостовске греде са додатим динамичким апсорберима који поседују и пијезоелектрична својства, као и поступка за одређивање динамичких карактеристика оваквог система и понашања конструкције услед дејства произвољног трансверзалног оптерећења. У наредном поглављу ће овде развијени модел бити примењен за нумеричку анализу утицаја појединих параметара модела на његова динамичка својства, као и на количину произведене електричне енергије, у циљу оптимизације вредности параметара и спровођења техно-економске анализе исплативости примене предложеног решења у реалним условима коришћења мостовске конструкције.

Глава 6

Анализа утицаја параметара предложеног модела на динамичка својства система

У претходним поглављима је развијен механички и математички модел којим се описује понашање носеће греде мостовске конструкције услед дејства покретног оптерећења, уз присуство динамичких апсорбера са пијезоелектричним својствима, као и електро-механичко понашање ових апсорбера при вибрацијама основне конструкције. У овом поглављу биће испитани поједини параметри предложеног модела и њихов утицај на динамичка својства система.

Као што је раније поменуто, модел је осмишљен тако да се прорачун спроводи у две фазе, где се најпре одреди понашање основне конструкције и померања апсорбера услед дејства покретног оптерећења, а потом се померања апсорбера у овом, глобалном моделу користе као функције померања ослонаца за детаљан модел сваког ПЕДА понаособ, чиме се на крају добија и податак о укупно произведеној количини електричне енергије. Стога ће и анализа утицаја параметара модела бити подељана у два дела - прво ће бити испитани параметри глобалног модела и утицај ПЕДА на динамичка својства система и њихова ефикасност у смањењу амплитуда вибрација основне конструкције, а затим и утицај појединих параметара самих ПЕДА на ефикасност претварања механичке енергије вибрација у електричну енергију. На крају ће бити приказан и пример примене решења предложеног у овој дисертацији на контролу вибрација мостовске греде конкретног моста, а биће изложене и препоруке и поступци за одређивање оптималних вредности параметара модела зависно од карактеристика одређене основне конструкције.

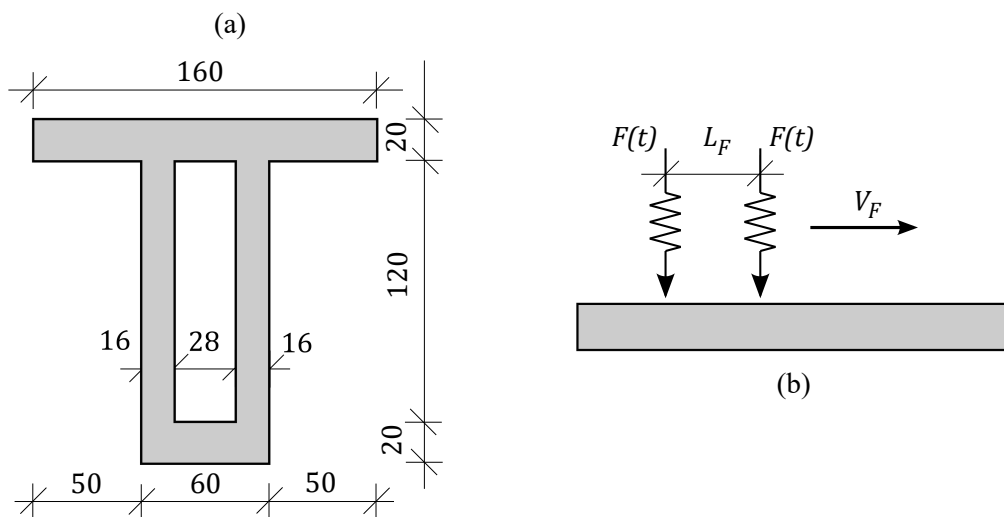
6.1 Анализа утицаја ПЕДА на динамику моста

Како би се одредило дејство апсорбера на динамичка својства система, најпре ће бити одређене динамичке карактеристике саме основне конструкције, односно мостовске греде без додатих апсорбера. Сви прорачуни биће спроведени на примеру типске носеће греде

бетонске мостовске конструкције сандучастог "те" (Т) попречног пресека приказаног на Слици 6.1.

6.1.1 Динамичка анализа греде без апсорбера

За потребе нумеричке анализе биће разматране вибрације бетонске мостовске греде константног попречног пресека који је приказан на Слици 6.1а. Претпоставља се да је греда слободно ослоњена на својим крајевима и да је њен распон једнак $L = 30m$. Биће узето да је греда израђена од бетона класе C35/40, односно да је специфична маса бетона $\rho_b = 2100kg/m^3$ и модуло еластичности $Y_b = 35GPa$. Такође, за бетон ће бити усвојен класичан Келвин-Војтов вискоеластичан материјални модел са глобалним коефицијентом пригушења $\xi_b = 0.0001$. За греду са описаним геометријским и материјалним карактеристикама урађена је контрола статичких угиба према граничном стању употребљивости у скалду са тренутно важећим прописима [195]. Гранично стање употребљивости је задовољено, са односом $w_R/w_d = 10.00cm/6.93cm$, а добијени статички угиби су, у складу са једначинама (2.47), искоришћени за одређивање почетних услова у динамичкој анализи конструкције.

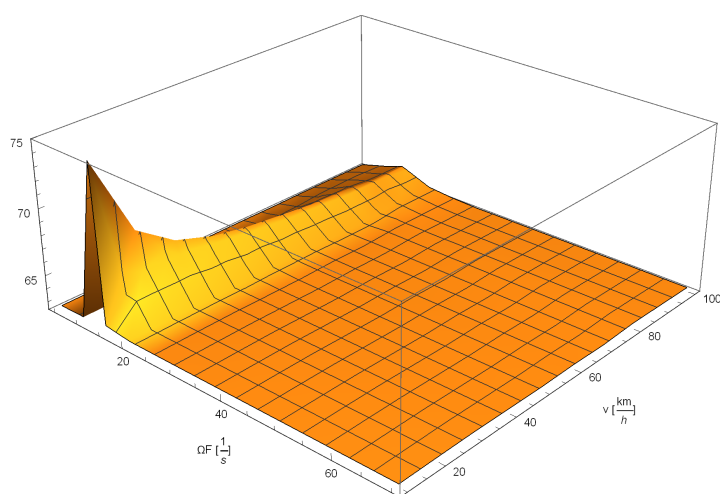


Слика 6.1 а) Попречни пресек мостовске греде, б) Схематски приказ усвојеног модела покретног оптерећења

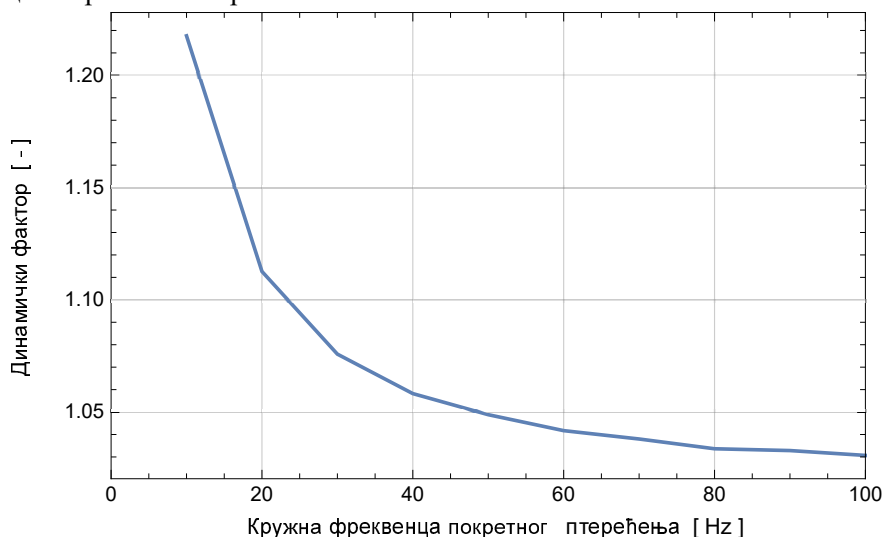
За потребе овде изложених нумеричких анализа биће посматран утицај једног типског моторног возила са две осовине, какав је на пример путнички аутомобил. Оптерећење од возила се може моделирати на различите начине [196]. У контексту механичког модела моста коришћеног у претходним поглављима, покретно оптерећење биће моделирано као низ од две покретне концентрисане силе хармонијски променљивог али међусобно увек једнаког интензитета, односно две силе које се налазе међусобно на увек истом одстојању L_F и крећу истом брзином V_F у истом смеру, као што је приказано на Слици 6.1b. Сходно томе, функција оптерећења биће дата изразом:

$$F(t) = F_0 \phi_p(V_F \cdot t) H\left(\frac{L_F}{V_F} - t\right). \quad (6.1)$$

Укупан интензитет оптерећења једнак је тежини типског возила $F_0 = m_F g$, а хармонијски део оптерећења је уведен да би симулирао дејство амортизера при преласку возила преко моста. Претпостављено је да се осцилације интензитета обе покретне силе дешавају синхронно и синфазно, око три четвртине тежине возила као равнотежне вредности, а са амплитудом промене једнакој једној четвртини тежине возила, чиме је обухваћен и утицај инерције возила. Овакав начин моделирања оптерећења дозвољава могућност динамичког увећања амплитуда вибрација мостовске конструкције услед уласка у резонацу, уколико се кружна фреквенца осциловања интензитета покретних сила поклопи са неком од сопствених фреквенци мостовске конструкције. Међутим, прелиминарна анализа је показала да је овај утицај наглашен само за фреквенце оптерећења врло блиске основној сопственој фреквенци греде и за релативно ниске брзине кретања возила, што се може видети и на Слици 6.2a односно 6.2b.



(a) Максималне амплитуде вибрација средине греде у зависности од брзине и кружне фреквенце покретног оптерећења



(b) Динамички фактор увећања угиба средине греде у односу на статички угиб у зависности од кружне фреквенце покретног оптерећења

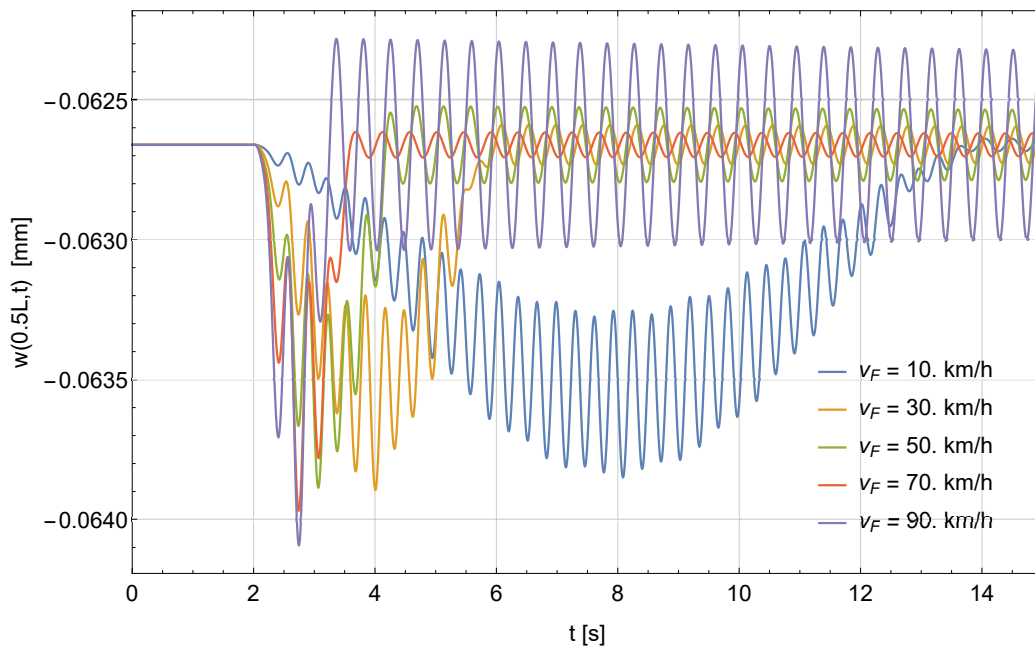
Слика 6.2 Анализа утицаја фреквенце и брзине покретног оптерећења на динамички одзив моста

Са дијаграма на Слици 6.2b се може закључити да је динамичко увећање угиба мостовске греде у односу на њен статички угиб, чак и у случају резонантног стања $\Omega_F = \omega_1$, мање од 5% при брзинама већим од 50km/h, а да је максимално динамичко увећање угиба остварено при најнижим брзинама покретног оптерећења, тако да за брзину возила од 10km/h увећање износи нешто више од 20%. Овако ненаглашен утицај резонанце се може објаснити чињеницом да се возило на мосту налази релативно кратко време тако да повећане амплитуде вибрација не стигну да се развију.

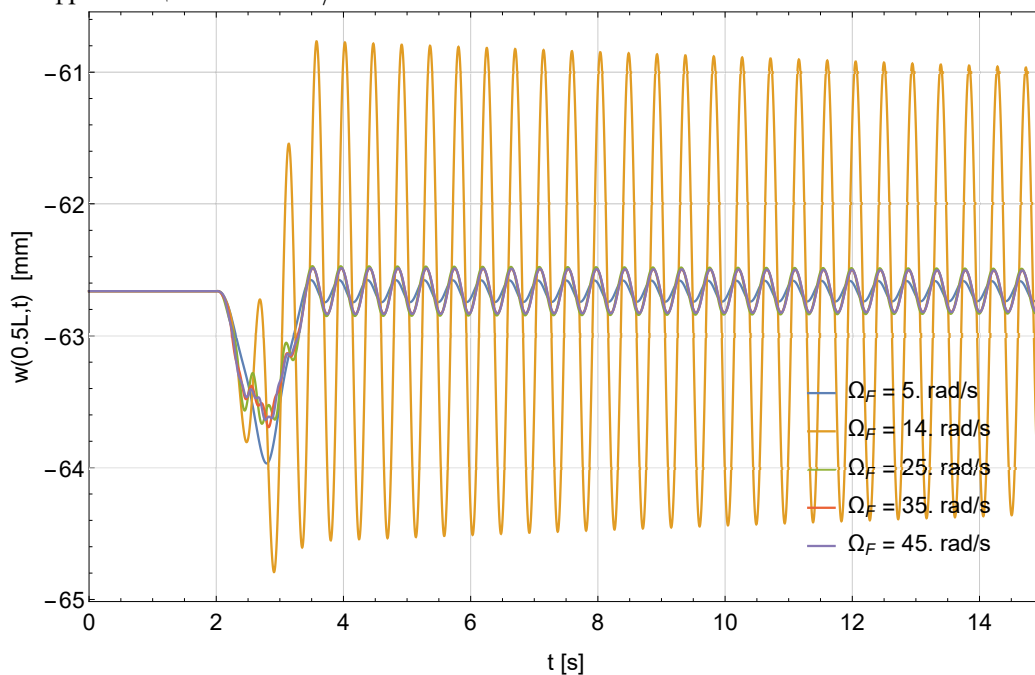
На Слици 6.3а су приказани дијаграми померања средине мостовске греде за случај константне фреквенце покретног оптерећења $\Omega_F = 10rad/s$, при различитим брзинама кретања овог оптерећења. Јасно су уочљиве три фазе вибрација. Прве две секунде греда мирује, јер возило још није на њој. Затим следи фаза принудних вибрација која траје од тренутка када возило ступи на греду до тренутка када је напусти, након чега почиње трећа фаза кретања - слободне осцилације. Што је брзина кретања возила већа, то фаза принудних осцилација краће траје. Са слике је очигледно да брзина покретног оптерећења утиче на амплитуде вибрација, како на оне у фази принудних, тако и на оне у фази слободних осцилација греде. Примећује се директна сразмера између брзине возила и величине амплитуда. Међутим, с обзиром на то да чак ни у случајевима релативно великих брзина кретања увећање амплитуда није веће од 5%, а притом имајући у виду и претпоставку да ће се овде разматрани систем за динамичку апсорпцију и добијање електричне енергије користити на дугачким мостовима, углавном удаљених од насељених места, на којима се може очекивати да ће се брзине кретања возила преко моста најчешће налазити у границама између 50 и 130km/h, у даљим разматрањима ће бити усвојено да се типско возило креће брзином од 80km/h, уколико није другачије напоменуто.

Са друге стране, Слика 6.3b приказује дијаграме померања средине греде услед покретног оптерећења различите фреквенце осциловања, али увек исте брзине кретања дуж моста $v_F = 50km/h$. Овај дијаграм јасно показује да фреквенца покретног оптерећења утиче на фреквенцу вибрација греде *само у фази принудних осцилација*, а да након што возило напусти мост греда наставља слободно да осцилује према својим сопственим динамичким карактеристикама. Другим речима, фреквенца осциловања греде у фази слободних осцилација потпуно је независна од оптерећења које је побудило греду, и зависи искључиво од механичких својстава греде. Ова чињеница се може искористити у циљу пројектовања динамичких апсорбера оптималних карактеристика како би се максимизирало стварање електричне енергије, упркос стохастичкој природи саобраћајног оптерећења.

Према свему наведеном, може се закључити да брзина и фреквенца покретног оптерећења имају одређени утицај на амплитуде вибрација мостовске греде. Међутим, с обзиром на то да фаза принудних осцилација траје релативно кратко и да фреквенца оптерећења, осим у резонантном режиму, не утиче битно на величину амплитуда вибрација греде, а да се чак и у најнеповољнијем случају резонанце у основном тону осциловања јавља максимално динамичко увећање амплитуда од 20% и то само при релативно ниским брзинама



(a) Померања средине греде услед покретног оптерећења различитих брзина кретања, а увек једнаке фреквенце $\Omega = 10\text{rad/s}$



(b) Померања средине греде услед покретног оптерећења различитих фреквенци, а увек једнаке брзине кретања $v_F = 50.0\text{km/h}$

Слика 6.3 Одзив конструкције у временском домену услед преласка једног типског возила

кретања возила, због великог броја параметара и ограниченог простора, у даљим нумеричким анализама биће усвојено да је фреквенца покретних сила једнака $\Omega_F = 20\text{rad/s}$ и да се оне крећу дуж греде брзином 80km/h , ако није другачије напоменуто, а при чему се истиче да се описани поступак прорачуна који је приказан у овим нумеричким истраживањима потпуно применљив и у случају других вредности ових параметара.

Овиме се закључује динамичка анализа мостовске греде без додатих апсорбера услед

дејства покретног оптерећења. У наставку ће бити приказана анализа утицаја различитих параметара динамичких апсорбера на вибрације мостовске конструкције за случај преласка једног типског возила. Вредности параметара за моделирање мостовске греде и покретног оптерећења дати у овом одељку важиће и у свим наредним поглављима, уколико није другачије наглашено.

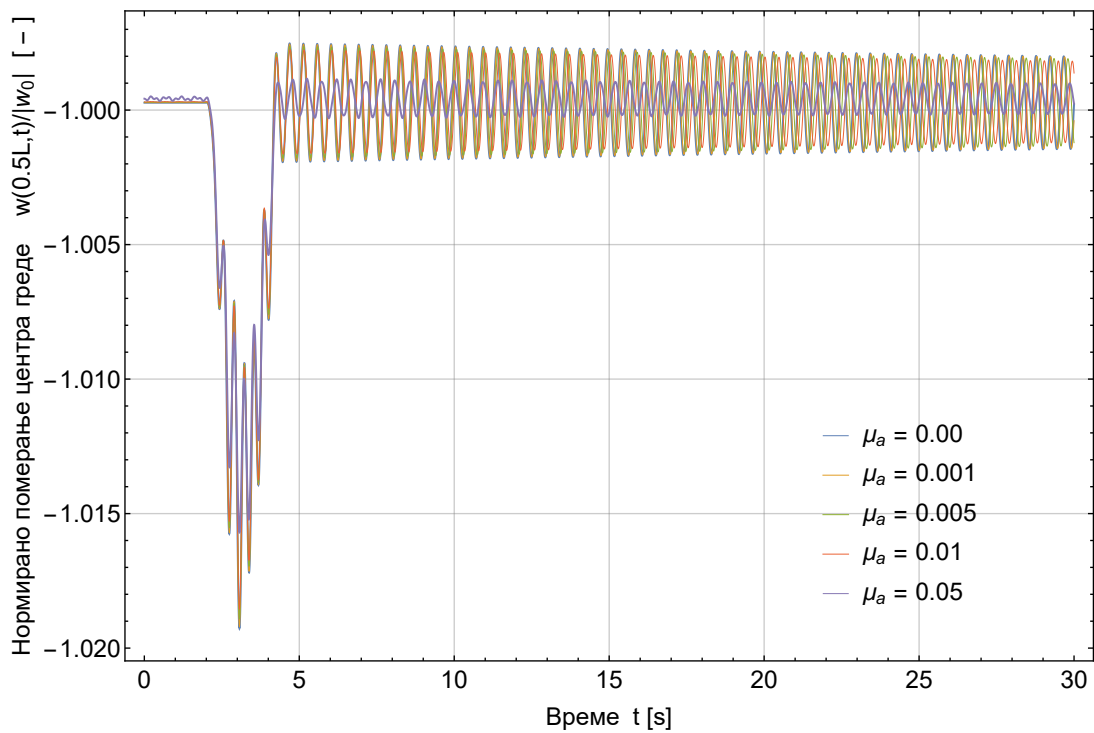
6.1.2 Утицај масе и крутости апсорбера

Контрола вибрација греде може се извршити додавањем динамичких апсорбера, а ефикасност апсорбера умногоме зависи од његове масе и начина повезивања са основном конструкцијом, те је најпре испитан утицај управо тих параметара. Како би у резултатима било што израженије дејство масе и крутости (и пригушења) везе апсорбера са гредом, анализа је најпре ограничена на случај када се греди дода само један динамички апсорбер, који се налази на средини греде. При таквим условима, анализирано је понашање греде услед дејства покретног оптерећења моделираног на начин описан у Поглављу 6.1.1 и поређено је са понашањем греде без додатих апсорбера. При томе су вариране маса динамичког апсорбера и крутост везе апсорбера са мостовском гредом.

На Слици 6.4 су приказана померања средине мостовске греде $w_b(\frac{L}{2}, t)$ нормирана у односу на статички угиб средине греде $w_0(L/2)$ током првих 30 секунди осциловања, уз присуство једног динамичког апсорбера постављеног такође на средину греде ($x_a = L/2$). Веза апсорбера и греде моделирана је вискоеластичним елементом чија крутост са крутошћу греде стоји у односу $\lambda_a = 0.0008$, а коефицијент пригушења је сразмеран крутости са коефицијентом пропорционалности $\xi_a = 0.0001$. Маса апсорбера је варирана и на слици су приказани резултати за различите вредности односа масе апсорбера према укупној маси греде μ_a .

На слици се јасно уочавају три фазе осциловања као и у случају празне мостовске греде - фаза без оптерећења, фаза принудних осцилација (односно преласка покретног оптерећења преко моста) и фаза слободних осцилација (након што оптерећење напусти мост). Може се приметити да је дејство динамичког апсорбера у фази принудних осцилација релативно мало, а да то дејство постаје нешто израженије у фази слободних осцилација греде. Такође, резултати показују да је дејство апсорбера занемарљиво мало све док његова маса не постане релативно врло велика. Наиме, утицај апсорбера постаје уочљив тек за однос масе апсорбера према маси греде од $\mu_a = 5\%$, што у разматраном случају подразумева масу апсорбера од преко 10 тона. Јасно је да овакав апсорбер, иако технички изводљив, не представља нарочито рационално решење, а свакако не спада ни у групу "расподељених" динамичких апсорбера описаних у Поглављу 1.1, који представљају предмет истраживања у оквиру ове дисертације.

У циљу постизања веће делотворности апсорбера у контроли вибрација мостовске греде потребно је подесити параметре апсорбера тако да одговарају конкретной основној конструкцији на којој се апсорбер примењује. Овакви, подешени динамички апсорбери и пригушивачи вибрација (енг. Tuned Mass Dampers) имају подешен однос своје масе и

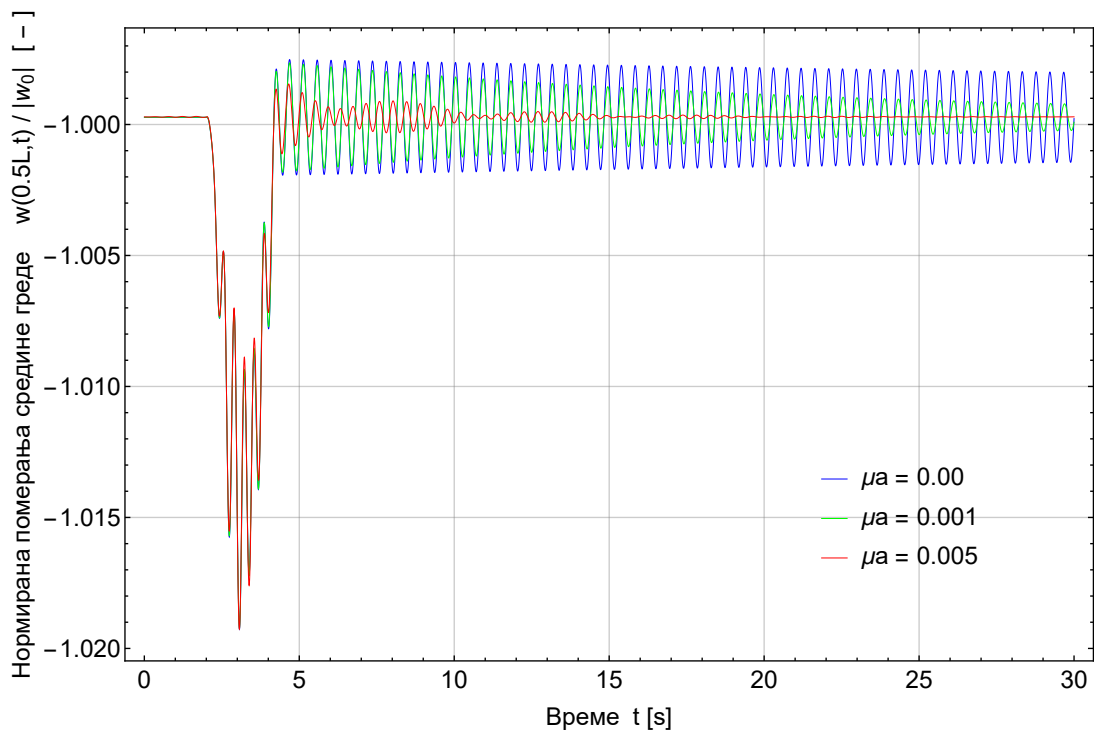


Слика 6.4 Померања средине греде нормирана у односу на статички угиб средине греде $w_0(L/2)$, уз присуство једног динамичког апсорбера са различитим односом масе апсорбера према укупној маси греде μ_a

крутости тако да се сопствена фреквенца апсорбера поклапа са неком од сопствених фреквенци основне конструкције, најчешће основном. У том случају учинак апсорбера се знатно увећава, као што је приказано на Слици 6.5. На слици су приказани резултати за случај празне греде (плава линија) и случај присуства једног подешеног динамичког апсорбера масеног односа $\mu_a = 0.001$ и односа крутости $\lambda_a = 3.608 \cdot 10^{-6}$, и $\mu_a = 0.005$ и односа крутости $\lambda_a = 18.039 \cdot 10^{-6}$.

Као што се на слици може уочити, дејство апсорбера у фази принудних осцилација и даље није изражено, али је повећање ефикасности контроле вибрација у фази слободних осцилација очигледно, чак и за релативно мале масе апсорбера. Потребно је напоменути и то да се ово повећање ефикасности апсорбера при описаним условима оптерећења остварује само за подешавање апсорбера према *основној* фреквенци греде, док је за подешавање према вишим тоновима повећање учинковитости незнатно. Стога ће у наредним разматрањима бити подразумевано да се користе апсорбери који су подешени према основном тону основне конструкције, уколико није другачије напоменуто.

Описани резултати односе се на случај када се на греди налази један динамички апсорбер, али делотворност ове класе "расподељених" апсорбера заправо се постиже применом већег броја ових уређаја на основној конструкцији. У наредном одељку биће приказана анализа утицаја броја и положаја апсорбера на динамику разматране мостовске греде.



Слика 6.5 Померања средине греде нормирана у односу на статички угиб средине греде $w_0(L/2)$, уз присуство једног подешеног динамичког апсорбера са различитим односом масе апсорбера према укупној маси греде μ_a и одговарајућом крутошћу тако да се погађа основна сопствена фреквенца греде

6.1.3 Утицај броја и положаја апсорбера

Претходно је показано да додавање једног динамичког апсорбера конструкцији битно мења њен одзив чак и за релативно мале масе апсорбера. Сада ће бити испитан утицај најпре броја додатих апсорбера, а затим и њиховог положаја на греди. Резултати ове анализе приказани су на Слици 6.6.

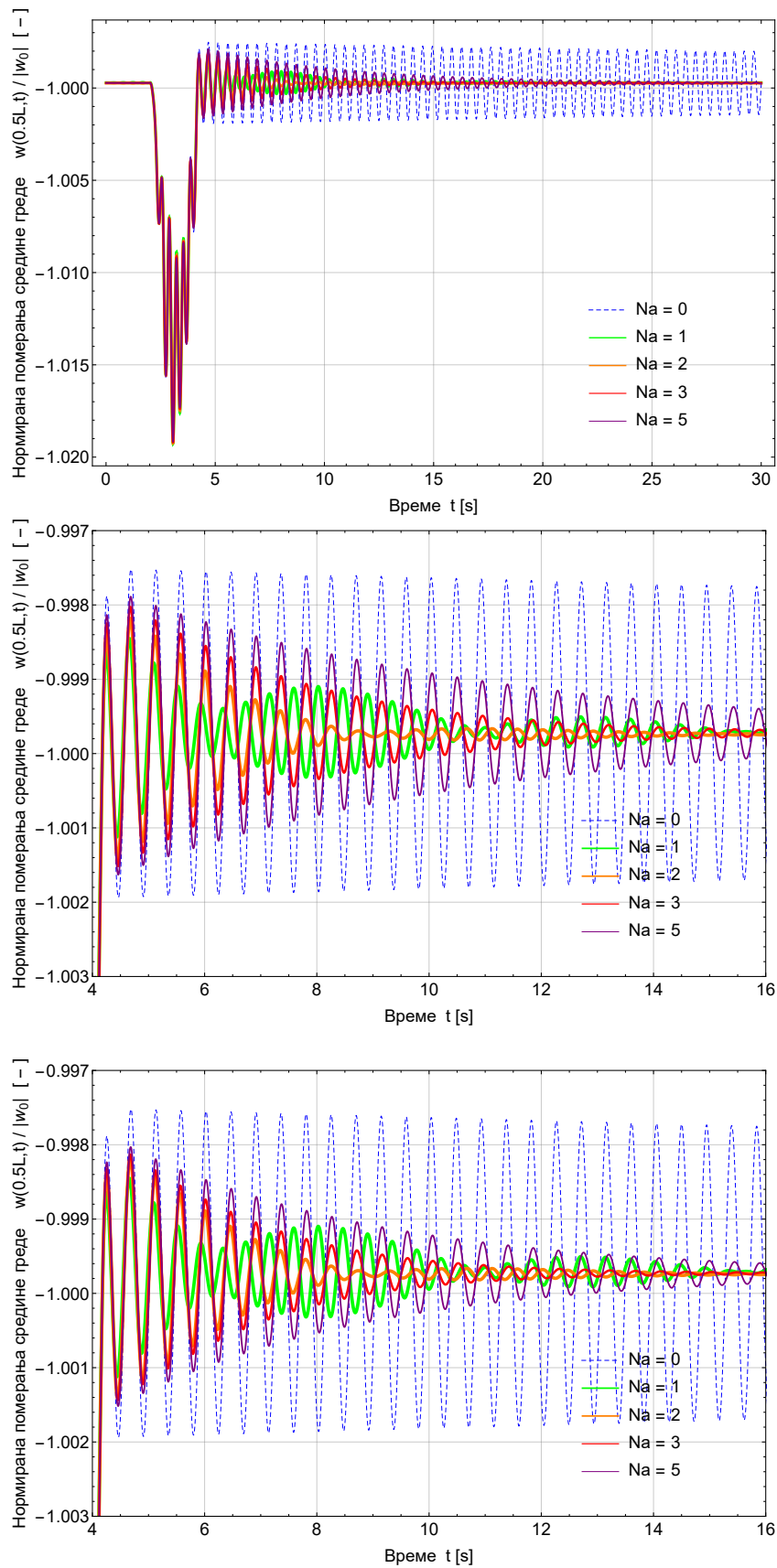
На Слици 6.6 приказана су нормирана померања средине греде услед раније описаног покретног оптерећења, уз присуство различитог броја подешених динамичких апсорбера. Узето је да су сви апсорбери међусобно исте масе, а да је укупна маса свих апсорбера додатих греди једнака 0.5% масе греде, односно $m_a^{tot} = \sum_{a=1}^{N_a} m_a = 0.005m_b$. Крутост сваког апсорбера одређена је тако да се сопствена фреквенца апсорбера изједначи са основном фреквенцом греде. Такође, за почетну анализу усвојено је да су апсорбери на греди распоређени равномерно, тј. на једнакој међусобној удаљености, што чини да је $x_a = \frac{aL}{N_a+1}$, $a = 1, 2, \dots, N_a$. Слика 6.6а приказује одзив конструкције током разматраних 30 секунди кретања, где су поново јасно уочљиве три фазе вибрација - мировање, принудне осцилације и слободне осцилације конструкције. На Слици 6.6б је приказан детаљ првих 10 секунди фазе слободних осцилација греде како би се утицај броја апсорбера могао боље уочити. Као што се може видети на овој слици, најбоље пригушење вибрација добија се у случају примене 2 апсорбера. Вредности амплитуда вибрације при примени 3 односно 5 апсорбера опадају нешто спорије, чак спорије и од случаја када се греди

придода само један апсорбер, што се и могло очекивати с обзиром на то да је, при описаним условима испитивања, маса сваког појединачног апсорбера све мања што је више апсорбера додато греди. У случају више додатих апсорбера разлика у односу на греду без апсорбера је и даље врло изражена. Такође, делотворност већег броја мањих апсорбера може се додатно повећати уколико се они групишу ближе положају трбуха облика основног сопственог тона осциловања основне конструкције. Слика 6.6с приказује случај када је различит број апсорбера еквидистантно распоређен унутар средње трећине распона просто ослоњене мостовске греде. Као што се може видети на слици, у случају оваквог груписања додатих апсорбера, брзина гашења вибрација греде релативно се мало мења са повећањем броја апсорбера, што показује да је груписањем апсорбера унутар средње трећине распона њихова ефикасност у контроли вибрација повећана.

Из представљене анализе се може закључити да се применом и одговарајућим распоредом већег броја апсорбера мање масе успешно може постићи жељени ефекат контроле вибрација мостовске конструкције, а овакав начин контроле вибрација има предност у погледу техничког извођења и манипулације самих апсорбера с обзиром на њихову мању масу. При томе, имајући у виду да су разматраним апсорберима додата и пијезоелектрична својства, у случају коришћења већег броја ПЕДА се може произвести вишеструко већа количина електричне енергије, уз незнатно слабији учинак у погледу контроле вибрација основне конструкције.

* * * * *

Према свему наведеном, може се закључити да проналажење оптималног броја, положаја и механичких својстава апсорбера представља сложен проблем вишекритеријумске вишепараметарске оптимизације који се мора спроводити за сваки конкретан случај понаособ, узимајући у обзир карактеристике и услове ослањања основне конструкције. Међутим, обзиром на постављене циљеве, таква анализа превазилази обим ове дисертације, али свакако представља један од могућих, чак пожељних и потребних праваца даљег истраживања. Притом треба напоменути да концепт, поступак и параметри предложени у овој тези могу служити као полазна основа за даља истраживања, али се такође могу и директно применити на ма који конкретан случај у пракси. На описани начин се могу одредити механичка својства и динамичко понашање система услед произвољног оптерећења, чиме је закључена основна анализа утицаја ПЕДА на основну конструкцију. Такође, како се на описани начин могу одредити и померања сваког од апсорбера, обезбеђени су услови за одређивање количине електричне енергије која се у сваком конкретном разматраном случају ствара у примењеним ПЕДА, за сваки од њих понаособ користећи поступак описан



Слика 6.6 Нормирана померања средине греде уз присуство различитог броја апсорбера (N_a), при чему је укупна маса апсорбера увек једнака 0.5% масе греде

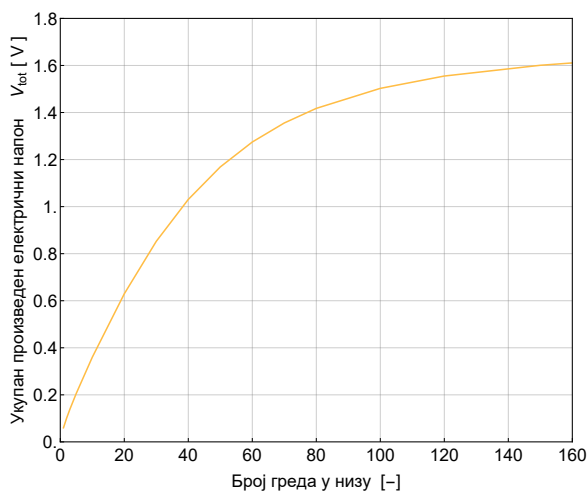
у Поглављу 5. У наставку ће бити анализиран утицај појединих параметара самих ПЕДА на количину генерисане електричне енергије у циљу постизања оптималних вредности и уобличавању препорука према којима се у сваком конкретном случају може пројектовати систем динамичких апсорбера који ће имати највеће могуће дејство при контроли вибрација моста притом стварајући највећу могућу количину електричне енергије.

6.2 Оптимизација параметара појединачних ПЕДА

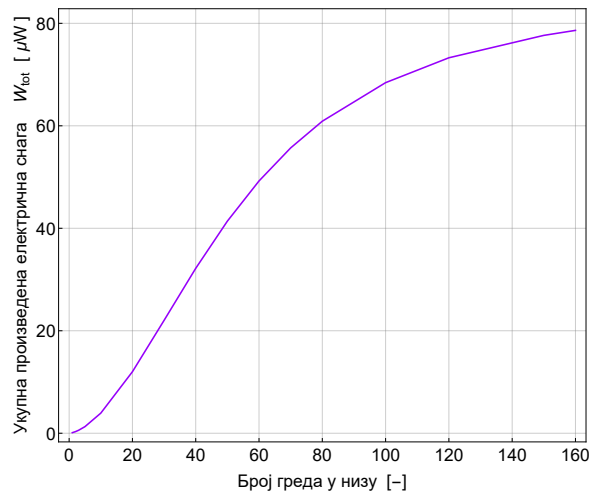
У наредном тексту биће размотрен утицај појединих параметара динамичког апсорбера са придодатим пиезоелектричним својствима предложеног у оквиру ове дисертације на механичка и електрична својства ПЕДА. Најпре ће бити испитан утицај броја повезаних биморфних греда, затим утицај карактеристика слоја спрезања и потом утицај броја, положаја и величине додатих концентрисаних маса.

6.2.1 Утицај броја греда

Додавањем биморфних греда динамичким апсорберима анализираним у Поглављу 6.1 део механичке енергије њихових вибрација може се превести у електричну енергију. Повећањем броја биморфних греда повећава се и учинак тако добијених ПЕДА, а повезивањем суседних греда слојем спрезања могу се релативно једноставно пројектовати жељена динамичка својства таквих ПЕДА. Слика 6.7 приказује укупну генерисану количину електричног напона (а) и електричне снаге (б) за илустративни пример хармонијског померања динамичког апсорбера по функцији $w_b(t) = W_0 \sin(2t)$ у трајању од 10s, за систем сачињен од различитог броја повезаних биморфних греда. Такође, како би динамичка својства система дошла до изражаја, узето је да различите греде имају различит број додатих концентрисаних маса, који је једнак редном броју греде у низу. При томе је узето да је укупна додата маса једнака за сваку од греда. Са слике је очигледно да је повећање броја греда у систему, будући да су све греде биморфне, директно сразмерно повећању количине генерисане електричне енергије. Такође, може се приметити и да, при описаним условима и начину формирања система греда, укупна количина произведене електричне енергије се повећањем броја греда система асимптотски приближава одређеној коначној вредности. Међутим, достизање ове вредности ограничено је и физичким условима практичног извођења апсорбера, пошто би, за описане геометријске и материјалне карактеристике греда, било веома сложено направити систем са толико великим бројем повезаних греда. Стога ова анализа указује на постојање теоријског максимума ефикасности описаног система, али је стварна ефикасност ПЕДА условљена техничким ограничењима извођења самих апсорбера. За потребе даљих анализа, из практичних разлога и рационалног коришћења доступних рачунарских капацитета, биће разматрани системи од највише 20 повезаних биморфних греда.



(a)



(b)

Слика 6.7 Утицај броја повезаних греда на укупну генерисану количину електричног напона (а) и електричне снаге (б) при хармонијском померању ослонаца греда $w_b(t) = W_0 \sin(2t)$ у трајању од 10s

6.2.2 Утицај слоја спрезања

С обзиром на непредвидљивост и неуједначеност саобраћајног оптерећења моста, па тиме и непредвидљивост одговарајућег кретања динамичких апсорбера, односно функција померања ослонаца додатих биморфних греда, није могуће пројектовати ПЕДА таквих динамичких својстава да увек раде у резонантном режиму вибрација. Међутим, како већим амплитудама вибрација одговарају и веће количине произведене електричне енергије, пожељно је да се систем пројектује тако да се у резонантном стању или стању блиском резонантном стању налази што чешће и за што је могуће шири опсег фреквенци побуде. Због тога је погодна динамичке карактеристике система пројектовати према амплитудно-фреквентном фијаграму укупно произведеног електричног напона или електричне снаге.

Уколико би се апсорберу придодало низ међусобно засебних биморфних греда, такав систем би улазио у резонантно стање само за релативно врло уске опсеге фреквенци побуде, при чему би само поједине греде система биле побуђене. Увођењем слоја спрезања којим се повезују суседне биморфне греде, утицаји вибрација се преносе са греде на греду чиме се мењају динамичке карактеристике система и више греда бива побуђено на осциловање. Одговарајућим одабиром материјалних карактеристика слоја спрезања могу се пројектовати жељена динамичка својства система и знатно проширити радни опсег ПЕДА.

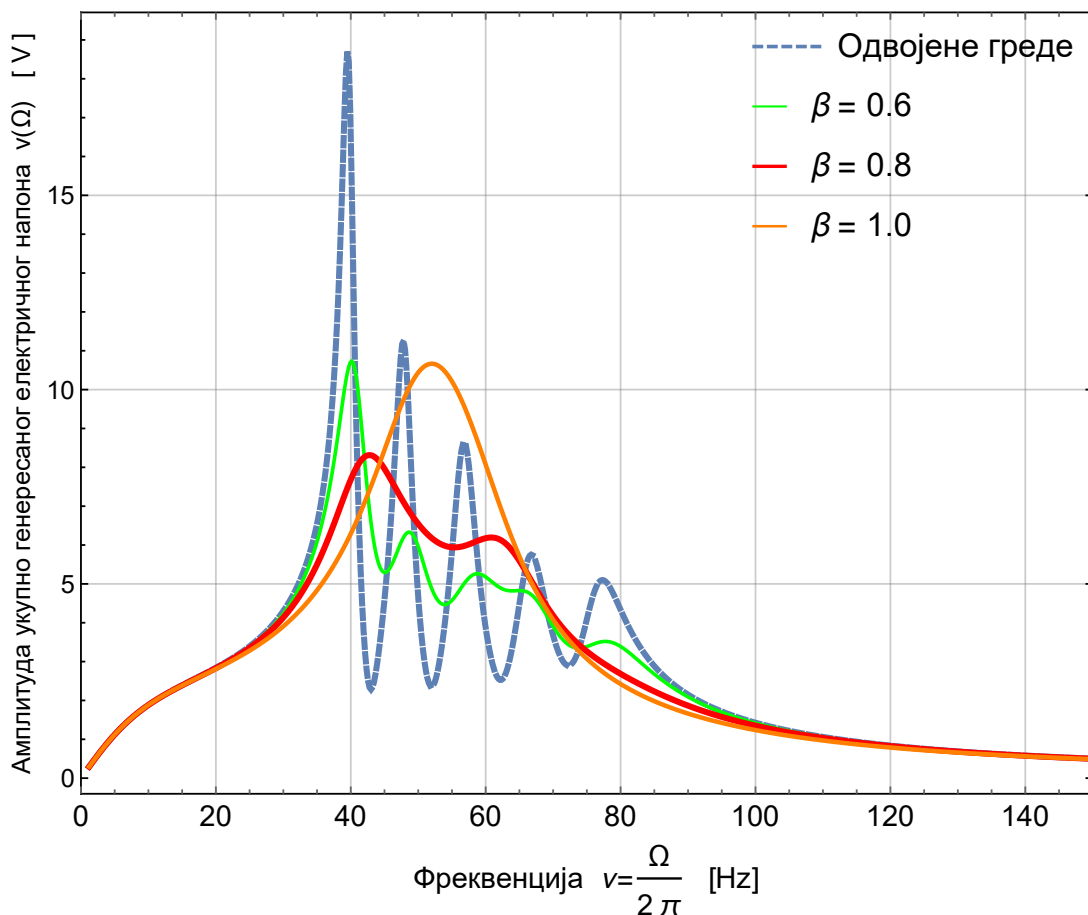
На Слици 6.8 приказан је амплитудно-фреквентни дијаграм укупног генерисаног електричног напона за систем састављен од $N_b = 5$ биморфних греда са различитим бројем и распоредом додатих концентрисаних маса, како је описано у Табели 6.1.

Суседне греде су повезане слојем спрезања чије је пригушење моделирано фракционо-вискоеластичним Келвин-Војтовим моделом са временом ретардације $\tau_2^\beta = 0.200 N/m$. Ред фракционог извода β је вариран како би се показао утицај на динамичке карактери-

Табела 6.1: Број, величина и распоред додатих концентрисаних маса

Р. бр. греде k	Број додатих маса $N_{m_{(k)}}$	Релативна величина додатих маса $m_{(k)p}/m_b L$	Релативан положај додатих маса $z_{(k)p}/L$
1	2	0.5; 0.5	0.5; 1.0
2	3	0.5; 0.5; 0.5	0.6; 0.8; 1.0
3	1	1.3	1.0
4	1	2.0	1.0
5	3	0.2; 0.2; 0.3	0.333; 0.667; 1.0

стике система. Као што се може видети на Слици 6.8, када су греде међусобно одвојене систем улази у резонантно стање само за релативно уске опсеге фреквенци побуде. Међутим, што је ред фракционог извода у моделу слоја спрезања већи, то је веза између греда јача те се низ греда све више понаша као целина, да би се у граничном случају класичног вискоеластичног пригушења, за вредност извода $\beta = 1.0$, систем понашао као целина и улазио у резонантно стање за знатно шири опсег фреквенци принуде, иако са унеколико смањеним амплитудама вибрација. Овај пример показује како се применом слоја спрезања одговарајућих карактеристика може пројектовати жељени одговор и динамичка својства ПЕДА, у циљу максимизирања његове утиковитости у претварању механичке енергије вибрација у електричну.



Слика 6.8 Утицај материјалних карактеристика слоја спрезања на динамичка својства ПЕДА

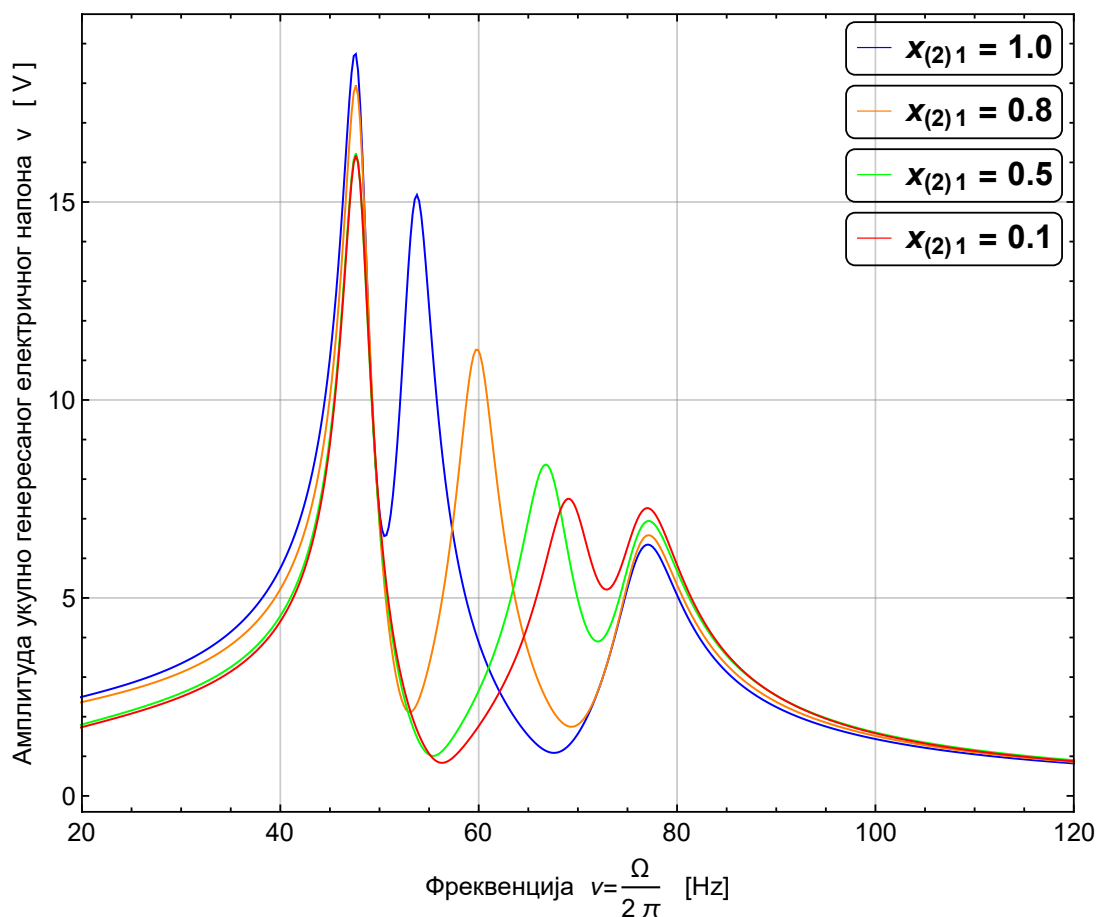
6.2.3 Утицај броја, величине и положаја додатих маса

Жељена динамичка својства система могу се обезбедити и одговарајућим избором броја и величина концентрисаних маса додатих биморфним гредама система, као и њиховим одговарајућим распоредом на гредама. Овакав начин постизања одговарајућих динамичких карактеристика је веома ефикасан и једноставан за примену, будући да се не уводе нови конструкцијски елементи и да геометрија свих биморфних греда остаје иста што појефтињује процес производње.

Пример коришћења додатих концентрисаних маса за постизање жељених динамичких карактеристика система приказан је на Слици 6.9. За овај пример је коришћен систем од три повезане биморфне греде са различитим бројем, величином и положајем додатих маса, као што је наведено у Табели 6.2. Слој спрезања је моделиран са фракционо вискоеластичним пригушењем времена ретардације $\tau_2^\beta = 0.002$ и реда фракционог извода $\beta = 0.3$. У циљу приказа поступка прилагођавања динамичких карактеристика система, број, величина и положај свих маса су одржавани истим, изузев прве масе на другој греди, чији је положај вариран. Како би утицај промене положаја ове масе у систему био очигледан, на Слици 6.9 је приказан амплитудно-фреквентни дијаграм функције укупно генерисаног електричног напона зависно од фреквенце побуде у квазистационарном режиму вибрација услед хармонијског померања ослонаца. Пошто је систем састављен од три греде међусобно сличних карактеристика, као што је и очекивано, прве три основне фреквенце система повезаних греда међусобно су блиске, као што се види на слици. Такође, са слике је јасно да се једноставним померањем једне масе на другој греди може утицати на вредност друге основне фреквенце система. Описаним поступком се врло ефикасно и лако могу пројектовати или по потреби кориговати динамички апсорбери у циљу постизања жељених динамичких карактеристика. Из свега наведеног може се закључити да предложена нова конструкција ПЕДА пружа могућност прецизног пројектовања апсорбера одговарајућих својстава како би били оптимално прилагођени примени на конкретној мостовској конструкцији у циљу постизања највећег могућег умањења амплитуда вибрација моста уз истовремено стварање највеће могуће количине електричне енергије.

Табела 6.2: Број величина и распоред додатих концентрисаних маса

Р. бр. греде	Број додатих маса	Релативна величина додатих маса	Релативан положај додатих маса
k	$N_{m(k)}$	$m_{(k)p}/m_b L$	$z_{(k)p}/L$
1	1	1.3	1.0
2	2	0.5; 0.5	$x_{(2)1}$ 1.0
3	3	0.2; 0.2; 0.3	0.333; 0.667; 1.0



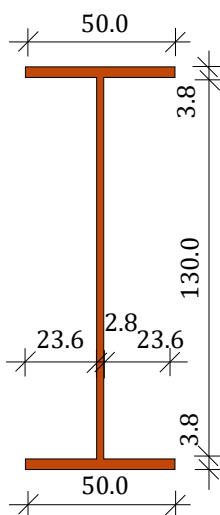
Слика 6.9 Утицај положаја додатих концентрисаних маса на динамичка својства система

6.3 Пример и опис поступка могуће примене предложеног типа апсорбера за контролу вибрација мостовске конструкције

Као целовит пример поступка примене динамичких апсорбера предложених у овој дисертацији биће размотрена могућност примене описаних ПЕДА на конкретну мостовску конструкцију. За потребе овог илустративног примера биће искоришћен један од најстаријих и најпрометнијих мостова у Нишу - Тврђавски мост преко Нишаве. Овај мост је током времена више пута реконструисан и обнављан и у свом садашњем облику представља мост са челичном носећом конструкцијом која у једном распону премошћује реку у дужини од 46m. Носачи моста су слободно ослоњени на обалама, док на крају моста на левој обали реке постоји скривени препуст носача и контра-тег који умањује угибе и амплитуде вибрација моста. Мост је годинама коришћен за комбиновани пешачки и друмски саобраћај. Међутим, услед пропадања система са контра-тегом и повећања саобраћајног оптерећења током година, амплитуде вибрација су постале релативно велике што је убрзало замор материјала и потенцијално могло угрозити поузданост мостовске конструкције. Стога је пре осам година мост затворен за друмски саобраћај и извршена је још једна

реконструкција моста како би се он прилагодио искључиво пешачком саобраћају и данас се као такав и користи. Ипак, једно могуће алтернативно решење за проблем повећаних амплитуда представљала би и примена динамичких апсорбера за контролу вибрација мостовске конструкције, те је због тога изабран управо овај мост за илустративан пример примене ПЕДА предложених у овој дисертацији. Детаљан опис поступка примене ПЕДА дат је у наставку текста.

Биће разматран један челични носач мостовске конструкције, попречног пресека приказаног на Слици 6.10. Оптерећење од сопствене тежине носача, бетонске коловозне конструкције, инсталација и корисно оптерећење сведено је на припадајућу ширину разматраног носача од $b_{eff} = 2m$. Покретно оптерећење моделирано је како је описано у Поглављу 6.1.1. У односу на стварну конструкцију, ради лакшег прорачуна, а притом остајући на страни сигурности, биће уведена следећа упрошћења: (1) Носач ће у статичком смислу бити разматран као проста греда распона $L = 46m$, чиме је потпуно занемарен утицај скривеног препуста и контра-тега; (2) Биће узето да је попречни пресек носача константан по дужини греде, иако стварни носачи у крајња 2 метра уз ослоњце имају линеарно повећање висине од 20% због смичућих напона; (3) Неће бити разматрано бочно торзионо извијање и бочна укрућења носача.



Слика 6.10 Попречни пресек челичног носача мостовске конструкције разматране у овом примеру

За описану конструкцију и под наведеним условима, биће примењено $N_a = 5$ динамичких апсорбера са пијезоелектричним својствима. ПЕДА су распоређени еквилистантно, а геометријске и материјалне карактеристике сваког од њих дате су у Табели 6.3. Такође, сви апсорбери су међусобно исте конструкције и карактеристика, а унутар сваког апсорбера биморфне греде имају разлит број додатих концентрисаних маса. Међутим, укупна додата маса код сваке биморфне греде је за 30% већа од масе саме биморфне греде. Додате концентрисане масе су на свакој од биморфних греда распоређене еквилистантно, при чему се на слободном крају сваке греде налази прва маса.

На Слици 6.11а) је приказан дијаграми померања средине мостовског носача услед преласка једног моторног возила преко моста. Овакво оптерећење изазива померања до-

Табела 6.3: Геометријске и материјалне карактеристике система ПЕДА примењеног за контролу вибрација многостовске конструкције

Карактеристика	Ознака	Мерна јединица	Вредност
Број апсорбера	N_a	-	5
Релативна маса апсорбера	μ_a	%	0.5
Релативна крутост везног елемента	k_a	%	0.08
Коефицијент пригушења везног елемента	ξ_a	%	0.01
Број биморфних греда у апсорберу	N_b	-	5
Дужина биморфних греда у апсорберу	L	mm	80.00
Ширина биморфних греда у апсорберу	b	mm	31.80
Дебљина носећег слоја сваке од биморфних греда	d_s	mm	0.14
Дебљина пијезо-слоја сваке од биморфних греда	d_p	mm	0.26
Модуо еластичности носећег слоја	Y_s	GPa	105.00
Модуо еластичности пијезослоја	Y_p	GPa	66.00
Време ретардације за биморфне греде	τ_1^α	s^α	0.002
Ред фракционог извода за биморфне греде	α	-	0.01
Специфична маса носећег слоја	ρ_s	kg/m^3	9000
Специфична маса пијезо-слоја	ρ_p	kg/m^3	7800
Пијезоелектрична константа	d_p	pC/V	-190
Пермитивност	ϵ	nF/m^3	13.3
Електрична отпорност електричног кола	R	$k\Omega$	33
Продужени модуо стишљивости спрежућих слојева	κ	N/m	1000
Време ретардације спрежућих слојева	τ_2^β	s^β	0.002
Ред фракционог извода код спрежућих слојева	β	-	0.9

датих динамичких апсорбера, и на Слици 6.11b) је приказан дијаграм померања трећег апсорбера у току времена. Услед померања апсорбера, унутар сваког од њих долази до деформације повезаних биморфних греда и производње одређене количине електричне енергије путем директног пијезоелектричног ефекта. На Слици 6.11c) је приказана електрична снага генерисана у сваком од ПЕДА понаособ, услед проласка једног возила преко моста. Како се генерисана електрична енергија из свих ПЕДА складишти у истом акумулатору, кумулативна електрична снага која се добија под описаним условима услед преласка једног типског моторног возила преко моста износи $P_{tot} = 1.004 \cdot 10^{-5} Wh$. Као што се може приметити, то је релативно врло мала количина генерисане снаге. Међутим, ова количина електричне енергије се може вишеструко увећати на више начина.

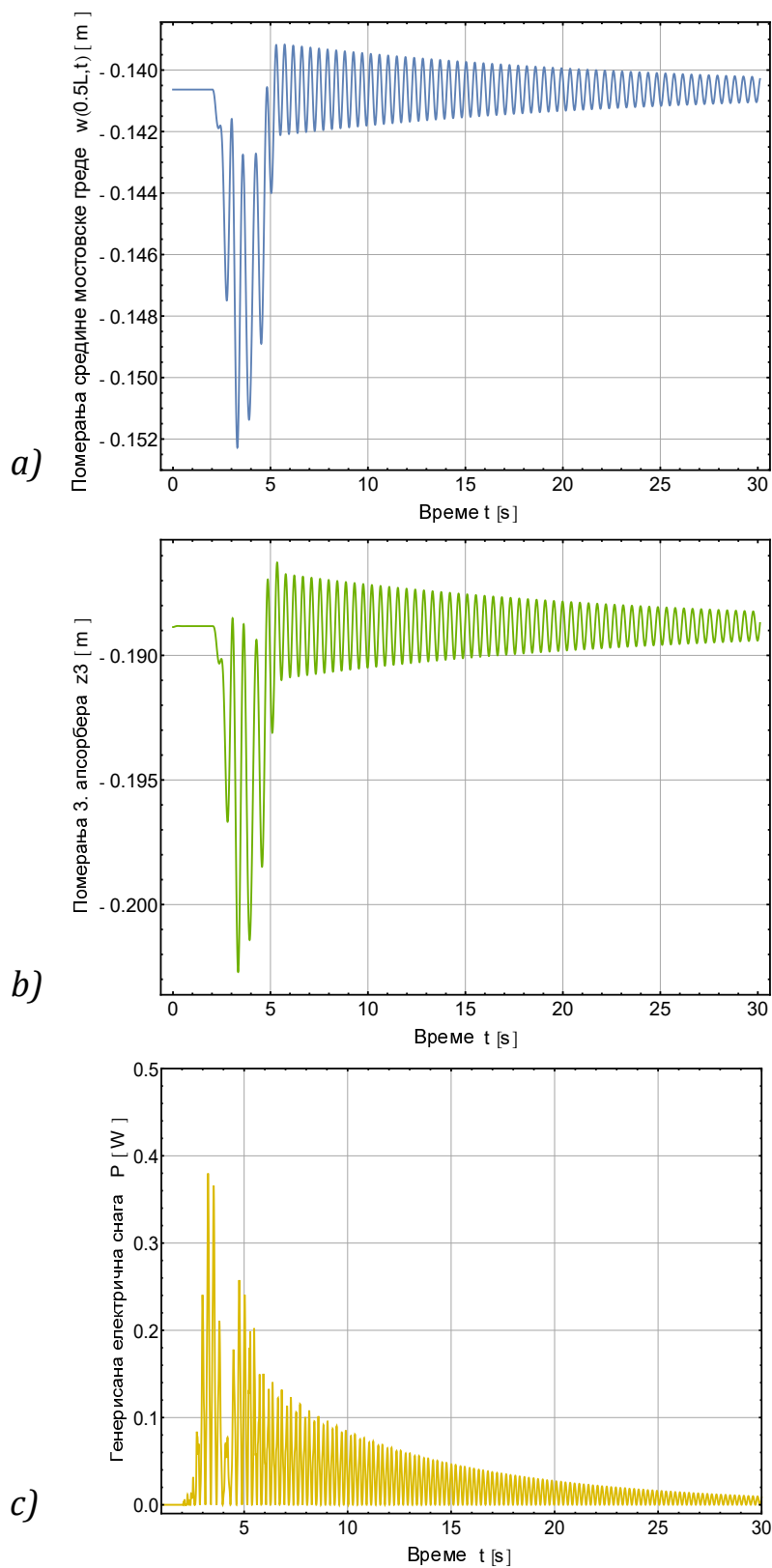
Пре свега, треба имати у виду да се добијена вредност односи на пролазак *само једног* типског возила преко моста. Узимајући у обзир податак да је просечно саобраћајно оптерећење на том мосту износило око 36000 возила у току дана, то се укупна дневна производња електричне снаге повећава на око $0.362 Wh$ дневно.

Такође, оптимизација се може постићи применом ПЕДА са више повезаних биморфних греда, чиме се директно повећава количина генерисане електричне енергије. У овом примеру су, због ограничених рачунарских капацитета, коришћени ПЕДА са по 5 повезаних биморфних греда, али се једнако могу применити и апсорбери са додатим системом од више десетина повезаних греда. Овакви апсорбери би повећали производну цену ПЕДА, али би директно пропорционално утицали на вишеструко увећање генерисане електричне енергије. Тако се, на пример, коришћењем ПЕДА са по 60 повезаних греда може добити приближно $4.34 Wh$ дневно, уз напомену да се ова вредност може додатно повећати уколико се изврши оптимизација распореда и масе динамичких апсорбера за конкретне мостовске носаче.

Поред тога, у овом примеру су апсорбери били додати већ постојећој мостовској конструкцији у циљу њене санације. Међутим, уколико би се примена ПЕДА предвидела већ у фази пројектовања, конструкција би могла бити флексибилнија, а да и даље задовољава гранично стање носивости (ГСН) и гранично стање употребљивости (ГСУ). На пример, за мост који је овде описан, према важећим стандардима за пројектовање челичних конструкција [197], без примене апсорбера мост задовољава и ГСН и ГСУ, при чему је искоришћење носивости материјала при статичком оптерећењу око 40.2%, а угиби остају у границама од око 77.4% вредности максималних дозвољених угиба. Са друге стране, да је у фази пројектовања било предвиђено коришћење апсорбера, димензије носача су могле бити нешто мање, чиме би се повећали угиби моста, али би услед присуства апсорбера чак и при саобраћајном оптерећењу они могли бити контролисани и задржани у дозвољеним границама, а притом би већа померања апсорбера директно условила и повећање количине генерисане електричне енергије. У овом конкретном случају, уколико би се висина ребра гредног носача мостовске конструкције смањила са пројектованих 150cm на 130cm, статички угиби би били готово на граници дозвољених, односно чинили 97.1% дозвољене вредности угиба, док би искоришћење носивости материјала износило око 56.4%. При-

том би се укупна генерисана електрична снага услед проласка једног типског возила преко моста повећала на $24.92Wh$, што представља увећање од око 574% у односу на претходно описану ситуацију. Такође, предвиђањем коришћења ПЕДА још у фази пројектовања могла би се остварити знатна уштеда материјала, будући да би флексибилнија носећа конструкција моста била мања. У наведеном примеру, описаним смањивањем висине ребра греде би се утрошило око $2055kg$ челика мање, што представља и знатну финансијску уштеду и може оправдати додатни издатак у виду израде и постављања самих ПЕДА.

На крају, треба имати у виду још и то да на укупну произведену количину електричне енергије утиче како тип мостовске конструкције, тако и интензитет саобраћајног оптерећења, односно разред пута на којем се одређени мост налази. Тако се код мостовских конструкција система просте греде, будући да се распони ових мостова углавном крећу у границама од $5 - 50m$ и ови мостови се углавном пројектују као релативно круте конструкције, не могу очекивати знатна померања окнструкције при уобичајеном саобраћајном оптерећењу, па се тиме смањује и генерисана количина електричне енергије. Код мостова са конструкцијом континуалног или Герберовог носача на више поља максимални распони које овакви мостови могу да премосте се повећавају и у просеку износе око $50 - 300m$, што подразумева и већа померања конструкције, па тиме и већу количину добијене електричне енергије уколико би се ПЕДА применили код овог типа мостова. Свакако, највећа померања имају висећи мостови као релативно флексибилне конструкције, па је примена ПЕДА код оваквих мостова најисплативија. Такође, просечно саобраћајно оптерећење у току дана, месеца или године зависи од места, односно разреда пута на којем се мост налази. Свакако би највеће оптерећење било на аутопуту, вероватно нешто мање на магистралном путу, односно путу првог реда, и још мање на регионалном, односно путу другог реда. Количина произведене струје у примењеним апсорберима директно је сразмерна интензитету саобраћајног оптерећења моста, па је исплативије користити ПЕДА на путевима вишег реда. Међутим, детаљна анализа утицаја ових фактора превазилази обим ове дисертације, али свакако представља један од могућих и пожељних праваца даљег истраживања.



Слика 6.11 а) Дијаграм померања средине носача мостовске греде $w(0.5L, t)$, б) Дијаграм померања трећег апсорбера, који се налази на средини распона мостовске греде, с) дијаграм генерисане електричне снаге у једном апсорберу. Сви дијаграми приказују утицај преласка једног типског возила преко моста.

Глава 7

Закључна разматрања

У овој дисертацији предложена је **нова конструкција и математички модел динамичког апсорбера за контролу вибрација мостовских конструкција**. Мотивација за развој новог модела апсорбера била је вишеструка.

С једне стране, уочена је потреба за применом динамичких апсорбера како при санацији, пренамени или реконструкцији постојећих, тако и при пројектовању нових, савремених мостовских конструкција, било за друмски, пешачки или мешовити саобраћај. **У овом истраживању, били су разматрани линеарни динамички апсорбери са подешеном масом**, односно апсорбери чија је маса, заједно са крутошћу еластичних елемената којима је апсорбер повезан са основном конструкцијом, подешена тако да се сопствена фреквенца апсорбера поклапа са основном сопственом фреквенцом конструкције, или најчешћом очекиваном фреквенцом принудног оптерећења. Такво подешавање апсорбера за последицу има да апсорбер често ради у стању блиском резонантном стању, па су му амплитуде осциловања веће, чиме дисипира већи део енергије вибрација мостовске конструкције и ефикасније контролише њена померања.

Са друге стране, једако важна мотивација била је и тежња достизања одрживог развоја и производње електричне енергије из обновљивих извора. У овој дисертацији разматрана је **могућност додавања пијезоелектричних елемената динамичким апсорберима** за контролу вибрација мостовских конструкција, што омогућава да се део механичке енергије вибрација мостовске конструкције претвори у електричну енергију путем директног пијезоелектричног ефекта. У предложеном моделу као пијезоелектрични претварачи енергије коришћене су биморфне конзолне греде, као најчешће коришћени и широко доступни пијезоелектрични елементи. **Искорак предложеног модела** у односу на претходна истраживања из ове области **представља могућност да се за носећи слој биморфних греда користе материјали чије се пригушење најбоље моделира применом извода нецелог реда**. Такође, пошто је предвиђено да сви елементи конструкције раде у линеарном режиму деформација, у циљу повећања продуктивности у генерисању електричне енергије, **више биморфних греда међусобно сличних, али довољно различитих динамичких својстава, повезано је у јединствен систем, чиме се радни опсег фреквенци оптерећења при којима систем ПЕДА улази у резонантно стање знатно проширује**, што представља још

један допринос у односу на досадашња достигнућа у овој области. Такође, модел развијен у оквиру ове дисертације предвиђа да су биморфне греде система међусобно повезане целом својом дужином, **а дозвољава и да слојеви спрезања између греда буду израђени од материјала чије се пригушење најбоље описује фракционим вискоеластичним моделом**, што такође представља знатан искорак и побољшање у односу на моделе тренутно доступне у литератури.

На основу предложене конструкције и механичког модела, **развијен је математички модел и изведене су једначине кретања греда ПЕДА, као и једначина за електрично коло**. Овај систем спрегнутих фракционих диференцијалних једначина решен је комбинавањем нумеричких и аналитичких апроксимативних метода. Наиме, најпре је извршена просторна дискретизација проблема применом Галеркинове методе отежаног остатка, а потом је систем решен у фреквентном домену уз претпоставку квази-стационарног режима вибрација, а у временском домену применом Њумаркове методе нумеричке интеграције. Притом је за апроксимацију извода нецелог реда у моделу околним целобројним изводима коришћен поступак предложен од стране Евангелатоса и Спаноса [182], како је детаљно описано у Поглављу 3.4. Због постизања потребног нивоа нумеричке ефикасности коришћена је двострука дискретизација временског домена - груба подела је употребљена за Њумарков итеративни поступак нумеричке интеграције, док је фина подела коришћена за апроксимацију фракционих извода. Притом су коришћени фракциони изводи у Гринвалд-Летњиковљевој дефиницији.

Након што је развијен предложени нови модел динамичког апсорбера са пијезоелектричним својствима, **детаљно је изложен поступак примене ПЕДА за контролу вибрација мостовских конструкција и развијен модел међудејства ПЕДА и моста**. Посебна пажња је посвећена провери математичке и физичке ваљаности предложеног модела, и резултати добијени употребом овде предложеног модела поређени су са резултатима из доступне литературе за више карактеристичних посебних случајева. Показано је да су слагања резултата одлична, чиме је **извршена валидација предложеног модела ПЕДА и његове интеракције са мостовском конструкцијом**. Такође, решења изложена у овој дисертацији искоришћена су за нумеричку анализу и **развијање поступка оптимизације појединих параметара система**, што такође представља један од доприноса ове тезе.

Наиме, у оквиру приказаног истраживања извршена је и **анализа утицаја појединих параметара модела на динамичка својства система** и притом су утврђене препоруке и смернице које могу бити од помоћи при пројектовању ПЕДА и њиховој примени за контролу вибрација мостова. Поменутом анализом је показано да би **динамичка својства ПЕДА требало пројектовати према динамичким својствима саме мостовске конструкције, без обзира на врсту саобраћајног оптерећења**, будући да је утицај апсорбера на одзив конструкције релативно мали у фази принудних осцилација, односно док се возило налази на мосту, а постаје значајан у фази слободних осцилација, односно након што возило пређе преко моста. Како је саобраћајно оптерећење на мосту изразито непредвидљивог карактера, ово запажање је врло важно јер омогућава пројектовање

оптималних ПЕДА независно од типа и карактеристика оптерећења. Такође, нумеричка анализа је показала да се **применом одговарајућег броја и распореда ПЕДА на мосту могу знатно унапредити електро-механичке особине сложеног система** и његове перформансе у погледу смањених амплитуда вибрација и производње веће количине електричне енергије, како је детаљније образложено у Поглављу 6.1.3. Поред тога, показано је да се **повећањем броја повезаних биморфних греда унутар ПЕДА повећава и количина произведене електричне енергије**. Истраживањем се дошло до закључка да због преноса и дисипације енергије унутар самог система повезаних греда постоји теоретски максимум ка којем асимптотски тежи овај допринос и да након извесног броја греда у систему даље повећавање њиховог броја не утиче на повећање произведене електричне енергије, па се поменута гранична вредност броја греда може сматрати оптималном за учинак ПЕДА. Међутим, због техничких услова и могућности практичног извођења ПЕДА и манипулације са њима, ова теретска оптимална вредност најчешће не може бити достигнута, што чини да се реални оптимум броја греда налази испод теоретског оптимума. Још један важан резултат спроведене нумеричке анализе утицаја параметара модела јесте и **поступак за пројектовање жељених динамичких својстава ПЕДА коришћењем одговарајућег броја, величине и распореда додатих концентрисаних маса** унутар система повезаних биморфних греда. Наиме, као што је показано у Поглављу 6.2.3, променом ових параметара се на врло једноставан, брз и поуздан начин динамичке карактеристике ПЕДА могу мењати и прилагођавати тренутним потребама. С обзиром на то да се геометрија и начин повезивања самих биморфних греда не мења, описани поступак је јефтин и ефикасан начин пројектовања тражених карактеристика ПЕДА.

На крају, приказан је и **целовит пример примене предложеног типа апсорбера на конкретну мостовску конструкцију**, како би се показао поступак њихове примене и извршила анализа ефикасности овог типа ПЕДА за производњу електричне енергије. Како се показало, количина електричне енергије која се добија применом предложеног типа ПЕДА мања је од очекиване, и умногоме зависи од типа мостовске конструкције на којој се ПЕДА примењују и од разреда саобраћајнице на којој се мост налази, тј. од саобраћајног оптерећења. Међутим, као што је истакнуто у Поглављу 6.3, **количина произведене електричне енергије се може вишеструко увећати** правилним пројектовањем броја, карактеристика и распореда ПЕДА зависно од конструкције на којој се примењују. Такође, иако је количина генерисане електричне енергије мања од претходно очекиване, она ипак може допринети напајању сигнализације на мосту и сензорима за мониторинг конструкције. Зависно од разреда пута и типа мостовске конструкције, могуће је да би **применом оваквог типа ПЕДА могло бити остварено око 10-60% количине електричне енергије** потребне за напајање ових уређаја, што свакако представља корак у правцу остваривања **моста као интегралне, самосталне конструкције**, независне од спољног напајања електричном енергијом путем електродистрибутивних мрежа, **а такође и корак ка достизању одрживог развоја** што представља један од основних циљева и мотива овог истраживања. Међутим, анализа и формирање поступка за одабир и поступка опtimi-

зације и пројектовања предложеног типа ПЕДА према различитим типовима мостовске конструкције - крутим, полукрутим или флексибилним, према статичком систему моста и разреду пута на коме се налази, захтева детаљно истраживање и као таква превазилази обим ове дисертације, али представља један од могућих праваца даљег истраживања.

Ипак, на основу спроведене нумеричке анализе, може се закључити и то да се **применом ПЕДА за контролу вибрација мостовске конструкције може остварити и знатна уштеда у материјалу**, уколико се примена ПЕДА предвиди у фази пројектовања моста. Наиме, показано је да се применом ПЕДА смањују амплитуде вибрација односно динамички угиби мостовских греда, те је могуће пројектовати конструкцију мање крутости, односно греде са слабијим попречним пресеком, што директно утиче на смањење потребне количине материјала за извођење основне конструкције. Овај закључак такође представља важан резултат истраживања који нарочито треба имати у виду приликом спровођења техно-економске анализе исплативости и оправданости примене ПЕДА за контролу вибрација мостовских конструкција.

7.1 Рекапитулација резултата истраживања

У сажетом облику, резултати истраживања спроведеног и приказаног у овој дисертацији су:

- (i) Развијена је нова конструкција и одговарајући математички модел динамичких апсорбера са додатим пијезоелектричним својствима. Физичка и математичка ваљаност предложеног модела потврђене су поређењем резултата добијених применом модела са резултатима експеримената доступним у литератури.
- (ii) Нови модел пијезоелектричних динамичких апсорбера (ПЕДА) дозвољава могућност примене материјала чије се понашање моделира уз примену извода нецелог реда. Ови материјали могу се користити било у носећим слојевима биморфних греда, било за повезивање биморфних греда у јединствен систем.
- (iii) Радни фреквентни опсег развијених ПЕДА знатно је проширен повезивањем више биморфних пијезоелектричних греда у јединствен систем.
- (iv) Развијен је поступак за решавање система фракционих парцијалних диференцијалних једначина комбинацијом аналитичких апроксимативних и нумеричких метода, чиме је омогућена примена добијеног математичког модела за практичне прорачуне.
- (v) Развијен је модел интеракције ПЕДА и мостовске конструкције.
- (vi) Испитан је утицај појединих параметара модела пијезоелектричних динамичких апсорбера на његова динамичка својства и развијен је поступак одређивања оптималног броја и распореда ПЕДА на мосту у циљу постизања највећег смањења амплитуда вибрација моста уз производњу највеће количине електричне енергије. Као

важнији резултати спроведене анализе утицаја параметара модела могу се издвојити следећи закључци:

- Будући да фреквенца осциловања мостовске греде у фази слободних осцилација, која наступа након преласка возила преко моста, не зависи од карактеристика оптерећења већ само од динамичких својстава саме конструкције, постоји могућност пројектовања ПЕДА оптималних карактеристика за дати мост.
 - Применом одговарајућег броја и распореда ПЕДА на мосту могу се знатно унапредити механичке особине и перформансе сложеног система мост-ПЕДА.
 - Повећањем броја биморфних греда у апсорберу повећава се и количина произведене електричне енергије. Теоретски се овај допринос асимптотски приближава одређеној граничној вредности, али техничке могућности за извођење и монтажу биморфних греда постављају ограничења на број греда у систему, па се теоретски максималан учинак, најчешће, практично не може остварити.
 - Прилагођавањем броја, величине и распореда додатих концентрисаних маса на биморфним гредама унутар ПЕДА, динамичка својства ПЕДА се могу на врло једноставан и приступачан начин мењати према конкретним потребама у датим условима.
- (vii) Приказан је пример примене развијеног модела ПЕДА на контролу вибрација постојеће мостовске конструкције, уз истовремено претварање дела механичке енергије вибрација у електричну енергију.
- (viii) На конкретном примеру је показано да се оптимизацијом параметара модела и применом одговарајућег броја и распореда ПЕДА на мосту, количина произведене електричне енергије може вишеструко увећати. У приказаном примеру остварено је повећање од око 5 пута, уз напомену да би оно у општем случају могло бити и веће зависно од услова коришћења и механичких карактеристика мостовске конструкције.
- (ix) Показано је да се применом предложеног типа ПЕДА код мостовских конструкција, зависно од механичких карактеристика моста и саобраћајног оптерећења, може добити знатан део електричне енергије потребан за напајање електронских уређаја за мониторинг конструкције и сигнализацију, па чак и расвету на самом мосту.
- (x) Показано је да се применом предложеног типа ПЕДА може остварити знатна уштеда у материјалу при изградњи мостовских конструкција, уколико се њихова примена предвиди у фази пројектовања конструкције.

Имајући у виду све наведене резултате истраживања, може се закључити да су све полазне хипотезе истраживања, изложене у Поглављу 1.2, потврђене.

Наиме, основне полазне претпоставке истраживања биле су тврдње да се применом савремених материјала, који се моделирају уз помоћ извода нецелог реда, могу добити ПЕДА ефикаснији од конвенционалних. Предложеним иновативним конструктивним решењем ПЕДА и успешним решавањем проблема везаних за механичко и математичко моделирање изложеног типа ПЕДА, као и спроведеном нумеричком анализом, потврђено је да се применом предложеног типа ПЕДА могу остварити знатна унапређења динамичких својстава мостовске конструкције и побољшање перформанси ПЕДА, како у погледу динамичке апсорпције, тако и у погледу прозводње електричне енергије. Поред тога, истраживања су показала да се знатан део механичке енергије вибрација мостовске конструкције путем директног пијезоелектричног ефекта може претворити у електричну енергију применом предложеног типа ПЕДА, као и да се оптимизацијом броја и положаја ПЕДА на мосту могу додатно побољшати карактеристике система. Узимајући у обзир да је успешно развијен модел за описивање међудејства између ПЕДА и основне конструкције, који је потом искоришћен у нумеричкој анализи и развоју поступка оптимизације појединих параметара модела, може се закључити да су и преостале полазне хипотезе истраживања у потпуности потврђене.

Такође, с обзиром на наведене и описане резултате истраживања, будући да је у оквиру ове дисертације успешно развијен механички и математички модел предложеног новог типа динамичког апсорбера са пијезоелектричним својствима, те да су развијени модели, поступци и методологије за описивање понашања самог ПЕДА, његовог садејства са основном конструкцијом и за одређивање оптималних вредности параметара модела у циљу максималног ублажавања вибрација моста уз производњу највеће могуће количине електричне енергије, може се закључити да су и постављени циљеви истраживања, истакнути у Поглављу 1.2, остварени.

7.2 Могући правци даљег истраживања

Модел ПЕДА предложен у овој дисертацији представља почетну фазу развоја оваквих апсорбера и, иако је целина за себе, оставља простора за даљу надоградњу, усавршавање и развој. Даља истраживања би могла бити усмерена ка укључивању магнетних сакупљача енергије, увођењем бистабилних елемената, повезивањем више различитих подсистема пијезоелектричних биморфних греда у циљу повећања продуктивности у генерисању електричне енергије.

Поред тога, пожељно је развити детаљан алгоритам за пројектовање оваквог типа динамичких апсорбера за дати тип и карактеристике мостовске конструкције, као и развити упрошћени модел који би могао да нађе ширу примену у свакодневној инжењерској пракси. У том циљу, било би пожељно развити и нумерички модел и прилагодити овде предложени модел ПЕДА за решавање методом коначних елемената и примену у постојећим софтверским пакетима за МКЕ анализу конструкција. Као надоградња изложеног, корисно би било извести и одређене препоруке по питању вредности појединих параме-

тара модела, што подразумева опсежна испитивања и експерименте, како нумеричке тако и физичке.

На крају, као што је већ напоменуто, све претходно изложено односи се на линеаран режим понашања конструкције и њених елемената. Будући да се код нелинеарног одзива могу јавити и знатно већа померања динамичких апсорбера, један могућ правац даљег истраживања требало би да буде усмерен ка проширењу предложеног модела за рад у нелинеарном режиму вибрација, узимајући у обзир геометријску и материјалну нелинеарност елемената конструкције. Спровођење даљих истраживања у наведеним правцима знатно би унапредило ефикасност и исплативост оваквог типа динамичких апсорбера и приближило их широј практичној примени у инжењерским објектима.

* * * * *

У коначном, може се напоменути да би унапређење модела предложеног у овој дисертацији допринело изради поузданих, одрживих и енергетски ефикасних мостовских, а могуће и других грађевинских конструкција, што је један од императива за даљи развој друштва данашњице. Достицање одрживог развоја је важан задатак пред којим стоји тренутна људска цивилизација и да би се он остварио неопходно је да свако, у границама својих могућности и са аспекта своје струке, да свој допринос томе, а нада је и вера аутора ове дисертације да и она представља корак у том смеру.

Литература

- [1] Alper Erturk and Daniel J Inman. *Piezoelectric energy harvesting*. John Wiley & Sons, 2011.
- [2] Alper Erturk and Daniel J Inman. An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations. *Smart materials and structures*, 18(2):025009, 2009.
- [3] V Meruane and K Pichara. A broadband vibration-based energy harvester using an array of piezoelectric beams connected by springs. *Shock and Vibration*, 2016, 2016.
- [4] Jan Freundlich. Transient vibrations of a fractional kelvin-voigt viscoelastic cantilever beam with a tip mass and subjected to a base excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 438:99--115, 2019.
- [5] Farhad S Samani and Francesco Pellicano. Vibration reduction on beams subjected to moving loads using linear and nonlinear dynamic absorbers. *Journal of Sound and Vibration*, 325(4-5):742--754, 2009.
- [6] Shiqiao Xu, Rujin Ma, Dalei Wang, Airong Chen, and Hao Tian. Prediction analysis of vortex-induced vibration of long-span suspension bridge based on monitoring data. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 191:312--324, 2019.
- [7] Wojciech Pakos and Jacek Grosel. Reduction of cable vibrations in a cable stayed bridge under biharmonic excitation. *Engineering Structures*, 189:1--10, 2019.
- [8] MARCO Belloli, F Fossati, S Giappino, and Sara Muggiasca. Vortex induced vibrations of a bridge deck: Dynamic response and surface pressure distribution. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 133:160--168, 2014.
- [9] Q Zhu, You Lin Xu, LD Zhu, and H Li. Vortex-induced vibration analysis of long-span bridges with twin-box decks under non-uniformly distributed turbulent winds. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 172:31--41, 2018.
- [10] Hui Li, Shujin Laima, Qiangqiang Zhang, Na Li, and Zhiqiang Liu. Field monitoring and validation of vortex-induced vibrations of a long-span suspension bridge. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 124:54--67, 2014.

-
- [11] Dabo Xin, Hongfu Zhang, and Jinping Ou. Experimental study on mitigating vortex-induced vibration of a bridge by using passive vortex generators. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 175:100--110, 2018.
- [12] A Casalotti, A Arena, and Will Lacarbonara. Mitigation of post-flutter oscillations in suspension bridges by hysteretic tuned mass dampers. *Engineering Structures*, 69:62--71, 2014.
- [13] Filippo Gazzola. Mathematical models for suspension bridges. *Cham: Springer*, 2015.
- [14] Gianni Arioli and Filippo Gazzola. A new mathematical explanation of what triggered the catastrophic torsional mode of the tacoma narrows bridge. *Applied Mathematical Modelling*, 39(2):901--912, 2015.
- [15] Dan M Frangopol. Life-cycle performance, management, and optimisation of structural systems under uncertainty: accomplishments and challenges 1. *Structure and Infrastructure Engineering*, 7(6):389--413, 2011.
- [16] Yi Zhou and Limin Sun. Effects of high winds on a long-span sea-crossing bridge based on structural health monitoring. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 174:260--268, 2018.
- [17] N Debnath, A Dutta, and SK Deb. Multi-modal passive-vibration control of bridges under general loading-condition. *Procedia Engineering*, 144:264--273, 2016.
- [18] Bilal Mokrani, Zhui Tian, David Alaluf, Fanhao Meng, and André Preumont. Passive damping of suspension bridges using multi-degree of freedom tuned mass dampers. *Engineering structures*, 153:749--756, 2017.
- [19] M Luu, V Zabel, and C Könke. An optimization method of multi-resonant response of high-speed train bridges using tmds. *Finite Elements in Analysis and Design*, 53:13--23, 2012.
- [20] Pu Gao, Hui Liu, Changle Xiang, Pengfei Yan, and Taha Mahmoud. A new magnetorheological elastomer torsional vibration absorber: structural design and performance test. *Mechanical Sciences*, 12(1):321--332, 2021.
- [21] Ataollah Kalantari Osgouei, Hodjat Hajian, Bahram Khalichi, Andriy E Serebryannikov, Amir Ghobadi, and Ekmel Ozbay. Active tuning from narrowband to broadband absorbers using a sub-wavelength vo_2 embedded layer. *Plasmonics*, 16:1013--1021, 2021.
- [22] Karel Kraus, Zbyněk Šika, Petr Beneš, Jan Krivošej, and Tomáš Vyhlídal. Mechatronic robot arm with active vibration absorbers. *Journal of Vibration and Control*, 26(13-14):1145--1156, 2020.

-
- [23] Mingchun Liu, Yuanzhi Zhang, Juhua Huang, and Caizhi Zhang. Optimization control for dynamic vibration absorbers and active suspensions of in-wheel-motor-driven electric vehicles. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 234(9):2377--2392, 2020.
- [24] Mohammed Kassem, Zhichun Yang, Yingsong Gu, and Wei Wang. Modeling and control design for flutter suppression using active dynamic vibration absorber. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 9:845--860, 2021.
- [25] Mohammed Kassem, Zhichun Yang, Yingsong Gu, Wei Wang, and Ehab Safwat. Active dynamic vibration absorber for flutter suppression. *Journal of Sound and Vibration*, 469:115110, 2020.
- [26] Marzuki Khalid, Rubiyah Yusof, Majid Joshani, Hazlina Selamat, and Mohamad Joshani. Nonlinear identification of a magneto-rheological damper based on dynamic neural networks. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 29(3):221--233, 2014.
- [27] Takuji Kobori, Norihide Koshika, Kazuhiko Yamada, and Yoshiki Ikeda. Seismic-response-controlled structure with active mass driver system. part 1: Design. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 20(2):133--149, 1991.
- [28] Sinan Korkmaz. A review of active structural control: challenges for engineering informatics. *Computers & Structures*, 89(23-24):2113--2132, 2011.
- [29] Tarek Edrees Saaed, George Nikolakopoulos, Jan-Erik Jonasson, and Hans Hedlund. A state-of-the-art review of structural control systems. *Journal of Vibration and Control*, 21(5):919--937, 2015.
- [30] Jong-Dar Yau and Yeong-Bin Yang. A wideband mtmd system for reducing the dynamic response of continuous truss bridges to moving train loads. *Engineering structures*, 26(12):1795--1807, 2004.
- [31] M Ouled Chtiba, S Choura, S El-Borgi, and Ali H Nayfeh. Confinement of vibrations in flexible structures using supplementary absorbers: dynamic optimization. *Journal of Vibration and Control*, 16(3):357--376, 2010.
- [32] Ehab E Basta, Mehdi Ghommam, and Samir A Emam. Vibration suppression and optimization of conserved-mass metamaterial beam. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 120:103360, 2020.
- [33] José J de Espindola, Carlos A Bavastri, and Eduardo MO Lopes. On the passive control of vibrations with viscoelastic dynamic absorbers of ordinary and pendulum types. *Journal of the Franklin Institute*, 347(1):102--115, 2010.

-
- [34] Felipe Antonio Chegury Viana, Giovanni Iamin Kotinda, Domingos Alves Rade, and Valder Steffen Jr. Tuning dynamic vibration absorbers by using ant colony optimization. *Computers & Structures*, 86(13-14):1539--1549, 2008.
- [35] Onur Özyar and Çetin Yılmaz. A self-tuning adaptive-passive lever-type vibration isolation system. *Journal of Sound and Vibration*, 505:116159, 2021.
- [36] Ghasem Ghannad Tehrani and Morteza Dardel. Vibration mitigation of a flexible bladed rotor dynamic system with passive dynamic absorbers. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 69:1--30, 2019.
- [37] Yongjun Shen, Zhaoyang Xing, Shaopu Yang, and Jianqiao Sun. Parameters optimization for a novel dynamic vibration absorber. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 133:106282, 2019.
- [38] Ghasem Ghannad Tehrani, Morteza Dardel, and Mohammad Hadi Pashaei. Passive vibration absorbers for vibration reduction in the multi-bladed rotor with rotor and stator contact. *Acta Mechanica*, 231:597--623, 2020.
- [39] Krzysztof Kecik. Simultaneous vibration mitigation and energy harvesting from a pendulum-type absorber. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 92:105479, 2021.
- [40] Ao Zhang, Vladislav Sorokin, and He Li. Energy harvesting using a novel autoparametric pendulum absorber-harvester. *Journal of Sound and Vibration*, 499:116014, 2021.
- [41] Jingda Wen, Qian Zhao, Ruiguang Peng, Haoyang Yao, Yuchang Qing, Jianbo Yin, and Qiang Ren. Progress in water-based metamaterial absorbers: a review. *Optical Materials Express*, 12(4):1461--1479, 2022.
- [42] I Saidi, EF Gad, John L Wilson, and N Haritos. Development of passive viscoelastic damper to attenuate excessive floor vibrations. *Engineering structures*, 33(12):3317--3328, 2011.
- [43] JF Wang, CC Lin, and BL Chen. Vibration suppression for high-speed railway bridges using tuned mass dampers. *International Journal of Solids and structures*, 40(2):465--491, 2003.
- [44] Abdelouahab Ras and Nadir Boumechra. Seismic energy dissipation study of linear fluid viscous dampers in steel structure design. *Alexandria Engineering Journal*, 55(3):2821--2832, 2016.
- [45] Konstantinos Kariniotakis and Theodore L Karavasilis. Limits for the interstorey drift sensitivity coefficient θ of steel mrf's with viscous dampers designed according to euro-code 8. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 117:203--215, 2019.

-
- [46] D De Domenico and G Ricciardi. Earthquake protection of structures with nonlinear viscous dampers optimized through an energy-based stochastic approach. *Engineering Structures*, 179:523--539, 2019.
- [47] Ersin Aydin, Baki Öztürk, and Maciej Dutkiewicz. Analysis of efficiency of passive dampers in multistorey buildings. *Journal of Sound and Vibration*, 439:17--28, 2019.
- [48] Eduardo Barredo, JG Mendoza Larios, Jan Mayén, AA Flores-Hernández, Jorge Colín, and M Arias Montiel. Optimal design for high-performance passive dynamic vibration absorbers under random vibration. *Engineering Structures*, 195:469--489, 2019.
- [49] A Kaveh, SM Javadi, and R Mahdipour Moghanni. Optimal structural control of tall buildings using tuned mass dampers via chaotic optimization algorithm. In *Structures*, volume 28, pages 2704--2713. Elsevier, 2020.
- [50] Elyes Mrabet, Mohamed Najib Ichchou, and Nouredine Bouhaddi. Random vibro-acoustic control of internal noise through optimized tuned mass dampers. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 130:17--40, 2019.
- [51] Leandro FF Miguel, Rafael H Lopez, André J Torii, Leticia FF Miguel, and André T Beck. Robust design optimization of tmlds in vehicle--bridge coupled vibration problems. *Engineering Structures*, 126:703--711, 2016.
- [52] Giuseppe Carlo Marano, Rita Greco, and Sara Sgobba. A comparison between different robust optimum design approaches: application to tuned mass dampers. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 25(1):108--118, 2010.
- [53] Rita Greco and Giuseppe Carlo Marano. Optimum design of tuned mass dampers by displacement and energy perspectives. *Soil dynamics and earthquake engineering*, 49:243--253, 2013.
- [54] Arash Mohtat and Ehsan Dehghan-Niri. Generalized framework for robust design of tuned mass damper systems. *Journal of Sound and Vibration*, 330(5):902--922, 2011.
- [55] Fan Yang, Ramin Sedaghati, and Ebrahim Esmailzadeh. Vibration suppression of structures using tuned mass damper technology: A state-of-the-art review. *Journal of Vibration and Control*, 28(7-8):812--836, 2022.
- [56] Salah Djerouni, Abdelhafid Ounis, Said Elias, Mahdi Abdeddaim, and Rajesh Rupakhetty. Optimization and performance assessment of tuned mass damper inerter systems for control of buildings subjected to pulse-like ground motions. In *Structures*, volume 38, pages 139--156. Elsevier, 2022.
- [57] Jonathan Salvi and Egidio Rizzi. Optimum tuning of tuned mass dampers for frame structures under earthquake excitation. *Structural Control and Health Monitoring*, 22(4):707--725, 2015.

-
- [58] Jonathan Salvi, Fabio Pioldi, and Egidio Rizzi. Optimum tuned mass dampers under seismic soil-structure interaction. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 114:576-597, 2018.
- [59] Daniel Caicedo, Luis Lara-Valencia, John Blandon, and Carlos Graciano. Seismic response of high-rise buildings through metaheuristic-based optimization using tuned mass dampers and tuned mass dampers inerter. *Journal of Building Engineering*, 34:101927, 2021.
- [60] Seyyed Hossein Hossein Lavassani, Hamed Alizadeh, and Peyman Homami. Optimizing tuned mass damper parameters to mitigate the torsional vibration of a suspension bridge under pulse-type ground motion: A sensitivity analysis. *Journal of Vibration and Control*, 26(11-12):1054--1067, 2020.
- [61] Y Daniel and O Lavan. Gradient based optimal seismic retrofitting of 3d irregular buildings using multiple tuned mass dampers. *Computers & Structures*, 139:84--97, 2014.
- [62] Wenxi Wang, Xiuyong Wang, Xugang Hua, Gangbing Song, and Zhengqing Chen. Vibration control of vortex-induced vibrations of a bridge deck by a single-side pounding tuned mass damper. *Engineering Structures*, 173:61--75, 2018.
- [63] Shujin Laima, Hui Li, Wenli Chen, and Fengchen Li. Investigation and control of vortex-induced vibration of twin box girders. *Journal of Fluids and Structures*, 39:205--221, 2013.
- [64] Hui Li, Shujin Laima, Jinping Ou, Xuefeng Zhao, Wensong Zhou, Yan Yu, Na Li, and Zhiqiang Liu. Investigation of vortex-induced vibration of a suspension bridge with two separated steel box girders based on field measurements. *Engineering Structures*, 33(6):1894--1907, 2011.
- [65] Hiroshi Iwabuki, Saiji Fukada, Toshikazu Osafune, Masayuki Shimura, and Eiichi Sasaki. Contribution of large-vehicle vibration and bridge vibration to low-frequency noise generation characteristics. *Applied Acoustics*, 155:150--166, 2019.
- [66] World's tallest buildings with dampers. *Journal of the Council on Tall Buildings and Urban Habitat*, 2018. https://global.ctbuh.org/resources/papers/3788-Journal2018_IssueIII_TBIN.pdf, last accessed on: 25.08.2021.
- [67] Said Elias, Vasant Matsagar, and TK Datta. Effectiveness of distributed tuned mass dampers for multi-mode control of chimney under earthquakes. *Engineering Structures*, 124:1--16, 2016.
- [68] Tuned mass dampers for bridges, buildings and other tall structures. GERB Vibration Control Systems. <http://www.esspower.com/html/files/scopelast> accessed on: 25.08.2021.

-
- [69] Jan linzel viaduct. <https://www.nationalestaalprijs.nl/project/jan-linzelviaduct>.
- [70] Royal alexandra interprovincial bridge. https://en.wikipedia.org/wiki/Alexandra_Bridge.
- [71] Chongfeng Wei and Xingjian Jing. A comprehensive review on vibration energy harvesting: Modelling and realization. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 74:1--18, 2017.
- [72] Haikun Wang, Chaoming He, Siyun Lv, and Haoran Sun. A new electromagnetic vibrational energy harvesting device for swaying cables. *Applied energy*, 228:2448--2461, 2018.
- [73] LB Zhang, HL Dai, YW Yang, and L Wang. Design of high-efficiency electromagnetic energy harvester based on a rolling magnet. *Energy conversion and management*, 185:202--210, 2019.
- [74] Maziar Jamshidi, Chih-chen Chang, and Ali Bakhshi. Design and control of a self-powered hybrid electromagnetic damper. *Journal of Sound and Vibration*, 428:147--167, 2018.
- [75] Lukai Guo and Qing Lu. Potentials of piezoelectric and thermoelectric technologies for harvesting energy from pavements. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 72:761--773, 2017.
- [76] Jun Chen and Zhong Lin Wang. Reviving vibration energy harvesting and self-powered sensing by a triboelectric nanogenerator. *Joule*, 1(3):480--521, 2017.
- [77] Zhengbao Yang, Shengxi Zhou, Jean Zu, and Daniel Inman. High-performance piezoelectric energy harvesters and their applications. *Joule*, 2(4):642--697, 2018.
- [78] Jiayu Chen, Qiwen Qiu, Yilong Han, and Denvid Lau. Piezoelectric materials for sustainable building structures: Fundamentals and applications. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 101:14--25, 2019.
- [79] Emmanuelle Arroyo, Adrien Badel, Fabien Formosa, Yipeng Wu, and J Qiu. Comparison of electromagnetic and piezoelectric vibration energy harvesters: Model and experiments. *Sensors and Actuators A: Physical*, 183:148--156, 2012.
- [80] Xu Wang, Sabu John, Simon Watkins, Xinghuo Yu, Han Xiao, Xingyu Liang, and Haiqiao Wei. Similarity and duality of electromagnetic and piezoelectric vibration energy harvesters. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 52:672--684, 2015.
- [81] Xu Wang, Xingyu Liang, Zhiyong Hao, Haiping Du, Nong Zhang, and Ma Qian. Comparison of electromagnetic and piezoelectric vibration energy harvesters with different interface circuits. *Mechanical systems and signal processing*, 72:906--924, 2016.

-
- [82] Mahidur R Sarker, Sabariah Julai, Mohd Faizul Mohd Sabri, Suhana Mohd Said, Md Mainul Islam, and Muhammad Tahir. Review of piezoelectric energy harvesting system and application of optimization techniques to enhance the performance of the harvesting system. *Sensors and Actuators A: Physical*, 300:111634, 2019.
- [83] Zhengbao Yang, Alper Erturk, and Jean Zu. On the efficiency of piezoelectric energy harvesters. *Extreme Mechanics Letters*, 15:26--37, 2017.
- [84] Wolfgang KH Panofsky and Melba Phillips. *Classical electricity and magnetism*. Courier Corporation, 2005.
- [85] Chun-Ying Lee and Jia-Hong Lin. Incorporating piezoelectric energy harvester in tunable vibration absorber for application in multi-modal vibration reduction of a platform structure. *Journal of Sound and Vibration*, 389:73--88, 2017.
- [86] Maria Teresa Todaro, Francesco Guido, Vincenzo Mastronardi, Denis Desmaele, Gianmichele Epifani, Luciana Algieri, and Massimo De Vittorio. Piezoelectric mems vibrational energy harvesters: Advances and outlook. *Microelectronic Engineering*, 183:23--36, 2017.
- [87] Hongjin Wang and Qingfeng Meng. Analytical modeling and experimental verification of vibration-based piezoelectric bimorph beam with a tip-mass for power harvesting. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 36(1):193--209, 2013.
- [88] MN Fakhzan and Asan GA Muthalif. Harvesting vibration energy using piezoelectric material: Modeling, simulation and experimental verifications. *Mechatronics*, 23(1):61--66, 2013.
- [89] Alper Erturk and Daniel J Inman. A distributed parameter electromechanical model for cantilevered piezoelectric energy harvesters. *Journal of Vibration and Acoustics*, 130:041002, 2008.
- [90] Henry Frank Tiersten. *Linear piezoelectric plate vibrations: Elements of the linear theory of piezoelectricity and the vibrations piezoelectric plates*. Springer, 2013.
- [91] Nellya N Rogacheva. *The theory of piezoelectric shells and plates*. CRC press, 2020.
- [92] Yi-Yuan Yu. *Vibrations of elastic plates: linear and nonlinear dynamical modeling of sandwiches, laminated composites, and piezoelectric layers*. Springer Science & Business Media, 1996.
- [93] Zhengbao Yang, Yan Qing Wang, Lei Zuo, and Jean Zu. Introducing arc-shaped piezoelectric elements into energy harvesters. *Energy conversion and management*, 148:260--266, 2017.

-
- [94] Hwan-Sik Yoon, Gregory Washington, and Amita Danak. Modeling, optimization, and design of efficient initially curved piezoceramic unimorphs for energy harvesting applications. *Journal of intelligent material systems and structures*, 16(10):877--888, 2005.
- [95] Denis Benasciutti, Luciano Moro, Saša Zelenika, and Eugenio Brusa. Vibration energy scavenging via piezoelectric bimorphs of optimized shapes. *Microsystem technologies*, 16:657--668, 2010.
- [96] Seyed Mohammad Karim Tabatabaei, Saeed Behbahani, and Pouya Rajaeipour. Multi-objective shape design optimization of piezoelectric energy harvester using artificial immune system. *Microsystem Technologies*, 22:2435--2446, 2016.
- [97] H Salmani, GH Rahimi, SA Hosseini Kordkheili, et al. An exact analytical solution to exponentially tapered piezoelectric energy harvester. *Shock and Vibration*, 2015, 2015.
- [98] R Usharani, G Uma, M Umopathy, and Seung-Bok Choi. A new piezoelectric-patched cantilever beam with a step section for high performance of energy harvesting. *Sensors and Actuators A: Physical*, 265:47--61, 2017.
- [99] RL Harne. Development and testing of a dynamic absorber with corrugated piezoelectric spring for vibration control and energy harvesting applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 36(2):604--617, 2013.
- [100] Feng Wang, Xiuting Sun, and Jian Xu. A novel energy harvesting device for ultralow frequency excitation. *Energy*, 151:250--260, 2018.
- [101] Heung Soo Kim, Joo-Hyong Kim, and Jaehwan Kim. A review of piezoelectric energy harvesting based on vibration. *International journal of precision engineering and manufacturing*, 12:1129--1141, 2011.
- [102] M Grossard, C Rotinat-Libersa, N Chaillet, and Y Perrot. Flexible building blocks method for the optimal design of compliant mechanisms using piezoelectric material. In *12th IFToMM World Congress*, pages 18--21. Citeseer, 2007.
- [103] Zhongsheng Chen, Yongmin Yang, Zhimiao Lu, and Yanting Luo. Broadband characteristics of vibration energy harvesting using one-dimensional phononic piezoelectric cantilever beams. *Physica B: Condensed Matter*, 410:5--12, 2013.
- [104] HL Dai, A Abdelkefi, and L Wang. Theoretical modeling and nonlinear analysis of piezoelectric energy harvesting from vortex-induced vibrations. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 25(14):1861--1874, 2014.
- [105] Ze-Qun Fang and Zhi-Lin Hou. Tunable band gap in piezoelectric composite rod based on the inter-coupling effect. *Chinese Physics Letters*, 35(5):054601, 2018.
- [106] Sergey Shevtsov and Michail Flek. Random vibration energy harvesting by piezoelectric stack charging the battery. *Procedia Engineering*, 144:645--652, 2016.

-
- [107] Abdessattar Abdelkefi, Fehmi Najjar, AH Nayfeh, and S Ben Ayed. An energy harvester using piezoelectric cantilever beams undergoing coupled bending--torsion vibrations. *Smart Materials and Structures*, 20(11):115007, 2011.
- [108] Shashank Priya, Hyun-Cheol Song, Yuan Zhou, Ronnie Varghese, Anuj Chopra, Sang-Gook Kim, Isaku Kanno, Liao Wu, Dong Sam Ha, Jungho Ryu, et al. A review on piezoelectric energy harvesting: materials, methods, and circuits. *Energy Harvesting and Systems*, 4(1):3--39, 2017.
- [109] Quan Wang and Nan Wu. Optimal design of a piezoelectric coupled beam for power harvesting. *Smart Materials and Structures*, 21(8):085013, 2012.
- [110] Yang Li. *Simple techniques for piezoelectric energy harvesting optimization*. PhD thesis, Lyon, INSA, 2014.
- [111] Francesco Dell'Anna, Tao Dong, Ping Li, Yumei Wen, Zhaochu Yang, Mario R Casu, Mehdi Azadmehr, and Yngvar Berg. State-of-the-art power management circuits for piezoelectric energy harvesters. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 18(3):27--48, 2018.
- [112] Y Amini, M Heshmati, P Fatehi, and SE Habibi. Piezoelectric energy harvesting from vibrations of a beam subjected to multi-moving loads. *Applied Mathematical Modelling*, 49:1--16, 2017.
- [113] Zhiwei Zhang, Lihua Tang, and Hongjun Xiang. Piezoelectric energy harvesting from bridge vibrations using different models for moving vehicles. *Journal of Aerospace Engineering*, 32(2):04018141, 2019.
- [114] Zhiwei Zhang, Hongjun Xiang, Zhifei Shi, and Jiawang Zhan. Experimental investigation on piezoelectric energy harvesting from vehicle-bridge coupling vibration. *Energy Conversion and Management*, 163:169--179, 2018.
- [115] Paul Cahill, Budhaditya Hazra, Raid Karoumi, Alan Mathewson, and Vikram Pakrashi. Vibration energy harvesting based monitoring of an operational bridge undergoing forced vibration and train passage. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 106:265--283, 2018.
- [116] Paul Cahill, Budhaditya Hazra, Raid Karoumi, Alan Mathewson, and Vikram Pakrashi. Data of piezoelectric vibration energy harvesting of a bridge undergoing vibration testing and train passage. *Data in brief*, 17:261--266, 2018.
- [117] JJ McCullagh, T Galchev, RL Peterson, R Gordenker, Y Zhang, J Lynch, and K Najafi. Long-term testing of a vibration harvesting system for the structural health monitoring of bridges. *Sensors and Actuators A: Physical*, 217:139--150, 2014.

-
- [118] Paul Cahill, Nora Aine Ni Nuallain, Nathan Jackson, Alan Mathewson, Raid Karoumi, and Vikram Pakrashi. Energy harvesting from train-induced response in bridges. *Journal of Bridge Engineering*, 19(9):04014034, 2014.
- [119] Hao Wang, Abbas Jasim, and Xiaodan Chen. Energy harvesting technologies in roadway and bridge for different applications--a comprehensive review. *Applied energy*, 212:1083-1094, 2018.
- [120] Athanassios T Papagiannakis, Samer Dessouky, Arturo Montoya, and Hossein Roshani. Energy harvesting from roadways. *Procedia Computer Science*, 83:758--765, 2016.
- [121] M Ouled Chtiba, S Choura, AH Nayfeh, and S El-Borgi. Vibration confinement and energy harvesting in flexible structures using collocated absorbers and piezoelectric devices. *Journal of Sound and Vibration*, 329(3):261--276, 2010.
- [122] MJ Brennan, B Tang, G Pechoto Melo, and V Lopes Jr. An investigation into the simultaneous use of a resonator as an energy harvester and a vibration absorber. *Journal of Sound and Vibration*, 333(5):1331--1343, 2014.
- [123] Sang-Myeong Kim, Semyung Wang, and Michael J Brennan. Dynamic analysis and optimal design of a passive and an active piezo-electrical dynamic vibration absorber. *Journal of sound and vibration*, 330(4):603--614, 2011.
- [124] PV Rasil Raj and B Santhosh. Parametric study and optimization of linear and nonlinear vibration absorbers combined with piezoelectric energy harvester. *International Journal of Mechanical Sciences*, 152:268--279, 2019.
- [125] Henry A Sodano, Gyuhae Park, and DJ Inman. Estimation of electric charge output for piezoelectric energy harvesting. *Strain*, 40(2):49--58, 2004.
- [126] A Subin Das and B Santhosh. Energy harvesting from nonlinear vibration absorbers. *Procedia engineering*, 144:653--659, 2016.
- [127] A Casalotti and W Lacarbonara. Tailoring of pinched hysteresis for nonlinear vibration absorption via asymptotic analysis. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 94:59--71, 2017.
- [128] Zengtao Yang and Jiashi Yang. Connected vibrating piezoelectric bimorph beams as a wide-band piezoelectric power harvester. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 20(5):569--574, 2009.
- [129] Shengxi Zhou, Bo Yan, and Daniel J Inman. A novel nonlinear piezoelectric energy harvesting system based on linear-element coupling: design, modeling and dynamic analysis. *Sensors*, 18(5):1492, 2018.
- [130] Aditya Chauhan and Rahul Vaish. Material selection for piezoelectric devices. *Advanced Science, Engineering and Medicine*, 5(7):715--719, 2013.

-
- [131] Lu Trong Khiem Nguyen and Marc-André Keip. A data-driven approach to nonlinear elasticity. *Computers & Structures*, 194:97--115, 2018.
- [132] M Ortiz and T Kirchdoerfer. Data-driven computational mechanics. In *Videos of Plenary Lectures presented at the XIII International Conference on Computational Plasticity (COMPLAS 2015)*, 2016.
- [133] Gerhard A Holzapfel. *Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering science*. John Wiley & Sons Ltd, 2000.
- [134] Francesco Mainardi and Giorgio Spada. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology. *The European Physical Journal Special Topics*, 193(1):133--160, 2011.
- [135] RM Lin and Teng Yong Ng. Development of a theoretical framework for vibration analysis of the class of problems described by fractional derivatives. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 116:78--96, 2019.
- [136] Howard A Barnes. *A handbook of elementary rheology*. University of Wales, Institute of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2000.
- [137] Alexander Lion. On the thermodynamics of fractional damping elements. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 9:83--96, 1997.
- [138] Ralf Metzler and Theo F Nonnenmacher. Fractional relaxation processes and fractional rheological models for the description of a class of viscoelastic materials. *International Journal of Plasticity*, 19(7):941--959, 2003.
- [139] Angela Beltempo, Massimiliano Zingales, Oreste S Bursi, and Luca Deseri. A fractional-order model for aging materials: An application to concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 138:13--23, 2018.
- [140] Wojciech Sumelka. Fractional viscoplasticity. *Mechanics Research Communications*, 56:31--36, 2014.
- [141] HongGuang Sun, Yong Zhang, Dumitru Baleanu, Wen Chen, and YangQuan Chen. A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 64:213--231, 2018.
- [142] Dong Lei, Yingjie Liang, and Rui Xiao. A fractional model with parallel fractional maxwell elements for amorphous thermoplastics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 490:465--475, 2018.
- [143] Ruifan Meng, Deshun Yin, Chao Zhou, and Hao Wu. Fractional description of time-dependent mechanical property evolution in materials with strain softening behavior. *Applied Mathematical Modelling*, 40(1):398--406, 2016.

-
- [144] De-shun Yin, Yan-qing Li, Hao Wu, and Xiao-meng Duan. Fractional description of mechanical property evolution of soft soils during creep. *Water Science and Engineering*, 6(4):446--455, 2013.
- [145] GW Scott Blair. Analytical and integrative aspects of the stress-strain-time problem. *Journal of Scientific Instruments*, 21(5):80, 1944.
- [146] Ronald L Bagley and PJ Torvik. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *Journal of Rheology*, 27(3):201--210, 1983.
- [147] Francesco Mainardi. An historical perspective on fractional calculus in linear viscoelasticity. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 15(4):712--717, 2012.
- [148] Roman Lewandowski and Przemysław Wielentejczyk. Nonlinear vibration of viscoelastic beams described using fractional order derivatives. *Journal of Sound and Vibration*, 399:228--243, 2017.
- [149] Yuriy A Rossikhin and Marina V Shitikova. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids. *Appl. Mech. Rev.*, 50(1):15--67, 1997.
- [150] Yuriy A Rossikhin and Marina V Shitikova. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: novel trends and recent results. 2010.
- [151] CQ Fang, H-Y Sun, and J-P Gu. Application of fractional calculus methods to viscoelastic response of amorphous shape memory polymers. *Journal of Mechanics*, 31(4):427--432, 2015.
- [152] Zheng Li, Hong Wang, Rui Xiao, and Su Yang. A variable-order fractional differential equation model of shape memory polymers. *Chaos, Solitons & Fractals*, 102:473--485, 2017.
- [153] Di Liu, Yong Xu, and Junlin Li. Randomly-disordered-periodic-induced chaos in a piezoelectric vibration energy harvester system with fractional-order physical properties. *Journal of Sound and Vibration*, 399:182--196, 2017.
- [154] GS Kumar and G Prasad. Piezoelectric relaxation in polymer and ferroelectric composites. *Journal of materials science*, 28:2545--2550, 1993.
- [155] Aleksandra M Vinogradov, V Hugo Schmidt, George F Tuthill, and Gary W Bohannon. Damping and electromechanical energy losses in the piezoelectric polymer pvdf. *Mechanics of Materials*, 36(10):1007--1016, 2004.
- [156] Ana Cristina Galucio, JF Deu, and Roger Ohayon. A fractional derivative viscoelastic model for hybrid active-passive damping treatments in time domain-application to sandwich beams. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 16(1):33--45, 2005.

-
- [157] Davide Cattin, Roberto Oboe, Ravinder S Dahiya, and Maurizio Valle. Identification and validation of a fractional order dynamic model for a piezoelectric tactile sensor. In *2010 11th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control (AMC)*, pages 430--435. IEEE, 2010.
- [158] B Ducharne, B Zhang, D Guyomar, and G Sebald. Fractional derivative operators for modeling piezoceramic polarization behaviors under dynamic mechanical stress excitation. *Sensors and Actuators A: Physical*, 189:74--79, 2013.
- [159] Junyi Cao, Shengxi Zhou, Daniel J Inman, and Yangquan Chen. Chaos in the fractionally damped broadband piezoelectric energy generator. *Nonlinear Dynamics*, 80:1705--1719, 2015.
- [160] Igor Podlubny. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier, 1998.
- [161] Singiresu S Rao. *Vibration of continuous systems*. John Wiley & Sons, 2019.
- [162] Ray W Clough and Joseph Penzien. *Dynamics of Structures, 3rd edition*. ComputersAndStructures Inc., 2003.
- [163] H Thomas Banks and DJ Inman. On damping mechanisms in beams. *J. Appl. Mech.*, 58(3), 1991.
- [164] Yuriy A Rossikhin and Marina V Shitikova. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: novel trends and recent results. *Applied Mechanics Reviews*, 63(1), 2010.
- [165] Teodor Atanackovic and Stevan Pilipovic. Hamilton's principle with variable order fractional derivatives. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 14(1):94--109, 2011.
- [166] TM Atanacković, Sanja Konjik, Lj Oparnica, and S Pilipović. Generalized hamilton's principle with fractional derivatives. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 43(25):255203, 2010.
- [167] Roger I Tanner. *Engineering rheology*, volume 52. OUP Oxford, 2000.
- [168] Alexander Malkin and Alexander Y Malkin. *Rheology fundamentals*. ChemTec publishing, 1994.
- [169] Fan Yang and Ke-Qin Zhu. On the definition of fractional derivatives in rheology. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 1(1):012007, 2011.
- [170] Simantini Majumdar, Somasri Hazra, Moutushi Dutta Choudhury, Suparna Dutta Sinha, Shantanu Das, Tapas Ranjan Middy, Sujata Tarafdar, and Tapati Dutta. A study of the

-
- rheological properties of visco-elastic materials using fractional calculus. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 516:181--189, 2017.
- [171] MN Hamdan and L Abdel Latif. On the numerical convergence of discretization methods for the free vibrations of beams with attached inertia elements. *Journal of sound and vibration*, 169(4):527--545, 1994.
- [172] L Ercoli and PAA Laura. Analytical and experimental investigation on continuous beams carrying elastically mounted masses. *Journal of Sound and Vibration*, 114(3):519--533, 1987.
- [173] Hashem S Alkhaldi, Ibrahim M Abu-Alshaikh, and Anas N Al-Rabadi. Vibration control of fractionally-damped beam subjected to a moving vehicle and attached to fractionally-damped multiabsorbers. *Advances in Mathematical Physics*, 2013, 2013.
- [174] Saeed Lotfan and Morteza H Sadeghi. Large amplitude free vibration of a viscoelastic beam carrying a lumped mass--spring--damper. *Nonlinear Dynamics*, 90(2):1053--1075, 2017.
- [175] Ivo Alfirević. *Uvod u tenzore i mehaniku kontinuuma*. Golden marketing, 2003.
- [176] Mohsen Safaei, Henry A Sodano, and Steven R Anton. A review of energy harvesting using piezoelectric materials: state-of-the-art a decade later (2008--2018). *Smart Materials and Structures*, 28(11):113001, 2019.
- [177] M Demartin Maeder, D Damjanovic, and NJJoE Setter. Lead free piezoelectric materials. *Journal of electroceramics*, 13(1):385--392, 2004.
- [178] PK Panda. Environmental friendly lead-free piezoelectric materials. *Journal of materials science*, 44(19):5049--5062, 2009.
- [179] Huige Wei, Hui Wang, Yijie Xia, Dapeng Cui, Yapeng Shi, Mengyao Dong, Chuntai Liu, Tao Ding, Jiaoxia Zhang, Yong Ma, et al. An overview of lead-free piezoelectric materials and devices. *Journal of Materials Chemistry C*, 6(46):12446--12467, 2018.
- [180] Anuruddh Kumar, Anshul Sharma, Rajeev Kumar, Rahul Vaish, and Vishal S Chauhan. Finite element analysis of vibration energy harvesting using lead-free piezoelectric materials: A comparative study. *Journal of Asian Ceramic Societies*, 2(2):139--143, 2014.
- [181] Yabin Liao and Henry A Sodano. Optimal placement of piezoelectric material on a cantilever beam for maximum piezoelectric damping and power harvesting efficiency. *Smart materials and structures*, 21(10):105014, 2012.
- [182] Georgios I Evangelatos and Pol D Spanos. An accelerated newmark scheme for integrating the equation of motion of nonlinear systems comprising restoring elements governed by fractional derivatives. In *Recent advances in mechanics*, pages 159--177. Springer, 2011.

-
- [183] Stepa Paunović, Milan Cajić, Danilo Karličić, and Marina Mijalković. Dynamics of fractional-order multi-beam mass system excited by base motion. *Applied Mathematical Modelling*, 80:702--723, 2020.
- [184] Nurettin Sezer and Muammer Koç. A comprehensive review on the state-of-the-art of piezoelectric energy harvesting. *Nano energy*, 80:105567, 2021.
- [185] Alperen Toprak and Onur Tigli. Piezoelectric energy harvesting: State-of-the-art and challenges. *Applied Physics Reviews*, 1(3), 2014.
- [186] Corina Covaci and Aurel Gontean. Piezoelectric energy harvesting solutions: A review. *Sensors*, 20(12):3512, 2020.
- [187] Mohammed F Daqaq, Ravindra Masana, Alper Erturk, and D Dane Quinn. On the role of nonlinearities in vibratory energy harvesting: a critical review and discussion. *Applied Mechanics Reviews*, 66(4):040801, 2014.
- [188] Alper Erturk and Daniel J Inman. On mechanical modeling of cantilevered piezoelectric vibration energy harvesters. *Journal of intelligent material systems and structures*, 19(11):1311--1325, 2008.
- [189] Alper Erturk and Daniel J Inman. Issues in mathematical modeling of piezoelectric energy harvesters. *Smart Materials and Structures*, 17(6):065016, 2008.
- [190] Hamed Farokhi, Eetu Kohtanen, and Alper Erturk. Extreme parametric resonance oscillations of a cantilever: An exact theory and experimental validation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 196:110342, 2023.
- [191] Adriane Moura and Alper Erturk. A distributed-parameter flexoelectric energy harvester model accounting for two-way coupling and size effects. In *Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems*, volume 50497, page V002T07A012. American Society of Mechanical Engineers, 2016.
- [192] S Tol, FL Degertekin, and A Erturk. Modeling and enhancement of piezoelectric power extraction from one-dimensional bending waves. In *Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems 2014*, volume 9057, pages 468--484. SPIE, 2014.
- [193] Tao Yang, Shengxi Zhou, Shitong Fang, Weiyang Qin, and Daniel J Inman. Nonlinear vibration energy harvesting and vibration suppression technologies: Designs, analysis, and applications. *Applied Physics Reviews*, 8(3), 2021.
- [194] AR Daneshmehr, Alireza Nateghi, and DJ Inman. Free vibration analysis of cracked composite beams subjected to coupled bending--torsion loads based on a first order shear deformation theory. *Applied Mathematical Modelling*, 37(24):10074--10091, 2013.
- [195] British Standard. Eurocode 2: Design of concrete structures— . *Part*, 1(1):230, 2004.

-
- [196] Ladislav Frýba. *Vibration of solids and structures under moving loads*. Thomas Telford, 1999.
- [197] British Standard. Eurocode 3—design of steel structures—. *BS EN, 1(1):2005*, 1993.

Биографија аутора

Степа Пауновић, мастер инжењер грађевинарства, рођен је у Нишу 28.09.1989. године. Основну и средњу школу завршио је у Нишу.

Основне академске студије уписао је 2008. године на Грађевинско-архитектонском факултету у Нишу, и дипломирао 2012. године са просечном оценом 9,68, одбранивши дипломски рад из области бетонских конструкција. Током основних студија је награђиван као студент са највишим просечном оценом прве и друге године студија. **Мастер академске студије** уписао је на истом факултету 2012. године и завршио 2013. године са просечном оценом 9,42, одбранивши мастер рад из области бетонских конструкција. **Докторске академске студије** уписао је 2013. године на Грађевинско-архитектонском факултету у Нишу и положио све испите са просечном оценом 9,89. На свакој години студија осим прве примао је стипендију за најбоље студенте.



Од 2013. до 2018. године био је ангажован у извођењу наставе на Грађевинско - архитектонском факултету у Нишу на катедри за Техничку механику и теорију конструкција. Од 2013. до 2018. године је учествовао на пројекту Министарства за просвету, науку и технолошки развој Републике Србије под називом „Развој и унапређење метода за анализу интеракције конструкције и тла на основу теоријских и експерименталних истраживања“, а од 2018. до 2019. на пројекту истог Министарства под називом „Динамика хибридних система сложених структура. Механика материјала“.

Од 2018. године запослен је на Математичком институту САНУ. Области научног интересовања су му прорачунска механика и механика непрекидних средина.

Као аутор или коаутор објавио је 32 рада у домаћим и међународним часописима и зборницима. Као коаутор учествовао је у изради помоћног универзитетског уџбеника „Практикум за Техничку механику I“.

Говори енглески језик (напредни ниво) и немачки језик (средњи ниво).