



UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU



Nikola N. Filipović

SPORA I USKLADIŠTENA SVETLOST U SFERNIM KVANTNIM TAČKAMA U LESTVIČASTOJ KONFIGURACIJI

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Текст ове докторске дисертације ставља се на увид јавности,
у складу са чланом 30., став 8. Закона о високом образовању
("Сл. гласник РС", бр. 76/2005, 100/2007 – аутентично тумачење, 97/2008, 44/2010, 93/2012,
89/2013 и 99/2014)

НАПОМЕНА О АУТОРСКИМ ПРАВИМА:

Овај текст сматра се рукописом и само се саопштава јавности (члан 7. Закона о ауторским и
сродним правима, "Сл. гласник РС", бр. 104/2009, 99/2011 и 119/2012).

**Ниједан део ове докторске дисертације не сме се користити ни у какве сврхе,
осим за упознавање са њеним садржајем пре одбране дисертације.**

Niš, 2021.



UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCES AND
MATHEMATICS
DEPARTMENT OF PHYSICS



Nikola N. Filipović

SLOW AND STORED LIGHT IN SPHERICAL QUANTUM DOTS IN LADDER-TYPE CONFIGURATION

PhD THESIS

Niš, 2021

Подаци о докторској дисертацији

Ментор: др Владан Павловић, доцент, Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет

Наслов: Спора и ускладиштена светлост у сферним квантним тачкама у лествичастој конфигурацији

Резиме: У овој дисертацији, проучавано је простирање слабог сондирајућег ласерског пулса кроз материјалну средину сачињену од полупроводничких сферних квантних тачака са центрираном водоничном нечистоћом, у условима електромагнетно индуковане транспарентности. Овај кохерентни ефекат остварен је у присуству једног или два јака континуална контролна ласера, при чему се светлост и материја спрежу формирајући лествичасту конфигурацију са три или четири нивоа, респективно. Разматрани су случајеви када је средњи ниво у систему са три нивоа недегенерисан, односно троструко дегенерисан, док је додатно поље у систему са четири нивоа третирано и као контролно и као сондирајуће. Интеракција светлост–материја описана је Максвел-Блоховим једначинама, које су решаване нумерички и апроксимативно аналитички, док су енергије и таласне функције сферне квантне тачке рачунате применом метода Лагранжеве мреже. Показано је да је смањена апсорпција средине у присуству контролног поља праћена повећањем нагиба дисперзионе криве, што доводи до настанка споре светлости. Такође, адијабатским искључивањем и поновним укључивањем контролног поља, демонстрирани су складиштење и повраћај сондирајућег пулса у и из средине. Квантитативни параметри споре и ускладиштене светлости: групни индекс, релативна ширина, ефикасност и верност излазног пулса, рачунати су у зависности од јачина ласера, спектралне ширине улазног пулса, као и времена складиштења. Детаљно је проучавана и зависност профила излазног пулса од коефицијената распада, као и од јачине спољашњег стационарног магнетног поља. На послетку, показано је да се ефикасност излазног пулса може повећати коришћењем фазно модулисаног контролног ласера. Посебна пажња посвећена је упоредној анализи нумеричких и аналитичких решења, као и дискусији о потенцијалним применама побројаних ефеката у квантној информатици, оптичким телекомуникацијама и магнетометрији.

Научна област: Физика

Научна дисциплина: Квантна оптика

Кључне речи:

Спора светлост, складиштење светлости, електромагнетно индукована транспарентност, Аутлер-Таунсов ефекат, полупроводничке наноструктуре, сферна квантна тачка, водонична нечистоћа, лествичаста конфигурација

УДК:

530.145:539.1(043.3)

CERIF
класификација:

P 190 Математичка и општа теоријска физика, класична механика, квантна механика, релативитет, гравитација, статистичка физика
P 200 Електромагнетизам, оптика, акустика
P 230 Атомска и молекуларна физика

Тип лиценце
Креативне
заједнице:

CC BY-NC-ND

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	Dr. Vladan Pavlović, Assistant Professor, University of Niš, Faculty of Sciences and Mathematics
Title:	Slow and stored light in spherical quantum dots in ladder-type configuration
Abstract:	<p>This thesis investigates the weak probe laser pulse propagation through the medium consisting of semiconductor spherical quantum dots with an on-center hydrogen impurity. Under the presence of one or two strong continuous-wave control fields, the three- or four-level ladder-type light–matter coupling scheme forms, leading to the coherent effect of electromagnetically induced transparency. Several cases are considered: the three-level system with non-degenerate and three-fold degenerate middle level, and the four-level system, where the additional field can behave as the probe or control field. The light–matter interaction is described by Maxwell-Bloch equations, which are solved both numerically and analytically with approximations, while quantum dot energies and wavefunctions are calculated using the Lagrange mesh method. It is shown that, in the presence of the control field, the reduced absorption is related to the increase of the dispersion curve slope, generating slow light. The light storage and retrieval are demonstrated by adiabatically switching the control field off and back on. Quantitative parameters: the group index, relative width, efficiency, and fidelity of the output pulse with respect to the laser strengths, input pulse spectral width and storage time are also calculated. The output pulse dependence on the decay rates and the external static magnetic field strength is also studied. Furthermore, the output pulse efficiency is shown to increase by using the phase-modulated control laser. Special attention is given to the comparison of numerical and analytical solutions, as well as the implementation of the obtained results in quantum information processing, optical telecommunications and magnetometry.</p>
Scientific Field:	Physics
Scientific Discipline:	Quantum Optics
Key Words:	Slow light, light storage, electromagnetically induced transparency, Autler–Townes effect, semiconductor nanostructures, spherical quantum dot, hydrogen impurity, ladder-type configuration
UDC:	530.145:539.1(043.3)

CERIF
Classification:

P 190 Mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics
P 200 Electromagnetism, optics, acoustics
P 230 Atomic and molecular physics

Creative
Commons
License Type:

CC BY-NC-ND



**ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ**

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, РБР:	
Идентификациони број, ИБР:	
Тип документације, ТД:	монографска
Тип записа, ТЗ:	текстуални / графички
Врста рада, ВР:	докторска дисертација
Аутор, АУ:	Никола Н. Филиповић
Ментор, МН:	Владан Павловић
Наслов рада, НР:	СПОРА И УСКЛАДИШТЕНА СВЕТЛОСТ У СФЕРНИМ КВАНТНИМ ТАЧКАМА У ЛЕСТВИЧАСТОЈ КОНФИГУРАЦИЈИ
Језик публикације, ЈП:	српски
Језик извода, ЈИ:	енглески
Земља публикавања, ЗП:	Србија
Уже географско подручје, УГП:	Србија
Година, ГО:	2021.
Издавач, ИЗ:	ауторски репринт
Место и адреса, МА:	Ниш, Вишеградска 33
Физички опис рада, ФО: <small>(поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)</small>	12 поглавља, 311 страна, 284 цитата, 12 табела, 84 слике, 3 прилога
Научна област, НО:	Физика
Научна дисциплина, НД:	Квантна оптика
Предметна одредница/Кључне речи, ПО:	Спора светлост, складиштење светлости, електромагнетно индукована транспарентност, Аутлер-Таунсов ефекат, полупроводничке наноструктуре, сферна квантна тачка, водонична нечистоћа, лествичаста конфигурација
УДК:	530.145:539.1(043.3)
Чува се, ЧУ:	библиотека
Важна напомена, ВН:	

Извод, ИЗ:	<p>У овој дисертацији, проучавано је простирање слабог сондирајућег ласерског пулса кроз материјалну средину сачињену од полупроводничких сферних квантних тачака са центрираном водоничном нечистоћом, у условима електромагнетно индуковане транспарентности. Овај кохерентни ефекат остварен је у присуству једног или два јака континуална контролна ласера, при чему се светлост и материја спрежу формирајући лествичасту конфигурацију са три или четири нивоа, респективно. Разматрани су случајеви када је средњи ниво у систему са три нивоа недегенерисан, односно троструко дегенерисан, док је додатно поље у систему са четири нивоа третирано и као контролно и као сондирајуће. Интеракција светлост–материја описана је Максвел-Блоховим једначинама, које су решаване нумерички и апроксимативно аналитички, док су енергије и таласне функције сферне квантне тачке рачунате применом метода Лагранжеве мреже. Показано је да је смањена апсорпција средине у присуству контролног поља праћена повећањем нагиба дисперзионе криве, што доводи до настанка споре светлости. Такође, адијабатским искључивањем и поновним укључивањем контролног поља, демонстрирани су складиштење и повраћај сондирајућег пулса у и из средине. Квантитативни параметри споре и ускладиштене светлости: групни индекс, релативна ширина, ефикасност и верност излазног пулса, рачунати су у зависности од јачина ласера, спектралне ширине улазног пулса, као и времена складиштења. Детаљно је проучавана и зависност профила излазног пулса од коефицијената распада, као и од јачине спољашњег стационарног магнетног поља. На послетку, показано је да се ефикасност излазног пулса може повећати коришћењем фазно модулисаног контролног ласера. Посебна пажња посвећена је упоредној анализи нумеричких и аналитичких решења, као и дискусији о потенцијалним применама побројаних ефеката у квантној информатици, оптичким телекомуникацијама и магнетометрији.</p>										
Датум прихватања теме, ДП:	21. 12. 2020.										
Датум одбране, ДО:											
Чланови комисије, КО:	<table border="1"> <tr> <td data-bbox="419 1512 611 1561">Председник:</td> <td data-bbox="611 1512 1473 1561"></td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 1561 611 1610">Члан:</td> <td data-bbox="611 1561 1473 1610"></td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 1610 611 1659">Члан:</td> <td data-bbox="611 1610 1473 1659"></td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 1659 611 1709">Члан:</td> <td data-bbox="611 1659 1473 1709"></td> </tr> <tr> <td data-bbox="419 1709 611 1736">Члан, ментор:</td> <td data-bbox="611 1709 1473 1736"></td> </tr> </table>	Председник:		Члан:		Члан:		Члан:		Члан, ментор:	
Председник:											
Члан:											
Члан:											
Члан:											
Члан, ментор:											



**ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ**

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, ANO :	
Identification number, INO :	
Document type, DT :	monograph
Type of record, TR :	textual / graphic
Contents code, CC :	doctoral dissertation
Author, AU :	Nikola N. Filipović
Mentor, MN :	Vladan Pavlović
Title, TI :	SLOW AND STORED LIGHT IN SPHERICAL QUANTUM DOTS IN LADDER-TYPE CONFIGURATION
Language of text, LT :	Serbian
Language of abstract, LA :	English
Country of publication, CP :	Serbia
Locality of publication, LP :	Serbia
Publication year, PY :	2021
Publisher, PB :	author's reprint
Publication place, PP :	Niš, Višegradska 33
Physical description, PD : (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	12 chapters, 311 pages, 284 references, 12 tables, 84 figures, 3 appendices
Scientific field, SF :	Physics
Scientific discipline, SD :	Quantum Optics
Subject/Key words, S/KW :	Slow light, light storage, electromagnetically induced transparency, Autler–Townes effect, semiconductor nanostructures, spherical quantum dot, hydrogen impurity, ladder-type configuration
UDC :	530.145:539.1(043.3)
Holding data, HD :	library
Note, N :	

Abstract, AB :	<p>This thesis investigates the weak probe laser pulse propagation through the medium consisting of semiconductor spherical quantum dots with an on-center hydrogen impurity. Under the presence of one or two strong continuous-wave control fields, the three- or four-level ladder-type light–matter coupling scheme forms, leading to the coherent effect of electromagnetically induced transparency. Several cases are considered: the three-level system with non-degenerate and three-fold degenerate middle level, and the four-level system, where the additional field can behave as the probe or control field. The light–matter interaction is described by Maxwell-Bloch equations, which are solved both numerically and analytically with approximations, while quantum dot energies and wavefunctions are calculated using the Lagrange mesh method. It is shown that, in the presence of the control field, the reduced absorption is related to the increase of the dispersion curve slope, generating slow light. The light storage and retrieval are demonstrated by adiabatically switching the control field off and back on. Quantitative parameters: the group index, relative width, efficiency, and fidelity of the output pulse with respect to the laser strengths, input pulse spectral width and storage time are also calculated. The output pulse dependence on the decay rates and the external static magnetic field strength is also studied. Furthermore, the output pulse efficiency is shown to increase by using the phase-modulated control laser. Special attention is given to the comparison of numerical and analytical solutions, as well as the implementation of the obtained results in quantum information processing, optical telecommunications and magnetometry.</p>										
Accepted by the Scientific Board on, ASB :	21/12/2020										
Defended on, DE :											
Defended Board, DB :	<table border="1"> <tr> <td data-bbox="400 1279 611 1328">President:</td> <td data-bbox="611 1279 1465 1328"></td> </tr> <tr> <td data-bbox="400 1328 611 1377">Member:</td> <td data-bbox="611 1328 1465 1377"></td> </tr> <tr> <td data-bbox="400 1377 611 1426">Member:</td> <td data-bbox="611 1377 1465 1426"></td> </tr> <tr> <td data-bbox="400 1426 611 1476">Member:</td> <td data-bbox="611 1426 1465 1476"></td> </tr> <tr> <td data-bbox="400 1476 611 1509">Member, Mentor:</td> <td data-bbox="611 1476 1465 1509"></td> </tr> </table>	President:		Member:		Member:		Member:		Member, Mentor:	
President:											
Member:											
Member:											
Member:											
Member, Mentor:											

*Dedi, čiji nadimak ponosno nosim, sa
večnom ljubavlju.*

Sadržaj

I	Uvod	1
1	Uvodne napomene	3
2	Fizika spore i uskladištene svetlosti	7
2.1	Spora i brza svetlost	8
2.1.1	Fazna i grupna brzina svetlosti u disperzivnoj sredini	8
2.1.2	Eksperimentalne realizacije spore i brze svetlosti	10
2.1.3	Lorencova teorija klasičnog oscilatora	12
2.1.4	Kramers-Kronigove relacije	14
2.2	Elektromagnetno indukovana transparentnost	17
2.2.1	Demonstracioni eksperimenti i srodni efekti	19
2.2.2	Fano interferencija i Autler-Taunsov efekat	21
2.2.3	Sličnosti i razlike između EIT i AT efekta	24
2.3	Skladištenje svetlosti	28
2.3.1	Formalizam polaritona tamnog stanja	28
2.3.2	Eksperimentalne realizacije skladištenja svetlosti	30
2.3.3	Tipovi memorijskih protokola	32
3	Fizika mezoskopskih sistema	37
3.1	Poluprovodničke heterostrukture	38
3.1.1	Masivni poluprovodnici i heterospojevi	39
3.1.2	Kvantne jame, žice i tačke	40
3.2	Dobijanje kvantnih tačaka	42
3.2.1	Litografske tehnike za izradu kvantnih tačaka	42
3.2.2	Kvantne tačke u koloidnim rastvorima	44
3.2.3	Samosastavljene kvantne tačke	45
3.3	Najznačajnije karakteristike i primene kvantnih tačaka	46
3.3.1	Optičke karakteristike sfernih kvantnih tačaka	47
3.3.2	Kvantne tačke u spoljašnjem magnetnom polju	48
3.3.3	Uticaj nečistoća na optička i druga svojstva kvantnih tačaka	50
4	Motivacija za proučavanje prostiranja svetlosti u sfernim kvantnim tačkama	53
4.1	Sistemi sa lestvičastom konfiguracijom	53
4.1.1	Degenerisani sistemi	54
4.1.2	Sistemi sa fazno modulisanim kontrolnim poljem	55
4.2	Primene spore i uskladištene svetlosti	56
4.2.1	Primene u optičkim telekomunikacijama	56
4.2.2	Primene u magnetometriji	59
4.2.3	Primene u kvantnoj informatici	59

II	Teorijski model	63
5	Opisivanje interakcije elektromagnetnog polja sa materijalnom sredinom	65
5.1	Polazne pretpostavke	65
5.1.1	Elektromagnetno polje	68
5.1.2	Formalizam matrice gustine	69
5.1.3	Dekoherencija	70
5.2	Hamiltonijan sistema svetlost–materija	72
5.2.1	Hamiltonijan zatvorenog sistema sa tri nivoa	73
5.2.2	Hamiltonijan otvorenog sistema sa tri nivoa	78
5.2.3	Hamiltonijan sistema sa četiri nivoa	80
5.3	Dobijanje optičkih Blohovich jednačina	82
5.3.1	OB jednačine za zatvoren sistem sa tri nivoa	83
5.3.2	OB jednačine za otvoren sistem sa tri nivoa	84
5.3.3	OB jednačine za sistem sa četiri nivoa	85
5.4	Prostiranje elektromagnetnih talasa	86
5.4.1	Nelinearna talasna jednačina za envelope	87
5.4.2	Propagacione jednačine za komponente	89
5.5	Maksvel-Blohove jednačine u raznim sredinama	93
5.5.1	MB jednačine u slučaju dominantne elektron-fononske interakcije	94
5.5.2	MB jednačine u slučaju dominantne spontane emisije	96
5.6	Određivanje apsorpcione i disperzione krive	101
5.6.1	Električna susceptibilnost sredine	101
5.6.2	Koeficijent apsorpcije i indeks prelamanja	103
5.6.3	Grupna brzina svetlosti i grupni indeks sredine	104
6	Rešavanje Maksvel-Blohovich jednačina	107
6.1	Perturbacioni pristup i MB jednačine u stacionarnom režimu	107
6.1.1	Zatvoren sistem sa tri nivoa	108
6.1.2	Otvoren sistem sa tri nivoa	114
6.1.3	Sistem sa četiri nivoa i dva kontrolna polja	115
6.1.4	Sistem sa četiri nivoa i dva sondirajuća polja	116
6.2	Formalizam obučenih stanja	119
6.2.1	Obučena stanja sistema sa tri nivoa	121
6.2.2	Obučena stanja sistema sa četiri nivoa	126
6.3	Metod Furijeove transformacije	130
6.3.1	Primena metoda na sisteme sa tri nivoa	133
6.3.2	Primena metoda na sistem sa četiri nivoa	135
6.3.3	Grupna brzina, disperzija i raspad sondirajućeg pulsa	136
6.3.4	Efikasnost, vernost, grupni indeks i relativna širina izlaznog pulsa	142
6.4	Polaritoni tamnog stanja	145
6.4.1	Polaritoni u zatvorenom sistemu sa tri nivoa	145
6.4.2	Uticaj dekoherentnih procesa	149
6.4.3	Rešavanje propagacione jednačine u slučaju skladištenja	150
6.4.4	Povratak na sondirajuću Rabijevu frekvenciju i veza sa metodom FT	153
6.5	Fazna modulacija kontrolnog polja	155
6.5.1	Modulacija u zatvorenom sistemu sa tri nivoa	155
6.5.2	Primena metoda Furijeove transformacije	157

7 Ispitivanje energijske strukture sferne kvantne tačke	161
7.1 Hamiltonijan sferne kvantne tačke	161
7.1.1 Aproksimacija efektivne mase	163
7.1.2 Prelaz na efektivne atomske jedinice	165
7.2 Nalaženje energija i talasnih funkcija	167
7.2.1 Metod Lagranževe mreže	167
7.2.2 Matrični elementi hamiltonijana SKT	169
7.2.3 Matrični elementi operatora električnog dipolnog momenta	171
III Rezultati i analiza	175
8 Energijska struktura sferne kvantne tačke	177
8.1 Efekti konfiniranja	178
8.2 Efekti magnetnog polja	179
9 Spora svetlost u sfernim kvantnim tačkama	185
9.1 Spora svetlost u zatvorenom sistemu sa tri nivoa	185
9.1.1 Poređenje numeričkog i aproksimativnog analitičkog rešenja	191
9.1.2 Uticaj spoljašnjeg magnetnog polja	196
9.1.3 Uticaj koeficijenata raspada	200
9.2 Uticaj degeneracije srednjeg nivoa na prostiranje pulsa	203
9.2.1 Poređenje rezultata za otvoren i zatvoren sistem	205
9.2.2 Efektivni koeficijent raspada	211
9.3 Spora svetlost u sistemu sa četiri nivoa	214
9.3.1 Uloga dodatnog kontrolnog polja na prostiranje pulsa	214
9.3.2 Spora svetlost u sistemu sa dva sondirajuća polja	217
9.4 Primena dobijenih rezultata u magnetometriji	223
10 Skladištenje svetlosti u sfernim kvantnim tačkama	229
10.1 Uticaj vremena skladištenja i objašnjenje efekta	231
10.1.1 Poređenje egzaktnog i aproksimativnog analitičkog rešenja za skladištenje	234
10.1.2 Primena u izradi kvantnih memorija i optičkih bafera	235
10.2 Skladištenje u spoljašnjem magnetnom polju	236
10.2.1 Primena u izradi optičkih prekidača i procesiranju signala	240
10.3 Grupni indeks, relativna širina, vernost i efikasnost skladištenja	240
10.3.1 Načini za povećanje efikasnosti skladištenja	244
11 Prostiranje svetlosti kroz sredinu sa fazno modulisanim kontrolnim poljem	247
11.1 Uticaj modulacije kontrolnog polja na kontinualni sondirajući laser	247
11.2 Uticaj modulacije kontrolnog polja na pulsni sondirajući laser	251
11.3 Uticaj modulacije na sondirajući puls u spoljašnjem magnetnom polju	255
11.3.1 Primena modulacije kontrolnog polja u magnetometriji	259
11.4 Uticaj modulacije kontrolnog polja na proces skladištenja	259

IV Zaključak	265
12 Zaključne napomene	267
12.1 Pregled rezultata	267
12.2 Pravci daljeg istraživanja	270
V Dodatak	273
A Matematički detalji ispitivanja interakcije svetlosti i materije	275
A.1 Prelazak sa Šredingerove na interakcionu sliku	275
A.2 Prelazak na korotirajući bazis	277
A.3 Izvođenje matričnih elemenata dekoherentnog člana za slučaj spontane emisije	278
A.4 Analitičko rešavanje propagacione jednačine	279
B Određivanje energija i talasnih funkcija sferne kvantne tačke	281
B.1 Efektivne atomske jedinice	281
B.2 Svođenje svojstvenog problema hamiltonijana SKT na običnu matričnu jednačinu	282
B.3 Vignerov $3j$ simbol	283
B.4 Rotirajući jedinični vektori	284
C Numeričko rešavanje Maksvel-Blohovih jednačina	287
C.1 Metod Runge-Kuta četvrtog reda	287
C.2 Laks-Vendrofov metod	288
Literatura	293
Lista skraćenica	311

Deo I

Uvod

1 Uvodne napomene

Kvantna optika predstavlja relativno mladu oblast fizike koja se bavi proučavanjem kvantnih fenomena nastalih pri interakciji elektromagnetnih polja sa materijalnom sredinom. U uskoj vezi sa nelinearnom optikom, omogućava razumevanje niza naizgled kontraintuitivnih efekata koji se ne mogu javiti u granicama konvencionalne, linearne optike. Takođe, činjenica da je laserskom svetlošću i materijalnom sredinom moguće relativno lako manipulirati, čini opažene efekte veoma pogodnim za primenu u raznim oblastima nauke i tehnike. Poseban značaj u polju kvantne optike imaju atomsko-koherentni, odnosno kvantno-interferentni efekti pri interakciji svetlosti i materije. Na sličan način kao što se u interferencionim eksperimentima koherentna svetlost koja potiče od dva izvora sabira, dajući na ekranu naizmenično svetle i tamne linije – interferencionu sliku, tako se i pomenuti efekti zasnivaju na interferenciji različitih ekscitacionih puteva. Jedan od takvih efekata je i *elektromagnetno indukovana transparentnost* (EIT, engl. electromagnetically induced transparency), koji predstavlja polaznu osnovu za čitavo istraživanje sprovedeno u ovoj disertaciji. Uporedo sa EIT, činjenica da elektromagnetno polje jakog intenziteta može da dovede do modifikacije energijskih nivoa atoma sredine, dovodi do nastanka tzv. *dinamičkog Štarkovog* ili *Autler-Taunsovog efekta* (AT efekat, engl. AC Stark/Autler-Townes effect), koji će u daljem radu takođe biti od izuzetnog značaja.

Posebno atraktivan fenomen, u tesnoj vezi sa EIT i AT efektom, jeste *spora svetlost* (engl. slow light), i odnosi se na svetlost koja, pri prolasku kroz materijalnu sredinu pod odgovarajućim uslovima, biva usporena do brzina koje mogu da odgovaraju prosečnim brzinama jednog običnog bicikliste. Zbog toga i ne čudi činjenica da se veliki broj istraživača u današnje vreme bavi proučavanjem aspekata kontrole prostiranja svetlosti, kako sa teorijskog, tako i sa eksperimentalnog stanovišta. Pored toga, sve je više potencijalnih primena gde bi se karakteristike spore svetlosti mogle na adekvatan način eksploatirati. Takođe, postavlja se pitanje da li je, ako je već usporavanje svetlosti za više redova veličine praktično izvodljivo, moguće potpuno zaustaviti svetlost, tačnije „zarobiti” je u nekoj sredini? Odgovor na ovo pitanje je *da* – svetlost je, pod određenim uslovima, moguće *uskladištiti* u nekom medijumu, a potom i *povratiti* informaciju koju ona nosi (engl. storage and retrieval). Ova disertacija je, između ostalog, posvećena detaljnom proučavanju ovog fenomena, sa osvrtom na potencijalne primene koju skladištenje svetlosti može da ima.

Da bi se pobrojani efekti realizovali, potrebno je obezbediti interakciju dva ili više lasera sa nekom materijalnom sredinom. U najvećem broju eksperimenata, radi se o gasovitim sredinama, sačinjenim ili od atoma ohlađenih do jako niskih temperatura, ili pak vrelih para alkalnih metala, poput cezijuma ili rubidijuma. Ovakva „aparatura” obezbeđuje da se efekti međuatomske interakcije mogu zanemariti, stvarajući prostor za pojavu EIT i drugih propratnih efekata. Nasuprot ovome, kao materijalna sredina može se koristiti i neki materijal u čvrstom agregatnom stanju, u kome je međuatomska interakcija nezanemarljiva. Ipak, ovakve strukture imaju svojih prednosti, budući da dozvoljavaju mnogo veći stepen kontrole i bolju integraciju sa ostatkom aparature, što je od velike važnosti sa stanovišta potencijalnih primena. Konkretno, u ovoj disertaciji će od interesa biti sredina sačinjena od velikog broja poluprovodničkih *kvantnih tačaka* (engl. quantum dots, QDs), unutar kojih nosioci naelektrisanja bivaju zarobljeni (konfinirani), stvarajući tako diskretnu energijsku strukturu, sličnu onoj koja se javlja u atomima. Zbog toga se kvantne tačke često nazivaju

„veštačkim atomima”. Jedan od ciljeva ove disertacije je da se kvantne tačke profilišu kao pogodni kandidati za izradu materijala na kojima će se, u interakciji sa svetlošću, javiti efekti kao što su EIT, AT efekat, spora i uskladištena svetlost.

Predmet istraživanja ove doktorske disertacije jeste prostiranje laserske svetlosti kroz materijalnu sredinu sačinjenu od poluprovodničkih sfernih kvantnih tačaka. Laserska svetlost može biti data kako u formi kontinualnog monohromatskog lasera, tako i u formi pulsa, sačinjenog od velikog broja različitih spektralnih komponenti. Od interesa će biti prostiranje svetlosti u uslovima ostvarene EIT, odnosno prevashodno AT efekta, što je izvodljivo uz prisustvo jednog ili više kontrolnih lasera visokog intenziteta. Laseri se sprežu sa materijalnom sredinom tako da dolazi do formiranja tzv. *lestvičaste* ili *kaskadne konfiguracije* (engl. ladder/cascade configuration). Konkretno, fokusiraćemo se na lestvičaste konfiguracije sa tri i četiri nivoa, u kojima će postojati dva, odnosno tri laserska polja, respektivno. Takođe, deo vremena posvetićemo i konfiguraciji sa tri nivoa čiji je srednji nivo trostruko degenerisan. Razmatraće se uticaj spoljašnjeg stacionarnog magnetnog polja, degeneracije srednjeg nivoa, karakteristika samih lasera, kao i efekata dekoherencije na sporu i uskladištenu svetlost. Značajna pažnja biće posvećena analizi potencijalnih primena dobijenih rezultata u oblastima poput kvantne informatike, optičkih telekomunikacija i magnetometrije.

Disertacija je organizovana na sledeći način. U Delu I, koji predstavlja *uvodni deo* disertacije, definisani su fenomeni od interesa, napravljen je pregled dosadašnjih rezultata i literature, kao i potencijalnih primena. Konkretno, u Glavi 2 data su objašnjenja pojmova spore i uskladištene svetlosti, kao i eksperimentalni rezultati u kojima se ovi efekti javljaju. U Glavi 3 uveden je pojam poluprovodničkih nanostruktura, kojima kvantne tačke i pripadaju, diskutovana su pojedina važna svojstva koja one poseduju, kao i način njihove izrade. Glava 4 posvećena je primenama spore i uskladištene svetlosti u raznim oblastima nauke i tehnike, kao i diskusiji vezanoj za motivaciju za rad na ovoj temi uopšte. Osnove *teorijskog modela* koji je korišćen u disertaciji date su u Delu II. Preciznije, u Glavi 5 prikazana je detaljna procedura izvođenja jednačina kojima se opisuje proučavani sistem svetlost–materija, dok je Glava 6 posvećena njihovom detaljnom rešavanju za niz posebnih slučajeva i situacija od interesa. Ovaj se deo završava Glavom 7 koja se bavi nalaženjem energijske strukture sferne kvantne tačke, čije će poznavanje biti neophodno za nastavak rada i dobijanje opipljivih rezultata. U Delu III izloženi su i detaljno analizirani dobijeni *rezultati*. Tako su u Glavi 8 prikazani rezultati koji se tiču energijske strukture kvantne tačke, u Glavi 9 oni kojima je fokus na pojavi spore svetlosti, dok je u Glavi 10 sprovedena temeljna diskusija rezultata skladištenja svetlosti u kvantnim tačkama. Pored toga, Glava 11 obuhvata rezultate koji bi proces skladištenja mogli da učine efikasnijim, konkretno pomoću fazne modulacije kontrolnog polja. Na kraju, napomenimo da je Deo IV rezervisan za sumiranje rezultata i razmatranje pravaca daljeg istraživanja, dok su pojedina izvođenja, kako ne bi narušavala strukturu i tok disertacije, odvojena u formi *odatka* u Deo V. Na samom kraju disertacije, uz neizostavni spisak literature, ostavljeno je mesto za listu najčešće korišćenih skraćenica.

Oni koji makar delimično poznaju autora ovih redova, imaju iskustva sa njegovom težnjom za opširnim izlaganjem. Ova disertacija ne odudara previše od tog iskustva. Međutim, namera autora bila je da, u nedostatku adekvatnih udžbenika iz ove oblasti, obimnu građu prikupljanu tokom doktorskih studija sistematizuje na način da to bude od koristi kako drugim, formiranim istraživačima u oblasti, tako i studentima master i doktorskih studija koji planiraju usavršavanje u sferama kvantne i nelinearne optike, fotonike i kvantne mehanike konfiniranih sistema. Jedna od ideja vodilja za ovakav „sveobuhvatni” pristup bila je, dakle, mogućnost korišćenja ove disertacije u različite svrhe u budućnosti, ali i autorovo mišljenje da je potrebno detaljno prikazati neretko nejasnu teorijsku pozadinu iza pojedinih fenomena, kao i izvesna izvođenja koja su i njemu samom često predstavljala poteškoće u radu.

Kao što je već rečeno, iako postoji veliki broj radova u kojima se proučavaju EIT, spora i uskladištena svetlost, udžbenička literatura iz ovih oblasti bi svakako mogla da bude bogatija. Ovaj nedostatak se posebno ogleda u tome što mnogi pojmovi koji se koriste u disertaciji nisu nikada prevedeni na srpski jezik, ili barem ne postoji zvaničan konsenzus oko njihovog naziva. Određen pomak po ovom pitanju postignut je objavljivanjem nekoliko doktorskih disertacija domaćih autora u poslednjih desetak godina [1,2]. Iako mnogi istraživači sa ovih prostora svakodnevno barataju relevantnim terminima na engleskom jeziku, autor je pokušao da, gde god se to čini smislenim i izvodljivim, za „neprevedene” fizičke veličine, pojave i metode iskoristi srpske reči za koje misli da ih najpribližnije i najadekvatnije opisuju. Engleski nazivi, međutim, nisu izostavljeni, i nalaze se u zagradama na mestima gde se odgovarajući pojmovi po prvi put definišu.

Pored problema koji se tiče prevođenja engleskih izraza, na mnogim mestima u disertaciji pojavice se različite sintagme koje se manje ili više ravnopravno koriste u stručnoj literaturi. Tako ćemo, recimo, pojmove *elektromagnetni talas*, *elektromagnetno polje*, *lasersko polje*, *laser* ili *svetlost* tretirati kao sinonime, iako to, strogo govoreći, ne mora da bude slučaj. Na primer, pod pojmom „svetlost” nećemo nužno smatrati samo elektromagnetne talase iz vidljivog dela spektra, pošto dobijeni rezultati neće nužno biti ograničeni na lasere koji emituju vidljivu svetlost. Takođe, često ćemo sretati frazu „interakcija svetlosti sa materijalnom sredinom”, što će opet često, radi konciznosti, biti zamenjeno prosto sa „interakcija svetlost–materija” (engl. light-matter interaction). Na kraju, naglasimo jedan bitan detalj kada govorimo o materijalnoj sredini sa kojom svetlost interaguje. Videli smo da materijalna sredina može da bude sačinjena kako od atoma, tako i od kvantnih tačaka – „veštačkih atoma”. Kako terminologiju ne bismo previše komplikovali, pod pojmom *atomska sredina* podrazumevaćemo ma koju sredinu čiji se gradivni elementi karakterišu energijskom strukturom sličnoj onoj u „pravim” atomima, a pod pojmom *atom* upravo taj gradivni element. U našem slučaju, diskretna energijska struktura poluprovodničke kvantne tačke se upravo nameće kao argument da i sredinu sačinjenu od kvantnih tačaka smatramo *atomskom* u gorepomenutom smislu. Naravno, ukoliko je potrebno dodatno precizirati kakvog je tipa data sredina (ako se, na primer, zaista radi isključivo o „pravim” atomima), to će svakako biti učinjeno.

Izrada ove disertacije bila je obiman, zahtevan i naporan, ali i izazovan i inspirativan proces, i predstavlja krunu autorovog sedmogodišnjeg rada u oblasti kvantne i nelinearne optike. Disertacija se prevashodno oslanja na četiri rada koji je autor sa svojim saradnicima objavio u prethodnom periodu, i koji su navedeni u spisku literature pod brojevima [3–6]. Ovi radovi, uz nekoliko drugih čija se tema u manjoj ili većoj meri poklapa sa temom disertacije, a koji su navedeni zajedno sa preostalim radovima autora u okviru prateće dokumentacije na kraju disertacije, detaljno proučavaju fenomene okupljene oko EIT, zaokružuju jednu etapu istraživanja, ali istovremeno daju mnoštvo različitih pravaca u kojima bi dalji rad mogao da se kreće. Samo tokom izrade disertacije se rodilo nekoliko novih ideja koje bi mogle prirodno da se nadovežu i dopune rezultate prezentovane u disertaciji. O nekima od njih će čak i biti reči na kraju disertacije.

Autor oseća potrebu da se zahvali svima koji su na posredan ili neposredan način učestvovali u izradi ove disertacije. Zahvaljujem se svom mentoru, dr Vladanu Pavloviću, docentu PMF-a u Nišu, na nesebičnoj pomoći, uloženom trudu i zajedničkom radu na disertaciji, kao i mnoštvu korisnih saveta i smernica koje sam sa zadovoljstvom implementirao u svoj način rada. Veliko hvala i prof. dr Ljiljani Stevanović, redovnom profesoru PMF-a u Nišu, vodi našeg istraživačkog tima i mom svojevrsnom komentoru, na ogromnoj pomoći pri radu, ali i velikom strpljenju i razumevanju za probleme na koje sam u toku studija nailazio. Zahvaljujem se i svojim kolegincama i kolegama, nastavnicima i saradnicima Departmana za fiziku PMF-a u Nišu, na iskrenoj podršci i nepresušnoj predusretljivosti tokom svih ovih godina zajedničkog rada. Posebno bih želeo da se zahvalim svom kolegi i prijatelju, Danilu Delibašiću, asistentu PMF-a u Nišu, čija me je izuzetnost konstantno mo-

tivisala da radim na sebi i istrajem na ovom vijugavom putu nauke – od srednjoškolskih, pa sve do današnjih dana. Veliku zahvalnost dugujem i dr Aleksandri Maluckov, naučnom savetniku Instituta za nuklearne nauke „Vinča”, na безусловnom poverenju i inspirativnim razgovorima od nauke do poezije i nazad, kao i ostalim kolegama iz Laboratorije za atomsku fiziku Instituta za nuklearne nauke „Vinča” na izuzetnoj saradnji, otvorenosti i gostoprimstvu pri svakoj od mojih poseta. Zahvaljujem se i prof. dr Gediminasu Juzeliunasu sa Instituta za teorijsku fiziku i astronomiju Univerziteta u Vilnjusu, Litvanija, koji mi je na prijateljski način omogućio da, kroz usavršavanje na vrlo uspešnom evropskom institutu, steknem veoma značajan uvid u perspektive kvantne optike, pomažući mi da usmerim svoje istraživanje ka sporoj i uskladištenoj svetlosti. Neizmernu zahvalnost dugujem i svojoj porodici, prijateljima, kumovima – jer su mi sve ovo vreme pružali ogromnu podršku, a istovremeno i svojevrsan balans „između prirode i društva”, zahvaljujući čemu nisam imao ni promil šanse da potonem. Na posletku, zahvaljujem se od srca svojoj supruzi Maši Filipović, zato što je najčešće verovala u mene više nego ja sâm. Hvala joj – na satima, danima, godinama. Na svemu.

2 Fizika spore i uskladištene svetlosti

Pojava da brzina svetlosti pri prolasku kroz neku materijalnu sredinu zavisi od karakteristika te sredine dobro je poznata posledica Maksvelovih jednačina [7, 8]. Interesovanje za proučavanje prostiranja svetlosti u disperzivnim sredinama javilo se već početkom dvadesetog veka, kada je ustanovljeno da je u nekim sredinama moguće ostvariti grupne brzine *veće* od brzine svetlosti u vakuumu [9–11]. Otprilike u isto vreme, pojavili su se radovi u kojima je pokazano da je ovaj rezultat u skladu sa Ajnštajnovom Specijalnom teorijom relativnosti, odnosno sa postulatom da je brzina svetlosti u vakuumu,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (2.1)$$

gde je ε_0 dielektrična konstanta, a μ_0 magnetna permeabilnost vakuuma, maksimalna brzina prenošenja informacije u svim inercijalnim sistemima reference [12]. Iako se sa teorijskim proučavanjem tzv. *brze svetlosti* (engl. fast light) krenulo relativno rano, do konkretnih eksperimentalnih realizacija ovog efekta je došlo tek nakon otkrića lasera 1960. godine, kada je omogućena praktična realizacija brojnih *koherentnih* efekata koji se javljaju u interakciji atoma sa laserskom svetlošću. Uporedo sa ovim, ubrzo se ispostavilo da je, najpre teorijski, a potom i u praksi, pored brze moguće dobiti i *sporu svetlost*, čija je grupna brzina *mnogo manja* od c . Činjenica da je moguće ostvariti takvu kontrolu prostiranja svetlosti da ona varira od spore ka brzom i obrnuto, usmerila je brojna istraživanja ka ovom polju kvantne optike u decenijama iza nas [13, 14]. U ovoj Glavi, najpre ćemo se zadržati na teorijskim osnovama ovih efekata, krećući od široko poznatih pojmova poput fazne i grupne brzine svetlosti, preko Lorencove teorije klasičnog oscilatora, pa sve do veze između apsorpcije i disperzije svetlosti koja se ogleda u Kramers-Kronigovim relacijama.

Kako ćemo ubrzo pokazati, spora i brza svetlost ostvaruju se u sredinama sa velikom disperzijom. Nažalost, velika disperzija u materijalnim sredinama kakve poznajemo praćena je velikom apsorpcijom, čime se gubi značaj efekta usporavanja ili ubrzavanja svetlosti koji želimo da postignemo. U ovoj Glavi, pokazaćemo da je različitim mehanizmima moguće smanjiti apsorpciju do zanemarljivih vrednosti, pri čemu disperzija i dalje ostaje velika. U nastavku rada, koncentrisaćemo se isključivo na mehanizme koji se tiču realizacije spore svetlosti. Među njima, značajno mesto zauzimaju dva vrlo slična fenomena – elektromagnetno indukovana transparentnost i Autler-Taunsov efekat [15, 16]. Oba efekta će biti predmet proučavanja disertacije, pri čemu će posebna pažnja biti posvećena njihovom uzajamnom poređenju. Razlog za ovo je, između ostalog, činjenica da u naučnoj literaturi još uvek ne postoji konsenzus oko toga da li EIT obuhvata AT ili predstavlja zaseban efekat, kao i koji je jasan kriterijum za njihovo razlikovanje [17, 18].

Realizacijom spore svetlosti na bazi EIT, moguće je ostvariti grupne brzine svetlosti reda veličine desetak metara u sekundi. Ovaj revolucionaran rezultat otvorio je vrata brojnim potencijalnim primenama spore svetlosti u mnoštvu manje ili više srodnih oblasti nauke i tehnike [19]. Pored toga, nadogradnjom pomenutih efekata postalo je moguće potpuno zaustaviti svetlost u materijalnoj sredini. Ovakvo zaustavljanje, odnosno *skladištenje svetlosti*, takođe privlači pažnju brojnih istraživača, sa velikim potencijalom prevashodno u izradi budućih kvantnih memorija [20]. Osnovna ideja

u pomenutoj primeni leži u tome da se, pomoću EIT ili AT efekta, obezbedi najpre skladištenje informacije u sredini, da bi ona, u nekom docnijem trenutku, po želji mogla da se *povrati* bez gubitaka i potom dalje obrađuje. U ovoj Glavi, posvetićemo pažnju objašnjenju skladištenja svetlosti pomoću formalizma polaritona tamnog stanja [21, 22]. Takođe, osvrnućemo se i na dva tipa memorijskih protokola koji se u praksi mogu javiti, a koji su velikim delom u vezi sa diskusijom o sličnostima i razlikama između EIT i AT efekta [23].

2.1 Spora i brza svetlost

Kao što smo rekli, efekti brze i spore svetlosti privlače pažnju naučne zajednice više od jednog veka. Oba pojma definisana su u odnosu na grupnu brzinu svetlosti v_g , o kojoj će više biti reči u narednom odeljku. Spora svetlost, tako, odgovara situaciji

$$v_g \ll c, \quad (2.2)$$

dok do pojave brze svetlosti dolazi ukoliko je zadovoljen jedan od sledećih uslova:

$$v_g > c, \quad v_g < 0. \quad (2.3)$$

Ukoliko definišemo vreme boravka svetlosti unutar materijalne sredine na sledeći način:

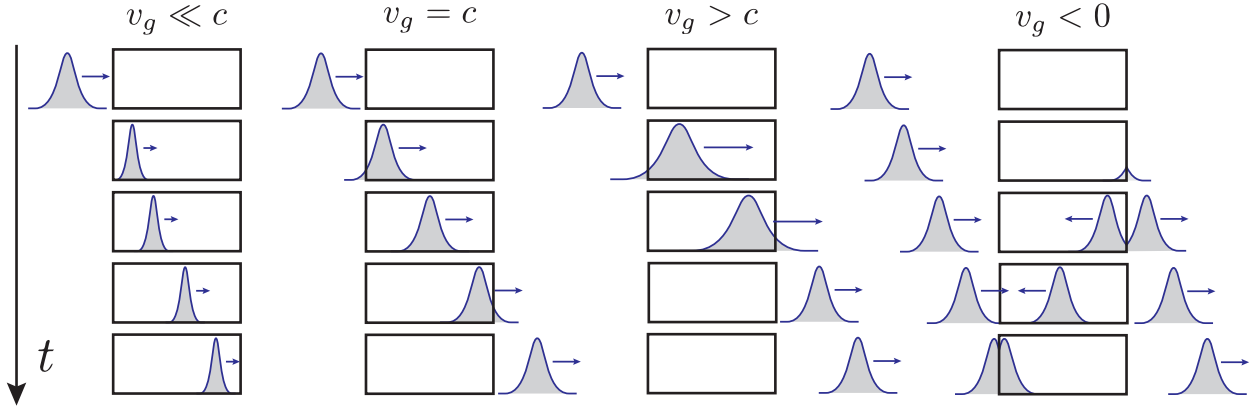
$$\Delta t = \frac{D}{v_g}, \quad (2.4)$$

gde je D dužina uzorka, a $\Delta t_0 = D/c$ vreme za koje bi svetlost prešla ovo rastojanje u vakuumu, za sporu svetlost ćemo onda imati $\Delta t \gg \Delta t_0$, dok će za brzu svetlost važiti $\Delta t < \Delta t_0$, ili pak $\Delta t < 0$. Dobijeni zaključci ilustrovani su na slici 2.1, na kojoj su prikazani svetlosni puls i materijalna sredina u različitim trenucima vremena, za nekoliko karakterističnih vrednosti grupne brzine. U slučaju spore svetlosti, jasno se vidi da je zadržavanje pulsa u sredini mnogo duže nego u slučaju $v_g = c$ (prostiranje kroz vakuum). Istovremeno, može se pokazati da se tada puls prostorno sažima zbog iznenadnog smanjenja brzine, pri čemu mu vrednost maksimuma ostaje ista.¹ Ovo znači da puls *gubi* energiju pri prostiranju kroz sredinu, koja biva prenetu sredini u obliku odgovarajućih atomskih ekscitacija [9]. Sa druge strane, kod brze svetlosti postoje dve moguće situacije. Ukoliko je $v_g > c$, puls iz sredine izađe brže nego da je prošao kroz vakuum, pri čemu u sredini trpi prostorno širenje kao posledicu iznenadnog porasta brzine, obrnuto slučaju spore svetlosti. Na posletku, činjenica da je $v_g < 0$, odnosno da je tranzitno vreme negativno, znači da puls iz sredine izađe *pre* nego što je u nju ušao – zbog čega je jasno zašto i ovaj slučaj potpada pod brzu svetlost. Pri tome, pokazano je da, unutar same sredine, puls izgleda kao da se zaista kreće negativnom brzinom, odnosno u suprotnom smeru od smera nailaska ulaznog pulsa [11, 24].

2.1.1 Fazna i grupna brzina svetlosti u disperzivnoj sredini

Osvrnimo se na kratko na prostiranje svetlosti u disperzivnoj sredini, čije optičke karakteristike jako zavise od frekvencije svetlosti. Pretpostavimo da se svetlost može prikazati u formi ravnog

¹ Iako pulsevi lokalizovani u određenom delu prostora neće biti tema disertacije, napomenimo na ovom mestu zgodnu analogiju sa iskazom iz glavnog teksta. Na sličan način kao što se kolona automobila „kompresuje” pri dolasku na naplatnu rampu na autoputu, tako se i svetlosni puls sažima pri ulasku u disperzivnu sredinu. Nešto detaljniji osvrt na čitavu problematiku biće sproveden u odeljku 2.3.1.



Slika 2.1: Šematski prikaz prostiranja spore svetlosti kroz materijalnu sredinu ($v_g \ll c$), prostiranja svetlosti kroz vakuum ($v_g = c$), kao i brze svetlosti ($v_g > c$ i $v_g < 0$) u nekoliko sukcesivnih trenutaka vremena. Na slici je prikazan prostorni profil svetlosnog pulsa, koji se očigledno menja prilikom prostiranja kroz sredine sa različitim karakteristikama [9, 11].

monohromatskog talasa, gde je jačina električnog polja talasa data izrazom

$$E(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.}, \quad (2.5)$$

gde je E_0 amplituda, $k = n\omega/c$ intenzitet talasnog vektora, ω frekvencija talasa a n (fazni) indeks prelamanja. Radi jednostavnosti, odabrali smo da se talas prostire u pravcu z -ose i izostavili vektorski zapis odgovarajućih veličina. Definišimo *faznu brzinu* talasa v_f kao brzinu kojom se kroz sredinu kreću tačke sa konstantnom fazom. Iz gornjeg izraza, vidimo da je faza elektromagnetnog talasa data kao

$$\phi = kz - \omega t, \quad (2.6)$$

pa će promena faze biti

$$\Delta\phi = k\Delta z - \omega\Delta t. \quad (2.7)$$

Kako je, sa jedne strane, $\Delta\phi = 0$, a sa druge $v_f = \Delta z / \Delta t$, dobijamo

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} \quad (2.8)$$

za faznu brzinu svetlosti.

Pređimo sada na razmatranje prostiranja svetlosnih pulseva kroz disperzivnu sredinu. Sabiranjem velikog broja ravnih monohromatskih talasa različitih frekvencija, dobiće se struktura koja je lokalizovana u vremenu, sa jasno definisanim maksimumom, koji odgovara poziciji konstruktivne interferencije različitih spektralnih komponenti (jako daleko od ovog maksimuma, komponente interferiraju destruktivno pa tamo nema nikakvog signala). Ovakva struktura – svetlosni puls – kreće se kao celina ne faznom, već *grupnom brzinom* v_g . Da bismo odredili ovu veličinu, prepisimo fazu talasa u nešto drugačijem obliku:

$$\phi(\omega) = \frac{n(\omega)\omega z}{c} - \omega t, \quad (2.9)$$

eksplicitno naglašavajući zavisnost od frekvencije, karakterističnu za disperzivnu sredinu. Ovaj izraz važi za svaku od komponenti pulsa. Kako bi se puls kretao kao celina, bez disperzije, potrebno je

da se, u svakoj tački prostora, faze pojedinih komponenti sabiraju na isti način, tako da maksimum pulsa ostane očuvan. Drugim rečima, potrebno je da važi $d\phi/d\omega = 0$. Sada možemo potražiti prvi izvod po frekvenciji gornjeg izraza, što nam, uz primenu osobina izvoda složene funkcije, daje

$$\frac{d\phi}{d\omega} = \frac{dn}{d\omega} \frac{\omega z}{c} + \frac{n(\omega)z}{c} - t. \quad (2.10)$$

Izjednačavanjem dobijenog izraza sa nulom, uz $z = v_g t$, dobijamo sledeći izraz za grupnu brzinu:

$$v_g = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}} = \frac{c}{n_g(\omega)} = \frac{d\omega}{dk}, \quad (2.11)$$

pri čemu grupni indeks definišemo kao

$$n_g(\omega) = n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}. \quad (2.12)$$

Veličina $dn/d\omega$ opisuje disperziju sredine, pa tako možemo govoriti o *normalnoj disperziji* ako važi

$$\frac{dn}{d\omega} > 0, \quad (2.13)$$

odnosno, ukoliko je

$$\frac{dn}{d\omega} < 0, \quad (2.14)$$

reč je o *anomalnoj disperziji*. Posmatranjem izraza (2.11), odnosno (2.12), vidimo da se spora svetlost može javiti u samo slučaju normalne disperzije (i to ako je $dn/d\omega$ jako veliko), a brza svetlost ukoliko je disperzija anomalna. Dakle, zbog toga što se različite komponente svetlosnog pulsa kreću različitim (faznim) brzinama, dolazi do promene mesta gde dolazi do konstruktivne interferencije, odnosno pojave maksimuma pulsa. Ova vrednost tada može da se kreće kako sporije, tako i brže od c . To u suštini znači da u fizičkoj pozadini efekata spore i brze svetlosti *nema nikakve razlike* – oba su posledica činjenice da se pozicije konstruktivne interferencije pomeraju u prostoru i vremenu.

2.1.2 Eksperimentalne realizacije spore i brze svetlosti

Rezultat da se svetlost može prostirati kroz neku sredinu brzinom većom od c se na prvi pogled može učiniti kontradiktornim sa Ajnštajnovim postulatom o konstantnosti brzine svetlosti. Ovim problemom se još početkom dvadesetog veka ekstenzivno bavio Zomerfeld, zajedno sa svojim studentom Briluenom. Leon Briluen je 1960. godine sumirao rezultate njihovih ranijih radova koji, budući da su objavljeni u jeku Prvog svetskog rata, nisu dostupni široj naučnoj zajednici [12]. Oni su proučavali pravougaone pulseve sa centralnom frekvencijom u oblasti anomalne disperzije, tako da je jasno moguće uočiti početak, odnosno *front* pulsa. U svojim radovima, pokazali su da je *brzina fronta pulsa* uvek jednaka brzini svetlosti u vakuumu, čak i u slučaju anomalne disperzije, a da pri tome dolazi i do jake distorzije pulsa.² Do istih zaključaka da *superluminalna* svetlost *ne* narušava postulate Specijalne teorije relativnosti došlo se i u kasnijim teorijskim istraživanjima, gde

² O distorziji pulsa će više biti reči u Glavi 6, kada se analitički budu rešavale jednačine za prostiranje pulsa kroz atomsku sredinu. Jedina razlika će se ogledati u činjenici da će termin „distorzija pulsa” najčešće biti zamenjen terminom „raspad pulsa”, pošto će oba termina u ovoj disertaciji biti tretirani kao sinonimi.

se pokazalo da Zomerfeldov i Briluenov zaključak važi i za pulseve različitih oblika [24–26]. Konkretno, pod pojmom fronta pulsa se tada smatra trenutak u kome intenzitet pulsa postaje različit od nule, i za ovaj deo pulsa ponovo važi da se kreće brzinom svetlosti u vakuumu.³ Ostatak pulsa (na primer, njegov maksimum) može da se kreće brzinom većom od c , ali ovaj deo pulsa nikada neće moći da „prestigne” front, koji će uvek prvi stići na detektor. Kao što smo rekli u prethodnom odeljku, maksimum pulsa se može kretati brže od svetlosti u vakuumu, ali to samo znači da se tako pomera pozicija konstruktivne interferencije spektralnih komponenti pulsa. Pravi značaj, dakle, ima brzina fronta pulsa, koji de fakto ima ulogu „nosioca” *informacije* koju puls sadrži. Činjenica da se informacija ne može preneti brzinom većom od c je jedina relevantna kada govorimo o očuvanju principa kauzalnosti. U kasnijim istraživanjima na ovu temu, Diner [27] je uveo i *brzinu transporta energije*,

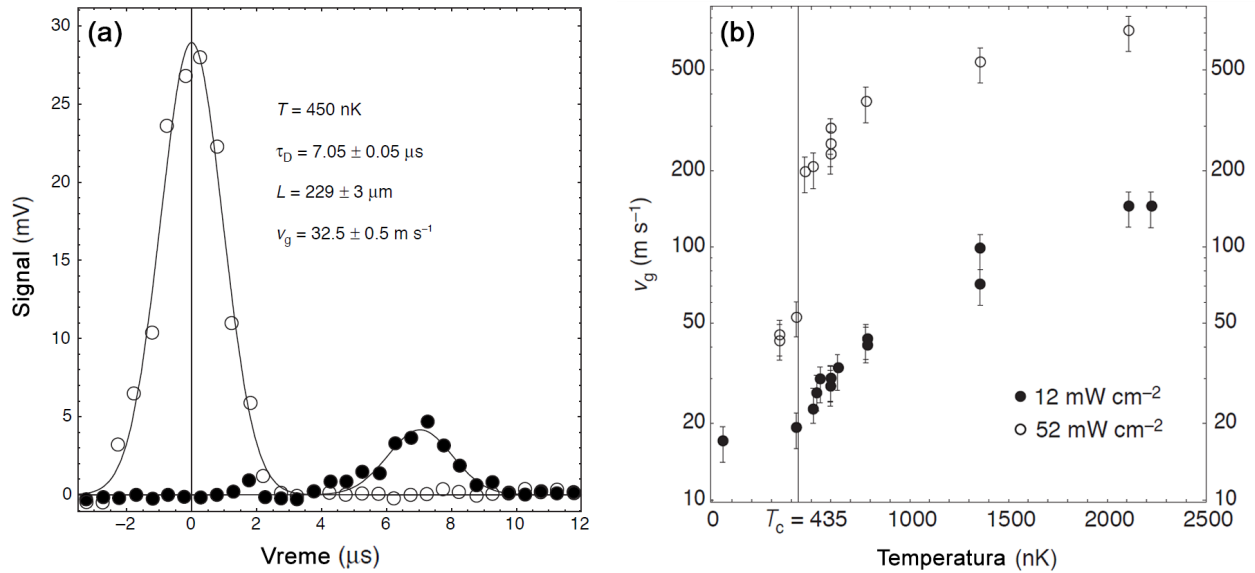
$$c_t = \frac{2n}{1+n^2}c, \quad (2.15)$$

kojom se prostire sva (fizička) informacija, i koja, nezavisno od vrednosti indeksa prelamanja, ne može biti veća od c .

Kao što je već rečeno, sa eksperimentalnim realizacijama brze svetlosti krenulo se odmah po otkriću lasera. Tako je, najpre, Basov sa saradnicima proučavao prostiranje pulsa jakog intenziteta kroz laserski pojačavač, što je izazvalo nelinearni optički odgovor, zbog koga je, umesto očekivane normalne disperzije u slučaju slabih pulseva, došlo do pojave anomalne disperzije i superluminalne svetlosti [28, 29]. U narednim godinama, sproveden je veliki broj eksperimenata u kojima je realizovana kako brza, tako i spora (*subluminalna*) svetlost u uslovima slabih lasera, tj. kada je moguće zadržati se isključivo na linearnim efektima [30–32].

U ovoj disertaciji, koncentrisaćemo se na proučavanje isključivo spore svetlosti. Jedan od najuspešnijih mehanizama za ostvarivanje ovog efekta je već pomenuta EIT, koja omogućava jednostavnu manipulaciju disperzionim svojstvima materijalne sredine korišćenjem veoma malog broja resursa. Do prve eksperimentalne realizacije spore svetlosti na bazi EIT došlo je 1992. godine, kada su Haris i saradnici uspeli da uspore svetlost 250 puta, koristeći atomske pare olova [34]. U nizu eksperimenata sprovedenih 1999. godine, najpre je Kaš sa saradnicima uspeo da smanji grupnu brzinu svetlosti do 90 m/s u optički gustom vrelom gasu rubidijuma na temperaturi od oko 360 K [35], a potom i Lene Hau sa saradnicima, koja je u ultrahladnom gasu atoma natrijuma (Boze-Ajnštajnov kondenzat na temperaturama reda nanokelvina) usporila svetlost do brzine od 17 m/s [33]. Na slici 2.2 (a) prikazan je detektovan signal koji je dala usporena svetlost u radu Hau i saradnika, dok je na slici 2.2 (b) data zavisnost postignutih grupnih brzina od temperature Boze-Ajnštajnovog kondenzata. Konačno, iste godine, Budker i saradnici su, koristeći pare rubidijuma, uspeli da dobiju sporu svetlost brzine svega 8 m/s [36]. Na nešto drugačiji način, do usporenja svetlosti do 58 m/s došao je i Bigelou sa saradnicima, i to u kristalu rubina na sobnoj temperaturi [37]. Na posletku, napomenimo da veliki potencijal za realizaciju spore svetlosti imaju još i optička vlakna, što je takođe proučavano od strane određenog broja autora [38–41].

³ Iako se u praksi uvek može reći da postoji trenutak vremena kada se puls uključuje, može se pokazati da ni pulsevi čiji je profil različit od nule u svim trenucima (kao što su Gausov puls ili hiperbolički sekans) ne narušavaju princip kauzalnosti [12]. Razlog za ovo je upravo pomenut – ulazni puls postoji u svim trenucima vremena, pa je samim tim nemoguće da izlazni puls postoji *pre* njega.



Slika 2.2: Eksperimentalni rezultati usporavanja svetlosti preuzeti iz rada [33]. (a) Zavisnost signala dobijenog na fotomultiplikatoru od vremena za slučaj referentnog pulsa, koji ne prolazi kroz atomsku sredinu (šuplji kružići), odnosno pulsa koji prolazi kroz atomski oblak dužine L i karakteriše se vremenom kašnjenja τ_D (puni kružići). Linijama su prikazani „gausovski” fitovi dobijenih signala. (b) Zavisnost grupne brzine od temperature atomskog gasa, za dve različite vrednosti intenziteta kontrolnog lasera (šuplji i puni kružići). Veličina T_c predstavlja temperaturu Boze-Ajnštajnovne kondenzacije.

2.1.3 Lorencova teorija klasičnog oscilatora

Interakciju svetlosti i materije, a potom i vezu između disperzije i apsorpcije sredine, moguće je na jednostavan, a efikasan način opisati korišćenjem Lorencovog modela klasičnog oscilatora [8, 9]. Model (linearnog harmonijskog) oscilatora se veoma često koristi u fizici za opisivanje raznih pojava, preko mehanike i elektrodinamike, pa sve do atomske i molekularne fizike, odnosno fizike čvrstog stanja. Na ovom mestu, posmatraćemo interakciju svetlosti sa sredinom sačinjenom od atoma, koje ćemo modelovati linearnim harmonijskim oscilatorima. S obzirom na to da je jezgro mnogo masivnije od elektrona, smatraćemo da ono miruje, dok je elektron mase m_e i naelektrisanja $-e$ za njega „vezan” elastičnom oprugom, koeficijenta elastičnosti κ . Drugim rečima, sve sile koje deluju između elektrona i jezgra moći će da se modeluju restitucionom silom $F_r = -\kappa z$, što se ispostavlja kao razumna aproksimacija, bez obzira na činjenicu da matematički oblik realnih sila u sistemu (Kulonova i centrifugalna) odudara od oblika restitucione sile. Pored toga, gubitke usled međuatomskih sudara, odnosno spontane emisije i drugih dekoherentnih efekata, modelovaćemo silom $F_t = -2m_e\gamma\dot{z}$, gde je γ koeficijent prigušenja. U najopštijem slučaju, kada na elektron deluje i spoljašnja, prinudna sila F_d , jednačina kretanja elektrona će imati oblik

$$m_e\ddot{z} = F_r + F_t + F_d, \quad (2.16)$$

gde smo, radi jednostavnosti, pretpostavili da se kretanje vrši duž samo jednog pravca. Ukoliko u gornji izraz zamenimo izraze za restitucionu silu i silu prigušenja, uz uvođenje tzv. *prirodne* frekvencije oscilovanja $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m_e}$, imaćemo

$$m_e \frac{d^2z}{dt^2} + 2m_e\gamma \frac{dz}{dt} + m_e\omega_0^2 z = F_d. \quad (2.17)$$

Kako se atom podvrgava dejstvu spoljašnjeg elektromagnetnog polja, prinudna sila F_d potiče upravo od lasera koji koristimo. Ukoliko pretpostavimo da se lasersko polje može okarakterisati električnim poljem koje ima oblik

$$E(t) = E_0 e^{i\omega t} + \text{c.c.} \quad (2.18)$$

i konstantno je u svim tačkama prostora, za prinudnu silu koja izaziva oscilovanje elektrona ćemo imati:

$$F_d(t) = -eE(t), \quad (2.19)$$

gde uticaj magnetnog polja elektromagnetnog talasa možemo zanemariti, što odgovara postupku diskutovanom u Glavi 5.

U Glavi 5 biće uveden pojam vektora polarizacije sredine, koji predstavlja odziv sredine na električno polje čijem je dejstvu podvrgnuta. Još iz klasične elektrodinamike znamo da ova veličina predstavlja električni dipolni moment jedinice zapremine

$$P = Nd = -Nez, \quad (2.20)$$

gde je N broj atoma po jedinici zapremine sredine, a $d = -ez$ električni dipolni moment jednog atoma, tačnije njegova z -komponenta koja će ovde biti jedina relevantna. Odavde imamo $z(t) = -P(t)/Ne$, što ako zajedno sa (2.19) zamenimo u (2.17), dobijamo

$$\frac{d^2 P}{dt^2} + 2\gamma \frac{dP}{dt} + \omega_0^2 P(t) = \frac{Ne^2}{m_e} E(t). \quad (2.21)$$

Odziv sredine bi trebalo da prati promene električnog polja, pa tako ima smisla pretpostaviti da se vektor polarizacije može zapisati na sledeći način:

$$P(t) = P_0 e^{i\omega t} + \text{c.c.}, \quad (2.22)$$

gde je P_0 odgovarajuća amplituda. Ubacivanjem (2.18) i (2.22) u (2.21) ćemo dobiti

$$-\omega^2 P_0 + 2i\gamma\omega P_0 + \omega_0^2 P_0 = \varepsilon_0 \frac{Ne^2}{m_e \varepsilon_0} E_0, \quad (2.23)$$

odakle sledi da je

$$P_0 = \varepsilon_0 \frac{Ne^2}{m_e \varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} E_0. \quad (2.24)$$

Kako je veza između električnog polja i polarizacije data izrazom

$$P(t) = \varepsilon_0 \chi(\omega) E(t), \quad (2.25)$$

što vidimo da važi i za amplitude,

$$P_0 = \varepsilon_0 \chi(\omega) E_0, \quad (2.26)$$

zaključujemo da će susceptibilnost sredine, koja predstavlja meru odgovora atoma na primenjeno elektromagnetno polje, biti

$$\chi(\omega) = \frac{Ne^2}{m_e \varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}, \quad (2.27)$$

što je kompleksna veličina koja zavisi od frekvencije talasa.

U blizini rezonancije, tj. oko $\omega \approx \omega_0$, moći ćemo veličinu $\omega_0^2 - \omega^2$ razviti u Tejlorov red, što nam daje $\omega_0^2 - \omega^2 \approx -2\omega_0(\omega - \omega_0)$, odakle sledi

$$\chi(\omega) = \frac{Ne^2}{m_e \varepsilon_0} \frac{1}{2\omega_0(\omega_0 - \omega) + 2i\gamma\omega_0} = \frac{Ne^2}{2m_e \varepsilon_0 \omega_0} \frac{1}{\omega_0 - \omega + i\gamma}. \quad (2.28)$$

Racionalizacijom dobijenog izraza, kao i neznatnim sređivanjem, dobićemo susceptibilnost u sledećem obliku:

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega), \quad (2.29)$$

pri čemu za imaginarni deo imamo

$$\chi''(\omega) = -\frac{Ne^2}{2m_e \varepsilon_0 \omega_0} \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}. \quad (2.30)$$

Za dobijenu funkciju se obično kaže da predstavlja tzv. *Lorencov profil* (lorencijan), i lako se može pokazati da ima jedan maksimum u $\omega = \omega_0$, pri čemu je širina profila direktno srazmerna koeficijentu γ . Sa druge strane, za realni deo važi

$$\chi'(\omega) = \frac{Ne^2}{2m_e \varepsilon_0 \omega_0} \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} = -\frac{\omega_0 - \omega}{\gamma} \chi''(\omega). \quad (2.31)$$

Dakle, vidimo da su veličine $\chi'(\omega)$ i $\chi''(\omega)$ međusobno povezane, što je rezultat koji ima daleko-sežne posledice na proučavanje prostiranja svetlosti u disperzivnim sredinama.

2.1.4 Kramers-Kronigove relacije

Veza (2.31) između realnog i imaginarnog dela susceptibilnosti samo je poseban slučaj opštijih, *Kramers-Kronigovih relacija* koje važe za ove veličine:

$$\chi'(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (2.32)$$

$$\chi''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (2.33)$$

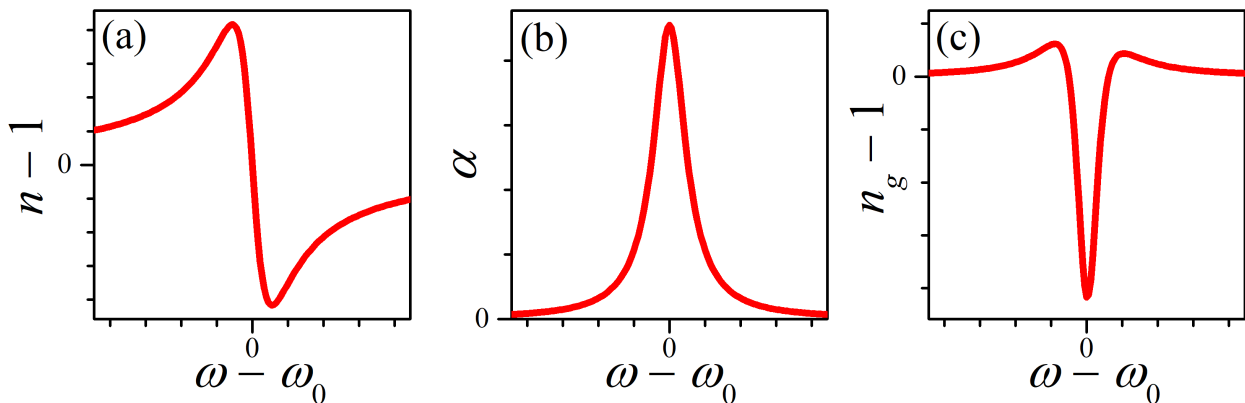
gde \mathcal{P} označava Košijevu glavnu vrednost integrala [14, 42]. Kramers-Kronigove relacije imaju veliki značaj u kvantnoj optici, s obzirom na to da pokazuju da nije moguće modifikovati indeks prelamanja (što je od centralnog interesa i u ovoj disertaciji) bez uticaja na apsorpciju sredine. Na ovom mestu se nećemo zadržavati na detaljnom izvođenju i analizi ovih jednačina, već ćemo vezu između apsorpcije i disperzije predstaviti i diskutovati grafički.

Kao mera disperzije i apsorpcije sredine koriste se *indeks prelamanja* i *koeficijent apsorpcije*, respektivno. Ove veličine su, sasvim uopšte, date izrazima

$$n(\omega) = \text{Re}\sqrt{1 + \chi(\omega)} \approx 1 + \frac{1}{2}\chi'(\omega), \quad \alpha(\omega) = 2\frac{\omega}{c} \text{Im}\sqrt{1 + \chi(\omega)} \approx \frac{\omega}{c}\chi''(\omega), \quad (2.34)$$

gde se korena funkcija može razviti u red uz pretpostavku malih susceptibilnosti. Navedeni izrazi će biti izvedeni i detaljnije diskutovani u odeljcima 5.6.2 i 9.3.2. Primenom Lorencovog modela,

možemo odrediti ove veličine za slučaj interakcije atomske sredine sa *jednim* elektromagnetnim poljem, što je prikazano (u proizvoljnim jedinicama) na slici 2.3, na kojoj je prikazan još i grupni indeks, računat pomoću formule (2.12). Konkretno, zavisnost indeksa prelamanja od frekvencije talasa (tačnije, razlike $\omega - \omega_0$) predstavlja disperzionu krivu koja je prikazana na slici (a), dok zavisnost koeficijenta apsorpcije od frekvencije, logično, predstavlja apsorpcionu krivu za razmatran sistem svetlost–materija (slika (b)). Vrlo često će se, zbog relacije (2.34), pod pojmovima disperziona i apsorpciona kriva podrazumevati funkcije $\chi'(\omega)$ i $\chi''(\omega)$, respektivno, ili čak frekventne zavisnosti nekih drugih veličina koje su direktno srazmerne susceptibilnosti.⁴

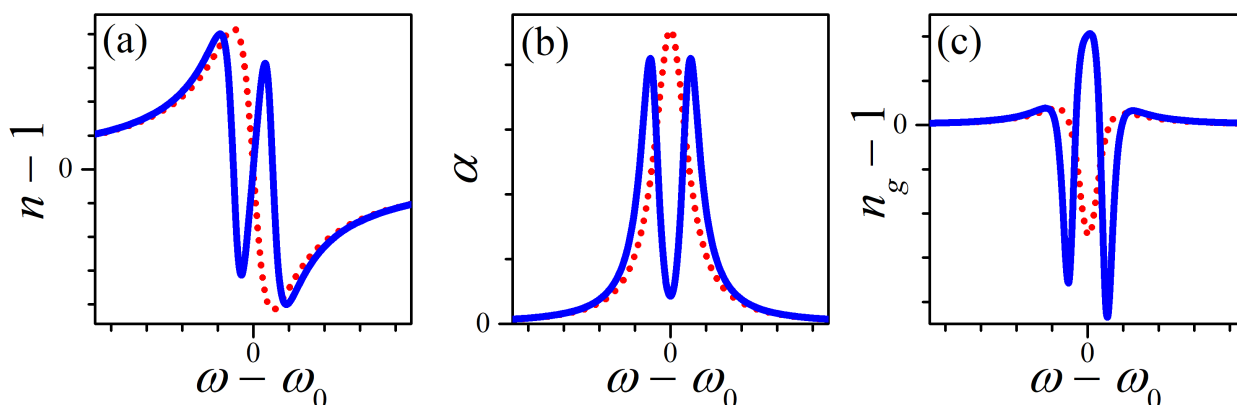


Slika 2.3: Zavisnost (a) indeksa prelamanja (disperzijska kriva), (b) koeficijenta apsorpcije (apsorpciona kriva) i (c) grupnog indeksa sredine od frekvencije upotrebljenog lasera u proizvoljnim jedinicama. U blizini $\omega = \omega_0$, nagib krive na slici (a) je negativan i disperzija je anomalna, što dovodi do negativnog grupnog indeksa (brza svetlost), ali i velike apsorpcije. Daleko od rezonancije, nagib disperzione krive je pozitivan a disperzija normalna, što povlači malu apsorpciju, ali i grupni indeks blizak jedinici ($v_g \approx c$).

Posmatranjem slike 2.3 (a), vidimo da je u blizini prirodne (rezonantne) frekvencije nagib disperzione krive negativan (i pritom relativno strm), što odgovara anomalnoj disperziji. U odeljku 2.1.1 smo videli da ovaj region predstavlja pogodno tle za nastanak brze svetlosti, što se vidi i na slici 2.3 (c), budući da u ovoj oblasti grupni indeks ima vrednost manju od jedinice. U isto vreme, vrednost apsorpcije oko $\omega \approx \omega_0$ je izuzetno velika, što je u skladu sa očekivanjima – kada je frekvencija lasera rezonantna, dolazi do maksimalne apsorpcije svetlosti (slika 2.3 (b)). Takođe, iz kvantne mehanike znamo da je neodređenost vreme-energija odgovorna za konačnu širinu energijskih nivoa u atomu, zbog čega apsorpciona kriva nije jednaka nuli za sve vrednosti $\omega \neq \omega_0$. Kako je energijska širina nivoa obrnuto srazmerna vremenu života nivoa, a vreme života pak obrnuto srazmerno koeficijentu raspada nivoa γ , sledi da je širina lorencijana direktno srazmerna ovom koeficijentu. Detaljnija analiza apsorpcione krive za sisteme od interesa biće sprovedena u poglavljima 6.1 i 6.2, gde će biti korišćeni fizički modeli napredniji od Lorencovog, mada se centralni zaključci neće razlikovati od onih do kojih smo došli na ovom mestu. Na osnovu svega rečenog, zaključujemo da će realizacija brze svetlosti u razmatranom slučaju naići na poteškoće usled velike apsorpcije u oblasti frekven-

⁴ U Glavi 5 biće pokazano da, za razne sisteme svetlost–materija od interesa u disertaciji, susceptibilnost sredine direktno zavisi od odgovarajućeg matricnog elementa operatora gustine za taj sistem. Zbog toga ćemo, u daljem radu, pod pojmovima „disperzijska” i „apsorpciona kriva” skoro po pravilu podrazumevati zavisnost realnog, odnosno imaginarnog dela odgovarajućeg matricnog elementa operatora gustine od frekvencije lasera (tačnije, razlike između frekvencije prelaza koji laser pobuđuje i frekvencije samog lasera). Ovom terminologijom nećemo izgubiti na opštosti pri radu, jer će ovako definisane apsorpcione i disperzione krive imati iste osobine kao i da su definisane na „originalan” način. Tamo gde je potrebno, svakako ćemo naglasiti o kojoj se tačno definiciji radi.

cija sa kojima želimo raditi. Zbog toga je potrebno obezbediti uslove u kojima je moguće stvoriti anomalnu disperziju (ili, pak, normalnu disperziju sa velikim nagibom disperzione krive), ali tako da apsorpcija bude najmanja moguća.



Slika 2.4: Zavisnost (a) indeksa prelamanja (disperziona kriva), (b) koeficijenta apsorpcije (apsorpciona kriva) i (c) grupnog indeksa sredine od frekvencije upotrebljenog lasera u proizvoljnim jedinicama, za slučaj kada je sistemu svetlost–materija pridodat još jedan laser (plave linije). Crvenim tačkastim linijama prikazane su ove krive u odsustvu pomenutog lasera. U blizini $\omega = \omega_0$, nagib krive na slici (a) je pozitivan i disperzija je normalna, što dovodi do pozitivnog grupnog indeksa čija je vrednost relativno velika (spora svetlost), pri čemu je apsorpcija drastično smanjena. Daleko od rezonancije, disperzija je i dalje normalna, ali se u ovom opsegu frekvencija svetlost kreće brzinom bliskom c .

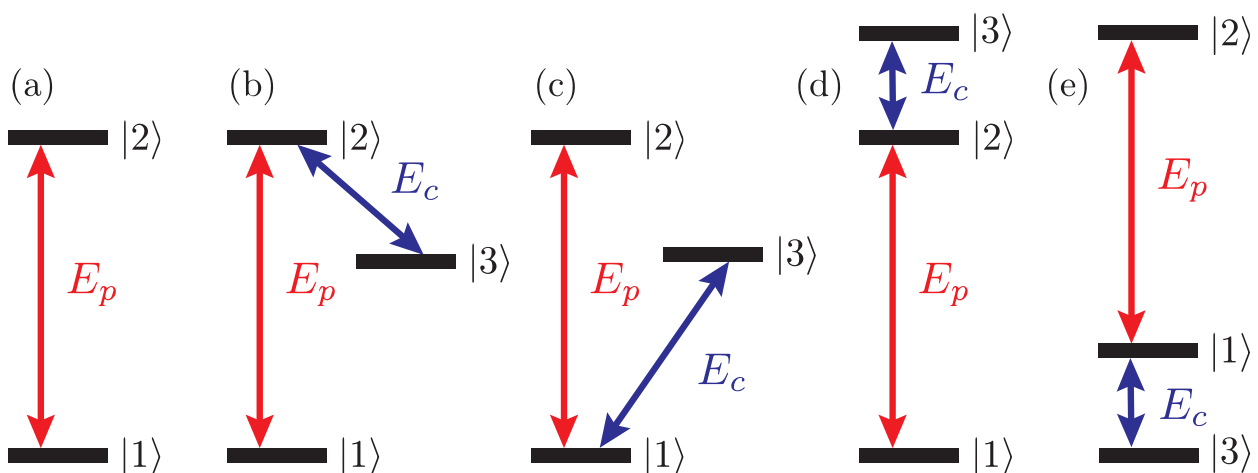
Kramers-Kronigove relacije, između ostalog, tvrde da ekstremum koeficijenta apsorpcije odgovara situaciji kada je disperzija, koja se ogleda u članu $dn/d\omega$, veoma velika. Na slici 2.3 je ova osobina jasno vidljiva – frekvencija na kojoj je veliki nagib disperzione krive odgovara frekvenciji na kojoj apsorpcija ima *maksimum*. Međutim, u Kramers-Kronigovim relacijama nije precizirano da pomenuti ekstremum mora biti maksimum apsorpcione krive, što je činjenica od velikog praktičnog značaja. Tako, ukoliko obezbedimo da apsorpcija oko $\omega = \omega_0$ ima *minimum*, takođe možemo očekivati velike vrednosti disperzije u ovoj oblasti frekvencija. Ovoga puta, sa minimalnom apsorpcijom, bili bismo u situaciji da zapravo detektujemo željene efekte pre nego što se informacija nepovratno izgubi u materijalnoj sredini.

Jedna od mogućih realizacija velike disperzije i male apsorpcije prikazana je na slici 2.4, gde je čitavom sistemu svetlost–materija pridodat još jedan laser. Na graficima su, radi poređenja, crvenim tačkastim linijama prikazane veličine sa slike 2.3. Posmatranjem disperzione krive za ovaj slučaj (slika 2.4 (a)), uočavamo da je nagib krive oko rezonancije i dalje veoma strm, ali da je pritom promenio znak (normalna disperzija). Ovo implicira da je fizička situacija koju smo realizovali pogodna za nastanak *spore* svetlosti. Istovremeno, sporu svetlost je zapravo *moguće* detektovati po napuštanju materijalne sredine bez većih gubitaka, s obzirom na to da sa slike 2.4 (b) vidimo da je sada apsorpcija u opsegu frekvencija od interesa veoma mala. Zbog svega navedenog, jasno je zbog čega će upravo spora svetlost biti od centralnog značaja u ovoj disertaciji, dok se prostiranjem brze svetlosti na dalje nećemo baviti. Na kraju, posmatranjem grafika zavisnosti grupnog indeksa od frekvencije (slika 2.4 (c)), dobijamo potvrdu goredobijenih zaključaka, pošto je očigledno da je, u okolini rezonancije, $n_g \gg 1$, odnosno $v_g \ll c$. Naravno, promenom frekvencije lasera moći ćemo da se krećemo iz oblasti normalne u oblast anomalne disperzije i obrnuto, čime ćemo značajno moći da utičemo na prostiranje laserske svetlosti kroz materijalnu sredinu – kako na brzinu prostiranja, tako

i na gubitke koji mogu nastati usled apsorpcije. Takođe, vidimo da je manipulaciju svetlosti moguće vrlo efikasno vršiti i uvođenjem dodatnog laserskog polja, što predstavlja suštinu efekta EIT, koji će detaljno biti objašnjen u narednom poglavlju.

2.2 Elektromagnetno indukovana transparentnost

Fizička situacija za čije smo opisivanje koristili Lorencov model klasičnog oscilatora odgovara atomskom sistemu koji interaguje sa *jednim* laserskim poljem. U skladu sa terminologijom koja se sreće u naučnoj literaturi, ovo polje se najčešće naziva *sondirajućim* ili *signalnim* poljem (engl. probe/signal field), i na ovom mestu ćemo ga označiti sa E_p .⁵ Ako se frekvencija sondirajućeg lasera odabere tako da se poklapa sa frekvencijom nekog od atomskih prelaza (rezonantna frekvencija), doći će do apsorpcije svetlosti – kažemo da je materijalna sredina *neproзраčna* za ovakvo elektromagnetno zračenje. Šematski je ovo prikazano na slici 2.5 (a), gde je laser u rezonanciji sa prelazom $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$, čime se formira najjednostavnija moguća konfiguracija – sistem sa *dva* nivoa. Ukoliko variramo frekvenciju sondirajućeg lasera, dobićemo disperzionu i apsorpcionu krivu (kao i zavisnost grupnog indeksa od frekvencije), koje će izgledati kao na slici 2.3.



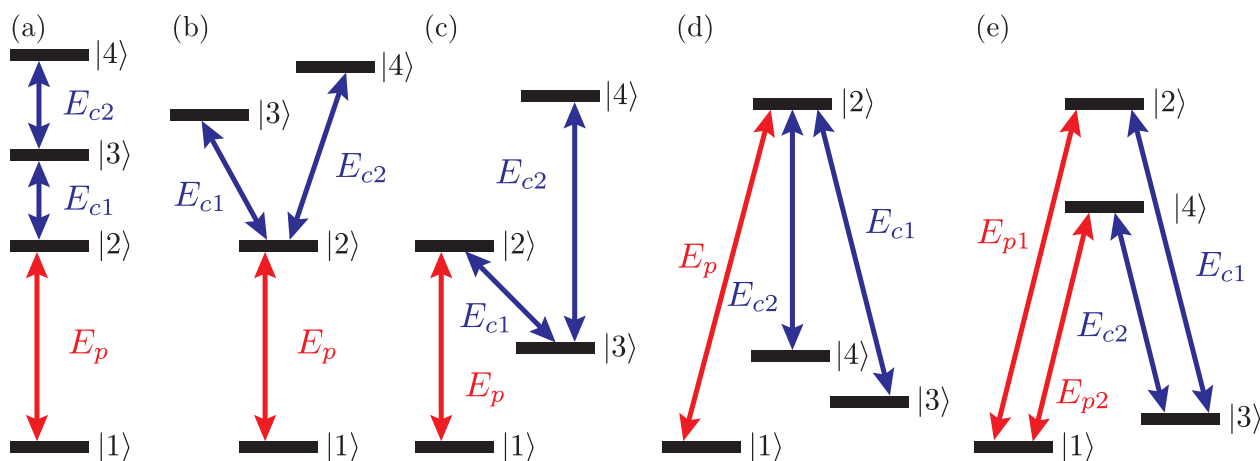
Slika 2.5: Šematski prikaz (a) konfiguracije sa dva nivoa, kao i (b) Λ , (c) V, (d) „gornje” lestvičaste i (e) „donje” lestvičaste konfiguracije sa tri nivoa. Sondirajuće polje E_p , označeno crvenom bojom, spreže nivoe $|1\rangle$ i $|2\rangle$, dok kontrolno polje E_c (plava boja) povezuje nivo $|3\rangle$ sa jednim od preostala dva nivoa, zavisno od konfiguracije.

Ukoliko se razmatrani sistem podvrgne dejstvu dodatnog, *kontrolnog* ili *sprežućeg* elektromagnetnog polja (engl. control/coupling field), koje ćemo označiti sa E_c , materijalna sredina, isprva neprozračna za sondirajući laser, može postati *prozračna*, iako je ovaj laser i dalje u rezonanciji sa atomskim prelazom $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$. U ovoj situaciji, dolazi do pojave kvantno-interferentnog, odnosno atomsko-koherentnog efekta koji se naziva *elektromagnetno indukovana transparentnost*, i koji je, između ostalog, odgovoran i za modifikaciju disperzione krive koja dovodi do nastanka spore svetlosti. Na ovaj način, moguće je dobiti zavisnost indeksa prelamanja, koeficijenta apsorpcije, kao i grupnog indeksa od frekvencije slično kao što je to prikazano na slici 2.4. Ukoliko se za trenutak

⁵ Za potrebe ovog poglavlja, preciznije objašnjenje ove veličine neće biti neophodno. Napomenimo samo da se ona odnosi na jačinu električnog polja sondirajućeg lasera, i da ćemo se njome detaljnije pozabaviti u Glavi 5.

zadržimo na apsorpcionoj krivoj (slika 2.4 (b)), videćemo da, umesto jednog apsorpcionog maksimuma koji je opisan Lorencovim profilom, dolazi do pojave *dva* apsorpciona pika, između kojih se nalazi oblast drastično smanjene apsorpcije, koju nazivamo *prozor transparentnosti* (engl. transparency window). U odeljku 2.2.2 ćemo pokazati u kojim je slučajevima ove maksimume apsorpcije moguće predstaviti Lorencovom krivom, kao i koju ulogu u svemu tome ima jačina kontrolnog polja.

Za realizaciju EIT potrebna su, dakle, barem *dva* elektromagnetna polja koja sprežu *tri* energijska nivoa atoma materijalne sredine. Konkretni izbor ovih polja i nivoa može biti takav da dovede do različitih konfiguracija u okviru sistema sa tri nivoa. Tako se Λ konfiguracija, u kojoj kontrolno polje pobuđuje prelaz $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$, dok je prelaz $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ zabranjen (slika 2.5 (b)), najčešće sreće u literaturi. Razlog za ovo je upravo taj što se nivo $|3\rangle$ ne raspada na niža stanja, što u realnosti obično znači da ovaj nivo odgovara nekom *metastabilnom* stanju. Na ovaj način se drastično povećava vreme života ovakvog sistema, a atomi (odnosno elektroni u njima) ostaju zarobljeni u tzv. *tamnom stanju*, koje je detaljnije diskutovano u poglavlju 6.2. Situacija je nešto drugačija kod V (slika 2.5 (c)) i „gornje” lestvičaste konfiguracije (slika 2.5 (d)), kod kojih nivo $|3\rangle$ može da se raspada na niže nivoe. Ipak, „gornju” lestvičastu konfiguraciju je moguće ostvariti i u tzv. *Ridbergovim atomima*, kod kojih je najviši nivo jako ekscitovan i odlikuje se veoma velikom vrednošću glavnog kvantnog broja [43, 44]. Ovakvi nivoi se odlikuju vrlo dugim vremenom života, što ih takođe čini pogodnim za realizaciju EIT [45, 46]. Na posletku, navedimo još i „donju” lestvičastu konfiguraciju (slika 2.5 (e)), kod koje kontrolno polje spreže srednji sa najnižim nivoom (umesto sa najvišim kao kod „gornje”). Kako će tema ove disertacije biti isključivo „gornje” lestvičaste konfiguracije sa tri nivoa, to ćemo prived „gornji” iz pisanja na dalje mahom izostavljati, podrazumevajući da se radi o sistemu prikazanom na slici 2.5 (d). U nastavku poglavlja diskutovaćemo o tome u kojim od ovih konfiguracija zaista može doći do pojave EIT, u smislu definicije fenomena koju ćemo ovde koristiti.



Slika 2.6: Šematski prikaz (a) lestvičaste (b) Y, (c) N, (d) tripodne i (e) dvostruke Λ konfiguracije sistema sa četiri nivoa. Sondirajuća polja označena su crvenom, a kontrolna plavom bojom. Kako je broj lasera veći od dva, dodatna polja koja se uključuju u sistem mogu biti kako sondirajuća, tako i kontrolna, pa je za svaku od navedenih konfiguracija moguće napraviti nekoliko različitih kombinacija ovih polja i nivoa koje pobuđuju.

Sistem svetlost–materija od interesa se može sastojati i od većeg broja lasera, kako sondirajućih, tako i kontrolnih, pri čemu će oni posledično sprežati veći broj nivoa u atomu. Na ovom mestu ćemo, ilustracije radi, navesti neke od konfiguracija sa *četiri* nivoa, koje su prikazane na slici 2.6.

Tako se u literaturi najčešće sreću i proučavaju lestvičasta (slika 2.6 (a)), Y (slika 2.6 (b)), N (slika 2.6 (c)), tripodna (slika 2.6 (d)) i dvostruka Λ konfiguracija (slika 2.6 (e)), pri čemu raspored navedenih nivoa u principu može biti i drugačiji. Veliki broj lasera i uključenih energijskih nivoa znatno komplikuje teorijske proračune za dati sistem, ali u principu može dati niz interesantnih efekata do kojih nije moguće doći u sistemima sa manje nivoa. U okviru sistema sa četiri nivoa, deo pažnje u ovoj disertaciji posvetićemo lestvičastoj konfiguraciji, prikazanoj na slici (slika 2.6 (a)), pri čemu ćemo polje koje pobuđuje prelaz $|3\rangle \leftrightarrow |4\rangle$ tretirati kao kontrolno (kao što je prikazano na slici), ali i kao sondirajuće (u tom slučaju bismo stavili $E_p \rightarrow E_{p1}$, $E_{c1} \rightarrow E_c$ i $E_{c2} \rightarrow E_{p2}$).

2.2.1 Demonstracioni eksperimenti i srodni efekti

EIT je po prvi put teorijski predvideo Stiven Haris sa saradnicima 1989. godine, u svom radu koji se oslanjao na efekat koherentnog zarobljavanja naseljenosti [47]. Zatim je, ubrzo nakon toga, Boler sa saradnicima eksperimentalno realizovao efekat EIT na parama stroncijuma [48]. U ovom eksperimentu, formirana je Λ konfiguracija sa tri nivoa, pri čemu najviši nivo (nivo $|2\rangle$ u oznakama sa slike 2.5 (b)) leži u oblasti kontinuuma. Ovaj nivo se, zbog toga, raspada autojonizacijom, što je znatno brži proces nego da se radi o radijativnom raspadu. Drugim rečima, koeficijent raspada γ je jako veliki, pa je i apsorpciona linija (koja se dobija u odsustvu kontrolnog polja) veoma široka. U prisustvu kontrolnog polja, pak, u transmissionom spektru dolazi do pojave oštrog i uskog maksimuma, gde vrednost transmisije dostiže blizu 100%. Takođe, do realizacije efekta EIT došli su i Fild i saradnici, i to na parama olova, na rezonantnoj liniji koja trpi širenje usled međuatomskih sudara [49]. Rezultati dobijeni u ovim i drugim radovima sistematizovani su u vidu niza preglednih radova, objavljenih na prelazu između vekova, u kojima je deo pažnje posvećen i raznim praktičnim realizacijama EIT i primenama ovog efekta [50–52].

Nedugo nakon eksperimentalne realizacije, pojavili su se prvi radovi u kojima su demonstrirani fenomeni zasnovani na EIT. U odeljku 2.1.2 već su pomenuti rezultati koji se tiču nastanka spore svetlosti u raznim atomskim sredinama, a posledica su modifikacije disperzione krive usled pojave prozora transparentnosti. U ovom odeljku, zadržaćemo se na diskusiji pojava koje su posledica istih atomsko-koherentnih efekata koji leže u osnovi EIT, dakle koji su joj manje ili više srodni.

Prvi u nizu efekata koji je u uskoj vezi sa EIT jeste *koherentno zarobljavanje naseljenosti* (KZN, engl. coherent population trapping, CPT), koji je otkriven još 1976. godine [53] i teorijski objašnjen u godinama nakon toga [54, 55]. Suština ovog efekta ogleda se u tome da se atomi dovode u stanja koja predstavljaju linearne superpozicije stanja atoma u odsustvu elektromagnetnih polja (svojevrsna stanja tzv. slobodnog, odnosno „atomske” hamiltonijana). Uzmimo, na primer, Λ konfiguraciju sa tri nivoa sa slike 2.5 (b), gde su ova „atomska” stanja označena sa $|1\rangle$, $|2\rangle$ i $|3\rangle$. Ukoliko je u sistemu prisutno samo polje E_p , ono će biti apsorbovano u sredini, a atomska naseljenost će iz osnovnog preći na nivo $|2\rangle$. Ako je, pak, atomska sredina spregnuta obema poljima, koja su pritom skoro rezonantna, doći će do formiranja koherentnih superpozicija stanja $|1\rangle$ i $|3\rangle$, i to

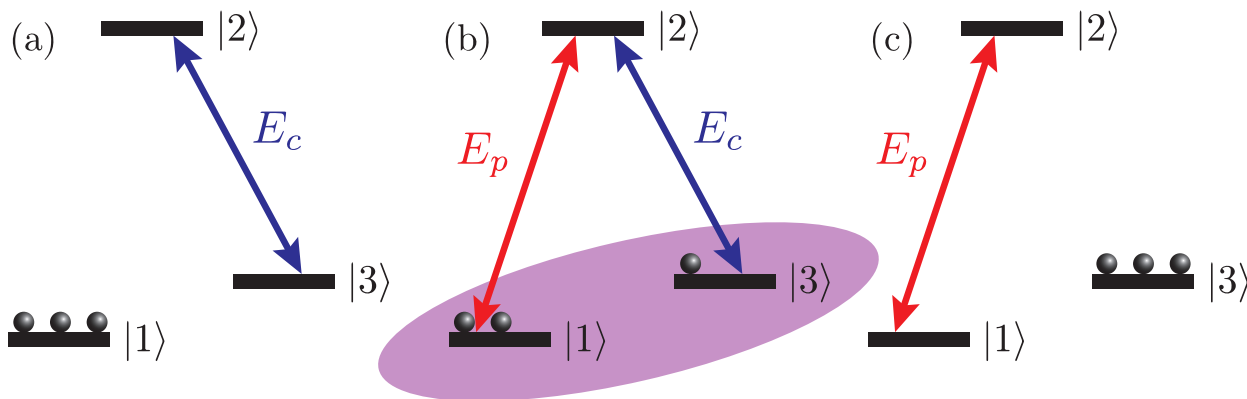
$$|b\rangle = a|1\rangle + b|3\rangle, \quad (2.35)$$

$$|d\rangle = a|1\rangle - b|3\rangle, \quad (2.36)$$

gde su a i b koeficijenti koji zavise od jačina sondirajućeg i kontrolnog polja. Ukoliko se ove jačine odaberu tako da se sistem u početku nađe u stanju $|d\rangle$, sondirajuće polje neće moći da izazove prelaz naseljenosti u stanje $|2\rangle$, a samim tim neće doći ni do apsorpcije ovog lasera [2]. Dakle, naseljenost

ostaje zarobljena u stanju $|d\rangle$, koje se naziva *tamno stanje* (engl. dark state). Nasuprot tome, ukoliko se sistem nalazi u stanju $|b\rangle$, do apsorpcije sondirajućeg lasera će uvek doći – tada govorimo o *svetlom stanju* (engl. bright state). Ova stanja su dobila svoje nazive sa stanovišta detekcije njihovog postojanja – tamno stanje se ne deekscituje ni na koje drugo stanje, pa se ne može ni „videti”, dok je situacija kod svetlog stanja upravo suprotna. KZN se može ostvariti u atomima sa Zemanovim ili Štarkovim cepanjem, ali se može pokazati da ma koja dva nivoa razdvojena Ramanovim (zabranjenim) prelazom mogu formirati linearnu superpoziciju koja dovodi do tamnog stanja [50].

Od radova u kojima je realizovana spora svetlost, u onima označenim u spisku literature pod brojevima [33, 35, 36] ovo je izvedeno upravo pomoću KZN. Sa druge strane, u radu [37] iskorišćen je efekat *koherentnih oscilacija naseljenosti* (KON, engl. coherent population oscillations, CPO), koji se razlikuje od KZN u tome što su i sondirajuće i kontrolno polje modulisani, i to na frekvencijama koje se vrlo malo razlikuju. Ova razlika u frekvencijama izaziva oscilacije naseljenosti osnovnog nivoa, a istovremeno onemogućava apsorpciju sondirajućeg polja ukoliko ono dospe nešto kasnije do sredine, prateći kontrolno polje koje pobuđuje metastabilno stanje [56]. Na kraju, radi kompletnosti, navedimo i da je realizacija spore svetlosti moguća korišćenjem tehnike stimulisanog Brilluonovog rasejanja [38], kao i stimulisanog Ramanovog rasejanja [39].



Slika 2.7: Šematski prikaz rada STIRAP-a, u fazama gde je uključeno (a) samo kontrolno (plava linija), (b) i kontrolno i sondirajuće, odnosno (c) samo sondirajuće polje (crvena linija). Ljubičastom bojom na slici (b) su označeni nivoi koji formiraju tamno stanje u kome naseljenost ostaje zarobljena.

Videli smo da su EIT i KZN efekti u kojima naseljenost biva zarobljena u tamnom stanju, što omogućava prolaz svetlosti kroz sredinu bez apsorpcije. Za razliku od njih, *stimulisani Ramanov adijabatski prolaz* (STIRAP, engl. stimulated Raman adiabatic passage) se fokusira na koherentni transfer naseljenosti između stanja odvojenih Ramanovim prelazom, ali tako da *ne dođe* do naseljavanja najvišeg (ekscitovanog) nivoa [57, 58]. U notaciji sa slike 2.7, od interesa je, dakle, preneti naseljenost sa nivoa $|1\rangle$ na nivo $|3\rangle$, bez učešća nivoa $|2\rangle$. Da bi se ovo izvelo, potrebno je da razlika u frekvencijama dva lasera bude jednaka frekvenciji Ramanovog prelaza $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$. Sada se najpre uključuje kontrolno polje, usled čega se formira superpozicija nivoa $|2\rangle$ i $|3\rangle$, a nivo $|1\rangle$ ostaje nespregnut (slika 2.7 (a)). Ovaj korak omogućava da se sondirajuće polje, koje se naknadno uključuje, ne apsorbuje u sredini (modifikacija nivoa $|2\rangle$ znači i veliko odstupanje od rezonancije za dati prelaz). Nakon uključivanja E_p , kako nema njegove apsorpcije, zaključujemo da se celokupna populacija nalazi u tamnom stanju koje, kao što smo pokazali u slučaju KZN, predstavlja superpoziciju $|d\rangle = a|1\rangle - b|3\rangle$ (slika 2.7 (b)). Proces transfera populacije završava se isključivanjem kontrolnog polja, nakon čega nivoi $|1\rangle$ i $|2\rangle$ ostaju spregnuti, a samim tim modifikovani i to na način da se

kompletna naseljenost *prenela* u stanje $|3\rangle$ (slika 2.7 (c)). STIRAP je u fizici našao veliki broj primena, i predstavlja važan atomsko-koherentni efekat koji se, na svojevrsan način, nadovezuje na EIT [59–61].

Jedan od važnih fenomena koji proizlazi iz EIT jeste *laserovanje bez inverzije* (LBI, engl. lasing without inversion, LWI) [62–64]. Dobro je poznato da princip rada konvencionalnog lasera počiva na obezbeđivanju inverzije naseljenosti, što postaje problem kod lasera kratkih talasnih dužina, budući da je snaga lasera srazmerna (najmanje) četvrtom stepenu frekvencije [15]. U sistemu u kome je ostvarena EIT, naseljenost je (skoro potpuno) zarobljena u tamnom stanju. Statistički gledano, postojaće mali deo naseljenosti koji je u početnom trenutku bio u ekscitovanom stanju, a koji u „konvencionalnom” slučaju nije dovoljan da se obezbedi stimulisana emisija dovoljna za funkcionisanje lasera, zbog istovremene velike apsorpcije. Zarobljavanje naseljenosti u tamnom stanju, ipak, eliminiše apsorpciju ne utičući na stimulisanu emisiju, pa je za ostvarivanje laserskog efekta moguće koristiti lasere manje snage, kao i sredinu u kojoj nije postignuta inverzija naseljenosti [65].

Navedeni efekti predstavljaju samo neke od koherentnih efekata koji dele zajedničke osobine sa EIT. Kao što smo videli, neki od njih se koriste i u realizaciji eksperimenata sa sporom svetlošću. Takođe, veliki potencijal primene ovih efekata leži i u oblastima nelinearne optike i fotonike [66], na primer u procesu *mešanja četiri talasa* (engl. four-wave mixing, FWM) [8, 19], ali i kod kompletnog zaustavljanja svetlosti, što je tema o kojoj će više biti reči u poglavlju 2.3.

2.2.2 Fano interferencija i Autler-Taunsov efekat

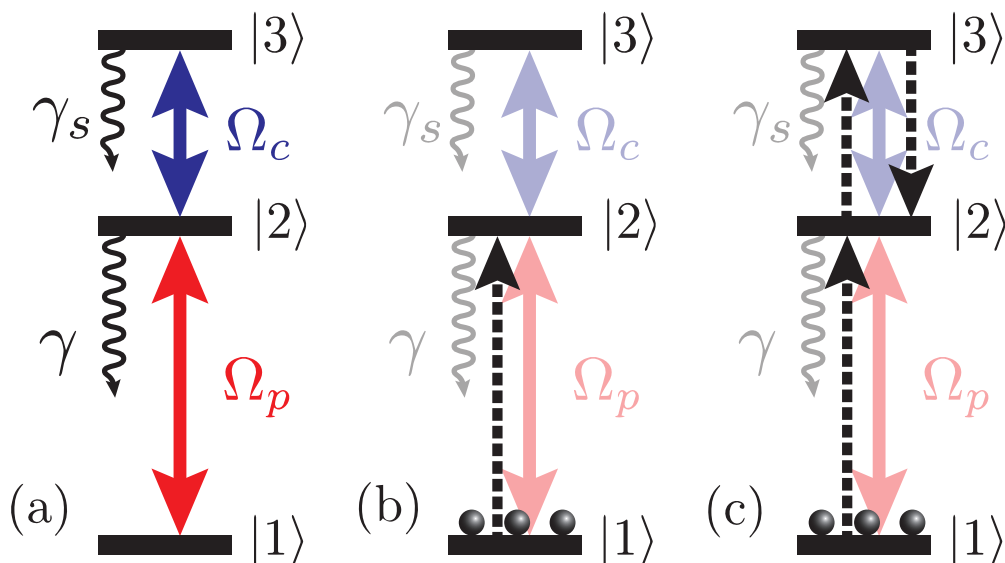
Precizna definicija fenomena EIT donekle predstavlja predmet sporenja u okviru međunarodne naučne zajednice. Ono što je svakako nesporno jeste činjenica da, usled pojave EIT, u apsorpcionoj krivoj dolazi do formiranja prozora transparentnosti u oblasti rezonancije. Do formiranja ovog prozora, ipak, može doći na dva fizički različita načina. Sa jedne strane, ovo se može desiti usled tzv. Fano interferencije, a sa druge strane kao posledica dinamičkog Štarkovog efekta. U ovom odeljku, pozabavićemo se detaljnijim objašnjenjem oba efekta, kao i suštinom problema koji se javlja u pogledu preciznog definisanja pojma EIT. U duhu teme disertacije, celokupnu diskusiju baziraćemo na sistemu svetlost–materija koji se karakteriše („gornjom”) lestvičastom konfiguracijom sa tri nivoa, prikazanom na slici 2.8 (a). Na ovoj slici, sa γ_s je označen koeficijent raspada gornjeg („spinskog”), a sa γ srednjeg nivoa (kao što je to učinjeno u okviru Lorencovog modela). U cilju što efikasnijeg efekta EIT, za nivo $|3\rangle$ je potrebno odabrati neko dugoživeće stanje, što implicira da mora biti $\gamma_s \ll \gamma$. Kao što je već napomenuto, ovo se može postići u lestvičastoj konfiguraciji kod Ridbergovih atoma, kao i u Λ konfiguraciji sa osnovnim i metastabilnim stanjem. Veličine Ω_p i Ω_c predstavljaju *Rabijeve frekvencije* (engl. Rabi frequency) sondirajućeg i kontrolnog polja, respektivno, i biće definisane u poglavlju 5.2.⁶ Na ovom mestu, napomenimo samo da je reč o veličinama koje direktno zavise od jačina polja E_p i E_c ovih lasera, i predstavljaju frekvencije kojima osciluje naseljenost u okviru Rabijevog modela za sistem sa dva nivoa [67].

Pojam *interferencije različitih ekscitacionih puteva* prvi je uveo Fano u svom radu iz 1961. godine [68], da bi dobijeni rezultati bili vrlo brzo potvrđeni i prošireni [69–71]. Fano je proučavao sisteme u kojima ekscitacija u stanje kontinuuma (fotojonizacija) može da se izvrši putem dva različita kanala – direktno u kontinuum sa jedne, odnosno posredno, preko atomske rezonancije sa druge strane. Na ovaj način dolazi do interferencije koja može biti kako konstruktivna, tako i destruktivna,

⁶ U nastavku disertacije, Rabijevu frekvenciju sondirajućeg, odnosno kontrolnog polja ćemo često, radi kraćeg pisanja, zvati *sondirajuća* i *kontrolna Rabijeva frekvencija*, respektivno.

čime se fotojonizacioni poprečni presek znatno uvećava, odnosno umanjuje, respektivno. U našem slučaju lestvičaste konfiguracije sa tri nivoa, ekscitacija elektrona na nivo $|2\rangle$ može da se vrši direktno, putem prelaza $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$, kao i kod sistema sa dva nivoa (slika 2.8 (b)). Kada ne bi bilo kontrolnog polja, amplituda verovatnoće ovog prelaza bila bi maksimalna u slučaju rezonancije. Kako u sistemu ipak postoji kontrolno polje, srednji nivo je moguće pobuditi i indirektno, prelazom $|1\rangle \rightarrow |2\rangle \rightarrow |3\rangle \rightarrow |2\rangle$, sa amplitudom verovatnoće istog reda veličine kao za „direktni” prelaz (slika 2.8 (c)).⁷ Tako se može desiti da ova dva puta ekscitacije interferiraju destruktivno, tako da verovatnoća prelaza $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ u konačnom bude jednaka nuli. Na taj način, rezonantni sondirajući laser može nesmetano da prođe kroz sredinu, koja tom prilikom postaje prozračna.

Važan zaključak koji proizlazi iz pojave Fano interferencije nije sama činjenica da se apsorpcija na rezonanciji drastično smanjuje (jer bi se ovo desilo i ako podesimo frekvenciju sondirajućeg lasera tako da bude daleko od rezonancije), već pojava veoma strme disperzione krive (što je već diskutovano u odeljku 2.1.4), kao i *konstruktivne interferencije* u trećem redu teorije perturbacija, paralelno sa destruktivnom interferencijom u prvom redu. Preciznije, dok *linearni* odziv sredine na lasersko polje, određen susceptibilnošću u prvom redu $\chi^{(1)}$, u rezonantnom slučaju pada na nulu kao posledica destruktivne interferencije dva gorepomenuta kanala ekscitacije, amplitude verovatnoća ovih prelaza u trećem redu interferiraju konstruktivno, što dovodi do povećanja susceptibilnosti $\chi^{(3)}$. Detaljnija analiza ovih veličina data je u odeljku 5.6.1. Ono što je bitno je, dakle, pojava da uz smanjenu apsorpciju dolazi do povećanog doprinosa nelinearnih efekata, koji mogu biti veoma interesantni za istraživanje [2, 52].

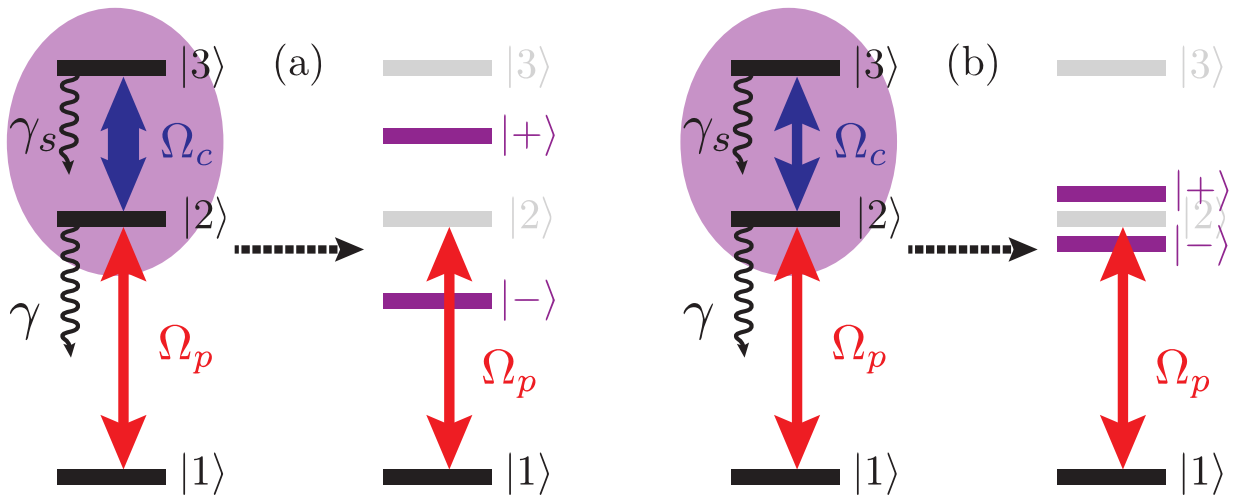


Slika 2.8: (a) Šematski prikaz sistema sa tri nivoa u lestvičastoj konfiguraciji, kao i ilustracija Fano interferencije dva različita kanala ekscitacije: (b) $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ i (c) $|1\rangle \rightarrow |2\rangle \rightarrow |3\rangle \rightarrow |2\rangle$. Sondirajuće i kontrolno polje označeni su crvenom i plavom punom linijom, respektivno, raspadi viših nivoa crnim talasastim linijama, a kanali ekscitacije crnim isprekidanim linijama.

Nasuprot efektu Fano interferencije, *dinamički Štarkov* ili *Autler-Taunsov efekat* javlja se u limitu kontrolnih polja velikog intenziteta [72]. Slično kao što statički Štarkov efekat vrši pomeranje

⁷ Kada već govorimo o „indirektnim” prelazima, napomenimo da njih, u principu, ima beskonačno mnogo. Tako bi, na primer, prvi sledeći mogući put ekscitacije bio $|1\rangle \rightarrow |2\rangle \rightarrow |3\rangle \rightarrow |2\rangle \rightarrow |3\rangle \rightarrow |2\rangle$, ali se može pokazati da on, kao i svi naredni, sve manje utiču na ukupnu amplitudu verovatnoće prelaza $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$, budući da odgovaraju popravkama višeg reda.

energijskih nivoa u atomu pod dejstvom spoljašnjeg stacionarnog električnog polja, tako i (jako) lasersko polje modifikuje energijsku strukturu sredine sa kojom interaguje. Na slici 2.9 (a) šematski je prikazana ova modifikacija, koja se eksperimentalno može ispitivati pomoću slabog sondirajućeg polja Rabijeve frekvencije Ω_p . Kažemo da kontrolno polje „oblači” nivoe $|2\rangle$ i $|3\rangle$ (označeno ljubičastom bojom na levom delu slike), prevodeći ih u tzv. *obučena stanja* (engl. dressed states) $|+\rangle$ i $|-\rangle$, koja predstavljaju linearnu superpoziciju polaznih, „atomskih” ili *ogoljenih stanja* (engl. bare states), i prikazana su na desnom delu slike (a). Obučena stanja će u sistemima od interesa u disertaciji biti detaljno diskutovana u okviru poglavlja 6.2. Vidimo da sondirajuće polje, koje je u odsustvu kontrolnog polja bilo u rezonanciji sa prelazom $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$, više nije u rezonanciji ni sa jednim od mogućih prelaza. Tako, ukoliko bismo želeli da pobudimo prelaze $|1\rangle \leftrightarrow |+\rangle$ ili $|1\rangle \leftrightarrow |-\rangle$, morali bismo da povećamo, odnosno smanjimo frekvenciju sondirajućeg lasera, respektivno. To znači da u apsorpcionoj krivoj dolazi do formiranja dva maksimuma, između kojih se nalazi prozor transparentnosti, kako je i očekivano. U slučaju rezonancije, frekvencija sondirajućeg polja leži upravo na dnu ovog prozora. U odsustvu koherentnih efekata koji ga prate, AT efekat je proučavan u radovima u kojima su korišćene spektroskopske metode za merenje dipolnih momenata prelaza molekula helijuma [73], kao i vremena života molekula natrijuma [74].



Slika 2.9: Ilustracija AT efekta u slučaju (a) jakog i (b) slabog kontrolnog polja za sistem sa tri nivoa u lestvičastoj konfiguraciji. Debljina linija srazmerna je intenzitetu polja. Crnom bojom prikazana su ogoljena, a ljubičastom obučena stanja.

Veza AT efekta sa Fano interferencijom dolazi do izražaja u limitu slabih kontrolnih polja. Kao i kod jakih polja (veliko Ω_c , šematski prikazano debljom linijom na slici 2.9 (a)), i ovde kontrolno polje „oblači” atom i formira stanja $|+\rangle$ i $|-\rangle$ (2.9 (b)). Razmak između ovih nivoa, a samim tim i širina prozora transparentnosti, srazmerni su vrednosti Ω_c [18]. Tako će, za veoma male vrednosti kontrolne Rabijeve frekvencije, koja je reda veličine ili manja od prirodne širine nivoa $|+\rangle$ i $|-\rangle$ (a koja odgovara širini oba apsorpciona maksimuma i srazmerna je γ), doći do pojave destruktivne interferencije dva bliska ekscitaciona puta – jednog koji ide preko nivoa $|+\rangle$ i drugog preko nivoa $|-\rangle$ [75, 76]. Boler i saradnici pokazali su da je ovaj opis Fano interferencije ekvivalentan gorenavedenom objašnjenju preko ogoljenih stanja [48]. Što su obučena stanja međusobno bliža, to je ova interferencija dominantnija u odnosu na AT efekat. Matematički se ovo može izraziti sledećom nejednakošću:

$$\gamma_s \ll \Omega_c \lesssim \gamma, \quad (2.37)$$

gde smo još inkorporirali i činjenicu da je $\gamma_s \ll \gamma$. Sondirajuća Rabijeva frekvencija sada ne mora nužno biti mnogo manja od kontrolne, pa ćemo imati $\Omega_p \lesssim \Omega_c$. Dakle, ukoliko je gornji uslov zadovoljen, dominantan efekat će biti Fano interferencija, koja će dovesti do stvaranja veoma strmog i uskog prozora transparentnosti unutar široke apsorpcione krive, na čijem dnu (u rezonanciji) će apsorpcija biti jednaka (ili veoma bliska) nuli. Ovo se dešava čak i kada su Rabijeve frekvencije sondirajućeg i kontrolnog polja istog reda veličine. Ukoliko je zadovoljen uslov (2.37), kažemo da se sistem svetlost–materija nalazi u *EIT režimu*.

Sa druge strane, ukoliko radimo sa jakim kontrolnim poljima, tako da je zadovoljen uslov:

$$\gamma_s \lesssim \gamma \ll \Omega_c, \quad (2.38)$$

Fano interferencija postaje zanemarljiva, a AT efekat dominantan – radi se o *AT režimu*. Ovo je najčešće situacija kada je i $\Omega_p \ll \Omega_c$. Između dva granična slučaja, postoje fizičke situacije u kojima oba efekta imaju nezanemarljiv doprinos u formiranju prozora transparentnosti. Zbog toga je veoma važno poznavanje mehanizama za razdvajanje jednog od drugog efekta u realnim fizičkim situacijama, u cilju određivanja režima rada u okviru koga je sproveden određeni eksperiment.

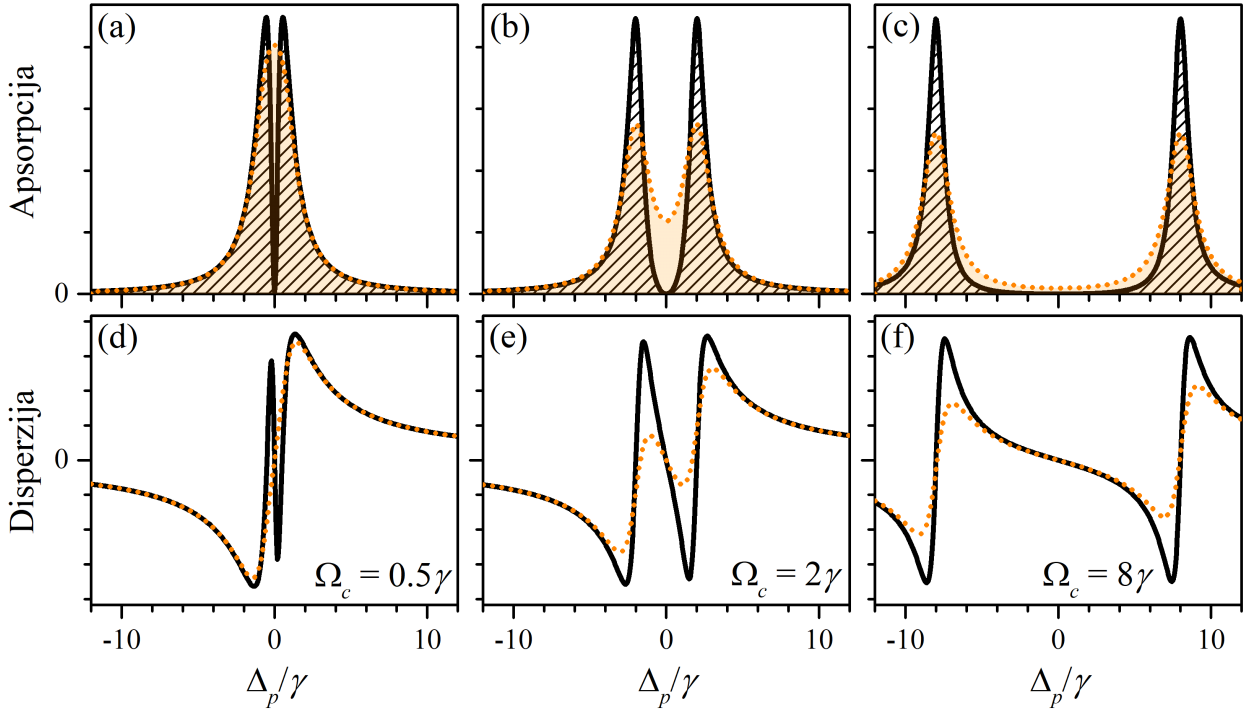
2.2.3 Sličnosti i razlike između EIT i AT efekta

Već na prvi pogled, po definisanju pojmova „EIT režim” i „AT režim”, jasno je da je termin „EIT” u dosadašnjoj diskusiji iskorišćen dvojako. Ovakva je situacija i u literaturi koja se bavi proučavanjem atomsko-koherentnih efekata [16, 52]. Sa jedne strane, elektromagnetno indukovana transparentnost podrazumeva pojavu da se u atomskoj sredini, koja je prethodno bila okarakterisana „lorencijanskim” profilom, u prisustvu kontrolnog polja pojavi prozor transparentnosti, bez obzira na fizički proces usled koga je on nastao. Ovako definisan efekat EIT bismo, uslovno rečeno, mogli nazvati EIT u širem smislu. EIT u širem smislu bazira se na zajedničkom dejstvu Fano interferencije i AT efekta, pri čemu često nije moguće jasno utvrditi koji od ta dva efekta dominira. AT efekat se, tada, dobija kao granični slučaj EIT za jaka kontrolna polja [23].

Sa druge strane, definicija dva različita režima iz prethodnog odeljka sugerise da se pod pojmom EIT često smatra isključivo pojava prozora transparentnosti usled destruktivne kvantne interferencije različitih ekscitacionih puteva, kao i pratećeg formiranja tamnog stanja u kome naseljenost ostaje zarobljena. Na ovaj način, definisali smo EIT u užem smislu, zbog čega je režim slabog kontrolnog polja i dobio naziv EIT režim. Naravno, AT režimu (jakih kontrolnih polja) će odgovarati situacija kada interferencije praktično uopšte nema, već se transparentnost sredine obezbeđuje formiranjem obučanih stanja koja se nalaze jako daleko od rezonancije. U nastavku disertacije će se, stoga, pod pojmom EIT podrazumevati EIT u užem smislu, dok ćemo pojmove AT režim i AT efekat najčešće koristiti kao sinonime. Ukoliko se bude govorilo o EIT u širem smislu, to će svakako biti eksplicitno naznačeno.

Ilustracija simultanog dejstva Fano interferencije i AT efekta prikazana je na slici 2.10. Na slici je prikazana zavisnost koeficijenta apsorpcije i indeksa prelamanja (tačnije, $n - 1$) od *razdešenosti* (engl. detuning) sondirajućeg polja Δ_p za sistem sa tri nivoa u lestvičastoj konfiguraciji, skiciran na slici 2.8 (a). Razdešenost sondirajućeg polja (ili kraće *sondirajuća razdešenost*) biće definisana u poglavlju 5.2. Za potrebe razmatranja u ovom odeljku, dovoljno je reći da Δ_p predstavlja razliku frekvencije prelaza koji sondirajući laser pobuđuje i frekvencije samog lasera. Zbog ovakve definicije, na graficima će nagib disperzione krive promeniti znak u svim tačkama, pa će normalnoj disperziji odgovarati negativan, a anomalnoj pozitivan nagib krive. Dobijeni rezultati prikazani su u

proizvoljnim jedinicama, pri čemu su relevantne veličine izražene u jedinicama koeficijenta raspada γ . Tako je za sondirajuću Rabijevu frekvenciju uzeto $\Omega_p = 0.01\gamma$, a varirane su vrednosti γ_s i Ω_c . Konkretno, crnim punim linijama i šrafiranom površinom ispod njih prikazani su slučajevi kada je $\gamma_s \ll \gamma$, što odgovara situaciji kada je u sistemu moguće formiranje stabilnog tamnog stanja. Radi poređenja, prikazana je situacija i kada ovo nije slučaj, konkretno kada je $\gamma_s = \gamma$ (tačkaste narandžaste linije sa obojenom površinom ispod njih). Za razmatranje ovog slučaja smo se opredelili zbog toga što će sistemi koje proučavamo u disertaciji po pravilu biti okarakterisani nezanemarljivom vrednošću ovog koeficijenta. Za razdešenost kontrolnog polja (čija je definicija analogna onoj za Δ_p) uzeli smo da je $\Delta_c = 0$.



Slika 2.10: (a–c) Apsorpciona i (d–f) disperziona kriva za sistem svetlost–materija u lestvičastoj konfiguraciji sa tri nivoa, za $\Omega_p = 0.01\gamma$, kao i (a,d) $\Omega_c = 0.5\gamma$, (b,e) $\Omega_c = 2\gamma$ i (c,f) $\Omega_c = 8\gamma$, izražena u proizvoljnim jedinicama. Pune crne linije sa šrafiranom površinom ispod njih odgovaraju situaciji $\gamma_s \ll \gamma$, dok tačkaste narandžaste linije sa obojenom površinom prikazuju slučaj $\gamma_s = \gamma$.

Koncentrišimo se najpre na rezultate za $\gamma_s \ll \gamma$. Slika 2.10 (a) prikazuje apsorpcionu krivu za slučaj $\Omega_c = 0.5\gamma$, što zadovoljava uslov (2.37). Vidimo da je u slučaju rezonancije ($\Delta_p = 0$) apsorpcija sondirajućeg polja jednaka nuli. Ovakva pojava strmog i *uskog* prozora transparentnosti unutar širokog apsorpcionog profila, čija je širina reda γ , karakteristična je za EIT režim, usled čega je i disperziona kriva u oblasti rezonancije veoma strma (slika 2.10 (d)). Činjenica da je samo u uskoj oblasti frekvencija došlo do drastičnog povećanja transparentnosti objašnjava se, kao što je već rečeno, destruktivnom Fano interferencijom. Ukoliko, pak, povećamo intenzitet kontrolnog polja, interferentnom efektu pridružiće se i AT efekat, što je prikazano na slici 2.10 (b) i (e) za $\Omega_c = 2\gamma$. Ovde je i dalje $\Omega_c \sim \gamma$, ali je razdvajanje apsorpcionih pikova već sada očigledno, i povećava se sa povećanjem Ω_c (slika (b)). Za navedene vrednosti parametara, ne može se sa sigurnošću govoriti o predominantnosti nekog od režima, pa su ovakve situacije tema ekstenzivnog proučavanja u nizu kako teorijskih, tako i eksperimentalnih radova [17, 18, 77, 78]. Na kraju, u slučaju sa slike 2.10 (c) i (f), gde je $\Omega_c = 8\gamma$, kontrolno polje postaje dovoljno jako da Fano interferencija biva „isprana”, ostavljajući sistem u AT režimu za koji važi uslov (2.38). Vidimo da se apsorpciona kriva prak-

tično može predstaviti kao zbir dva lorencijana (slika (c)), jednako udaljenim od $\Delta_p = 0$, čime se dobija veoma širok prozor transparentnosti. U notaciji sa slike 2.9, levi apsorpcioni pik odgovara prelazu $|1\rangle \leftrightarrow |+\rangle$, a desni prelazu $|1\rangle \leftrightarrow |-\rangle$. Uporedo sa tim, i disperziona kriva u rezonanciji nije više toliko strma (slika (f)), mada se i u ovom slučaju grupna brzina svetlosti može smanjiti za nekoliko redova veličine, što će u nastavku disertacije i biti pokazano. Više detalja o AT cepanju („originalnog” apsorpcionog pika u odsustvu kontrolnog polja) nalazi se u poglavlju (6.2), u okviru razmatranja formalizma obučenih stanja za sisteme od interesa u disertaciji.

Razmotrimo sada situaciju kada najviši nivo više nije dugoživeći, odnosno kada je $\gamma_s = \gamma$. Ovaj koeficijent raspada ima veliki uticaj na oblik apsorpcione (i posledično disperzione) krive. Ukoliko se koeficijent raspada nivoa $|3\rangle$ ne može zanemariti, tamno stanje koje predstavlja superpoziciju nivoa $|1\rangle$ i $|3\rangle$ više nije stabilno, i raspada se sa vremenom usled dekoherencije.⁸ Ovo se najbolje vidi na slici 2.10 (a), gde je destruktivna interferencija ponovo „isprana”, ovog puta zbog raspada tamnog stanja sistema. Umesto toga, u apsorpcionoj krivoj se formira samo jedan maksimum – lorencijan sa prirodnom širinom γ , centriran oko rezonancije, kao i u slučaju $\Omega_c = 0$. Veoma mala vrednost γ_s je, dakle, *presudna* za formiranje EIT u užem smislu. Kada to nije zadovoljeno, nema ni pojave spore svetlosti, pošto se oko rezonantne frekvencije ponovo stvara anomalna disperzija (slika 2.10 (d)). Posmatranjem slike 2.10 (b), vidimo da je interferencija ponovo „isprana” jer vrednost apsorpcije u $\Delta_p = 0$ više nije jednaka nuli. Međutim, već ovde vidimo da su dva apsorpciona maksimuma jasno razdvojena, a kako interferencije više nema, možemo reći da je dobijeni prozor transparentnosti posledica isključivo AT efekta. Tada apsorpciona kriva predstavlja prost zbir dva lorencijana, jednako udaljena od rezonancije, ali i dalje isuviše bliska da bi se apsorpcija na dnu prozora osetnije smanjila. Konačno, sličan se zaključak može dobiti i na osnovu slike 2.10 (c), sa tom razlikom što su sada lorencijani dovoljno daleko jedan od drugog, pa je vrednost apsorpcije na dnu prozora ponovo veoma mala, i štaviše, za jaka kontrolna polja direktno srazmerna γ_s , što ćemo pokazati u poglavlju 6.1. U velikom broju slučajeva od interesa, vrednost γ_s će biti dovoljno mala da se u proučavanom sistemu obezbedi dovoljno velika transparentnost sondirajućeg lasera. Takođe, vidimo da disperziona kriva u AT režimu i dalje ima negativan nagib, pa je ovde, čak i za veliku vrednost koeficijenta raspada nivoa $|3\rangle$, za razliku od EIT režima, *moгуća* realizacija spore svetlosti. U konačnom se, dakle, apsorpciona kriva sastoji od zbira dva lorencijana, što vidimo da za $\gamma_s \ll \gamma$ nije sasvim bio slučaj – destruktivna interferencija je još uvek „spuštala” apsorpciju na nulu, pa ni pojedinačni apsorpcioni pikovi nisu sasvim pratili „lorencijanski” profil.

Kao što se može videti, posebno na slici 2.10 (b), u praksi je često teško razdvojiti EIT od AT efekta, pa se pribegava različitim pokušajima da se ova dva fenomena objektivno klasifikuju. U teorijskom radu iz 2010. godine, Abi-Salum je iskoristio koeficijente raspada koherencija u sistemima sa tri nivoa sa slike 2.5 (b–e) da bi ustanovio vrednost „praga” Ω_t za kontrolno polje [17]. Takođe, pokazao je da je AT efekat (u kome je $\Omega_c/\Omega_t > 1$) moguć u sve četiri razmatrane konfiguracije, dok se EIT može ostvariti samo u Λ konfiguraciji, kao i „gornjoj” lestvičastoj konfiguraciji u režimu slabih polja (u kome je $\Omega_c/\Omega_t < 1$). Anisimov i saradnici predložili su objektivni metod baziran na *Akaikeovom informacionom kriterijumu* (AIK, engl. Akaike’s information criterion, AIC), u cilju raspoznavanja AT efekta u odnosu na EIT u eksperimentalnim podacima za atom u Λ konfiguraciji sa tri nivoa [18]. Oni su modelovali apsorpcionu krivu u EIT, odnosno AT režimu, respektivno, na sledeći način:

$$A_{\text{EIT}} = \frac{C_+}{\Delta_p^2 + \gamma_+^2} - \frac{C_-}{\Delta_p^2 + \gamma_-^2}, \quad (2.39)$$

⁸ Preciznije govoreći, više se uopšte ne može govoriti o tamnom stanju, pošto ga, usled spontane emisije fotona, sada možemo „videti”. Zbog toga ćemo ovakvu linearnu superpoziciju „atomskih” stanja $|1\rangle$ i $|3\rangle$ nazivati tamnim stanjem samo uslovno, u smislu diskusije iz poglavlja 6.2.

$$A_{\text{AT}} = \frac{C}{(\Delta_p + \Delta_p^0)^2 + \gamma^2} + \frac{C}{(\Delta_p - \Delta_p^0)^2 + \gamma^2}. \quad (2.40)$$

Tako se, u EIT režimu, pretpostavlja da se apsorpciona kriva sastoji od *razlike* dva lorencijana, oba centrirana oko $\Delta_p = 0$, čije su amplitude C_{\pm} a širine γ_{\pm} . Drugi član u izrazu za A_{EIT} opisuje strmo smanjenje apsorpcije oko rezonancije (zbog čega je $\gamma_- \ll \gamma_+$), i kompletan model bi u ovom slučaju mogao da se primeni na opisivanje situacije sa slike 2.10 (a). Nasuprot tome, A_{AT} se sastoji od *zbira* dva lorencijana, centrirana oko $\Delta_p = \pm\Delta_p^0$,⁹ jednakih amplituda C i širina γ , kako je ranije već diskutovano. Ovaj model najbolje opisuje slučaj prikazan na slici 2.10 (c). Kako bi se kvantifikovalo „prisustvo” ova dva modela u realnim eksperimentalnim podacima, uvode se sledeći težinski faktori:

$$w_{\text{EIT}} = \frac{e^{-I_{\text{EIT}}/2N}}{e^{-I_{\text{EIT}}/2N} + e^{-I_{\text{AT}}/2N}}, \quad w_{\text{AT}} = 1 - w_{\text{EIT}}, \quad (2.41)$$

pri čemu je N broj podataka u spektru, a I_j ($j = \text{EIT}, \text{AT}$) predstavlja gubitak informacije usled fitovanja realnih podataka od strane modela A_j . Ovaj gubitak iznosi $I_j = -2\log L_j + 2K_j$, gde je L_j maksimalno očekivanje za model A_j sa brojem fitujućih parametara K_j . Brojni drugi autori su se takođe upustili u rešavanje problema objektivnog razdvajanja EIT od AT režima, kako teorijski [79], tako i eksperimentalno [80–84]. Među njima, Hao i saradnici sproveli su ovaj poduhvat na hladnim atomima cezijuma u „gornjoj” lestvičastoj konfiguraciji sa tri nivoa, gde su za razlikovanje EIT od AT efekta korišćene širine linije (tačnije, naglog pada u apsorpciji) i prozora transparentnosti, respektivno [77]. Na kraju, napomenimo da su Tan sa saradnicima [85], kao i Ji sa saradnicima [78], primenili AIK kako bi objektivno klasifikovali dva režima u eksperimentima sa Ridbergovim atomima, takođe u „gornjoj” lestvičastoj konfiguraciji sa tri nivoa.

Matematički oblik polaznih jednačina kojima se opisuje interakcija svetlosti sa materijalnom sredinom (i koje će biti izvedene u Glavi 5) neće zavisiti od izbora režima u kome radimo, pa će tako one važiti univerzalno. U nastavku disertacije, međutim, bavićemo se sistemima koji se karakterišu takvim vrednostima parametara koje zadovoljavaju uslov (2.38), i samim tim potpadaju pod AT režim. Takođe, kako bismo bili u stanju da analitički rešimo pomenute jednačine (što je urađeno u Glavi 6), koristićemo perturbacioni pristup koji zahteva da stavimo $\Omega_p \ll \Omega_c$. Rečeno jezikom slika, u nastavku disertacije ćemo se prevashodno koncentrisati na slučaj prikazan tačkastom naranđastom krivom na slici 2.10 (c) i (f). Rad u AT režimu omogućava nam postojanje prozora transparentnosti i realizaciju spore svetlosti čak i u slučaju nezanemarljivog koeficijenta raspada γ_s , što je upravo slučaj sa poluprovodničkim nanostrukturama na koje je u ovoj disertaciji prevashodno bačen akcenat. Takođe, širina prozora transparentnosti u ovom režimu omogućiće nam rad sa spektralno širokim, a vremenski uskim pulsevima, što takođe može biti značajno sa eksperimentalnog stanovišta. Nagib disperzione krive, međutim, neće biti toliko strm u AT režimu kao što bi bio u EIT režimu, ali nam i dalje omogućava demonstraciju niza interesantnih efekata, kao i razne potencijalne primene ovakvih sistema. Treba, doduše, imati na umu da se, uz odgovarajuće modifikacije (u analitičkim izračunavanjima i odabiru sondirajućih pulseva manje spektralne širine), teorijsko proučavanje spore svetlosti u EIT režimu može sprovesti na sličan način kao što će to biti urađeno za situaciju u kojoj je dominantan AT efekat. Zbog toga, EIT (u užem smislu) i dalje zauzima centralno mesto u ovoj Glavi i ne može se sasvim odvojiti od AT efekta.

⁹ U Glavi 6 pokazaćemo da, u graničnom slučaju jakih kontrolnih polja, vrednost Δ_p^0 odgovara upravo vrednosti kontrolne Rabijeve frekvencije Ω_c .

2.3 Skladištenje svetlosti

U poglavlju 2.1 smo pokazali da je svetlost moguće usporiti do vrlo malih vrednosti grupne brzine, obezbeđivanjem jako velike normalne disperzije u materijalnoj sredini ($dn/d\omega \gg 1$). Pokazali smo da se ovo može izvesti uz pomoć EIT (u širem smislu, pošto sličan efekat može izazvati i AT cepanje), kako je opisano u poglavlju 2.2. Međutim, postoji granica do koje EIT tehnike mogu da uspore svetlost, i ona je određena činjenicom da nagib disperzione krive $dn/d\omega$ ne može biti beskonačno veliki.¹⁰ Zbog toga svetlosni pulsevi *ne mogu* biti usporeni do proizvoljno malih grupnih brzina.

Ubrzo ćemo, ipak, pokazati da je potpuno zaustavljanje svetlosti u nekoj sredini ipak *moguće*. Za ovo je potrebno iskoristiti nešto složeniji kvantni mehanizam u odnosu na onaj korišćen za dobijanje spore svetlosti – umesto statičkog, biće iskorišćen *dinamički* EIT efekat [86]. Uzmimo, na primer, Λ ili lestvičastu konfiguraciju sa tri nivoa, koje su prikazane na slici 2.5 (b) i (d), respektivno. U prisustvu kontrolnog polja, sondirajući laser prolazi kroz sredinu bez gubitaka i sa smanjenom grupnom brzinom. Ukoliko zatim *adijabatski isključimo* kontrolno polje (tako da atomi sve vreme ostaju u tamnom stanju), sredina će ponovo postati neprozračna za sondirajuće polje i ono će se apsorbovati, odnosno ekscitovaće atome materijalne sredine. Svetlost na taj način ne nastavlja svoje kretanje, odnosno biva *zaustavljena* ili *uskladištena* u sredini. Informacija koju svetlost nosi se, međutim, može *povratiti* ponovnim *adijabatskim uključivanjem* kontrolnog polja, nakon čega sredina ponovo postaje prozračna za sondirajući laser. U ovom poglavlju, objasnićemo efekat skladištenja i povraćaja svetlosti preko formalizma polaritona tamnog stanja, prezentovaćemo najvažnije rezultate vezane za eksperimentalne realizacije ovog efekta, i diskutovati sličnosti i razlike dva memorijska protokola koja se oslanjaju na diskusiju sprovedenu u odeljku 2.2.3.

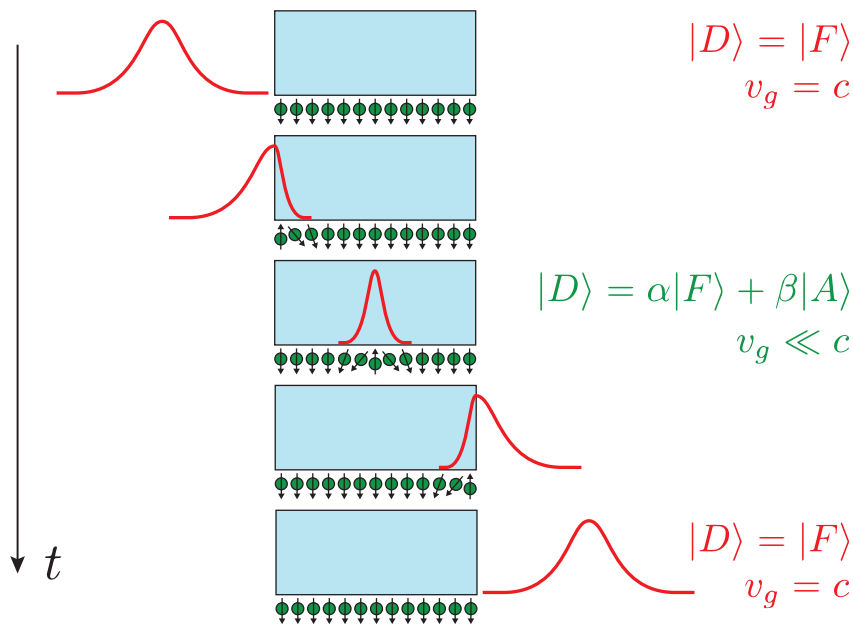
2.3.1 Formalizam polaritona tamnog stanja

Da bismo objasnili pojavu skladištenja svetlosti, vratimo se za trenutak na sporu svetlost, i diskutujemo iz poglavlja 2.1 vezanu za modifikaciju grupne brzine i prostorne širine pulsa u atomskoj sredini. Neka je spora svetlost posledica efekta EIT u materijalnoj sredini, zbog čega ćemo je ponekad i zvati *EIT sredinom*. Na slici 2.11 prikazano je prostiranje sondirajućeg pulsa (crvene linije) kroz EIT sredinu (svetloplavi pravougaonici) u različitim trenucima vremena (na pet različitih „frejmova”). Na prvoj slici odozgo, puls još uvek nije ušao u sredinu i kreće se brzinom c kroz vakuum.¹¹ Na drugoj slici, po ulasku u sredinu, prednji deo pulsa naglo usporava, budući da ulazi u oblast sa veoma velikom normalnom disperzijom. Zatim, u sredinu ulazi i zadnji deo pulsa, nakon čega puls biva značajno *kompresovan*, i to za faktor c/v_g (treći „frejm”), gde je v_g grupna brzina pulsa u EIT sredini. Kao što je već rečeno, kompresija pulsa, zajedno sa nepromenjenom vrednošću maksimuma pulsa, implicira da sondirajući puls u EIT sredini *gubi* energiju. Ova energija ne odlazi na

¹⁰Kako se pokazuje, vrednost ovog nagiba obrnuto je srazmerna jačini kontrolnog polja (dok je širina prozora transparentnosti direktno srazmerna ovoj vrednosti). Beskonačan nagib značio bi da je potrebno da bude $\Omega_c = 0$, što dovodi do apsorpcije u slučaju rezonancije – kao kod sistema sa dva nivoa. Konačna širina nivoa, odnosno apsorpcionih linija, takođe onemogućava smanjenje grupne brzine sondirajućeg lasera ispod pomenute granice. Dakle, u situaciji tzv. statičkog EIT efekta, kada se intenzitet kontrolnog lasera drži konstantnim, svetlost bi pri ulasku odmah bila apsorbovana. Da bi se ovo izbeglo, potrebno je da se kontrolni laser isključi tek nakon što sondirajući laser uđe u sredinu, što izlazi iz okvira statičke EIT.

¹¹Pretpostavljamo da se, van EIT sredine, puls prostire kroz vakuum, u kome nema atoma sa kojima bi svetlost mogla da interaguje, a samim tim ni da menja svoje disperzione karakteristike. Naravno, u praksi ni kretanje kroz vazduh neće doneti prevelike razlike, budući da će i tada brzina pulsa biti skoro jednaka c .

ekscitaciju elektrona na nivo $|2\rangle$, jer je sistem zarobljen u tamnom stanju. Umesto toga, zahvaljujući kontrolnom polju, energija biva prenetu u tzv. *spinsku koherenciju*, kako se obično naziva veličina koja je povezana sa nivoima koji formiraju tamno stanje (i nisu direktno spregnuti laserskim poljima – u našem slučaju, to su nivoi $|1\rangle$ i $|3\rangle$). Pridev „spinska” potiče od činjenice da ovi nivoi u praksi najčešće predstavljaju stanja različitog spina. Drugim rečima, sondirajući puls prevodi se u koherentnu superpoziciju stanja $|1\rangle$ i $|3\rangle$, formirajući tzv. *spinski talas* (prikazan zelenim kružićima i strelicama na slici – spinski talas je lokalizovan tamo gde se projekcija spina promenila), a višak energije prelazi u fotone kontrolnog lasera [86].



Slika 2.11: Šematski prikaz prostiranja „fotonske” (crvene linije koje predstavljaju prostorni profil sondirajućeg laserskog pulsa) i „atomske” komponente polaritona tamnog stanja (zeleni kružići sa strelicama koji predstavljaju spinski talas) u nekoliko sukcesivnih trenutaka vremena. Na prvoj i poslednjoj slici, polariton tamnog stanja se sastoji isključivo od „fotonske” komponente, dok u preostalim slučajevima on predstavlja superpoziciju dveju komponenti [56, 86].

Spinski talas sada putuje uporedo sa sondirajućim pulsem kroz EIT sredinu, brzinom $v_g \ll c$. Ovakva „isprepletana” struktura naziva se *polariton tamnog stanja* (engl. dark-state polariton), koji se matematički može zapisati u formi superpozicije:

$$|D\rangle = \alpha|F\rangle + \beta|A\rangle, \quad (2.42)$$

gde $|F\rangle$ predstavlja „fotonsku” a $|A\rangle$ „atomsku” komponentu polaritona sa amplitudama verovatnoće α i β , respektivno. U poglavlju 6.4 će ovaj izraz biti dat nešto formalnije za konkretan fizički sistem od interesa. Na izlasku iz sredine, doći će do obrnutog procesa od onog opisanog na početku – deo pulsa koji prvi izađe iz sredine se prostorno izdužuje, a zatim i deo koji ga prati (četvrti „frejm” na slici 2.11). Energija se iz kontrolnog polja vraća sondirajućem, „atomska” komponenta prelazi kompletno u „fotonsku” (nema više spinskog talasa), i originalni puls se ponovo formira, kao što se vidi na poslednjoj slici, ali sa očiglednim *kašnjenjem* u odnosu na slučaj kada bi isto rastojanje prešao krećući se kroz vakuum. Dakle, u ovom slučaju, kao i na početku kretanja (pre ulaska pulsa u EIT sredinu), polariton je sačinjen samo od „fotonske” komponente,

$$|D\rangle = |F\rangle, \quad (2.43)$$

i kreće se brzinom $v_g = c$.

Kako bi se puls potpuno zaustavio, potrebno je primeniti dinamički EIT efekat. Kada se kompresovani puls nađe unutar sredine, njegova svojstva se jednostavno mogu menjati promenom intenziteta kontrolnog polja (odnosno Ω_c). Konkretno, njegovo adijabatsko isključivanje dovodi do daljeg smanjivanja v_g , ali i do smanjivanja doprinosa fotona *polarizacionoj koherenciji*, povezanoj sa prelazom $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$, koja je odgovorna za apsorpciju polja u sredini. Prostim rečeno, isključivanje kontrolnog polja dovodi do povećane apsorpcije sondirajućeg pulsa, da bi puls pri $\Omega_c = 0$ ostao potpuno zarobljen u EIT sredini, i to u formi spinske koherencije. Polariton tamnog stanja je tada sačinjen isključivo od „atomske” komponente,

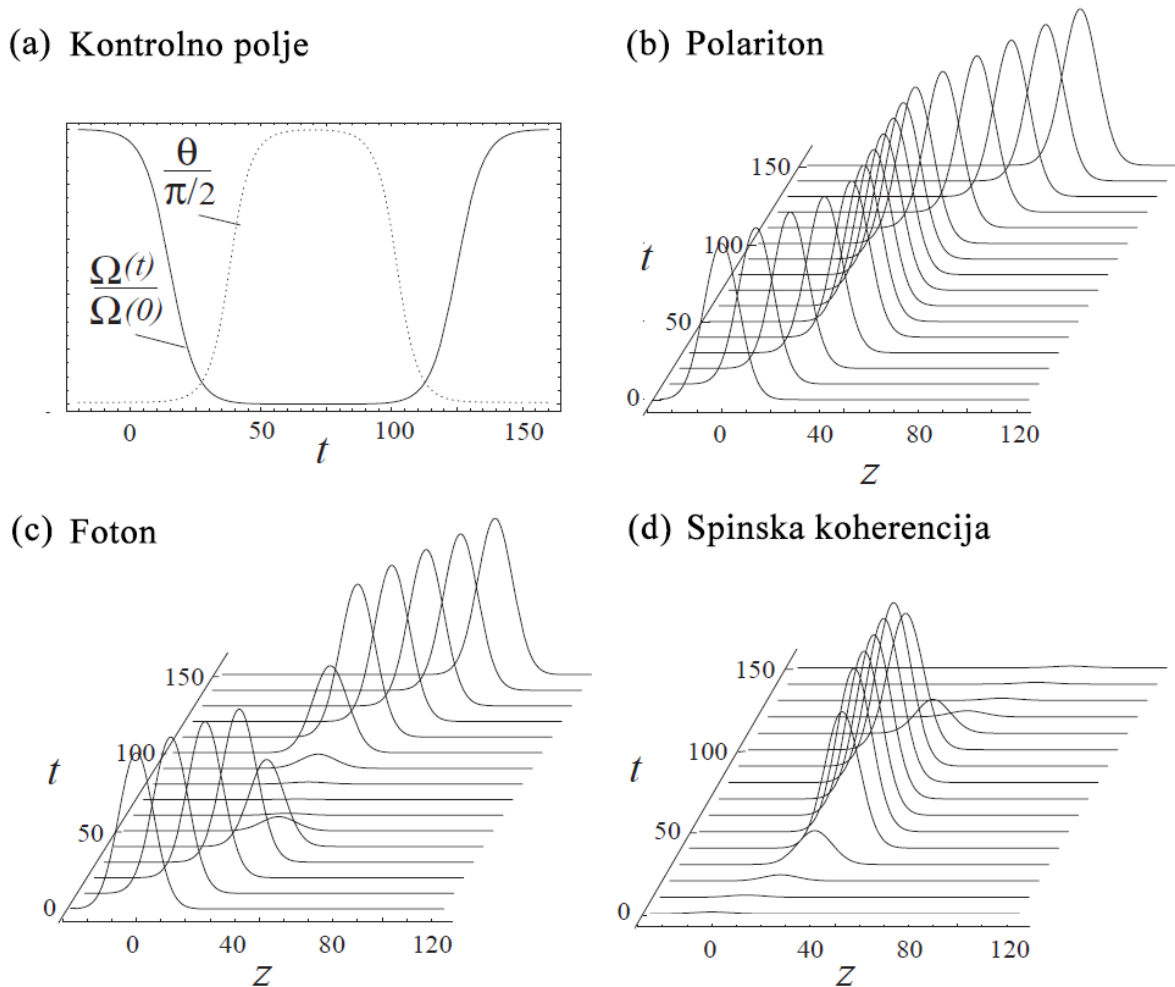
$$|D\rangle = |A\rangle, \quad (2.44)$$

i pošto nema kretanja, brzina mu je $v_g = 0$. Na ovaj način, informacija koju fotoni nose (oblik, amplituda, dužina, polarizacija pulsa...) biva uskladištena u EIT sredini. Adijabatsko (sporo i glatko) smanjenje intenziteta kontrolnog polja je potrebno kako bi se obezbedilo neprekidno smanjenje spektralne širine polaritona, koji usled toga sve vreme ostaje unutar prozora transparentnosti (čija širina se takođe smanjuje usled smanjenja Ω_c) [86]. Svetlosni puls se sada jednostavno može povratiti iz sredine ponovnim (adijabatskim) uključivanjem kontrolnog polja, nakon čega polariton tamnog stanja ponovo dobija i „fotonsku” komponentu, čime se nastavlja kretanje polaritona kroz sredinu brzinom $v_g \ll c$ [56]. Zbog toga što informacija ostaje zarobljena u dugoživećoj spinskoj koherenciji, ovaj proces bi trebalo da bude bez gubitaka. Ipak, u realnim fizičkim sistemima postojeće efekti dekoherencije koji će izazvati određene gubitke u „regenerisanom” pulsu, o kojima će više biti reči u Glavi 5.

Pojam polaritona tamnog stanja po prvi put su uveli Flajšhauer i Lukin u svom radu iz 2000. godine, na primeru Λ konfiguracije, tretirajući veličine $|D\rangle$, $|F\rangle$ i $|A\rangle$ kao kvantna polja [21]. Oni su pokazali da su polaritoni tamnog stanja *kvazičestice* koje zadovoljavaju bozonske komutacione relacije, i samim tim imaju *bozonski* karakter. Rezultati dobijeni u ovom radu prikazani su na slici 2.12, gde je predstavljena prostorno-vremenska zavisnost gorepomenutih veličina u slučaju kada se kontrolno polje (ovde označeno sa $\Omega(t)$) menja sa vremenom kao na slici (a). Ugao θ prikazan na slici predstavlja tzv. ugao mešanja koji je povezan sa kontrolnom Rabijevom frekvencijom i biće definisan u odeljku 6.4.1. Sa slike 2.12 (b) se jasno vidi kako polariton tamnog stanja postoji sve vreme, nezavisno od vrednosti Ω , dok „fotonska” komponenta postoji samo pre i posle skladištenja (slika (c)). Spinska koherencija je najveća u toku skladištenja, kada polariton sadrži samo „atomsku” komponentu, dok ona u odsustvu skladištenja postoji, ali ima veoma malu vrednost. Ubrzo nakon objavljivanja ovog rada, isti autori su proširili dobijene rezultate na nešto složenije konfiguracije i dali detaljniji osvrt na mogućnosti primene u izradi kvantnih memorija [22]. U dostupnoj literaturi, kao i u do sada pobrojanim radovima, najčešće se pri opisivanju polaritona tamnog stanja koristi najprecizniji, pun kvantni pristup. Međutim, do sličnih zaključaka je moguće doći i poluklasičnim tretmanom, gde se elektromagnetna polja tretiraju klasično, a atomska sredina pomoću zakona kvantne mehanike [16]. Ovaj pristup se pokazao sasvim dovoljan za potrebe zaključaka dobijenih u ovoj disertaciji, te će se u nastavku posebna pažnja posvetiti upravo njemu, u već pomenutom poglavlju 6.4.

2.3.2 Eksperimentalne realizacije skladištenja svetlosti

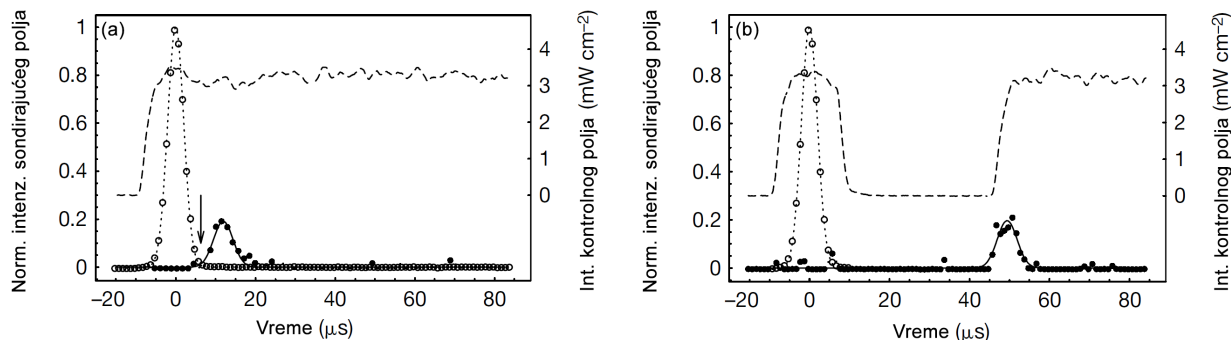
Već 2000. godine, svega nekoliko godina nakon prve eksperimentalne realizacije spore svetlosti na bazi EIT, Liu i saradnici uspešno su realizovali proces skladištenja svetlosti u magnetno zarobljenom, hladnom gasu atoma natrijuma na temperaturama reda mikrokelvina [87]. Centralni rezultat



Slika 2.12: Teorijski izračunate vrednosti za skladištenje svetlosti preuzete iz rada [21]. (a) Zavisnost Rabijeve frekvencije kontrolnog polja, kao i ugla mešanja od vremena. U odsustvu skladištenja, kontrolna Rabijeva frekvencija ima vrednost $\Omega(0)$. Na slici je takođe prikazana i prostorno-vremenska zavisnost (b) polaritona tamnog stanja, (c) „fotonske” komponente, odnosno jačine sondirajućeg pulsa, kao i (d) „atomske” komponente, odnosno spinske koherencije EIT sredine u Λ konfiguraciji sa tri nivoa.

ovog rada prikazan je na slici 2.13, pri čemu su na slici (a) dati eksperimentalni podaci za puls spore svetlosti (puni kružići), kada se kontrolni laser održava konstantnim, dok na slici (b) vidimo puls koji je, usled skladištenja, napustio EIT sredinu tek nakon nekoliko desetina mikrosekundi. Vidimo i da je izlazni puls na slici (b) jako sličan onom na slici (a), što znači da se proces skladištenja odigrao sa zanemarljivim gubicima. Na slici je šupljim kružićima prikazan referentni puls, isprekidanom linijom intenzitet kontrolnog polja, a punom i tačkastom linijom odgovarajući teorijski fitovi eksperimentalnih podataka. Strelica na slici (a) pokazuje trenutak u kome je sondirajući puls potpuno ušao u sredinu i istrpeo potpunu kompresiju. U istom radu, autori su prikazali i rezultate skladištenja svetlosti sa vremenima skladištenja i do 1 ms.

Sličnu proceduru kao u prethodnom radu prezentovao je i Philips sa saradnicima u eksperimentu sa atomskim parama rubidijuma, dobivši vremena skladištenja od oko 0.5 ms [88]. Longdel i saradnici iskoristili su EIT u čvrstom materijalu Y_2SiO_5 dopiranom prazeodijumom kako bi uskladištili svetlost i do vremena većih od jedne sekunde, što su omogućila veoma velika vremena života hiperfinskih



Slika 2.13: Eksperimentalni rezultati skladištenja svetlosti preuzeti iz rada [87]. Vremenska zavisnost normiranog intenziteta sondirajućeg (puni kružići) i intenziteta kontrolnog polja (isprekidane linije) za slučaj (a) usporavanja svetlosti i (b) skladištenja svetlosti. Punim linijama prikazan je „gausovski” fit dobijenog signala, a šupljim kružićima i tačkastim linijama referentni puls i njegov „gausovski” fit, respektivno. Normiranje sondirajućeg intenziteta je vršeno u odnosu na maksimum referentnog pulsa, pri čemu je tada obično birano $\Omega_p/\Omega_c = 0.3$. Strelica označava trenutak kada sondirajući puls potpuno uđe u atomsku sredinu.

prelaza u ovom materijalu [89]. Zatim je Novikova sa saradnicima demonstrirala strategije optimizovanja efikasnosti skladištenja baziranom na EIT u toplim atomima rubidijuma i cezijuma, korišćenjem kako jednofotonskih pulseva, tako i „stisnute” svetlosti (engl. squeezed light) [90]. Vremena skladištenja i do jednog minuta demonstrirali su Hajnce i saradnici [91], i to pomoću „samoučeće” evolucione strategije u spoljašnjim magnetnim kontrolnim poljima u dopiranom čvrstom materijalu sličnom onom u referenci [89]. Na kraju, napomenimo da se skladištenje svetlosti u raznim sredinama i konfiguracijama proučava kako teorijski, tako i eksperimentalno u brojnim drugim radovima, od kojih ćemo spomenuti samo još one navedene u spisku literature pod brojevima [92–94].

2.3.3 Tipovi memorijskih protokola

Gore pobrojane eksperimentalne realizacije kako spore, tako i uskladištene svetlosti, baziraju se prevashodno na EIT. Takođe, proces skladištenja koji se tamo koristi oslanja se na adijabatsko isključivanje i ponovno uključivanje kontrolnog polja. Sa druge strane, kvantne memorije zasnovane na AT efektu jesu proučavane [95, 96], ali ni izbliza toliko kao one koje počivaju na EIT. U svom radu iz 2018. godine, Saglamjurek i saradnici demonstrirali su princip rada kvantnih memorija na bazi AT efekta [97], da bi ista istraživačka grupa naredne godine objavila rad u kome je odrađeno ekstenzivno poređenje između kvantnih memorija na bazi EIT i AT efekta [23]. U ovom odeljku, prezentovaćemo najvažnije zaključke iz ovog rada, a koji će biti od značaja za probleme od interesa u ovoj disertaciji, prevashodno u vezi sa skladištenjem svetlosti.

U svom radu, Rastogi i saradnici [23] proučavali su sistem u Λ konfiguraciji (slika 2.5 (b)), mada se dobijeni zaključci u velikoj meri mogu primeniti i na lestvičastu konfiguraciju sa tri nivoa (slika 2.5 (d)). Kao i do sada, sa $\gamma = \Gamma/2$ je označen koeficijent raspada nivoa $|2\rangle$ (Γ je odgovarajući koeficijent spontane emisije), a sa γ_s koeficijent raspada nivoa $|3\rangle$. Proučavano je prostiranje sondirajućeg pulsa kroz materijalnu sredinu u prisustvu kontrolnog polja, pri čemu je u sistemu dominantan, kako EIT, tako i AT efekat, što je prikazano na slici 2.14. Sondirajući puls se karakteriše Gausovim profilom čija je spektralna širina B (engl. bandwidth) obrnuto srazmerna trajanju pulsa. Tako se spektralna širina pulsa smatra *uskopojasnom* (engl. narrowband) ukoliko je $B < \Gamma/(2\pi)$, od-

nosno širokopojasnom (engl. broadband) za $B > \Gamma/(2\pi)$. Pored toga, podsetimo se da se EIT režim, definisan jednačinom (2.37), kvalitativno karakteriše uskim prozorom transparentnosti unutar jednog, širokog apsorpcionog pika, dok je za AT režim, za koji važi jednačina (2.38), karakterističan širok prozor transparentnosti sa jasno razdvojenim „lorencijanskim” pikovima. Za potrebe daljeg razmatranja, čak možemo „granicu” između ovih režima definisati strožije, tako da za EIT režim važi $\Omega_c/\Gamma < 1$, a za AT režim $\Omega_c/\Gamma > 1$. Jasan konsenzus oko utvrđivanja precizne „granice”, kao što smo rekli, ne postoji i predmet je proučavanja mnogih radova, ali će za naše potrebe i pomenute „približne” definicije biti sasvim dovoljne.

Kao što smo već pomenuli, proces skladištenja se sastoji u tome da se puls najpre potpuno nađe unutar EIT sredine, da bi se zatim kontrolno polje isključilo (proces „upisivanja” informacije), a potom i uključilo nakon željenog vremena kada je potrebno povratiti informaciju (proces „čitavanja”). Napomenuli smo i da se proces isključivanja i uključivanja vrši dovoljno sporo, odnosno *adijabatski*. Ovo je suština rada *EIT memorijskog protokola*, ili kraće *EIT memorije*. Na slici 2.14 (a) i (b) vidimo da EIT memorija može funkcionisati kako u EIT, tako i u AT režimu – samo je potrebno da se u oba slučaja puls nađe sasvim unutar prozora transparentnosti. U duhu formalizma polaritona tamnog stanja, za prostorno-vremensku zavisnost jačine sondirajućeg polja E , spinske S i polarizacione koherencije P , rešavanjem relevantnih jednačina za $\gamma_s \ll \gamma$ će se dobiti:

$$|E(z, t)|^2 = \frac{\Omega_c^2(t)}{g^2 \mathcal{N} + \Omega_c^2(t)}, \quad (2.45)$$

$$|S(z, t)|^2 = \frac{g^2 \mathcal{N}}{g^2 \mathcal{N} + \Omega_c^2(t)}, \quad (2.46)$$

$$|P(z, t)|^2 \approx 0, \quad (2.47)$$

gde je g veličina koja je povezana kako sa karakteristikama sondirajućeg polja, tako i same sredine, i biće bliže definisana u poglavlju 6.4. Ukoliko se kontrolno polje adijabatski isključi, kao što se vidi na slici 2.14 (d) i (e), „fotonska” komponenta će preći u spinsku koherenciju bez uticaja na $P(z, t)$. Tako, vidimo da $S(z, t)$ postoji i u toku skladištenja, „čuvajući” tako uskladištenu informaciju. Naglasimo još i da je za realizaciju širokopojasne EIT memorije potrebno obezbediti za red veličine veće vrednosti optičke dubine d u odnosu na one potrebne za optimalnu uskopojasnu EIT memoriju. Iako je EIT protokol najoptimalnije koristiti u EIT režimu (slika 2.14 (a) i (d)), vidimo da će primena odgovarajućeg memorijskog protokola zavisiti od karakteristika same materijalne sredine sa kojom radimo.

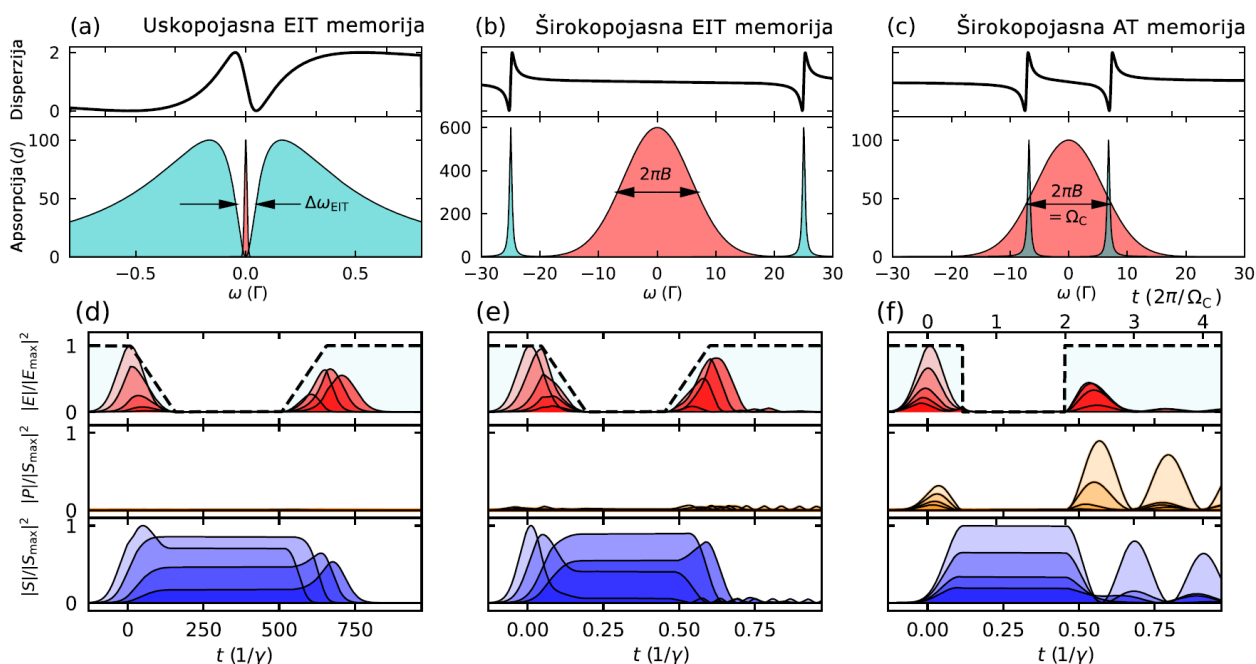
Za razliku od EIT memorije, u kojoj je cilj eliminisati neželjenu apsorpciju, *AT memorijski protokol* (ili *AT memorija*) upravo koristi ovu apsorpciju kako bi obezbedio što efikasniji proces skladištenja. Ovo je, konkretno, izvodljivo u AT režimu (širokopojasna AT memorija), što je prikazano na slici 2.14 (c), gde je spektralna širina pulsa dovoljno velika da obuhvati oba AT pika. U principu, uskopojasna AT memorija je takođe moguća, ali se pokazuje da ona ne može funkcionisati sa ma kakvom prihvatljivom efikasnošću, zbog čega nije ni prikazana na slici [23]. Činjenica da puls „leži” u oblasti pojačane apsorpcije, podrazumeva *transfer* spinske u polarizacionu koherenciju i obrnuto. Štaviše, može se pokazati da prostorno-vremenska zavisnost relevantnih veličina ima oblik:

$$|E(z, t)|^2 \sim \sin^2(\Omega_c t), \quad (2.48)$$

$$|S(z, t)|^2 \sim \cos^2(\Omega_c t), \quad (2.49)$$

$$|P(z, t)|^2 \sim \sin^2(\Omega_c t). \quad (2.50)$$

Dakle, za razliku od EIT memorije gde se polarizaciona koherencija adijabatski eliminiše, ovde ona predstavlja „posrednika” u periodičnoj razmeni koherencije između spinskog i fotonskog moda, što se vidi na slici 2.14 (f). Kada je kontrolno polje uključeno, ova razmena predstavlja fizički mehanizam za nastanak kašnjenja sondirajućeg pulsa, koji se razlikuje od kašnjenja na bazi spore svetlosti, odnosno polaritona tamnog stanja. Takođe, u poređenju sa EIT protokolom gde su „fotonska” komponenta i spinska koherencija u fazi, ovde su očigledno u *kontrafazi* – jedna veličina je maksimalna dok je druga minimalna. Da bi se ostvarilo skladištenje, adijabatsko isključivanje nije potrebno. Naprotiv, potrebno je *naglo* isključiti kontrolno polje u trenutku kada je koherencija potpuno u spinskom modu, nakon čega ona u njemu ostaje i u toku vremena skladištenja. Proces „čitanja” informacije se takođe vrši naglo, ponovnim uključivanjem kontrolnog polja, nakon čega se nastavlja razmena koherencije između modova. Na ovaj način dobili smo *brzu* memoriju, koja očigledno ima potencijal za primenu u režimu rada (zavisno od parametara sistema koji razmatramo) koji je na svojevrsan način komplementaran onom u kome najbolje rezultate daje *spora* memorija na bazi EIT protokola.



Slika 2.14: Poređenje EIT i AT memorijskog protokola preuzeto iz rada [23]. (a–c) Disperzijska kriva (crne linije, gornji grafici) i apsorpciona kriva u jedinicama optičke dubine (plava), zajedno sa spektralnim profilom sondirajućeg pulsa (crvena površina), u različitim režimima rada. (d–f) Vremenska zavisnost (normirane) jačine električnog polja sondirajućeg pulsa („fotonska” komponenta, gornji), polarizacione (srednji) i spinske koherencije (donji grafici), u različitim režimima rada. Vrednosti parametara korišćenih pri dobijanju rezultata su (a,d) $B = 0.014\Gamma/(2\pi)$, $d = 100$ i maksimalna vrednost kontrolnog polja $\Omega_{c0} = 0.5\Gamma$, zatim (b,e) $B = 14\Gamma/(2\pi)$, $d = 600$ i $\Omega_{c0} = 55\Gamma$, kao i (c,f) $B = 14\Gamma/(2\pi)$, $d = 100$ i $\Omega_{c0} = 14\Gamma$.

Videli smo, dakle, da realizacija odgovarajućeg memorijskog protokola nije nužno povezana sa režimom pod istim imenom. Tako se EIT (adijabatska, spora) memorija može realizovati kako u EIT (uskopojasnom), tako i u AT (širokopojasnom) režimu. Sa druge strane, AT (brza) memorija je pre svega pogodna za rad u AT režimu. Iako je, u oba slučaja, rezultujući efekat kašnjenja izlaznog sondirajućeg pulsa praktično isti (što se i vidi na slici 2.14 (d–f)), fizički mehanizmi rada ovih memorija se itekako razlikuju – dok se EIT memorija bazira na adijabatskoj eliminaciji polarizacione

koherencije, AT memorija koristi benefite postojanja apsorpcije u sistemu i funkcioniše na principu transfera koherencije između fotonskog i spinskog moda. Optimalni uslovi za primenu nekog od dva memorijska protokola pre svega zavise od optičke dubine uzorka, i definišu ograničenja u pogledu tehničke realizacije i dizajna aparature sa kojom se želi postići efekat skladištenja svetlosti [98].

Ukoliko optimalni uslovi za realizaciju jednog od memorijskih protokola nisu zadovoljeni (na primer, kontrolno polje nije podešeno na adekvatan način), može se desiti da proces skladištenja i povraćaja svetlosti ima *mešoviti* karakter EIT i AT protokola. U tom slučaju, u cilju kvantifikovanja karaktera memorije, Rastogi i saradnici [23] definišu bezdimenzioni parametar

$$C = \frac{1}{\tau_s} \frac{\int_0^L \int_0^{\tau_s} |P(z, t)|^2 dz dt}{\int_0^L |S(z, T)|^2 dz}, \quad (2.51)$$

gde je L dužina uzorka. Ovaj parametar predstavlja odnos srednje normirane polarizacione koherencije u toku perioda „upisivanja” ($0 < t < \tau_s$) i normirane spinske koherencije merene u trenutku T kada je „upisivanje” već završeno i signal uskladišten ($T > \tau_s$). Tako, ukoliko je $C = 1$, memorija se može okarakterisati kao čist AT protokol, vrednost $C \leq 0.1$ znači da se radi o čistom EIT protokolu, dok vrednosti $0.1 < C < 1$ znače da je u pitanju *hibridna* memorija, sačinjena od mešavine oba protokola.

U odeljku 2.2.3, već smo pomenuli da ćemo u nastavku disertacije raditi u AT režimu, i diskutovali smo prednosti i nedostatke ovakvog pristupa. Pored toga, kada se budemo bavili proučavanjem skladištenja svetlosti u poluprovodničkim kvantnim tačkama, odabraćemo da koristimo EIT memorijski protokol, u kome se kontrolno polje menja adijabatski. Ovaj odabir, osim toga što se češće sreće u literaturi i predstavlja svojevrsan „standard”, omogućava nešto manje numerički zahtevna izračunavanja koja ćemo na dalje sprovoditi. Međutim, proučavanje kvantnih memorija zasnovanih na AT protokolu predstavlja perspektivno polje istraživanja, za koje će svakako biti mesta u budućim radovima koji se naslanjaju na rezultate ove disertacije.

3 Fizika mezoskopskih sistema

Mezoskopski sistemi leže u oblasti između mikrosveta atoma i molekula i makrosveta koji nas okružuje u svakodnevnom životu, i predstavljaju značajno polje istraživanja poslednjih decenija [99]. Dimenzije ovih sistema kreću se od jednog pa sve do nekoliko stotina nanometara, zbog čega se često nazivaju i *nanostrukturama*. Pokazalo se da njihove elektronske i optičke karakteristike mogu biti veoma značajne kako za njihove potencijalne primene u raznim oblastima nauke i tehnologije, tako i za fundamentalno razumevanje fizičkih procesa na ovim skalama [100]. Takođe, već sada postoje brojne napredne tehnike kojima je moguće konfirirati nosioce naelektrisanja unutar mezoskopskih objekata vrlo malih dimenzija, toliko malih da u njima dođe do dominacije *kvantnomehaničkih* efekata (na skalama manjim od talasne dužine elektrona, koja iznosi nekoliko desetina nanometara) [101], zbog čega se ovakvi objekti nazivaju i *kvantnim nanostrukturama*.

U okviru mezoskopskih sistema, značajno mesto zauzimaju oni izrađeni od raznih poluprovodnih materijala. Tako se *poluprovodničke nanostrukture* odlikuju izuzetno velikim stepenom kontrole i veoma dobrom mogućnošću integracije sa drugim komponentama u strujnom kolu [102–104]. Ovo je posebno izraženo u poređenju sa atomskim gasovima i parama, na kojima je realizovan najveći deo eksperimenata pomenutih u Glavi 2. Sa druge strane, u gasovitim sredinama, interakcija između atoma je veoma mala i dovodi do velikih vremena dekoherencije, reda mikrosekundi. Nasuprot tome, u čvrstim telima ova vremena su mnogo manja – zbog izuzetno jake međuatomske interakcije, koja može biti posledica simultanog dejstva nekoliko fizičkih fenomena, kreću se od desetak femtosekundi do nekoliko stotina pikosekundi [105, 106]. Zbog toga je znatno teže realizovati EIT u poluprovodničkim nanostrukturama, u širem a posebno u užem smislu, s obzirom na to da uslov (2.37) upravo zahteva mali koeficijent raspada γ_s , odnosno veliko vreme života nivoa $|3\rangle$, u oznakama korišćenim u prethodnoj Glavi. Posebno je teško naći analitički oblik ovih koeficijenata, što je, recimo, moguće u slučaju kada dekoherencija dolazi isključivo kao posledica spontane emisije.

U cilju primene poluprovodničkih sistema u realizaciji efekata o kojima je bilo reči u Glavi 2, neophodno je, dakle, suočiti se sa problemom malih vremena dekoherencije. Jedan od načina da se ovaj problem izbegne jeste hlađenje aparature do veoma niskih, *kriogenih* temperatura, o čemu će više biti reči u nastavku disertacije. Pored toga, činjenica da se u ovim sistemima ne može uvek obezbediti uslov $\gamma_s \ll \gamma$, navodi nas da sistem svetlost–materija od interesa proučavamo u AT režimu. Na taj način, čak i u sistemima sa velikim koeficijentima raspada, doći će do formiranja prozora transparentnosti i do uočljivog smanjenja grupne brzine svetlosti koja se prostire kroz sredinu sačinjenu od poluprovodničkih nanostrukture. Činjenica da je željene atomsko-koherentne efekte moguće ostvariti i u sredinama u kojima vremena dekoherencije mogu da variraju i po nekoliko redova veličine, uz već pomenuto lakše upravljanje i povezivanje sa ostatkom eksperimentalne aparature je, stoga, jedan od glavnih razloga zbog kojih je predmet proučavanja ove disertacije upravo spora i uskladištena svetlost u poluprovodničkim kvantnim nanostrukturama.

U ovoj Glavi, najpre ćemo prodiskutovati glavne osobine i tipove poluprovodničkih heterostruktura, nastalih spajanjem dva ili više poluprovodnika različitih karakteristika. Nakon toga, koncentrićaćemo se na poluprovodničke kvantne tačke, koje zauzimaju centralno mesto u istraživanju sprovedenom u disertaciji. Osvrnućemo se na nekoliko različitih načina izrade, kao i najvažnije oso-

bine kvantnih tačaka. Kako će nam to i kasnije biti od značaja, posebno ćemo diskutovati uticaj spoljašnjeg magnetnog polja, kao i nečistoća na njihovu energijsku strukturu, a daćemo i pregled istraživanja koja se bave ovom tematikom.

3.1 Poluprovodničke heterostrukture

Kretanje elektrona kroz vakuum se, prema talasno-čestičnom dualizmu, može predstaviti u formi ravnog monohromatskog talasa. Ukoliko na elektron ne deluju spoljašnje sile, njegova ukupna energija će odgovarati kinetičkoj energiji i može se zapisati kao

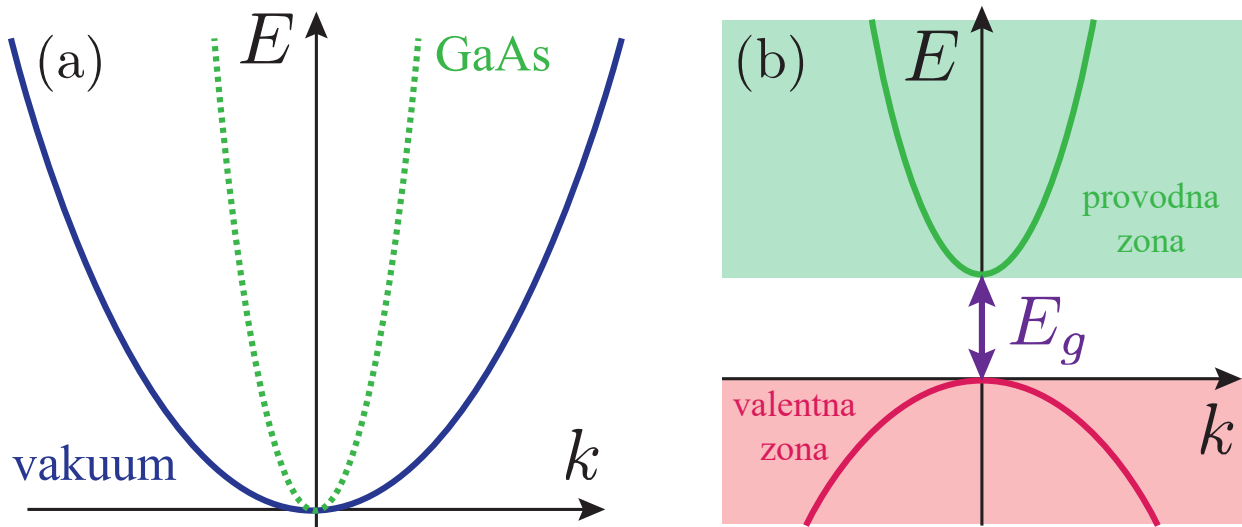
$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e}, \quad (3.1)$$

gde je \hbar redukovana Plankova konstanta, a k talasni broj. Ova veza podrazumeva da je energija neprekidna veličina, i prikazana je plavom punom linijom na slici 3.1 (a). Sa druge strane, kako će nam od interesa biti poluprovodni materijali koji se karakterišu kristalnom strukturom, od interesa je proučiti kretanje elektrona u kristalima. Naravno, ovde je situacija umnogome složenija od prethodnog slučaja, budući da elektron interaguje kako sa čvorovima kristalne rešetke, tako i sa drugim elektronima u kristalu. Međutim, pokazuje se da je i ovako složenu interakciju moguće modelovati na vrlo jednostavan način, koristeći *aproksimaciju efektivne mase*, o kojoj će više biti reči u odeljku 7.1.1. Za sada je dovoljno da napomenemo da ona podrazumeva da kretanje elektrona u kristalu može da se predstavi kao kretanje elektrona kroz vakuum, ali sa modifikovanom, *efektivnom masom* m_e^* , koja je obično i po nekoliko redova veličine manja od stvarne mase elektrona m_e (na primer, za GaAs je $m_e^* = 0.067m_e$) [107]. Energija elektrona u kristalu će, stoga, biti data izrazom

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e^*}, \quad (3.2)$$

što je grafički prikazano zelenom isprekidanom linijom na slici 3.1 (a).

Na osnovu zonske teorije poluprovodnika, znamo da se oni sastoje od dve razdvojene energijske zone [108]. U *valentnoj zoni* se nalaze vezani elektroni koji formiraju kovalentne veze između atoma u kristalu. Ukoliko dobije odgovarajuću energiju, elektron iz valentne može da pređe u *provodnu zonu*, gde može slobodno da se kreće u kristalu, na način opisan u prethodnom pasusu, i samim tim učestvuje u provođenju struje. Na njegovom mestu u valentnoj zoni tada ostaje *šupljina*, koja takođe učestvuje u provođenju. Konkretno, susedni elektron može da popuni ovo mesto (rekombinacija), pri čemu ostavlja upražnjeno mesto u tom delu poluprovodnika – efektivno, deluje kao da se šupljine kreću kroz kristal. Na slici 3.1 (b) prikazane su obe energijske zone poluprovodnika (provodna zelenom, a valentna crvenom bojom), pri čemu je, po dogovoru, za referentni nivo uzet vrh valentne zone (pošto se odnosi na šupljine, energija valentne zone se posmatra tako da raste naniže umesto naviše). Zbog toga što je efektivna masa šupljina znatno veća od efektivne mase elektrona (za GaAs je ova vrednost oko $0.6m_e$), energija elektrona će sa povećanjem talasnog broja (odnosno impulsa elektrona) brže rasti nego energija šupljina [107]. Takođe, vidimo da postoji tzv. *zabranjena zona* (obeležena ljubičastom bojom), širine E_g , sa vrednostima energije koje elektron *ne* može da ima. Ova širina ima različite vrednosti u zavisnosti od izbora poluprovodnika, i ima veliki značaj u konstrukciji poluprovodničkih heterostruktura, o kojima će u nastavku biti reči.



Slika 3.1: Zavisnost energije od intenziteta talasnog vektora (talasnog broja), za slučaj (a) elektrona koji se kreće kroz vakuum (puna plava linija) i poluprovodnik GaAs (isprekidana zelena linija), kao i (b) elektrona u provodnoj zoni (zeleno) i šupljine u valentnoj zoni (crvena linija) u GaAs [107]. Površni obojeni zelenom i crvenom bojom odgovaraju energijama koje može imati elektron u provodnoj, odnosno šupljina u valentnoj zoni, dok je sa E_g označena širina zabranjene zone. U slučaju elektrona, energija raste sa kretanjem naviše na grafiku, dok je u slučaju šupljina situacija obrnuta.

3.1.1 Masivni poluprovodnici i heterospojevi

Zaključci do kojih smo do sada došli odnose se na „obične”, tj. *masivne poluprovodnike* (engl. bulk semiconductors). U njima elektroni, ako se nađu u provodnoj zoni, mogu da se kreću u sva tri pravca, bez ograničenja. Masivni poluprovodnici se zbog toga još nazivaju i *trodimenzionim nanostrukturama* [99, 107]. Šematski prikaz masivnih poluprovodnika dat je na gornjem delu slike 3.3 (a), gde je plavom bojom prikazana oblast u kojoj nosioci naelektrisanja *mogu* da se kreću. Radi kasnijeg korišćenja, prepisimo izraz (3.2), izražavajući ga preko komponenti talasnog vektora u odnosu na koordinatne ose prikazane na slici:

$$E = \frac{\hbar^2}{2m_e^*} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \quad (3.3)$$

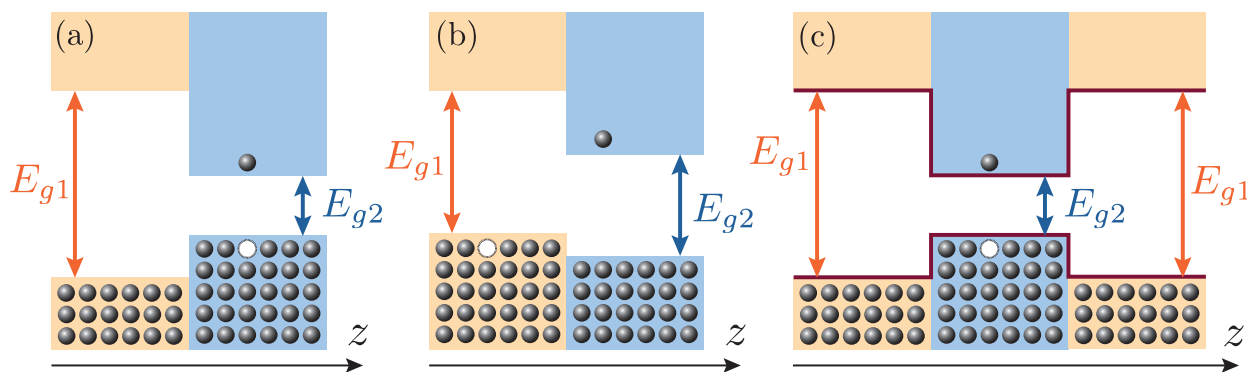
Takođe, napomenimo i to da će *gustina elektronskih stanja* u masivnom poluprovodniku (broj elektrona koji može da egzistira u materijalu u jediničnom intervalu energija), definisana izrazom

$$\rho(E) = \frac{dN}{dE}, \quad (3.4)$$

biti *neprekidna* funkcija energije (konkretno, $\rho(E) \sim \sqrt{E}$), što je prikazano na donjem delu slike 3.3 (a).

Videli smo da, u masivnim poluprovodnicima, ekscitacija elektrona iz valentne u provodnu zonu ostavlja upražnjeno mesto u valentnoj zoni – šupljinu – koja zajedno sa elektronom učestvuje u provođenju struje. U literaturi se često pod pojmom *eksciton* podrazumeva fiktivna čestica kojom se opisuje simultano kretanje elektrona i ove šupljine u kristalu, i postoji veliki broj radova u kojima je ovome posvećena posebna pažnja [109, 110]. U ovoj disertaciji će se, međutim, proučavati takve

fizičke situacije u kojima je moguće zanemariti uticaj šupljina, čime elektroni ostaju jedini nosioci naelektrisanja od značaja. Ovoj tvrdnji u prilog ide i činjenica da ćemo ekstenzivno proučavati materijale sa takvim nečistoćama koje uslovljavaju stvaranje viška elektrona u odnosu na šupljine.



Slika 3.2: Energijski dijagram (a) heterospoja u heterostrukturama tipa I, odnosno (b) heterostrukturama tipa II, kao i (c) poluprovodničke kvantne jame (u heterostrukturama tipa I). Dobijene heterostrukture nastale su spajanjem dva poluprovodnika (narandžasta i plava boja) sa energijama zabranjene zone E_{g1} i E_{g2} , respektivno. Na sobnim temperaturama, većina elektrona (crne kuglice) nalazi se u valentnim zonama oba poluprovodnika (donji deo slike) i ne učestvuje u provođenju struje. Ukoliko dobiju dovoljnu energiju, elektroni prelaze u provodnu zonu (gornji deo slike), ostavljajući pokretnu šupljinu u valentnoj zoni (beli kružići). Na slici (c), tamnocrvenom bojom je obeležena zavisnost potencijala konfiniranja elektrona (gore) i šupljine (dole) od prostorne koordinate duž koje nastupa konfiniranje [107].

Ukoliko se, odgovarajućim tehnološkim postupkom, izvrši spajanje dva poluprovodnika sa različitim širinama zabranjene zone, nastaje tzv. *heterospoj* (engl. heterojunction). Kombinovanjem više heterospojeva doći će do formiranja poluprovodničkih *heterostruktura*, pri čemu će nosioci naelektrisanja težiti da se nađu u onom poluprovodniku u kome je energija minimalna (za elektrone, to će biti što niže dno provodne zone, a za šupljine što viši vrh valentne zone). U skladu sa tim, možemo razlikovati dva tipa heterostruktura. *Heterostruktura tipa I* prikazane su na slici 3.2 (a), i u njima je položaj zona pojedinačnih slojeva poluprovodnika takav da se i elektroni i šupljine nalaze unutar istog sloja. Sa druge strane, kod *heterostruktura tipa II* elektroni zauzimaju položaje unutar jednog, a šupljine unutar drugog poluprovodnika, kao na slici 3.2 (b), što značajno povećava vremena rekombinacije u ovom slučaju [107].

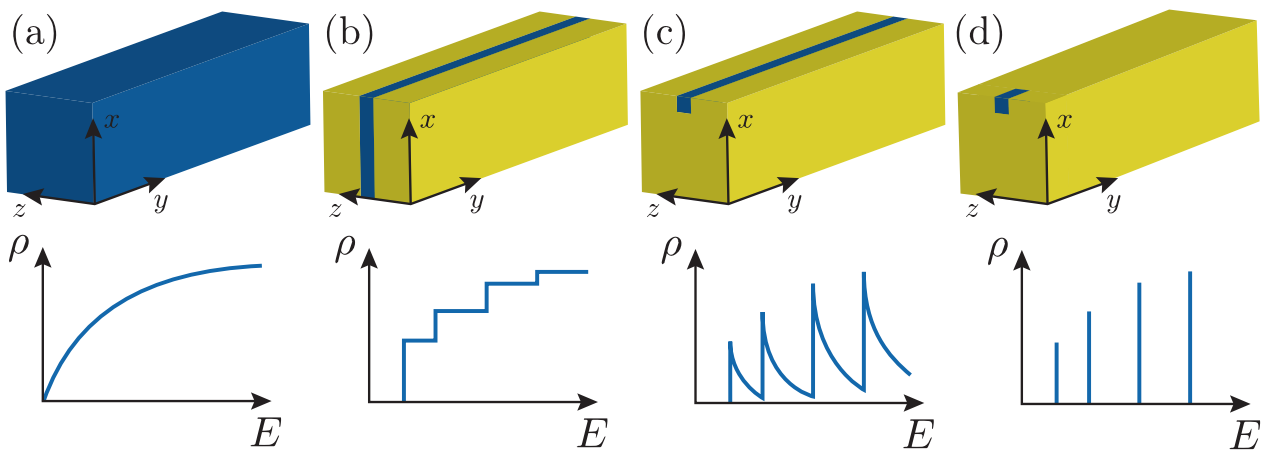
3.1.2 Kvantne jame, žice i tačke

Dakle, videli smo da je formiranjem heterospojeva moguće formirati različite poluprovodničke heterostrukture. Ukoliko se veoma tanak sloj jednog poluprovodnika „umetne” između dva sloja drugog poluprovodnika, tako odabranih da položaji njihovih energijskih zona odgovaraju onima prikazanim na slici 3.2 (c), dobićemo tzv. *kvantnu jamu* (engl. quantum well). Pošto se srednji sloj karakteriše nižom vrednošću dna provodne zone, onda će elektroni težiti da se nađu unutar ovog poluprovodnika (analogno tvrđenje važi i za šupljine) [107]. To znači da će elektron praktično biti „zarobljen”, odnosno *konfiniran* u potencijalnoj jami, čija je zavisnost potencijala od prostorne koordinate z prikazana tamnocrvenom linijom na istoj slici. S obzirom na to da je poluprovodni sloj vrlo tanak, dolaze kvantnomehantički efekti. Problem kvantne čestice u jednodimenzionoj potencijalnoj jami predstavlja dobro poznat problem kvantne

mehanike čijim rešavanjem se dobijaju *diskretne* vrednosti energije u (konfinirajućem) pravcu z-ose, dok energija u *xy*-ravni zadržava neprekidni karakter:

$$E = \frac{\hbar^2}{2m_e^*} (k_x^2 + k_y^2) + E_z^i, \quad (3.5)$$

u skladu sa odabirom koordinatnog sistema na slici 3.3. Zbog toga što je, usled konfiniranja u jednom pravcu, kretanje nosilaca naelektrisanja ograničeno na preostala *dva* nezavisna pravca, kvantne jame se nazivaju *dvodimenzionim* nanostrukturama [111]. Šematski je kvantna jama prikazana na gornjem delu slike 3.3 (b), a zavisnost $\rho(E)$ za ove sisteme ima skokovit karakter, kao što se može videti sa donjeg dela iste slike. Daljim ređanjem slojeva poluprovodnika mogu se stvarati složenije strukture poput višestrukih kvantnih jama ili *superrešetki*, a slaganjem više od dva tipa poluprovodnika može se menjati oblik potencijala konfiniranja.



Slika 3.3: Šematski prikaz (a) masivnih poluprovodnika, (b) kvantnih jama, (c) kvantnih žica i (d) kvantnih tačaka (gornje slike), zajedno sa odgovarajućim zavisnostima gustine elektronskih stanja od energije elektrona koji se nalazi u ovim objektima (donje slike) [99]. Na gornjim slikama, oblast prostora u kojoj je dozvoljeno kretanje elektrona obojena je plavom bojom (sličan zaključak važi i za šupljine, i to u heterostrukturama tipa I).

Ukoliko se postupak konfiniranja nosilaca naelektrisanja u drugim nezavisnim pravcima nastavi, mogu se dobiti nižedimenzione strukture. Tako, ukoliko se, kao na slici 3.3 (c), konfiniranje vrši duž dva pravca, kretanje nosilaca biva ograničeno samo duž *jednog* pravca. Energija će tada biti data izrazom

$$E = \frac{\hbar^2}{2m_e^*} k_y^2 + E_x^i + E_z^j, \quad (3.6)$$

gde je energija duž *y*-ose i dalje neprekidna veličina, a diskretna u preostala dva pravca. Na donjem delu slike 3.3 (c) vidimo da se gustina stanja karakteriše ostrim maksimumima između kojih $\rho(E)$ ima veoma male vrednosti. Dobijeni objekti zovu se *kvantne žice* (engl. quantum wires) i predstavljaju *jednodimenzione* nanostrukture.

Na kraju, ukoliko se konfiniranje vrši u sva tri pravca, energija nosilaca naelektrisanja će biti *diskretna* veličina,

$$E = E_x^i + E_y^j + E_z^k, \quad (3.7)$$

čime se dobijaju *nuladimensione* nanostrukture poznate pod imenom *kvantne tačke*, prikazane na gornjem delu slike 3.3 (d). Istovremeno, na donjem delu slike prikazana je zavisnost gustine stanja od energije koja je, očekivano, diskretna, odnosno sačinjena kompletno od Dirakovih delta funkcija. Zbog svoje diskretne energijske strukture koja podseća na atome, kao što je već spomenuto u Glavi 1, kvantne tačke se često nazivaju „veštačkim atomima” (engl. artificial atoms). Ova činjenica ih čini pogodnim kandidatima za realizaciju brojnih fenomena koji su se tradicionalno uglavnom manifestovali na atomima, ali sa tom razlikom da je na energijsku strukturu kvantnih tačaka moguće uticati samim načinom njihove izrade, na primer promenom dimenzija ili oblika [112]. Takođe, razlike između energijskih nivoa (energije prelaza) kvantnih tačaka se često razlikuju i za po nekoliko redova veličine u odnosu na atome, što ih čini pogodnim za primenu u sasvim drugačijem opsegu energija. Na ovaj način, laserska svetlost koja interaguje sa kvantnim tačkama može biti iz različitih oblasti elektromagnetnog spektra, što je vrlo korisno, na primer, pri konstrukciji lasera na bazi poluprovodničkih kvantnih tačaka [113].

Tabela 3.1: Broj pravaca konfiniranja \mathcal{D}_c i broj stepeni slobode (nezavisnih pravaca u kojima je moguće kretanje nosilaca naelektrisanja) \mathcal{D}_f za masivne poluprovodnike, kao i tri tipa poluprovodničkih heterostruktura [107].

Sistem	Broj pravaca konfiniranja	Broj stepeni slobode
Masivni poluprovodnik	0	3
Kvantna jama	1	2
Kvantna žica	2	1
Kvantna tačka	3	0

U tabeli 3.1 su sumirani rezultati iz ovog i prethodnog odeljka, gde su klasifikovane pobrojane nanostrukture u zavisnosti od broja konfinirajućih pravaca \mathcal{D}_c i broja stepeni slobode \mathcal{D}_f , što predstavlja broj nezavisnih pravaca u kojima nosioci naelektrisanja mogu da se kreću. Vidimo da je za sve poluprovodničke sisteme zadovoljena relacija $\mathcal{D}_c + \mathcal{D}_f = 3$ [107].

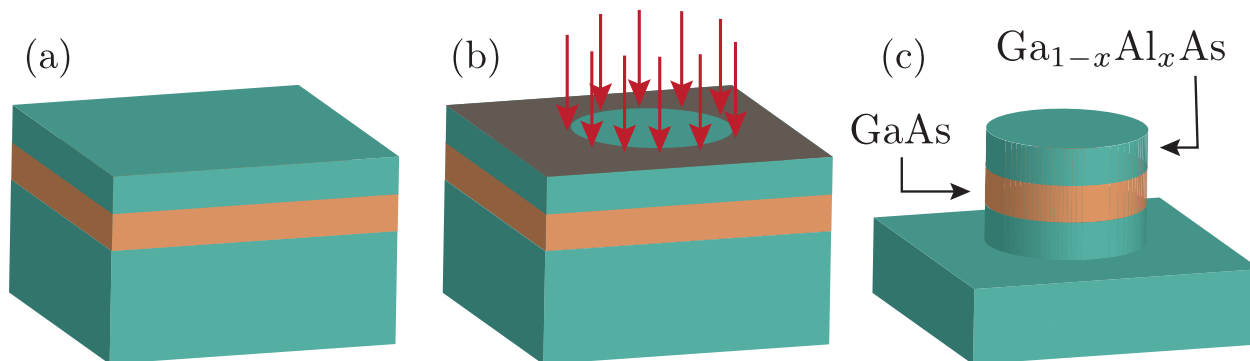
3.2 Dobijanje kvantnih tačaka

Od svih navedenih kvantnih nanostrukture, zadržaćemo se, dakle, na proučavanju interakcije svetlosti sa sredinom sačinjenom od velikog broja kvantnih tačaka, koja „zamenjuje” gasovitu sredinu sačinjenu od mnoštva atoma. U ovom poglavlju, izložićemo nekoliko najčešćih metoda za praktičnu realizaciju poluprovodničkih kvantnih tačaka. Konkretno, biće reči o litografskim tehnikama, kolidnoj sintezi i metodama samoorganizovanog narastanja kristala. Različite tehnike omogućavaju izradu kvantnih tačaka različitih oblika i dimenzija [112, 114, 115]. Kako se ove tehnike konstantno usavršavaju, sve je više povoda za još ekstenzivnije proučavanje fizičkih procesa koji se u kvantnim tačkama odvijaju.

3.2.1 Litografske tehnike za izradu kvantnih tačaka

Litografske tehnike za izradu kvantnih tačaka podrazumevaju korišćenje *snopa elektrona* (engl. electron-beam lithography) ili *holografsko oblikovanje* (engl. holograph patterning) kako bi se vršilo nagrizanje poluprovodnog materijala, ili urezivanje odgovarajućih oblika u njega [107]. Pored ovih metoda, u primeni su i optička litografija, litografija X-zraka, litografija snopova fokusiranih jona i

dr. Najčešće se kao polazni materijal koristi kvantna jama, opisana u odeljku 3.1.2, a koja je prethodno dobijena metodama narastanja kristala, o kojima će više biti reči u odeljku 3.2.3. Na slici 3.4 (a) prikazana je kvantna jama, nastala kombinovanjem dva materijala – GaAs (narandžasta) i $\text{Ga}_{1-x}\text{Al}_x\text{As}$ (tirkizna boja), pri čemu se kontrolisanjem udela aluminijuma x u drugom poluprovodniku može menjati širina njegove zabranjene zone.

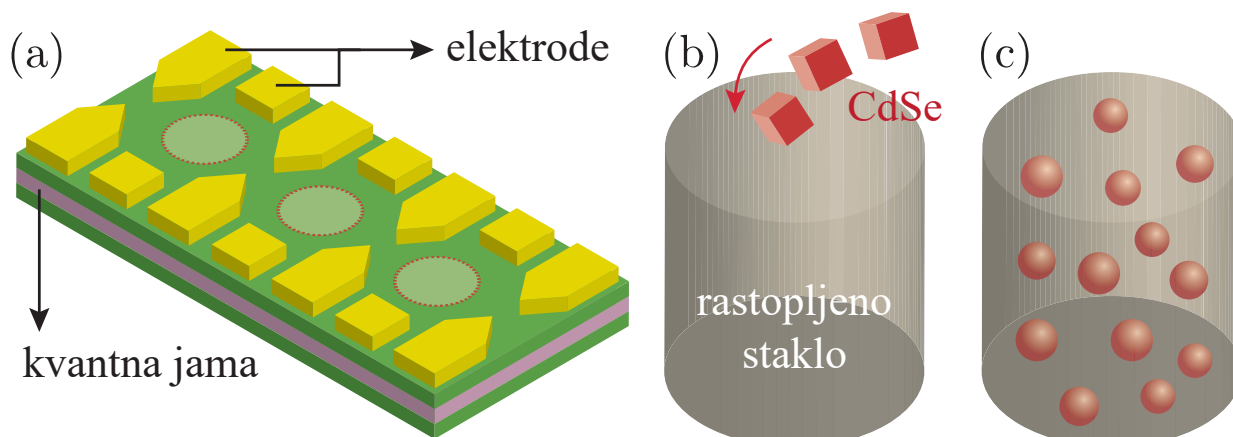


Slika 3.4: Šematski prikaz primene litografske tehnike nagrizanja materijala [107]. (a) Kvantna jama sa konfiniranjem duž samo jednog pravca, formirana umetanjem GaAs (narandžasta) u $\text{Ga}_{1-x}\text{Al}_x\text{As}$ (tirkizna boja). (b) Odstranjivanje neželjenog dela jame (siva površina) elektronskim, laserskim ili nekim drugim snopom (crvene strelice). (c) „Ostrvo” od poluprovodnog materijala kao rezultat nagrizanja kvantne jame, sa lateralnim konfiniranjem različite prirode od onog koje karakteriše polaznu kvantnu jamu.

Kvantna jama se sada podvrgava nekoj od litografskih tehnika, što je prikazano na slici 3.4 (b). Potrebno je odstraniti deo materijala u pravcima duž kojih u kvantnoj jami nema konfiniranja, i ova oblast je na slici označena sivom bojom, dok crvene strelice predstavljaju bilo elektronski, bilo laserski snop. Kao rezultat ovog odstranjivanja, dobija se „ostrvo” od početnog materijala, šematski prikazano na slici 3.4 (c). Ovako dobijena, *vertikalna* kvantna tačka, duž pravca konfiniranja kvantne jame ima iste karakteristike kao i sama jama, dok konfinirajući potencijal duž preostala dva pravca (ukoliko su, naravno, dimenzije „ostrva” dovoljno male) ima drugačiji oblik i prirodu. Napomenimo da se istim metodama mogu realizovati i kvantne žice, pri čemu se tada nagrizanje kvantne jame vrši duž samo jednog pravca. Proces izrade kvantnih tačkaka pomoću litografskih metoda predstavlja spor i zahtevan proces, ali omogućava realizaciju kvantnih tačkaka različitih veličina i oblika. Na ovaj način, moguće je dobiti kvantne tačke dimenzija do nekoliko stotina nanometara [116, 117].

Još jedna tehnika vredna pomena oslanja se na goreopisane metode i prikazana je na slici 3.5 (a). Konkretno, korišćenjem litografskih tehnika moguće je „urezati” minijaturne elektrode (žuta) na površinu kvantne jame (zelena i ružičasta boja), pri čemu su elektroni naravno konfinirani u središnjem sloju. Dovođenjem odgovarajućeg napona na ove elektrode, dolazi do nastanka prostorno modulisanog električnog polja, zbog čega dolazi do lokalizovanja elektrona u malim oblastima unutar jame (svetlozeleni krugovi uokvireni crvenom isprekidanom linijom). Ovo dodatno, lateralno konfiniranje, može se veoma dobro aproksimirati parabolom (odnosno, potencijalom dvodimenzionog linearnog harmonijskog oscilatora), zbog čega se dobijene strukture nazivaju *paraboličnim* kvantnim tačkama [118]. Konfiguracija sa slike 3.5 (a) predstavlja ilustraciju sistema koji se koristi u cilju realizacije kvantnih računara, gde se pritom elektrodama (kao i spoljašnjim magnetnim poljem) može kontrolisati i interakcija među susednim tačkama, a samim tim i efikasnost sprovedenih računskih operacija koje ovaj sistem vrši [119]. Pored toga, kontrolom napona na elektrodama moguće je obezbediti da, u svakoj od ovih tačkaka, u proizvoljnom trenutku egzistira tačno određeni

broj elektrona, što je takođe izuzetno važno prilikom ispitivanja provodnih, transportnih, optičkih i drugih karakteristika [99].



Slika 3.5: (a) Šematski prikaz realizacije paraboličnih kvantnih tačaka – pomoću elektroda (žuta boja) postavljenih na gornjem sloju poluprovodničke kvantne jame, obezbeđuje se lateralno konfiniranje elektrona u oblastima obojenim svetlozelenom bojom i ograničenim crvenom isprekidanom linijom, sa paraboličnim potencijalom konfiniranja [120]. (b) Prikaz formiranja koloidnih smeša ubacivanjem poluprovodnih materijala u rastopljeni silikat, nakon čega se (c) formiraju kvantne tačke sfernog oblika sa velikom pravilnošću [112].

3.2.2 Kvantne tačke u koloidnim rastvorima

Za razliku od litografskih tehnika, *hemijska sinteza* predstavlja veoma brz i jeftin način realizacije kvantnih tačaka, što je veoma pogodno za njihovu masovnu proizvodnju. Ona podrazumeva formiranje tzv. *koloidnih smeša*, u kojima se, za razliku od običnih rastvora, koloidne komponente nalaze u različitim agregatnim stanjima. Prva realizacija kvantnih tačaka je upravo izvedena na ovaj način, kada je Roksbi 1932. godine u rastopljeno staklo „uronio” poluprovodni nanomaterijal (CdSe) [121], što je šematski prikazano na slici 3.5 (b). Nakon toga je u smeši došlo do formiranja pravilnih struktura (slika 3.5 (c)), čija su kvantno konfinirajuća svojstva kasnije i eksperimentalno potvrđena [122].

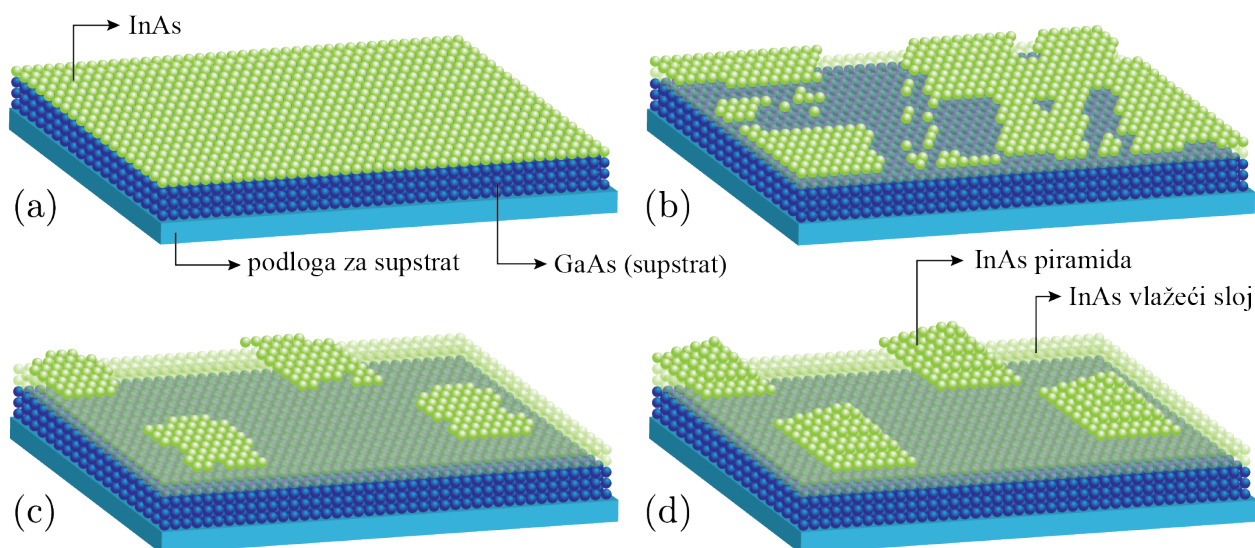
Koloidnom sintezom se, dakle, mogu formirati klasteri sa skoro savršenom kristalnom strukturom koja se može sastojati od nekoliko desetina do nekoliko hiljada atoma. Ovi tzv. *nanokristali* ili *koloidne kvantne tačke* mogu biti realizovane u različitim oblicima, kao i od različitih materijala (obično se koriste sulfidi i selenidi, konkretno CdSe, PbSe, PbS i ZnS) [123]. Ova metoda je najpogodnija za izradu *sfernih kvantnih tačaka*, budući da je „uranjanjem” poluprovodnika u tečni rastvarač moguće obezbediti visok stepen sferne simetrije, što je obično znatno teže kod drugih metoda. Na ovaj način, realizovane su kvantne tačke dimenzija svega nekoliko nanometara, koje emituju svetlost u vidljivom i infracrvenom delu spektra [115]. U slučaju veoma malih klastera, moguća su odstupanja od sferne simetrije i formiranje *elipsoidnih kvantnih tačaka*, ili tačaka raznih nepravilnih oblika.

Kako bi se povećala stabilnost ovakvih koloida i sprečilo sakupljanje i spajanje kvantnih tačaka, kao i formiranje neželjenih hemijskih veza sa rastvaračem, često se koriste nanokristali pokriveni organskim molekulima (ligandima), ili poluprovodnici sačinjeni od jezgra i ljuske, koja ima veću energiju zabranjene zone i time povećava potencijal konfiniranja. Nakon formiranja, ovako reali-

zovane kvantne tačke se mogu izvaditi iz rastvarača, osušiti i deponovati na supstrate od drugih materijala, ili ugraditi u uređaje koji služe kao fotočelije ili biomarkeri [107].

3.2.3 Samosastavljene kvantne tačke

Važno mesto u teorijskim i eksperimentalnim proučavanjima poluprovodničkih nanostruktura imaju i *samosastavljene kvantne tačke* (engl. self-assembled quantum dots), čija je praktična realizacija prikazana na slici 3.6 za slučaj kombinacije InAs i GaAs (druge kombinacije poluprovodnika mogu biti, na primer, Si/Ge, InGaAs/GaAs ili InP/InGaP) [112]. U cilju formiranja ovih tačaka, koriste se metode *epitaksijalnog narastanja* kristala (engl. epitaxial growth methods), koje zahtevaju veliku preciznost i stoga su veoma skupe. Epitaksija molekularnog snopa (engl. molecular beam epitaxy) je jedna od epitaksijalnih metoda koja se zasniva na deponovanju monoatomske slojeva kristala na odgovarajuću podlogu [124]. Tako se, najpre, u slučaju na slici 3.6 (a), ultračisti atomi galijuma i arsena odvojeno zagrevaju dok ne počnu da isparavaju. Snop ovih para onda biva usmeren na podlogu (na slici označena svetloplavom bojom), nakon čega se formiraju veoma tanki (monoatomske) slojevi GaAs sa praktično savršenom kristalnom strukturom. Da bi se postigla ovakva struktura, čistoća pojedinačnih atoma mora biti veoma velika, što se postiže radom u ultravisokom vakuumu [115].



Slika 3.6: Šematski prikaz formiranja samosastavljenih kvantnih tačaka [107, 115]. (a) Na podlogu (svetloplava) je najpre deponovan dovoljno debeo sloj GaAs (plava), nakon čega se, sloj po sloj, nanosi InAs (zelena boja). Formiranje slojeva InAs je najpre (b) dvodimenziono, da bi potom došlo do (c) stvaranja trodimenzionih struktura. (d) Na kraju postupka, uočavaju se formirana „ostrva” InAs u obliku piramida, ispod kojih je ostao „vlažeći sloj” od istog materijala.

Nakon što se obezbedi odgovarajuća debljina sloja supstrata (tamnoplava boja), nastavlja se sa deponovanjem sloja InAs (zelena boja na slici), sa nešto drugačijom konstantom kristalne rešetke od GaAs. Zbog toga se javlja naprezanje među atomima kristalne rešetke u gornjem sloju, kao težnja da prate strukturu supstrata, čiji sloj je dovoljno debeo da ne trpi značajne modifikacije u strukturi [107]. Dodavanjem novih slojeva InAs, narastanje kristala je najpre ravnomerno, odnosno dvodimenziono, kao što je prikazano na slici 3.6 (b). Međutim, kada se dostigne odgovarajuća kritična vrednost debljine gornjeg sloja (za ovu kombinaciju poluprovodnika, kritična debljina se postiže

za sloj InAs debljine oko 1.5 monoatomskih slojeva [99]), naprezanje postaje takvo da dvodimenziono narastanje prelazi u trodimenziono, što se vidi na slici 3.6 (c). Daljim narastanjem kristala dolazi do formiranja „ostrva” od deponovanog materijala, koja najčešće imaju piramidalan, konusni ili (polu)sferan oblik, da bi ispod njih ostao tanak „vlažeći sloj” (engl. wetting layer), kao na slici 3.6 (d). Ove strukture se zatim prekrivaju slojem supstrata, nakon čega su kvantne tačke spremne za korišćenje.

Kvantne tačke nastale samoorganizovanim narastanjem kristala odlikuju se izuzetnom uniformnošću, što je veoma bitno za dalji tok disertacije, budući da se naš teorijski model bazira na pretpostavci da su kvantne tačke sa kojima svetlost interaguje međusobno identične. Varijacije u njihovim dimenzijama kreću se maksimalno do 10% [99]. Takođe, od velike važnosti za potencijalne primene je i činjenica da samosastavljene kvantne tačke mogu imati dimenzije od svega nekoliko nanometara, za razliku od onih dobijenih veštačkim tehnikama diskutovanim u odeljku 3.2.1 [125, 126]. Tako su realizovane *piramidalne* kvantne tačke visine 6 nm sa kvadratnom osnovom dužine 12 nm [127], odnosno visinom 3 nm i dužinom 24 nm [128], kao i kvantne tačke oblika sočiva (*polusferne* kvantne tačke) sa visinom i dužinom osnove 5 nm i 20 nm [129], odnosno 0.7 nm i 20 nm [130], respektivno. Od velikog značaja za ovu disertaciju su i elipsoidne samosastavljene kvantne tačke, koje su realizovane deponovanjem slojeva InAs, dopiranog atomima mangana, na supstrat od GaAs [131–133]. Dobijene kvantne tačke odlikuju se visinom od nekoliko nanometara, i dužinom reda nekoliko desetina nanometara. Nečistoća se u njima ponaša kao akceptor, čiji spin interaguje sa spinom konfinirane šupljine, što ima nezanemarljive posledice na magnetna svojstva ovih sistema. Na kraju, naglasimo da su eksperimentalno dobijene i kvantne tačke sa oblikom koji se menja nakon nanošenja gornjeg sloja supstrata [134, 135].

3.3 Najznačajnije karakteristike i primene kvantnih tačaka

Decenijama unazad, kvantne tačke predstavljaju veoma perspektivno polje istraživanja, kako fundamentalnog, tako i praktičnog karaktera. Mnoštvo različitih tehnoloških postupaka njihove izrade omogućava dobijanje kvantnih tačaka raznih veličina i oblika, što je pokazano u prethodnoj Glavi. Posebno je važna činjenica da se, za razliku od atoma, energijska struktura kvantnih tačaka može *kontrolisano menjati* na više načina, pre svega variranjem njihovih dimenzija, odnosno promenama u potencijalu konfiniranja. Tada će energija prelaza, kao i matrični elementi operatora električnog dipolnog momenta, zavisiti od veličine kvantne tačke, što omogućava izradu kvantnih tačaka koje stvaraju ili interaguju sa elektromagnetnim poljima u velikom opsegu energija. Naravno, kao i kod atoma, moguća je dodatna kontrola osobina ovih nanostrukture primenom spoljašnjeg *magnetnog polja*.¹ Na kraju, napomenimo još i to da će prisustvo *nečistoća* u kristalu takođe bitno uticati na karakteristike poluprovodničkih kvantnih tačaka, zbog čega će i ovo pitanje biti detaljnije razmotreno u nastavku rada.

Svojstva kvantnih tačaka različitih sastava, veličina i oblika, ispitivana su od strane velikog broja autora [136, 137]. Elektronska svojstva su, tako, eksperimentalno proučavana pomoću jednodimenzionalne kapacitivne spektroskopije [138], efekta tunelovanja [139], transportne spektroskopije [140], magnetospektroskopije u dalekom infracrvenom delu spektra [141], Ramanove spektroskopije [142] i drugih metoda. Proučavanjem transportnih svojstava kvantnih tačaka pokazano je, takođe, da se spoljašnjom kontrolom (na primer, priključivanjem heterostrukture na izvor napona)

¹ Slično tvrđenje važi i za izlaganje razmatranih sistema dejstvu spoljašnjeg *električnog* polja, premda ova tematika izlazi iz okvira disertacije.

može obezbediti konfiniranje *tačno jednog* ili proizvoljnog broja elektrona u kvantnoj tački, što je od izuzetnog značaja za praktične primene [143]. Proučavanja kvantnih tačaka proširena su i na složenije strukture, pa tako postoje istraživanja koja se bave proučavanjem korelacionih efekata između susednih kvantnih tačaka [144], koji postaju veoma značajni u kvantnom računarstvu, gde primenu najčešće nalaze parabolične kvantne tačke [119, 145]. Takođe, značajno mesto među dostignućima u ovoj oblasti zauzimaju i rezultati koji se tiču „veštačkih molekula” (dvostrukih kvantnih tačaka) [146], kvantnih antitačaka [147] i kvantnih koralala [148].

Pored činjenice da je veliki napredak učinjen po pitanju proučavanja fundamentalnih svojstava kvantnih tačaka, i da su razvijene brojne teorijske metode za njihovo precizno tretiranje, velika pažnja usmerena je na potencijalne primene ovih objekata u raznim oblastima. Jedna od prvih praktičnih primena bila je u izradi filtera za boju, gde su koloidne kvantne tačke vrlo brzo našle svoje mesto u komercijalnoj upotrebi [112]. Pored toga, zbog unikatne energijske strukture koja se lako može kontrolisati načinom izrade, koloidne kvantne tačke se koriste i kao *fluorescentni markeri*, za izradu boja u tačno određenom delu spektra, kao i u oblasti zaštite podataka [115]. Pored toga, ovi objekti našli su primenu i u biomedicini, gde se njihovim „kačenjem” za mikroorganizam omogućava njegovo praćenje i posmatranje optičkim mikroskopom, zahvaljujući svetlosti koju emituju. Kvantne tačke tako mogu veoma dobro zameniti organske fluorescentne markere, koji se odlikuju manjom stabilnošću i nemogućnošću jednostavnog podešavanja emisionog spektra [115].

Jedna od najčešćih primena kvantnih tačaka leži u izradi *lasera zasnovanih na kvantnim tačkama*. Zbog emisionog spektra koji se lako može menjati promenom dimenzija, kvantne tačke predstavljaju odlične kandidate za konstrukciju lasera koji emituju svetlost talasnih dužina u veoma velikom opsegu, sa vrednostima koje se znatno razlikuju od onih karakterističnih za konvencionalne lasere, bazirane na atomima i molekulima [113]. Prvi put se ova ideja spominje tokom osamdesetih godina dvadesetog veka, i slična je ideji lasera sa kvantnom jamom – razlika je u tome što se, umesto superrešetke, koristi sloj kvantnih tačaka zatvoren u talasovodu. Glavna prednost lasera zasnovanih na kvantnim tačkama leži u činjenici da se na ovaj način značajno snižava struja praga za stimulisanu emisiju, i povećava stabilnost lasera u odnosu na promene temperature [115]. Ovo je, na primer, izvedeno sa uređenim nizom samosastavljenih kvantnih tačaka dimenzija oko 10 nm i velike površinske gustine (veće od 10^{11} cm^{-2}) [112]. Kontrola broja nosilaca naelektrisanja se onda može obezbediti uključivanjem spoljašnjeg električnog i/ili magnetnog polja.

Veliki značaj kvantne tačke imaju i u nanoelektronici i optoelektronici, za izradu *fotonaponskih ćelija* [115]. Pored toga, već smo pomenuli da se parabolične kvantne tačke pojavljuju kao ozbiljni kandidati za izradu budućih kvantnih računara zasnovanih na spinu nosilaca naelektrisanja. Konkretno, one predstavljaju jedan od mogućih fizičkih načina realizacije kvantnog bita ili *kubita* (engl. qubit), koji predstavlja osnovnu jedinicu kvantne informacije, i može imati, po analogiji sa klasičnim bitom, vrednosti 0 ili 1, ali i ma koju *superpoziciju* ovih stanja. Los i Di Vincenco predložili su da ulogu kubita igra spin elektrona u kvantnoj tački, i proučavali kako promena tunelujuće barijere između dve susedne kvantne tačke utiče na obavljanje kvantnih logičkih operacija [119]. Takođe, pokazano je da, u cilju efikasne primene u sprovođenju kvantnog računanja, kvantne tačke, kao uostalom i drugi kandidati za kubite, moraju da zadovoljavaju niz kriterijuma, čemu se takođe posvećuje kako teorijska, tako i eksperimentalna pažnja [149].

3.3.1 Optičke karakteristike sfernih kvantnih tačaka

U nastavku disertacije će nam prevashodno od značaja biti *optičke* karakteristike kvantnih tačaka, koje se manifestuju kao rezultat njihove interakcije sa laserskim poljima [114]. Tako su, na primer,

brojna teorijska istraživanja posvećena proučavanju energijske strukture i optičkih svojstava elipsoidnih [150, 151], kubičnih [152] i diskoliki kvantnih tačaka [153]. Takođe, proučavane su diskolike kvantne tačke u kojima je konfiniranje modelovano Vuds-Saksonovim potencijalom [154, 155], a posebna pažnja posvećena je efektu spoljašnjih električnih i magnetnih polja na optička svojstva kvantnih tačaka [156–158].

Među kvantnim tačkama raznih oblika i načina realizacije, veliki broj kako teorijskih, tako i eksperimentalnih radova posvećen je proučavanju *sfernih* kvantnih tačaka (SKT). Kao što je već rečeno, SKT se najčešće realizuju u koloidnim smešama, gde se sferna simetrija ostvaruje sa veoma velikom efikasnošću, dok je, mada relativno skup i zahtevan, u principu moguć i proces nastanka samosastavljenih sfernih kvantnih tačaka. Imajući u vidu jednostavnu izradu, veliku zastupljenost u naučnoj literaturi, kao i sfernu simetriju koja olakšava teorijska izračunavanja, u ovoj disertaciji će se celokupno istraživanje upravo bazirati na poluprovodničkim SKT. Treba napomenuti da se dobijeni rezultati u principu mogu dobiti i na kvantnim tačkama drugih oblika, što je jedan od pravaca u kome bi moglo ići naše buduće istraživanje.

Optičke karakteristike sfernih kvantnih tačaka (jačine oscilatora, koeficijenti apsorpcije i promene indeksa prelamanja) detaljno su proučavane od strane velikog broja autora, uglavnom modelovanjem interakcije svetlost–materija pomoću sistema sa dva ili više nivoa, i korišćenjem formalizma matrice gustine [159–161]. Kirak i saradnici proučavali su uticaj magnetnog polja na koeficijente apsorpcije i promene indeksa prelamanja SKT, modelovane paraboličnim potencijalom konfiniranja [162]. Čakir je sa saradnicima proučavao linearne i nelinearne koeficijente apsorpcije za SKT, i diskutovao značaj nelinearnih efekata koji se javljaju u interakciji SKT sa laserskom svetlošću [163]. Treba, na kraju, napomenuti i rezultate koji se tiču interakcije sfernih kvantnih tačaka sa spoljašnjim električnim i magnetnim poljima, kao i posledice ove interakcije na linearne i nelinearne optičke karakteristike od interesa [164–166].

3.3.2 Kvantne tačke u spoljašnjem magnetnom polju

U prethodnom odeljku smo istakli značaj uticaja spoljašnjih (električnih i magnetnih) polja na optičke karakteristike kvantnih tačaka. Među njima, u daljem toku disertacije će nam od velike važnosti biti proučavanje uticaja spoljašnjeg stacionarnog *magnetnog* polja na energijsku strukturu SKT, kao i na prostiranje svetlosti kroz SKT. Kao što je poznato, atomi u magnetnom polju trpe cepanje energijskih nivoa usled Zemanovog efekta, što je slučaj i sa kvantnim tačkama kao „veštačkim atomima” [167, 168]. U ovom odeljku, posvetićemo se definisanju veličina koje su posledica postojanja magnetnog polja u kvantnim tačkama, i koje će nam biti od značaja u analizi dobijenih rezultata u Glavi 8. Ovu proceduru izvršićemo na primeru paraboličnih kvantnih tačaka, mada se veoma slični zaključci mogu dobiti i za kvantne tačke drugih dimenzija [99].

Problem elektrona u kvantnoj tački sa paraboličnim potencijalom u prisustvu spoljašnjeg magnetnog polja je još 1928. godine rešio Fok [169], a nešto kasnije i Darvin [170]. Otprilike u isto vreme, Landau je proučavao isti problem u odsustvu konfinirajućeg potencijala [171], što je dovelo do formulisanja termina *Landauovi nivoi*. Na ovom mestu je zgodno uporediti ova dva rezultata, tj. Landauove sa tzv. *Fok-Darvinovim nivoima* (FD nivoi). Krenimo od potencijala konfiniranja, koji je za slučaj paraboličnih kvantnih tačaka, opisanih u odeljku 3.2.1, dat sledećim izrazom:

$$V(x, y) = \frac{1}{2} m_e^* \omega_0 (x^2 + y^2), \quad (3.8)$$

gde ω_0 predstavlja parametar konfiniranja, i gde u pravcu z -ose konfiniranje odgovara onom za originalnu kvantnu jamu, za koju pretpostavljamo da ima beskonačno visoke zidove. Na ovom mestu

nećemo prikazivati detaljnu proceduru rešavanja svojstvenog problema kvantne tačke, samo ćemo navesti vrednosti energije kvantne tačke dobijene ovom procedurom. Može se, dakle, pokazati da se FD nivoi karakterišu energijama

$$E_{nl} = (2n + |l| + 1)\hbar\Omega - \frac{1}{2}l\hbar\omega_c, \quad (3.9)$$

gde je $n = 0, 1, 2, \dots$ radialni, a $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ azimutalni kvantni broj, i gde je

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{4}\omega_c^2 + \omega_0^2}. \quad (3.10)$$

U gornjim izrazima, veličina

$$\omega_c = \frac{eB}{m_e^*c} = \frac{\hbar}{m_e^*l_B^2} \quad (3.11)$$

predstavlja *ciklotronsku frekvenciju*, dok je *magnetna dužina*

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}} \quad (3.12)$$

veličina koja karakteriše dimenzije oblasti u kojoj se elektron može naći usled dejstva magnetnog polja. Vidimo da je ova vrednost manja što je primenjeno magnetno polje veće, što znači da jača magnetna polja dovode do lokalizacije elektrona u manjem delu prostora unutar atoma ili kvantne tačke.

Neke interesantne osobine energijskog spektra vidljive su posmatranjem graničnih slučajeva. Tako, ukoliko je $B = 0$, ciklotronska frekvencija je takođe jednaka nuli, pa će se izraz (3.9) svesti na

$$E_{nl} = (2n + |l| + 1)\hbar\omega_0, \quad (3.13)$$

i energija elektrona, koji se sada može naći u ma kom delu prostora jer je $l_B \rightarrow \infty$, u potpunosti je određena potencijalom konfiniranja. Sa druge strane, u slučaju jakih magnetnih polja, sledi da je $\omega_c \gg \omega_0$, nakon čega ćemo za energiju elektrona, u slučaju nivoa sa $l \geq 0$, imati

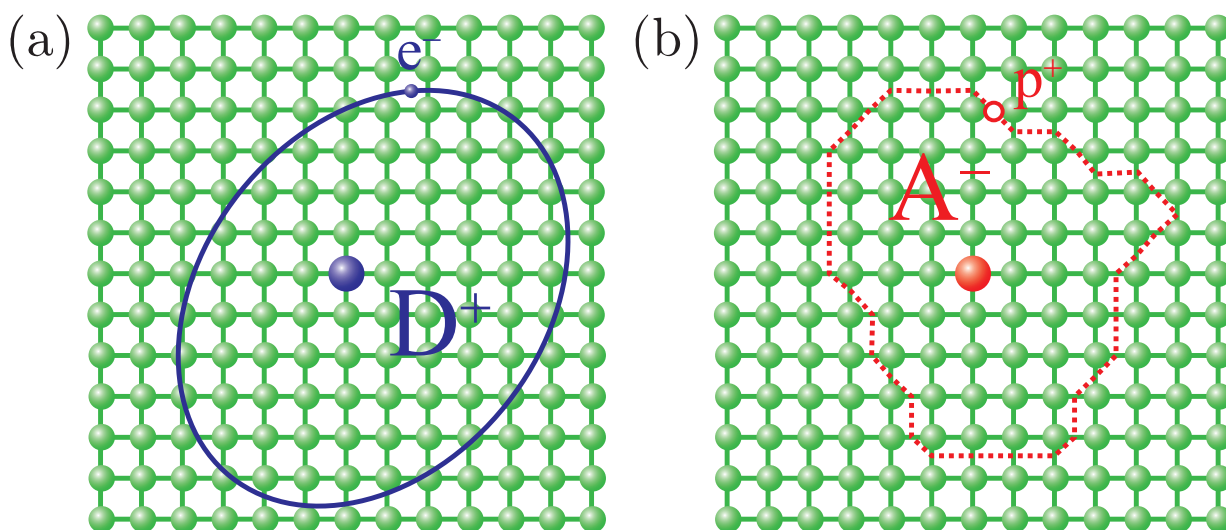
$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c. \quad (3.14)$$

Dakle, u slučaju jakih magnetnih polja, elektron praktično ne oseća dejstvo konfinirajućeg potencijala, i njegova energija u slučaju pozitivnih vrednosti azimutalnog kvantnog broja ne zavisi od l , što je u suprotnosti sa slučajem za $B = 0$ u kome ona linearno raste sa ovom vrednošću. Nasuprot tome, stanja sa $l < 0$ biće okarakterisana veoma velikim vrednostima energije.

Na kraju, sumirajmo rezultate ilustrovane izrazima (3.9), (3.13) i (3.14). U slučaju slabih magnetnih polja, takvih da je magnetna dužina veća ili uporediva sa karakterističnim dimenzijama konfinirajućeg potencijala, doći će do *hibridizacije* Landauovih nivoa sa nivoima koji su posledica prostornog konfiniranja. Sa porastom magnetnog polja dolazi i do smanjenja magnetne dužine, koja postaje mnogo manja od radijusa konfiniranja. U tom slučaju, elektron je lokalizovan u vrlo malom prostoru unutar kvantne tačke, zbog čega ne oseća dejstvo konfinirajućeg potencijala. Tada se energijski nivoi elektrona poklapaju sa Landauovim nivoima, karakterističnim za slobodan elektron (u magnetnom polju). Dakle, sa promenom jačine magnetnog polja dolazi do postepenog prelaza iz *prostorne* u *magnetnu kvantizaciju*, koji zavisi od odnosa između dimenzije kvantne tačke (koju karakteriše radijus konfiniranja) i magnetne dužine l_B . Tako se, primera radi, u kvantnim tačkama dimenzija oko 10nm, Landauovi nivoi formiraju pri vrednostima jačine magnetnog polja od oko 40T [99]. Ponašanje opisano u ovom odeljku karakteristično je ne samo za parabolične, već i za kvantne tačke različitih oblika, uključujući i SKT kojima ćemo se u ovoj disertaciji praktično isključivo baviti.

3.3.3 Uticaj nečistoća na optička i druga svojstva kvantnih tačaka

Tehnološki postupci koji su omogućili *dopiranje* čistih poluprovodnika pokazali su se kao ključni u primeni poluprovodnika u izradi elektronskih komponenti, bez kojih je nemoguće zamisliti funkcionisanje savremenog sveta [108]. Tako se, dopiranjem kristala atomima *nečistoće*, koji imaju elektron viška u odnosu na potreban broj elektrona za formiranje hemijske veze, postiže da se ovi atomi lako jonizuju, predajući svoj „prekobrojni” elektron kristalu, koji pritom postaje slobodan (slika 3.7 (a)). Ovi atomi se nazivaju *donorima*, i sačinjavaju dobro poznate poluprovodnike p-tipa. Nasuprot tome, ukoliko atom nečistoće ima elektron manje u odnosu na neophodan broj elektrona za formiranje veze, on veoma lako prima elektron iz susedne veze, ostavljajući šupljinu na tom mestu, koja dalje nastavlja „kretanje” kroz kristal (slika 3.7 (b)). U ovom slučaju, atomi nečistoće predstavljaju *akceptore*, a poluprovodnici u čiji sastav ulaze nazivaju se poluprovodnicima n-tipa. U oba slučaja, dolazi do stvaranja viška provodnih elektrona ili šupljina, u zavisnosti od tipa poluprovodnika, što doprinosi drastično povećanoj provodnosti poluprovodnika. Dopirani poluprovodnici već na sobnim temperaturama mogu imati veliki broj elektrona u provodnoj, odnosno pokretnih šupljina u valentnoj zoni. Takođe, dopiranje različitih oblasti istog kristala donorima različitog tipa dovodi do formiranja p-n spoja, koji predstavlja osnovu prvog, bipolarnog tranzistora.



Slika 3.7: Šematski prikaz (a) pozitivno naelektrisanog donora D^+ (veliki plavi krug) i (b) negativno naelektrisanog akceptora A^- (veliki crveni krug) u masivnom poluprovodniku, čiji su atomi predstavljeni zelenim krugovima, a međuatomske veze zelenim linijama [107]. Na slici (a) elektron nečistoće (mali plavi krug) postaje slobodan i nastavlja da se kreće u kristalu po nekoj putanji (plava puna linija). Na slici (b) se, usled manjka elektrona, rekombinuju susedni elektroni i šupljine, što se manifestuje kao kretanje šupljina (mali šuplji crveni krug) kroz kristal (crvena isprekidana linija).

Značajno mesto među nečistoćama zauzimaju tzv. *vodonične* nečistoće, koje se baziraju na dopiranju poluprovodnika atomima vodonika određenim tehnološkim postupcima [172, 173]. One se često koriste u izradi integrisanih kola, za pasivizaciju defekata na graničnim površinama dva poluprovodnika, odnosno električno aktivnih nečistoća [174, 175]. Sa jedne strane, vodonične nečistoće mogu nastati slučajno, usled procesa narastanja kristala, opisanog u prethodnom poglavlju, kao neželjeni efekat prisustva para molekula koji u sebi sadrže atome vodonika. Sa druge strane, kristali

se, na primer, mogu dopirati vodonikom izlaganjem materijala vodoničnoj plazmi nastaloj radio-frekventnim ili mikrotalasnim pražnjenjem na temperaturama od 150 do 300°C [176], ili procesom žarenja (engl. annealing) u gasu koji se nalazi u procesu formiranja [177]. Vodonik se gotovo nikada u poluprovodniku i izolatoru ne nalazi u elektroneutralnom stanju. U zavisnosti od situacije, on ili predaje svoj elektron i postaje pozitivno naelektrisan jon, primajući na sebe ulogu donora, ili prima dodatni elektron i postaje negativan, čime postaje akceptor. Izračunavanja u slučaju silicijuma su pokazala da se vodonik ponaša kao donor u poluprovodnicima p-tipa [178, 179], odnosno kao akceptor u poluprovodnicima n-tipa, što je dalje generalizovano i na materijale poput GaAs, ZnSe i GaN [180], potvrđujući da je reč o fundamentalnoj osobini interakcije vodonika sa poluprovodnicima.

Pojam vodoničnih nečistoća u kvantnim tačkama, o kojima će u ovoj disertaciji biti reči, neraskidivo je povezan sa pojmom *konfiniranog atoma vodonika*. Naime, model prostorno konfiniranog atoma vodonika je najpre iskorišćen kako bi se objasnila polarizabilnost vodonika pod pritiskom [181], a potom je našao široku primenu u astrofizici, atomskoj i molekularnoj fizici, fizici plazme i fizici čvrstog stanja [182, 183]. Posebnu pažnju je ovaj model privukao pri objašnjavanju osobina atoma unutar molekula fulerena [184], kao i unutar poluprovodničkih heterostruktura [185, 186]. Tako se pokazalo se da se nečistoća u poluprovodničkoj kvantnoj tački može tretirati kao konfiniran atom vodonika, čiji će se energijski nivoi modifikovati usled postojanja konfinirajućeg potencijala [187, 188]. Ovo je činjenica koja će imati veliki značaj u nastavku disertacije. Osobine kvantne tačke sa vodoničnom nečistoćom, sa kojima smo odabrali da radimo, moći će po analogiji da se odrede i sa atomom vodonika konfiniranim u drugim fizičkim sistemima, što rezultatima disertacije daje odgovarajuću širinu, čineći ih primenljivim i na druge oblasti fizike.

Efekat vodoničnih nečistoća na optičke karakteristike kvantnih tačaka je takođe detaljno proučavan. Guo i saradnici su, tako, istraživali optička svojstva cilindričnih kvantnih tačaka sa vodoničnom nečistoćom smeštenom u centru tačke [189]. Pored toga, Boičuk i saradnici koristili su linearni varijacioni i Ricov varijacioni metod kako bi izračunali energije vodonične nečistoće koja je pomerena iz centra SKT, u cilju proučavanja uticaja ovog pomeranja i polarizacionih naelektrisanja na optička svojstva kvantne tačke [190]. Energije, jačine oscilatora, kao i statičke i dinamičke polarizabilnosti sistema sa vodoničnom nečistoćom, takođe su računane u velikom broju radova [191–195].

Predmet proučavanja ove disertacije biće, dakle, interakcija svetlosti sa sfernom kvantnom tačkom sa *centriranom* vodoničnom nečistoćom, koja se još može podvrgnuti i dejstvu spoljašnjeg stacionarnog magnetnog polja. Pretpostavićemo da se potencijal konfiniranja može modelovati sferom sa beskonačno visokim zidovima, što odgovara situaciji kada se jedan poluprovodnik „uroni” u dielektrik, ili poluprovodnik sa mnogo većom širinom zabranjene zone. Ovaj problem rešen je analitički za sferno-simetrični slučaj, kada nema magnetnog polja [196]. Tada će se potencijal koji oseća elektron sastojati od zbira konfinirajućeg i privlačnog Kulonovog potencijala, a radijalna funkcija elektrona biće data preko konfluentne hipergeometrijske (Kumerove) funkcije. U prisustvu magnetnog polja, međutim, dolazi do narušavanja sferne simetrije i problem mora da se rešava numerički. U tu svrhu, primenićemo tzv. metod Lagranževe mreže, koji će detaljnije biti objašnjen u poglavlju 7.2.

4 Motivacija za proučavanje prostiranja svetlosti u sfernim kvantnim tačkama

U prethodnim glavama, definisali smo osnovne pojmove i veličine koje će nam biti od značaja u daljem radu, i dali objašnjenje fizičkih principa na kojima će biti zasnovano celokupno istraživanje prikazano u disertaciji. Naveli smo i niz referenci u kojima su eksperimentalno realizovani atomsko-koherentni efekti od interesa sa jedne, i poluprovodničke heterostrukture sa druge strane. Već sama široka zastupljenost pomenutih pojmova u naučnoj literaturi nameće zaključak da potencijal za nastavak istraživanja u ovim dvema oblastima nipošto nije mali. Uporedo sa time, motivaciju za proučavanje poluprovodničkih sfernih kvantnih tačaka sa vodoničnom nečistoćom izložili smo detaljno u Glavi 3. Na ovom mestu, istaći ćemo u čemu je značaj proučavanja sistema sa lestvičastom konfiguracijom u kontekstu problema kojim se bavimo, sa osvrtom na specifične sprežuće šeme svetlosti i materije. Pored toga, posebnu pažnju posvetićemo primenama spore i uskladištene svetlosti, što naravno predstavlja jedan od presudnih faktora za sprovođenje ovog istraživanja uopšte.

4.1 Sistemi sa lestvičastom konfiguracijom

Glavna motivacija za rad sa sistemima koji se odlikuju lestvičastom konfiguracijom leži u izboru materijalne sredine sa kojom svetlost interaguje. Naime, kao što ćemo pokazati u Glavi 8, SKT se odlikuju takvom strukturom energijskih nivoa da je u njima najpogodnija upravo realizacija *lestvičaste* konfiguracije. Nasuprot tome, Λ konfiguracija se u njima *ne može* formirati, pošto u poluprovodničkim SKT nije moguće izolovati tri takva nivoa, koja pritom ne interaguju ni sa jednim drugim nivoom. Ukoliko bi se, recimo, karakteristike lasera odabrale tako da se formira Λ konfiguracija, postojao bi izvestan broj nivoa koji nisu međusobno spregnuti laserskim poljima, ali koji interaguju sa ostatkom sistema putem spontane emisije. Zbog svega navedenog, proučavanje lestvičaste konfiguracije od velikog je interesa za dalji napredak na polju fizike ovih sistema. Iako su radovi koji se bave lestvičastom konfiguracijom manje zastupljeni u literaturi od onih koji se tiču Λ sistema, i dalje postoji pristojan broj istraživanja na ovu temu, posebno u vezi Ridbergovih atoma [43–46], o kojima je već bilo reči u Glavi 2.

Da bi se u sistemu svetlost–materija realizovala EIT (u širem smislu), potrebno je prisustvo barem dva lasera, koji se sa atomskom sredinom sprežu tako da formiraju neku od konfiguracija sa tri nivoa, kao što je to prikazano na slici 2.5 (b–e). Zbog toga je, dakle, od suštinskog značaja proučiti EIT, odnosno AT efekat u lestvičastoj konfiguraciji sa *tri* nivoa. Ovo je u proučavano upravo u SKT sa vodoničnom nečistoćom u nekoliko radova [4, 197]. Sa druge strane, moguće je i proučavanje lestvičaste konfiguracije sa *četiri* nivoa, koju je takođe moguće realizovati u SKT od interesa, a koja pruža mogućnost za nastanak novih efekata i mehanizama za kontrolu prostiranja svetlosti. Za ovo je, naravno, potrebno prisustvo *trećeg* laserskog polja, koje može imati bilo kontrolni, bilo sondirajući karakter. U ovoj disertaciji ćemo proučiti oba ova slučaja – dok će, u slučaju kada se dodatno

polje može tretirati kao kontrolno, rezultati dobijeni u disertaciji biti ništa drugo do proširenje postojećih rezultata [196, 198], slučaj dodatnog sondirajućeg polja predstavljaće originalan doprinos do koga se, koliko je nama poznato, u ovakvim fizičkim sistemima do sada nije došlo. Zajedničko za oba slučaja je da karakteristike dodatnog polja u sistemu sa četiri nivoa mogu imati veliki uticaj na brzinu prostiranja sondirajućeg polja, što pruža dodatni način za kontrolu prostiranja svetlosti kroz poluprovodničke kvantne tačke.

4.1.1 Degenerisani sistemi

Proučavanje EIT u atomskim sistemima se obično bazira na modelu u kome se, od mnoštva energijskih nivoa atoma koji realno postoje u kvantnom sistemu, u razmatranje uzimaju samo oni koji su u direktnoj vezi sa laserskim poljima (kao što je to slučaj, na primer, sa konfiguracijama na slikama 2.5 i 2.6). Ovakav pristup, međutim, nije uvek opravdan – može se desiti da, iako ne interaguju direktno sa laserima, određeni nivoi u atomu budu spregnuti sa nivoima koji su originalno uzeti u razmatranje, bilo preko radijativnih ili neradijativnih prelaza. Ova činjenica će drastično uticati na naseljenosti ogoljenih nivoa posmatranog sistema, što dalje utiče i na naseljenost tamnog stanja, koja će značajno odstupati od realne vrednosti. Posledično, kako je zarobljavanje naseljenosti u tamnom stanju ključno za postojanje EIT, zaključci originalnog modela vezani za osobine prozora transparentnosti neće biti pouzdani. Zbog toga je potrebno izvršiti reviziju modela kako bi se u obzir uzela i interakcija sa energijskim nivoima koji nisu direktno spregnuti elektromagnetnim poljima [5, 6].

Goreopisana situacija je česta kod sistema sa *degenerisanim* energijskim nivoima. Naime, EIT se najčešće realizuje na atomima alkalnih (Rb, Na), zemnoalkalnih (Sr, Ca) i metala retkih zemalja (Yb), zbog čega je potrebno izolovati njihove hiperfine nivoe. Na primer, prilikom proučavanja EIT u sistemu sa Λ konfiguracijom, može se izdvojiti D1 linija atoma ^{87}Rb , što odgovara nivoima $|5S_{1/2}, F = 1\rangle$, $|5S_{1/2}, F = 2\rangle$, odnosno $|5P_{1/2}, F = 2\rangle$. Međutim, usled Zemanove degeneracije ovih nivoa, neophodno je tretirati posmatrani sistem kao sistem sa *lančanom* Λ konfiguracijom. Ovakav sistem se potom može predstaviti u formi *efektivnog* Λ sistema, kao što je to urađeno u radovima navedenim u spisku literature pod brojevima [199, 200]. Sa druge strane, za realizaciju EIT u lestvičastoj konfiguraciji, potrebno je odabrati hiperfine nivoe $|5S_{1/2}, F = 1\rangle$, $|5P_{3/2}, F = 2\rangle$ i $|5D_{5/2}, F = 3\rangle$ (idući prema rastućoj energiji). Postojanje Zemanove degeneracije, međutim, dovodi do spontane emisije srednjeg nivoa $|5P_{3/2}, F = 2\rangle$ na *drugi* hiperfinski nivo osnovnog stanja, $|5S_{1/2}, F = 2\rangle$, zbog čega naseljenost ovog nivoa raste. Ovo može dovesti do efekta *optičkog pumpanja*, čime se „prikrija” prozor transparentnosti koji bi se formirao ukoliko bi se sistem mogao tretirati kao nedegenerisan [201, 202].

Najčešći pristup rešavanju problema uticaja degeneracije nivoa na EIT i srodne efekte ogleda se u već pomenutom uvođenju efektivnih sistema sa tri nivoa kojima se modeluje degeneracija. Ovo za posledicu ima modifikovanje izraza za susceptibilnost sredine, koji sada sadrži doprinos svih relevantnih podnivoa [203–206]. Sa druge strane, alternativni pristup se sastoji u zameni realnog degenerisanog sistema pojednostavljenim sistemom sa redefinisanim Rabijevim frekvencijama [207]. U ovoj disertaciji, iskorišćen je prvi navedeni pristup, tako što je sistem sa tri nivoa sa trostruko degenerisanim srednjim nivoom modelovan efektivnim sistemom sa tri nivoa bez degeneracije. Razlog za proučavanje ove konfiguracije takođe leži u energijskoj strukturi SKT sa kojom radimo. Konkretno, sistem sa tri nivoa bez degeneracije se u SKT može ostvariti ukoliko se laserska polja odaberu tako da pobude nivoe kvantne tačke označene sa $1s_0$, $2p_{-1}$ i $3d_{-2}$ (kako su u pitanju „veštački atomi”, energijski nivoi SKT obeleženi su po analogiji sa nivoima u slobodnom atomu vodonika). Međutim, ukoliko se umesto nivoa $3d_{-2}$ odabere nivo $3d_0$, govorićemo o *degenerisanom* sistemu, jer se

ovaj nivo, umesto samo na jedan nivo niže energije, sada raspada na nivoe $2p_{-1}$, $2p_0$ i $2p_{+1}$ (što je određeno selekcionim pravilima u električnoj dipolnoj aproksimaciji). Ovom pitanju će daleko veća pažnja biti posvećena u poglavlju 9.2, ali i u Delu II, gde će biti izvedene i rešavane jednačine koje opisuju ovaj sistem.

S obzirom na to da će u čitavoj disertaciji fokus biti na poluprovodničkim SKT sa vodoničnom nečistoćom, efekat degeneracije srednjeg nivoa proučavali smo upravo na ovom sistemu. Napomenimo, međutim, da će dobijeni zaključci važiti *univerzalno*, kako za čvrsta tela, tako i za atomske gasove i pare. Ovaj pristup korišćen je u našim prethodnim radovima, gde uticaj degenerisanih nivoa proističe kao posledica spontane emisije sa višeg nivoa na njih, odnosno sa njih na niže nivoe [5, 6]. Zbog toga, kao i zbog činjenice da se tako propratni efekti mogu lakše uočiti i objasniti, opredelili smo se da uticaj degeneracije srednjeg nivoa na prostiranje svetlosti u SKT ispitujemo u slučaju *dominantne spontane emisije*. Ovo je ujedno i glavni razlog zbog koga smo u Glavi 5 najpre relevantne jednačine zapisali u obliku u kome je uračunata i spontana emisija i elektron-fononska interakcija u čvrstim telima, a potom studiozno pristupili diskusiji zasebnih slučajeva u kojima se jedan od ova dva efekta može zanemariti.

4.1.2 Sistemi sa fazno modulisanim kontrolnim poljem

Prilikom diskusije efekta EIT u poglavlju 2.2, pokazali smo da se prozor transparentnosti formira u određenom, užem ili širem opsegu frekvencija (u zavisnosti od toga da li se radi o EIT ili AT režimu, respektivno). Ovaj opseg je fiksna za svaki pojedinačni sistem svetlost–materija, i u sistemu sa tri nivoa je određen uslovom *dvo-fotonske rezonancije*, o čemu će više biti reči u Glavi 6. Takođe, veoma uzak prozor transparentnosti koji je posledica EIT, povlači i činjenicu da je, u cilju dobijanja spore svetlosti, neophodno koristiti pulseve veoma male spektralne širine. Ova ograničenja pokušalo je da prevaziđe više autora, pa je tako spora svetlost sa spektralno širokim pulsevima ostvarena prostornim razdvajanjem Furijeovih komponenti sondirajućeg pulsa, koje se potom odvojeno propuštaju kroz adekvatno podešene EIT sisteme [208–210], kao i izdvajanjem parova Furijeovih komponenti sondirajućeg i kontrolnog polja koje zasebno zadovoljavaju uslov dvo-fotonske rezonancije [211].

Alternativni pristup ovom problemu zasniva se na korišćenju *fazno modulisanog* kontrolnog polja, što su po prvi put 2009. godine predložili Kifner i Dej [212]. Oni su, na primeru sistema sa tri nivoa u Λ konfiguraciji, koristeći koncept vremenski zavisne susceptibilnosti, pokazali da fazna modulacija kontrolnog polja dovodi do periodičnih promena u prozoru transparentnosti. Sredina tada može da propušta pulseve različitih frekvencija u različitim, pogodno odabranim trenucima vremena, čime se uslov dvo-fotonske razdešenosti drastično relaksira. Ovaj efekat su eksperimentalno uspeli da demonstriraju Šva i Kac, koristeći D1 liniju atoma ^{87}Rb , pri čemu je kontrolno polje modulirano korišćenjem akusto-optičkog modulatora [213]. Još jedan pomak na ovom polju načinio je Radzinski sa saradnicima, uspevši da proširi razmatranje iz rada [212] sa malih modulacionih frekvencija na velike, mada i dalje nekoliko redova veličine manje od optičke frekvencije. On je, razvijajući fazni faktor u Furijeov red, pokazao da se prostiranje svetlosti kroz sredinu sa fazno modulisanim kontrolnim poljem može predstaviti kao propagacija sondirajućeg pulsa u sredini koja je izložena dejstvu mnoštva kontrolnih polja sa frekvencijama koje se razlikuju za modulacionu frekvenciju [214].

U ovoj disertaciji, iskoristili smo gorenavedene ideje kako bismo primenili faznu modulaciju kontrolnog polja na sistem na kome to do sada nije proučavano – SKT sa lestvičastom konfiguracijom. Teorijski smo problem za ovu konfiguraciju, mada za opšti slučaj koji može da se primeni

i na gasovite sredine, rešavali u poglavlju 6.5, dok su rezultati i njihova analiza prikazani za slučaj poluprovodničke SKT u Glavi 11, kao jedan od najperspektivnijih načina za povećanje efikasnosti izlaznog sondirajućeg pulsa. Takođe, ispitivanjem uticaja magnetnog polja na EIT, tačnije AT efekat, videli smo da njegovo uključivanje dovodi do narušavanja uslova dvofotonske razdešenosti, i samim tim do povećanja apsorpcije sondirajućeg laserskog polja. Pokazaćemo da je ovu apsorpciju moguće eliminisati upravo korišćenjem fazno modulisanog kontrolnog polja, što predstavlja važan rezultat koji do sada nije bio temeljno obrađen u dostupnoj literaturi. Na kraju, istaknimo još i da se do sada niko nije bavio proučavanjem skladištenja svetlosti u sredini sa modulisanim kontrolnim poljem, zbog čega smo se u jednom delu disertacije osvrnuli i na diskusiju ovog interesantnog pitanja.

4.2 Primene spore i uskladištene svetlosti

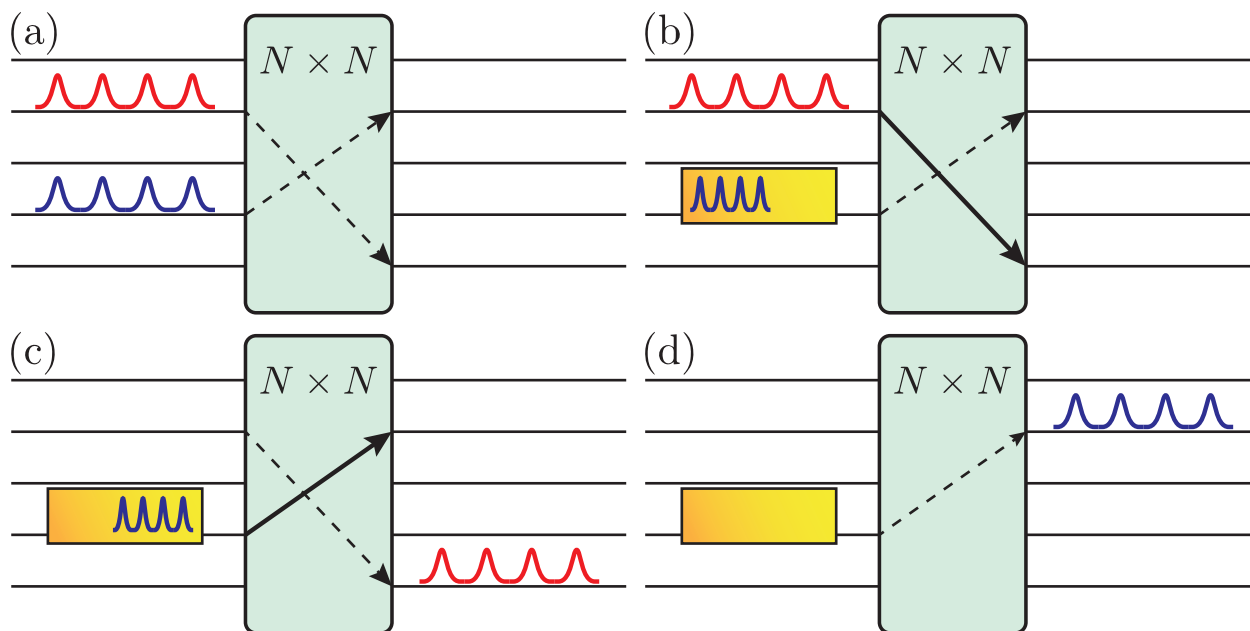
Spora i uskladištena svetlost predstavljaju teme od izuzetnog značaja među svetskim istraživačima. Na implementaciji ovih efekata u praktičnim uređajima se i danas intenzivno radi. Veliki broj autora je, proučavajući sporu svetlost i skladištenje kako teorijski, tako i eksperimentalno, pokazao da se ovi fenomeni mogu iskoristiti u raznim oblastima poput nelinearne optike, fotonike i procesiranja kvantne informacije [215–218]. Sa jedne strane, veliki potencijal primene leži u oblasti telekomunikacija, gde su se, profilisanjem optičkih vlakana kao odličnog prenosioca informacije na velika rastojanja, otvorila vrata i za izradu optičkih uređaja na bazi spore svetlosti i EIT, koji, na prvi pogled paradoksalno, služe da *ubrzaju* protok informacija [56, 219]. Sa druge strane, sistemi u kojima se može realizovati skladištenje svetlosti imaju veoma dobre šanse da posluže kao *kvantne memorije* u budućim kvantnim računarima [220]. Pomenuti efekti se, kao što je već rečeno, obično realizuju na atomskim gasovima i parama, ali je sve više istraživanja koja se zasnivaju na izboru poluprovodničkih nanostrukture kao materijalne sredine. Ovo istovremeno znači da rezultati ovih istraživanja mogu imati veliki uticaj i na razvoj nanonauke i nanotehnologije [104]. Na kraju, napomenimo da je proučavanje uticaja spoljašnjeg magnetnog polja na SKT upravo motivisano bogatim mogućnostima primene materijala na bazi poluprovodničkih kvantnih tačaka u izradi *magnetometara* [221].

U ovom poglavlju, daćemo pregled nekih najvažnijih primena spore i uskladištene svetlosti, sa posebnim osvrtom na realizaciju ovih efekata u poluprovodničkim nanostrukturama i kvantnim tačkama. Odabrali smo da prezentujemo kako najinteresantnije i najperspektivnije primene, tako i one primene koje su presudno uticale na tok disertacije, a koje su diskutovane i u Delu III, u kontekstu dobijenih rezultata. Tako ćemo se, na ovom mestu, zadržati na potencijalnim primenama u optičkim telekomunikacijama, magnetometriji i kvantnoj informatici.

4.2.1 Primene u optičkim telekomunikacijama

Princip funkcionisanja prekidača više je nego poznat u svakodnevnom životu. Različite fizičke situacije zahtevaju prekidače različitih karakteristika, brzina odziva i načina izrade. Činjenica da se EIT realizuje u sredini sa dva laserska polja, tako da sredina propušta sondirajući laser kada je kontrolno polje uključeno i zadržava ga kada je isključeno, nameće zaključak da se sistemi zasnovani na ovom i srodnim efektima mogu koristiti kao *optički prekidači* [222]. Ovo je eksperimentalno izveo Klark sa saradnicima, koristeći kao aktivnu sredinu pare atoma rubidijuma u lestvičastoj konfiguraciji na sobnim temperaturama, dobivši vremena odziva i do 0.17 ns [223]. On je pokazao da

je brzina „prekidanja” direktno srazmerna jačini kontrolnog polja, koju je uspeo da poveća 1000 puta propuštanjem lasera kroz optički rezonator konstruisan od sistema ogledala visoke finoće. Sa druge strane, Lin i saradnici proučavali su rad optičkih prekidača na bazi uskladištenih svetlosnih pulseva [224]. Oni su, nakon što je sondirajući puls uskladišten, iskoristili dodatno, „prekidajuće” polje, kako bi poništili transmisiju sondirajućeg polja prilikom procesa povraćaja svetlosti. Napomenimo još i da je spora i uskladištena svetlost našla primenu i u radu *optičkih tranzistora* [225], kao i *cepača snopa* (engl. beam splitters) [226].

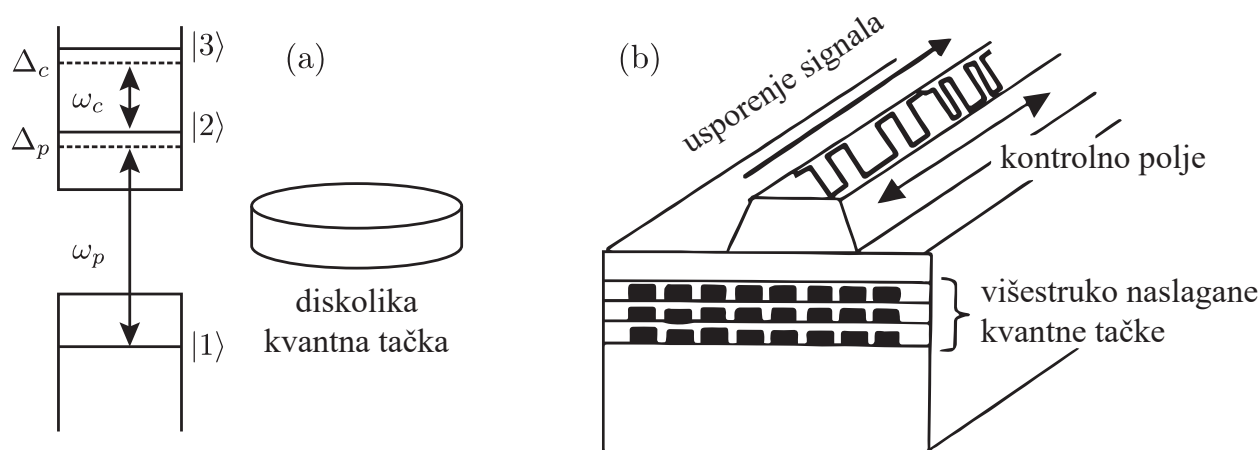


Slika 4.1: Šematski prikaz principa rada optičkog bafera, gde svetlozeleni pravougaonik ima ulogu prekidača, dok linije sa leve strane predstavljaju ulazne, a one sa desne izlazne kanale [56, 219]. (a) Dva signala istovremeno stižu na optički ruter koji ne može da sprovede preusmeravanje usled zastoja paketa podataka. (b) Optički bafer na bazi spore svetlosti postavlja se u jednom od kanala (žuti pravougaonik), tako da se plavi signal kreće usporeno, a prekidač (deblja strelica) usmerava crveni signal na željeni kanal. (c) Crveni signal je prošao kroz ruter i sada plavi signal dolazi na red za preusmeravanje (deblja strelica). (d) Plavi signal je preusmeren na željeni kanal, čime oba signala nesmetano nastavljaju kretanje.

Jedna od veoma interesantnih i perspektivnih primena spore svetlosti jeste njeno korišćenje u izradi *optičkih bafera*. Princip rada ovih uređaja objasnićemo na primeru $N \times N$ potpuno optičkog rutera (engl. all-optical router), prikazanog na slici 4.1. Ruter funkcioniše tako da signal, koji je došao iz jednog od N ulaznih kanala (linije sa leve strane), dinamički preusmeri na ma koji od N izlaznih kanala (linije sa desne strane), što se vrši pomoću prekidača (svetlozeleni pravougaonik u sredini) [219]. Proces preusmeravanja signala šematski je prikazan strelicama. Međutim, sa ovakvom arhitekturom opisanog sistema, može da se javi problem da dva signala, koja dolaze do rutera u isto vreme, ne mogu da se procesiraju na željeni način, pošto ruter može da vrši preusmeravanje samo jednog po jednog signala. Ovaj problem je poznat pod nazivom *zastoj paketa podataka* (engl. data packet contention) i prikazan je na slici 4.1 (a). Rešenje problema leži u postavljanju bafera u jednom od ulaznih kanala (žuti pravougaonik), koji bi jedan od dva signala mogao da „zadrži” dok drugi nesmetano ne prođe kroz ruter (slika 4.1 (b)). Jedan od kandidata za obavljanje ove funkcije jeste EIT sredina, tj. sredina u kojoj dolazi do pojave spore svetlosti. Prilikom kretanja kroz ovu sredinu, niz pulseva obojen plavom bojom postaje značajno usporen, tako da signal obojen crve-

nom bojom može nesmetano da prođe kroz ruter, što se vidi na slici 4.1 (c). Nakon toga, prvi od ova dva pulsa takođe prolazi kroz ruter i do zastoja ne dolazi (slika 4.1 (d)), što značajno *ubrzava* procesiranje informacije.

Eksperimentalna realizacija potpuno optičkih bafera na bazi spore svetlosti je usko povezana sa čvrstim materijalima, zbog svoje već pomenute jednostavne integracije u ostatak eksperimentalne aparature. Tako je niz autora proučavao ovaj efekat u čvrstim sredinama zarobljenim u mikrozona-torima [227–229]. Sa druge strane, istom problematikom, ali upravo na poluprovodničkim kvantnim tačkama, bavili su se Ku i saradnici, u radu u kome su predložili konstruisanje potpuno optičkog bafera na bazi spore svetlosti koja je usporena 10^4 puta pri prolasku kroz sredinu sačinjenu od diskolikih kvantnih tačaka [230]. Energijski dijagram korišćenih nivoa kvantne tačke prikazan je na slici 4.2 (a), dok je šematski prikaz optičkog bafera na bazi ovih kvantnih tačaka prikazan na slici 4.2 (b). Rezultati dobijeni u ovom radu prošireni su i nadograđeni u radovima koji su usledili [231, 232]. U ovoj disertaciji, pokazaćemo kako se poluprovodničke SKT mogu koristiti kao optički baferi, i to ne samo na bazi spore, već i uskladištene svetlosti.



Slika 4.2: Princip rada optičkog bafera preuzet iz rada [230]. (a) Šematski prikaz diskolike kvantne tačke korišćene u modelu i dijagrama njenih energijskih nivoa, u oznakama korišćenim u disertaciji. Osnovni nivo nalazi se u valentnoj, a ostala dva u provodnoj zoni. (b) Šematski prikaz bafera realizovanog smeštanjem slojeva kvantnih tačaka u talasovod. Strelice označavaju smer propagacije lasera – kontrolno i sondirajuće polje (signal koji se usporava) se mogu kretati bilo u istom, bilo u suprotnim smerovima.

U odeljku 2.1.2 već su navedene brojne eksperimentalne realizacije spore svetlosti u gasovitim sredinama. Sa druge strane, diskusija sprovedena u ovom odeljku nedvosmisleno ukazuje na činjenicu da je isti efekat prilično efikasno moguće ostvariti i u čvrstim telima. Zbog toga smatramo da je na ovom mestu korisno da se osvrnemo i na radove u kojima se proučava spora svetlost u kvantnim tačkama na fundamentalnom nivou (mada su i oni u veoma uskoj vezi sa potencijalnom primenom u izradi optičkih bafera). Tako su Kim i saradnici sprovedli detaljnu numeričku proceduru za opisivanje EIT u poluprovodničkoj kvantnoj tački u lestvičastoj konfiguraciji, i dobili grupne brzine svetlosti smanjene i do vrednosti od 300 m/s [233]. Teorijsku analizu prostiranja sondirajućeg pulsa kroz talasovod, sačinjen od samosastavljenih konusnih kvantnih tačaka od InAs uronjenih u GaAs, sprovedli su Kaer Nilsen i saradnici [103]. Oni su, u uslovima ostvarene EIT (radeći prevashodno u AT režimu), pokazali da grupni indeks, širina pulsa i koeficijent transmisije veoma zavise od karakteristika kontrolnog polja, širine ulaznog pulsa kao i koeficijenata raspada sredine. Pored ovoga, proučavane su i jake višestruke interakcije u poluprovodničkim kvantnim tačkama, kao i njihov

uticaj na usporavanje svetlosti, ali i na druge koherentne efekte koji nastaju pri interakciji svetlosti i materije [234,235].

4.2.2 Primene u magnetometriji

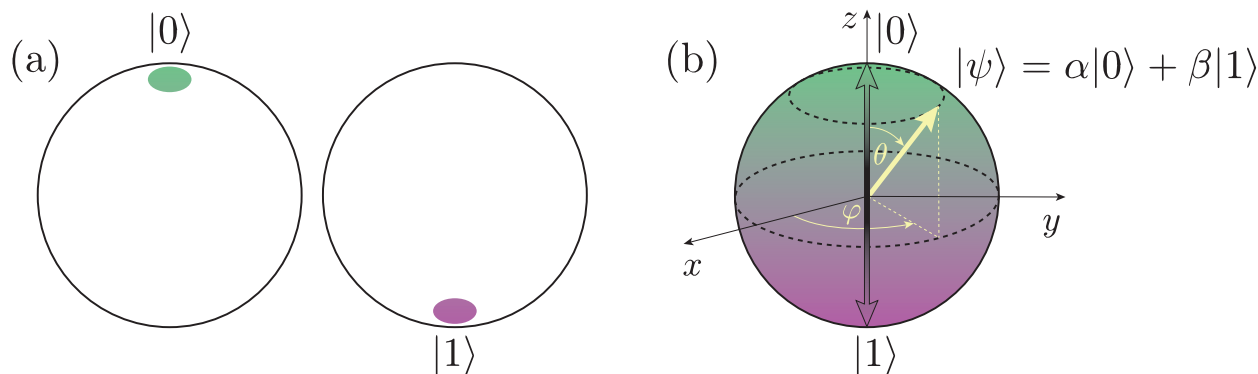
U poglavlju 3.3 smo već naglasili značaj proučavanja uticaja magnetnog polja na poluprovodničke kvantne tačke, i napravili pregled radova koji se ovim pitanjem ekstenzivno bave u poslednjih nekoliko decenija. Nasuprot tome, već nakon otkrića pojave EIT, krenulo se sa istraživanjima na temu uticaja magnetnog polja na ove sisteme, pa su tako Skali i Flajshauer detaljno proučavali ograničenja kvantnog šuma na osetljivost optičkog magnetometra zasnovanog na EIT [236,237]. Oni su pokazali da je, u ovim sistemima, moguća detekcija pomaka magnetnih nivoa sa osetljivošću potencijalno superiornijom od osetljivosti „konvencionalnih” magnetometara. Takođe, Šteler i saradnici eksperimentalno su pokazali da je u parama cezijuma u uslovima KZN moguće detektovati Zemanova cepanja koja odgovaraju magnetnim poljima manjim od 4 pT [238].

Koliko je nama poznato, iako je značajan broj radova posvećen interakciji kvantnih tačaka sa magnetnim poljem, njihova konkretna primena u magnetometriji nije previše diskutovana. Stoga ćemo se mi nešto detaljnije posvetiti potencijalnim primenama poluprovodničkih SKT u izradi optičkih magnetometara. Ovo će biti detaljnije učinjeno u Delu III, a posebno u poglavlju 9.4, gde će biti izložena ideja za funkcionisanje magnetometra na bazi SKT sa vodoničnom nečistoćom u uslovima ostvarene EIT, odnosno AT efekta.

4.2.3 Primene u kvantnoj informatici

U poslednjim decenijama, pitanje procesiranja *kvantne informacije* pojavilo se kao veoma atraktivan, ali zahtevan zadatak. Već smo pomenuli da kvantni bit ili *kubit* predstavlja osnovnu jedinicu kvantne informacije, dobivši ime po analogiji sa klasičnim bitom [20]. Funkcionisanje savremenog sveta umnogome ima da zahvali postojanju računara, baziranih upravo na *klasičnoj* informaciji sadržanoj u bitu, čije vrednosti mogu biti 0 ili 1 (slika 4.3 (a)). Iako veoma moćan, ovaj proces ima svoje nedostatke, koji se ogledaju u algoritmima koji se na klasičnim računarima *ne mogu* rešiti u polinomijalnom vremenu (tzv. NP-teški problemi) [239]. Ovo je, na primer, slučaj sa razlaganjem broja na proste činioce, gde vreme izvršenja ovog algoritma za slučaj ogromnih brojeva premašuje vreme života Svemira. Upravo ova činjenica predstavlja suštinu ideje klasične kriptografije, koja se danas koristi u zaštiti korisničkih podataka na internetu.

Kako se napredak tehnologije kreće u smeru izrade sve manjih računarskih komponenti (Murov zakon), logično je zapitati se šta će se desiti kada se njihove dimenzije smanje do dimenzija reda atoma, u kojima do izražaja dolaze kvantnomehanički efekti. Ideju koja leži u osnovi uvođenja kubita kao, isprva, fiktivnog objekta koji bi na ovom mikronivou morao zameniti klasični bit, zgodno je prikazati korišćenjem tzv. *Blohove sfere*, prikazane na slici 4.3 (b) [240]. Kubit predstavlja kvantni sistem koji se može naći u kvantnom stanju koje predstavlja superpoziciju dva stanja, po analogiji sa klasičnim bitom označena sa $|0\rangle$ i $|1\rangle$. Ovo stanje se matematički može zapisati u obliku $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, gde su $\alpha = \cos(\theta/2)$ i $\beta = e^{i\varphi} \sin(\theta/2)$ konstante, dok je grafički ono predstavljeno tačkom na Blohovoj sferi, sa vektorom položaja u vidu žute strelice, koji je određen uglovima θ i φ [20]. Može se pokazati da (kvantne) logičke operacije izvedene na kubitima dovode do toga da se gorepomenuti algoritmi mogu rešiti u *realnom* vremenu, neuporedivo brže nego što je to slučaj sa klasičnim računarima [241]. Na taj način, kvantni računari bi bili u stanju da reše širok spektar

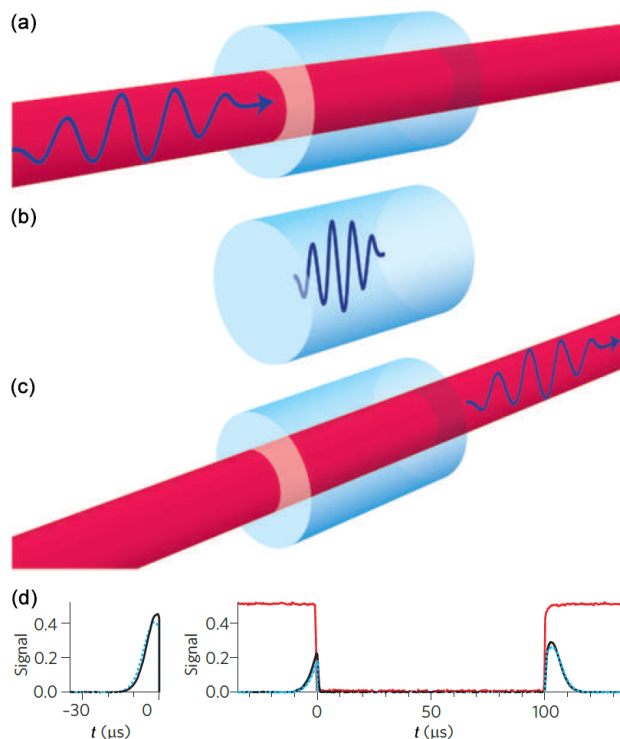


Slika 4.3: Šematski prikaz (a) klasičnog bita i (b) kubita, gde je stanje kubita $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ predstavljeno tačkom na Blohovoj sferi, čiji je vektor položaja prikazan žutom strelicom. Za razliku od klasičnog bita, koji može biti samo u jednom stanju u svakom trenutku, kubit se može naći u ma kom od *beskonačno* mnogo stanja na Blohovoj sferi. „Čista” stanja $|0\rangle$ i $|1\rangle$ prikazana su zelenom i ljubičastom strelicom, respektivno.

danas nerešivih problema, počev od bazičnih NP-teških algoritama koji su u informatici poznati već dugo vremena, pa sve do izuzetno složenih sistema jednačina koji opisuju razne kompleksne sisteme u prirodi, dovodeći do revolucije kako u tehnologiji, tako i na polju same fundamentalne nauke.

Princip rada kvantnih algoritama i kvantnih računara već sada pripada detaljno proučenom polju informatike. Glavni izazov svetskih naučnika poslednjih dvadesetak godina, međutim, predstavlja *fizička realizacija* kvantnih računara. Tako je kvantni računar, odnosno kubit kao njegova gradivna jedinica, potrebno da zadovoljava niz uslova kako bi na efikasan način obavljao računске operacije. Ovi uslovi poznati su kao *di Vinčencovi kriterijumi* – skaliranje procesa računanja na proizvoljno veliki broj kubita, inicijalizacija kubita u željeno stanje, dovoljno duga vremena dekoherencije, univerzalni skup kvantnih logičkih operacija i mogućnost merenja finalnog stanja kubita [242]. Dodatni kriterijumi odnose se na kvantnu komunikaciju između različitih kubita. Veliki broj fizičkih sistema razmatran je u sklopu kandidata za kubite, pa su tako predloženi superprovodni kubiti [243], kubiti na principu nuklearne magnetne rezonancije [244], zarobljeni joni [245], razni optički sistemi (gde bi, na primer, stanja kubita mogla biti dva stanja polarizacije jednog fotona) [246], kao i poluprovodničke sredine [149]. U poglavlju 3.3 smo već pokazali na koji način se kvantne tačke mogu koristiti kao kubiti, dok ćemo na ovom mestu pažnju posvetiti primeni EIT i srodnih efekata u kvantnom računarstvu.

Sistemi koji se zasnivaju na spoj i uskladištenoj svetlosti mogu da se koriste kako kao kandidati za kubite, tako i kao kandidati za izradu *kvantnih memorija* [248]. Kao što je to slučaj sa klasičnim memorijama, i u kvantnom računaru je potrebno obezbediti medijum gde će informacija moći da se sačuva bez gubitaka. Skladištenje svetlosti se, stoga, nameće kao logičan izbor pri realizaciji optičke kvantne memorije, pri čemu bi materijalna sredina služila za čuvanje informacije koju nosi sondirajući laserski puls, što je šematski prikazano na slici 4.4. Detaljnu diskusiju o mogućim praktičnim primenama spore i uskladištene svetlosti sproveli su 2014. godine Li i saradnici [249]. Oni su sproveli eksperiment u kome su dokazali teorijski koncept postojanja *dvokomponentne* spore svetlosti, koja se može formalno prikazati u formi spinora, slično proceduri u relativističkoj kvantnoj mehanici [250]. U ovom eksperimentu, iskoristili su dva sondirajuća i četiri kontrolna polja kako bi izvršili sprezanje nivoa atoma ^{87}Rb , formirajući *dvostruku tripodnu* konfiguraciju sa *pet* nivoa, i pokazali da, pod određenim uslovima, sondirajuća polja međusobno interaguju, zbog čega dolazi do pojave



Slika 4.4: Šematski prikaz skladištenja svetlosti na bazi EIT, preuzet iz rada [220]. (a) Sondirajući puls (signal, obojen plavom bojom) ulazi u materijalnu sredinu pod EIT uslovima (sa uključenim kontrolnim laserom, obojenim crveno). (b) Dok se prostorno kompresovani signal nalazi unutar sredine, kontrolno polje se isključuje, čime se informacija prenosi u spinsku koherenciju – nastupa skladištenje svetlosti. (c) Kada je potrebno povratiti informaciju, kontrolno polje se ponovo uključuje i puls izlazi iz sredine. (d) Zavisnost jačine signala od vremena za ulazni (levo) i izlazni signal (desno), pri čemu su prikazani rezultati skladištenja na parama rubidijuma, dobijeni eksperimentalno (pune crne) i teorijski (isprekidane plave linije) [247]. Zavisnost jačine kontrolnog polja od vremena prikazana je crvenom linijom. U trenutku skladištenja, signal se ne nalazi u potpunosti unutar aktivne sredine, zbog čega vidimo da deo pulsa „iscuri” iz sredine pre isključivanja kontrolnog polja.

oscilacija u koeficijentu transmisije ove dve komponente. Pokazali su i da se ova pojava može iskoristiti u nelinearnoj konverziji frekvencije, kao interferometar za sporu svetlost, ali i kao kvantna memorija, odnosno rotator za kubit u kome stanja $|0\rangle$ i $|1\rangle$ odgovaraju pojedinačnim komponentama dvokomponentne svetlosti. Naglasimo da je usko povezana sa dvokomponentnom sporom svetlošću i *stacionarna* svetlost, gde se dve sondirajuće komponente prostiru kroz istu sredinu u *suprotnim* smerovima, formirajući strukturu analognu stojećem talasu u klasičnoj mehanici, čime je svetlost moguće zaustaviti čak i *bez* skladištenja [251, 252].

Osnovna svojstva optičkih kvantnih memorija izložena su u preglednom radu Lvovskog i saradnika, gde su pritom uvedeni i parametri poput *efikasnosti* i *vernosti*, kojima se kvalitativno mogu oceniti performanse kvantnih memorija [220]. U radu Šanelijeja i saradnika proučavane su kvantne memorije bazirane na EIT, sa akcentom na kvantnim mrežnim operacijama kojima različite memorije mogu međusobno da komuniciraju [253]. Takođe, praktične realizacije kvantnih memorija na bazi EIT i skladištenja svetlosti ostvarene su u eksperimentima sa atomima rubidijuma [92, 254]. Napredak na polju razvoja kvantnih memorija, kao i daljih aplikacija koje iz toga proističu takođe je proučavan [255], a razmatrane su i mogućnosti buduće komercijalne primene, sa akcentom na

savladavanju jedne od glavnih prepreka praktične realizacije – malih vremena dekoherencije [256].

Pored gasovitih sredina, proces skladištenja i povraćaja svetlosti takođe je proučavan i u *čvrstim* telima. Na primer, Cakmakidis i Hes istraživali su prostiranje spore i uskladištene svetlosti u metamaterijalima i plazmoničnim talasovodima, u kojima su, u cilju svođenja gubitaka na minimum, tanki slojevi aktivne sredine postavljeni uz jezgro talasovoda sa negativnim indeksom prelamanja [257]. Pored toga, Jang i saradnici demonstrirali su elektron-spinsku memoriju koristeći poluprovodničku kvantnu tačku i primenjujući magnetno polje od 2 T kako bi povećali vremena skladištenja sa nekoliko mikrosekundi na nekoliko milisekundi [258]. Međutim, skladištenje svetlosti proučavano u ovim radovima *nije* zasnovano na EIT.

Dakle, u dosadašnjem delu disertacije predstavili smo niz radova koji se bave proučavanjem spore i uskladištene svetlosti na bazi EIT (u širem smislu) u atomskim gasovima i parama, kao i sporu svetlost u poluprovodničkim kvantnim tačkama. Takođe, pomenuli smo i istraživanja na temu skladištenja svetlosti u čvrstim telima, uključujući i poluprovodničke kvantne tačke, koja nisu zasnovana na efektu EIT. Jedan od ciljeva ove disertacije jeste i da doprinese proučavanju skladištenja svetlosti u poluprovodničkim (sfernim) kvantnim tačkama, koje nastaje kao posledica EIT, i to konkretno primene EIT memorijskog protokola u AT režimu rada. Nadamo se da će dobijeni rezultati uticati na produbljivanje fundamentalnog razumevanja ovih fenomena sa jedne, kao i formiranje dobre osnove za realizaciju memorijskih elemenata na bazi EIT u ne tako dalekoj budućnosti sa druge strane.

Deo II

Teorijski model

5 Opisivanje interakcije elektromagnetnog polja sa materijalnom sredinom

U ovoj Glavi biće prikazan detaljan postupak izvođenja jednačina koje u potpunosti opisuju interakciju elektromagnetnog polja sa materijalnom sredinom – *Maksvel-Blohovih jednačina*. Ove jednačine praktično predstavljaju centralni deo disertacije, i biće dobijene tako što se svi operatori koji karakterišu interakciju svetlosti i materije najpre zapišu u odgovarajućoj matricnoj reprezentaciji, što čitav proces izvođenja svodi na sabiranje i množenje matrica. Na ovom mestu neće biti precizirano da li je materijalna sredina sačinjena od atomskih gasova i para, poluprovodničkih nanostruktura ili drugih čvrstih tela – dobijeni rezultati važiće *univerzalno*. Biće, doduše, istaknute osnovne razlike između Maksvel-Blohovih jednačina u dva slučaja: kada opisuju interakciju elektromagnetnog polja sa gasovitim, odnosno sa čvrstim sredinama. Podsetimo, pod pojmom *atom* ćemo ovde podrazumevati kako (prave) atome, tako i objekte slične atomu (po svojoj diskretnoj energijskoj strukturi), u koje se kvantne tačke kao „veštački atomi”, a od vodećeg interesa u ovoj disertaciji, i ubrajaju. Na samom kraju Glave, biće prikazan način određivanja disperzionih i apsorpcionih karakteristika sredine, i istaknuta njihova veza sa matricom gustine atomske sredine.

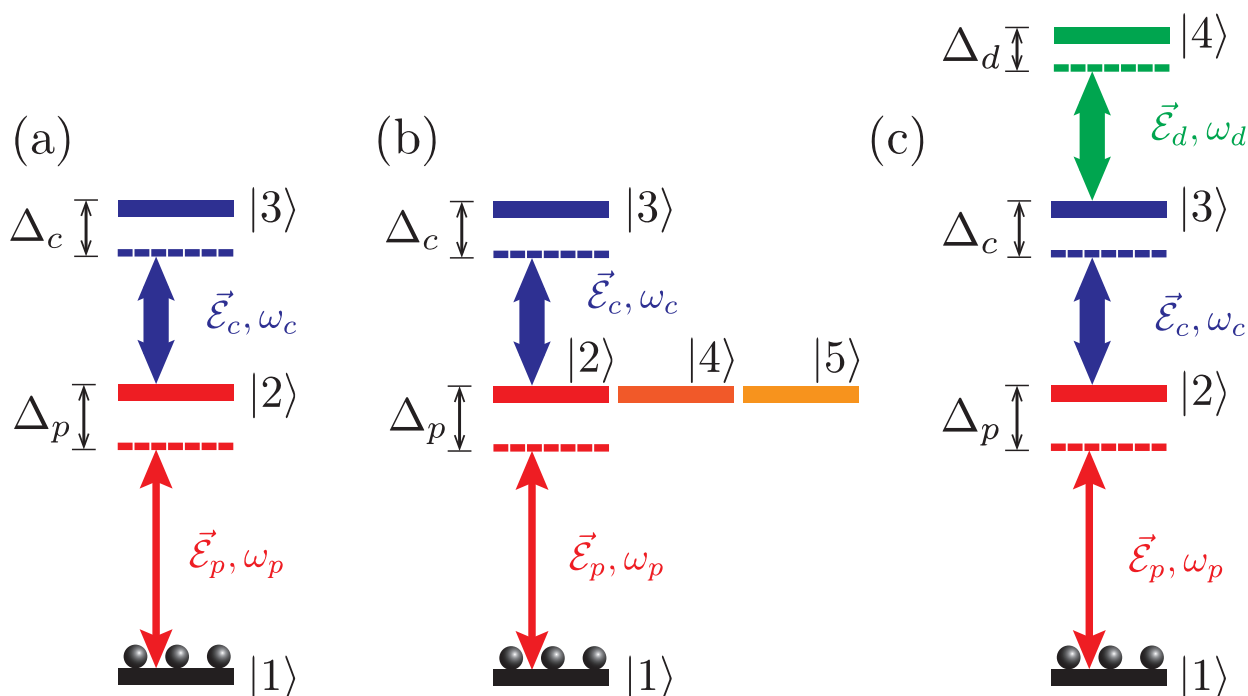
5.1 Polazne pretpostavke

Sasvim uopšte, interakcija svetlosti i materije opisuje se zakonima kvantne mehanike, koristeći se formalizmom druge kvantizacije i imajući u vidu čestičnu prirodu elektromagnetnog polja. Ovakav, *pun kvantni pristup*, omogućava kompletno sagledavanje ove problematike, dajući opis i objašnjenje praktično svih fenomena koji se mogu javiti pri ovoj interakciji – čak i onih koji nemaju svoje klasične analogone [7]. Ipak, za potrebe pojava proučavanih u ovoj disertaciji, dovoljno je koristiti *poluklasični pristup*. Ovaj pristup se ogleda u tome da elektromagnetno polje tretiramo klasično, koristeći rezultate Maksvelove elektrodinamike i fokusirajući se na njegovu talasnu prirodu, dok materijalnu sredinu i dalje opisujemo zakonima kvantne mehanike. Ovakav pristup je matematički manje zahtevan, a rezultati koji se dobijaju su više nego relevantni.¹

Kako su u ovoj disertaciji od interesa efekti koji su posledica postojanja EIT (u širem smislu), tako će i oznake odgovarajućih veličina uglavnom biti u skladu sa onima koje se pojavljuju u drugoj literaturi vezanoj za ovu tematiku, naravno adekvatno prevedene na srpski jezik. Tako će od centralnog značaja biti proučavanje prostiranja *sondirajućeg* elektromagnetnog polja, čiju frekvenciju i polarizaciju biramo tako da indukuje prelaz između dva energijska nivoa atoma materijalne sredine,

¹ Jedno od opravdanja za korišćenje poluklasičnog pristupa je i to što se čitav sistem sačinjen od elektromagnetnih polja i atoma *ne* nalazi „zarobljen” u prostoru, u smislu smeštanja u šupljine i rezonatore, što bi automatski podrazumevalo kvantovanje polja koje se u toj šupljini nalazi.

od kojih je nivo sa nižom energijom osnovni nivo, i za koji pretpostavljamo da je u početnom trenutku jedini naseljen. Tačnije, pretpostavljamo da su u početnom trenutku svi elektroni u atomima u osnovnom stanju, pri čemu jedino primenjeni laseri mogu da ih pobude u viša stanja. Ovo je u skladu sa činjenicom da se ovaj sistem pokorava Bolcmanovoj statistici (sistem u polju potencijalne – elektromagnetne sile), gde se, grubo rečeno, ogromna većina atoma nalazi u osnovnom, a vrlo malo njih u višim stanjima. Sa druge strane, drugo lasersko polje, koje omogućava kontrolu sondirajućeg polja i, između ostalog, postizanje efekta EIT, odnosno stvaranje AT pikova, predstavlja *kontrolno* polje. Treba naglasiti da je u sistemu moguće postojanje kako nekoliko sondirajućih, tako i nekoliko kontrolnih polja, pri čemu ne moraju sva sondirajuća polja biti spregnuta sa osnovnim nivoom u atomu. U ovoj disertaciji ćemo se koncentrisati na laserska polja koja pobuđuju prelaze na viša stanja, na način da svako polje spreže dva energijska nivoa tako da se sistem kao celina može predstaviti *lestvičastom* konfiguracijom, šematski prikazanom na slici 5.1. U zavisnosti od broja lasera i energijskih nivoa koji su uključeni u razmatranje, govorićemo o lestvičastoj konfiguraciji sa tri, odnosno četiri nivoa. U nastavku sledi detaljan opis svake od ovih konfiguracija.



Slika 5.1: Šematski prikaz (a) zatvorenog sistema sa tri nivoa, (b) otvorenog sistema sa tri nivoa i (c) sistema sa četiri nivoa u lestvičastoj konfiguraciji. Linijama sa strelicama na oba kraja označena su laserska polja – sondirajuće crvenom, kontrolno plavom, a dodatno zelenom bojom. Tanka linija odgovara slabom, a debela jakom polju, pri čemu se u slučaju dodatnog polja na slici (d) razmatraju oba ova slučaja.

Najjednostavnija konfiguracija koja će biti od interesa u ovoj disertaciji je *konfiguracija sa tri nivoa*, pri čemu nijedan od njih *nije degenerisan* (slika 5.1 (a)). Za obeležavanje nivoa korišćena je Dirakova bra-ket notacija, pa su oni označeni prema rastućoj energiji sa $|1\rangle$, $|2\rangle$ i $|3\rangle$. Ovo su zapravo svojstveni vektori hamiltonijana atoma sredine, čije su svojstvene energije E_1 , E_2 i E_3 , respektivno ($E_1 < E_2 < E_3$). Često će se umesto energije odgovarajućeg stanja koristiti njegova frekvencija, $\omega_i = E_i/\hbar$, $i = 1, 3$. Ova stanja sprežu se zahvaljujući dvema laserskim poljima – sondirajuće polje, čija je jačina električnog polja \vec{E}_p i frekvencija ω_p , indukuje prelaz $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$, dok je kontrolno

polje jačine $\vec{\mathcal{E}}_c$ i frekvencije ω_c odgovorno za prelaz $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$.² Ova dva polja ne moraju biti u rezonanciji sa prelazima koje pobuđuju, i to odstupanje od rezonancije karakteriše se veličinama Δ_p i Δ_c , koje predstavljaju *razdešenosti* sondirajućeg, odnosno kontrolnog polja, respektivno, i koje će biti definisane u narednom poglavlju.

Sledeća konfiguracija od interesa je takođe konfiguracija sa tri nivoa, pri čemu je srednji nivo *triple degenerisan* (slika 5.1 (b)). Vektori stanja i energije (odnosno frekvencije) nivoa označeni su sa $|i\rangle$, $E_i = \hbar\omega_i$, $i = \overline{1,5}$, pri čemu važi da je $E_2 = E_4 = E_5$. Ovu konfiguraciju je, jasno, moguće svrstati i pod konfiguraciju sa *pet* nivoa. Ipak, zbog velike sličnosti sa nedegenerisanim sistemom sa tri nivoa, kao i zbog činjenice da tri od pet nivoa imaju iste energije i moguće ih je smatrati *podnivoima* jednog energijskog nivoa, mi smo se u ovoj disertaciji opredelili za gore opisanu klasifikaciju. Kao i kod nedegenerisanog sistema, i ovde će sondirajuće polje indukovati prelaz $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$, a kontrolno prelaz $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$. Nivoi $|4\rangle$ i $|5\rangle$, dakle, nisu spregnuti laserskim poljima, ali učestvuju u interakciji sa ostalim nivoima preko procesa raspada sa nivoa $|3\rangle$ i na nivo $|1\rangle$. Drugim rečima, prelazi $|3\rangle \leftrightarrow |4\rangle$, $|3\rangle \leftrightarrow |5\rangle$, $|4\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ i $|5\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ nisu zabranjeni, i ostvaruju se, između ostalog, spontanom emisijom sa višeg na niže stanje.

Kako bismo pojednostavili pisanje, uvešćemo nove nazive za ove dve konfiguracije. Sa jedne strane, kod nedegenerisanog sistema sa tri nivoa, svi energijski nivoi su spregnuti odgovarajućim laserskim poljima, na interakciju svetlost–materija i posledične efekte ne utiče nijedan drugi energijski nivo, laser ili spoljašnji efekat, zbog čega ćemo ovaj sistem zvati *zatvoren sistem* sa tri nivoa. Sa druge strane, degenerisan sistem sa tri nivoa sadrži dva dodatna nivoa (ili podnivoa) koji nisu spregnuti nikakvim laserskim poljima, ali utiču na čitav sistem kroz dekoherentne, bilo radijativne, bilo neradijativne procese. Zbog toga što ih možemo smatrati „spoljašnjim” efektom, ovaj sistem ćemo nazivati *otvoren sistem* sa tri nivoa [205]. Kada neće biti zabune u pogledu broja nivoa sa kojima radimo, koristićemo još kraće izraze – *zatvoren* i *otvoren sistem*.³

Na kraju, prodiskutujemo oznake i veličine kod *sistema sa četiri nivoa*. Ova konfiguracija, prikazana na slici 5.1 (c), sadrži nivoe $|i\rangle$, $i = \overline{1,4}$, čije su energije (frekvencije) $E_i = \hbar\omega_i$, $i = \overline{1,4}$, ponovo poređane u rastućem redosledu (ovaj rastući redosled jedino je narušen kod otvorenog sistema sa tri nivoa). Kao i do sada, sondirajuće i kontrolno polje pobuđuju prelaze $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ i $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$, respektivno. Međutim, ovde postoji još jedan prelaz, $|3\rangle \leftrightarrow |4\rangle$, koji biva pobuđen od strane elektromagnetnog polja jačine $\vec{\mathcal{E}}_d$ i frekvencije ω_d . Ovo polje će, u zavisnosti od fizičke situacije koju želimo da proučavamo, moći da se tretira bilo kao kontrolno polje (za dodatnu kontrolu sondirajućeg polja $\vec{\mathcal{E}}_p$, što se najčešće pojavljuje u literaturi), bilo kao sondirajuće polje (za ispitivanje uticaja simultane propagacije dva sondirajuća polja kroz sredinu i prateće efekte). Zbog toga će ovo polje biti nazivano prosto *dodatno polje*, pri čemu će, kada se za to ukaže potreba, biti naglašeno o kom se tačno karakteru polja radi. Ono što je važno napomenuti je da je matematički oblik *polaznih* jednačina koje opisuju prostiranje dodatnog polja *isti* bez obzira na to da li je ono sondirajuće ili kontrolno, što dodatno opravdava korišćenje ovog univerzalnog naziva. Razlika koja proizlazi iz različite „prirode” dodatnog polja javiće se tek kada se za jačine polja koriste konkretne vrednosti – u nekim slučajevima od interesa će biti pogodno odabrati dodatno polje znatno slabijeg intenziteta

² Frekvencije ova dva polja treba shvatiti uslovno – u slučaju da se radi o kontinualnim, monohromatskim laserima, ω_p i ω_c će zaista biti frekvencije sondirajućeg, odnosno kontrolnog polja. Ukoliko su, pak, bilo sondirajuće, bilo kontrolno polje dati u obliku pulsa, sačinjenog od mnoštva komponenti različitih frekvencija, ove veličine će predstavljati *centralne* ili *noseće frekvencije* odgovarajućih lasera (engl. central/carrying frequency).

³ U kvantnoj mehanici se, pod pojmom *otvoren sistem*, najčešće podrazumeva kvantni sistem koji nije potpuno izolovan od spoljašnjih uticaja, tj. interaguje sa okolinom, čime postaje podložan disipaciji i gubitku „informacije” koju nosi. Ovako definisan pojam je opštiji od onog korišćenog u ovoj disertaciji. Međutim, kako se otvorenim sistemima definisanim na ovaj način nećemo eksplicitno baviti, terminologija za koju smo se opredelili ne bi trebalo da unese nikakvu zabunu.

od kontrolnog, pa će se i relevantne jednačine uprostiti jer će izvesne aproksimacije postati moguće. Napomenimo još i to da će se, pored već definisanih razdešenosti sondirajućeg i kontrolnog polja, pojaviti i *razdešenost dodatnog polja* Δ_d , kao mera odstupanja prelaza $|3\rangle \leftrightarrow |4\rangle$ od rezonantnog prelaza. Pošto se u ovoj disertaciji nećemo baviti sistemom sa četiri nivoa sa degeneracijom, tj. biće nam od interesa samo *zatvoren* sistem sa četiri nivoa, pridev „zatvoren” će u daljem tekstu često biti izostavljan.

Na ovom mestu je važno napomenuti da iste oznake fizičkih veličina kod različitih konfiguracija ne znače nužno da su u svim konfiguracijama birani isti nivoi ili korišćeni isti laseri. Svaka od ovih konfiguracija prikazana je pomoću opštih oznaka, koje nam omogućavaju jednostavnije snalaženje i uočavanje sličnosti i razlika između datih konfiguracija. Konkretno vrednosti ove veličine dobiće tek onda kada se opredelimo za odgovarajuću materijalnu sredinu, parametre koji je karakterišu, kao i kada izvršimo izbor pogodnih energijskih nivoa i svojstava lasera koji bi trebalo da ih pobude. Sve ovo će biti detaljno sprovedeno u Delu III, gde će zaključci i izrazi dobijeni u ovoj glavi biti primenjeni na konkretan fizički sistem.

5.1.1 Elektromagnetno polje

U skladu sa gore uvedenim veličinama i oznakama, za dalje potrebe disertacije nužno je zapisati ih eksplicitnije. Što se tiče lasera koji se sprežu sa materijalnom sredinom, već je napomenuto da se oni mogu tretirati klasično. Drugim rečima, sva laserska polja od interesa mogu se tretirati kao elektromagnetni talasi – karakteristične veličine biće vektori električnog, odnosno magnetnog polja talasa, $\vec{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ i $\vec{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$, koji će biti oscilujuće funkcije prostornih koordinata i vremena. Kako je interakcija naelektrisanih čestica intenzivnija sa električnim nego sa magnetnim poljem, a pritom su u pitanju međusobno povezane veličine, mi ćemo, kao uostalom i u drugoj literaturi, elektromagnetno polje opisivati preko vektora njegovog *električnog* polja [259].

Ukoliko pretpostavimo još i da je elektromagnetno polje dato u formi *ravnog elektromagnetnog talasa*, to će nas dovesti do željenih polaznih izraza. Tako će vektor električnog polja sondirajućeg elektromagnetnog talasa u tački sa vektorom položaja \mathbf{r} i u trenutku vremena t biti dat kao

$$\vec{\mathbf{E}}_p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{E}_p(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r} - \omega_p t)} + \mathbf{E}_p^*(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r} - \omega_p t)} \right), \quad (5.1)$$

dok za vektor električnog polja kontrolnog talasa imamo:

$$\vec{\mathbf{E}}_c(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{r} - \omega_c t)} + \mathbf{E}_c^*(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{r} - \omega_c t)} \right). \quad (5.2)$$

Na kraju, istaknimo da vektor električnog polja dodatnog talasa ima oblik

$$\vec{\mathbf{E}}_d(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{E}_d(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r} - \omega_d t)} + \mathbf{E}_d^*(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r} - \omega_d t)} \right). \quad (5.3)$$

U sva tri izraza, zvezdica označava da se radi o kompleksno konjugovanoj vrednosti. Kompleksne veličine $\mathbf{E}_p(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t)$ i $\mathbf{E}_d(\mathbf{r}, t)$ predstavljaju *envelope* sondirajućeg, kontrolnog i dodatnog talasa, respektivno. Vidimo da je u sva tri slučaja električno polje realna veličina, pošto se svi izrazi sastoje od zbira kompleksne funkcije i njoj konjugovano kompleksne funkcije. Praktično u čitavoj disertaciji, kada se govori o elektromagnetnom polju, misliće se na envelope pripadajućeg elektromagnetnog talasa kojim se razmatrano polje opisuje.

5.1.2 Formalizam matrice gustine

Kada govorimo o delovanju jednog ili više elektromagnetnih polja na *samo jedan* atom, za opisivanje takve „sredine” dovoljno je poznavati kvantnomehaničko stanje ovog atoma – njegovu talasnu funkciju. Tada je, dakle, *formalizam talasnih funkcija* sasvim dovoljan da kompletno opiše interakciju svetlost–materija. Međutim, nama je od interesa sredina sačinjena od mnoštva identičnih atoma, pri čemu elektromagnetno polje neće u istom trenutku na isti način pobuđivati svaki atom. Ovo znači da pojedinačni atomi mogu da se nađu u nekom od mnoštva različitih kvantnih stanja, čije poznavanje u praksi neće biti moguće. Zbog toga je neophodno sagledati ovu problematiku sa stanovišta kvantne statistike, koristeći *formalizam matrice gustine* [260].

Ukoliko materijalnu sredinu posmatramo kao *ansambl* sačinjen od velikog broja identičnih atoma koji se mogu naći u raznim kvantnim stanjima, kompletno poznavanje karakteristika sredine biće moguće ukoliko je poznat *operator gustine* sredine, koji se označava sa ρ . U odgovarajućem bazu ortonormiranih svojstvenih vektora $|i\rangle$, operator gustine se može predstaviti u matricnoj reprezentaciji, i tada govorimo o *matrici gustine*. Matrični elementi ove matrice se računaju na standardan način:

$$\rho_{ij} = \langle i|\rho|j\rangle, \quad (5.4)$$

pri čemu je korišćena Dirakova bra-ket notacija. Napomenimo da se dijagonalni elementi matrice gustine nazivaju još i *populacije*, odnosno *naseljenosti*, pošto element ρ_{ii} predstavlja udeo naseljenosti nivoa $|i\rangle$ u ukupnoj naseljenosti svih nivoa. Imajući u vidu da zbir svih dijagonalnih elemenata, tj. trag matrice, mora da da jedinicu (udeo ukupne naseljenosti u samoj sebi), dolazimo do izraza

$$\text{Tr}\rho = \sum_i \rho_{ii} = 1, \quad (5.5)$$

koji predstavlja *relaciju zatvorenosti*. Sa druge strane, nedijagonalni elementi ρ_{ij} nazivaju se *koherencije*, i povezani su sa prelazima $|i\rangle \leftrightarrow |j\rangle$, dajući informaciju o apsorpciji i disperziji sredine u odnosu na taj prelaz. Za njih važi sledeća relacija:

$$\rho_{ij}^* = \rho_{ji}, \quad (5.6)$$

dakle, reč je o ermitskoj matrici.

Formalizam matrice gustine značajan je u tome što nam daje način za računanje očekivanih vrednosti operatora koji predstavljaju opservable. Tako je očekivana vrednost operatora A na sistemu sačinjenom od velikog broja identičnih atoma data izrazom

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A) = \sum_{i,j} \rho_{ij} A_{ji}, \quad (5.7)$$

pri čemu se poslednji izraz dobija u konkretno odabranom bazu. Ovako dobijena očekivana vrednost sadrži u sebi kako kvantnomehaničko računanje očekivane vrednosti operatora, tako i klasično usrednjavanje ovih vrednosti po ansamblu.

Budući da se osobine materijalne sredine mogu menjati sa vremenom, to će i operator gustine biti vremenski zavistan. Vremensku zavisnost operatora gustine opisuje jednačina evolucije koja ima oblik

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] + \Lambda \rho \quad (5.8)$$

i koja se naziva *master* ili *Liuvilova jednačina* [7].⁴ Prvi sabirak sa desne strane gornjeg izraza posledica je interakcije elektromagnetnog polja i materijalne sredine, pri čemu H predstavlja hamiltonijan sistema od interesa.⁵ Drugi sabirak je posledica efekata *dekoherencije*, kao što su spontana emisija ili elektron-fononska interakcija u čvrstim telima.

5.1.3 Dekoherencija

Efekti dekoherencije se u literaturi obično razmatraju zasebno, u zavisnosti od fizičke situacije od interesa, pa otuda i dva različita izraza za $\Lambda\rho$. U ovoj disertaciji će se proučavati uglavnom efekti u slučaju dominantne elektron-fononske interakcije, ali ćemo deo pažnje posvetiti i situaciji kada se ona može zanemariti, što neke interesantne efekte čini vidljivijim. Zbog toga smo odlučili da dekoherentni član zapišemo u najopštijoj formi – tako da sadrži i spontanu emisiju i elektron-fononsku interakciju, ali tako da oba izraza koja se sreću u literaturi (zanemarivanjem jednog od dva efekta) slede iz njega. Da bismo ovo uradili, potrebno je da odvojeno navedemo izraze za dijagonalne, odnosno nedijagonalne matrične elemente matrice $\Lambda\rho$.

Sa jedne strane, za *nedijagonalne* elemente dekoherentnog člana imamo

$$(\Lambda\rho)_{ij} = -\lambda_{ij}\rho_{ij}, \quad i \neq j, \quad (5.9)$$

gde su λ_{ij} realni koeficijenti. Ovaj član ukazuje na to da se koherencija koja odgovara prelazu $|i\rangle \leftrightarrow |j\rangle$ raspada brzinom λ_{ij} , gde veličina $\tau_{ij} = 1/\lambda_{ij}$ predstavlja vreme života date koherencije. Zbog toga što su dve koherencije povezane relacijom (5.6), tj. postoji izvesna simetrija, ima smisla pretpostaviti da važi $\lambda_{ji} = \lambda_{ij}$. *Dijagonalni* članovi su, sa druge strane, dati na nešto komplikovaniji način:

$$(\Lambda\rho)_{ii} = \sum_k^{E_k > E_i} \lambda_{kk}^{(i)} \rho_{kk} - \lambda_{ii} \rho_{ii}, \quad (5.10)$$

pri čemu su $\lambda_{kk}^{(i)}$, λ_{ii} ponovo realni koeficijenti. Slično kao u slučaju koherencija, koeficijent λ_{ii} predstavlja brzinu kojom se smanjuje naseljenost nivoa $|i\rangle$, tj. daje informaciju o raspadu ovog nivoa. Smanjenje naseljenosti je proporcionalno samoj naseljenosti ρ_{ii} , a vreme života nivoa je onda određeno veličinom $\tau_{ii} = 1/\lambda_{ii}$. Elektroni tada prelaze na niže nivoe, čija se naseljenost, zahvaljujući tome, povećava. U isto vreme, naseljenost nivoa $|i\rangle$ može takođe da se povećava, zahvaljujući raspadima sa viših nivoa. Pri tome je u gornjem izrazu potrebno uključiti raspade sa svih nivoa više energije, zbog čega u njemu figuriše suma.

Priroda nabrojanih procesa, kao što je napomenuto, ne mora biti precizirana, i tada važe opšti izrazi (5.9) i (5.10). Međutim, u njima se mogu odvojiti članovi koji potiču od elektron-fononske interakcije i spontane emisije na sledeći način. Kao prvo, za koeficijente λ_{ij} važi

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ij}^{(\text{EF})} + \lambda_{ij}^{(\text{SE})}, \quad (5.11)$$

⁴ Liuvilova jednačina, u obliku u kome figuriše dekoherentni član, se često sreće u literaturi pod nazivima Lindbladova [261], Fon Nojmanova [67], odnosno već pomenuta master jednačina [15, 52].

⁵ Napomenimo da, u okviru poluklasičnog pristupa, ovaj hamiltonijan *ne* predstavlja hamiltonijan celokupnog sistema svetlost–materija. Konkretno, on u sebi sadrži hamiltonijan atoma sredine i hamiltonijan interakcije svetlosti i materije, ali ne i hamiltonijan elektromagnetnog polja, koji bi morao da se pojavi ukoliko bismo pribegli punom kvantnom tretmanu. U daljem radu ćemo, ipak, radi konciznijeg pisanja, pod pojmom *hamiltonijan sistema svetlost–materija* podrazumevati „poluklasični” hamiltonijan u kome ne figuriše član povezan čisto sa energijom elektromagnetnog polja.

što obuhvata i slučaj $i = j$, i gde skraćenice uz gornje sabirke jasno ukazuju na koji se efekat odnose. Tako će koeficijent raspada koji odgovara elektron-fononskoj interakciji biti

$$\lambda_{ij}^{(\text{EF})} = \gamma_{ij}, \quad (5.12)$$

gde, kao i za opšti koeficijent raspada, važi da je $\gamma_{ji} = \gamma_{ij}$. U najvećem broju slučajeva, a to su najčešće situacije kada se sistem svetlost–materija nalazi na sobnim temperaturama, elektron-fononska interakcija je dominantan izvor dekoherencije u čvrstim telima i tada će, osim ako nije drugačije naznačeno, veličina γ_{ij} biti nazivana prosto *koeficijent raspada*. Napomenimo još i to da, barem u trenutno dostupnoj literaturi, ne postoji formula po kojoj se ovi koeficijenti izračunavaju. Dekoherentni član u čvrstim telima se, stoga, uvodi *fenomenološki*. Ukoliko je, pak, spontana emisija dominantan proces, koeficijent raspada će biti dat izrazom

$$\lambda_{ij}^{(\text{SE})} = \frac{1}{2}(\Gamma_i + \Gamma_j), \quad (5.13)$$

pri čemu Γ_i predstavlja ukupan koeficijent raspada sa nivoa $|i\rangle$ na niže nivoe pod uticajem spontane emisije:

$$\Gamma_i = \sum_k \Gamma_{ik}, \quad (5.14)$$

gde je Γ_{ik} *koeficijent spontane emisije* sa nivoa $|i\rangle$ na nivo $|k\rangle$. Gornji izraz mora biti u skladu sa selekcionim pravilima, što je uvek zadovoljeno, budući da će u slučaju da je prelaz zabranjen, odgovarajući koeficijent spontane emisije biti jednak nuli. Pored toga, ukoliko iskoristimo činjenicu da se nivo $|1\rangle$ ne raspada jer je osnovni nivo, imaćemo još i da je $\Gamma_1 = 0$.

Preostali članovi $\lambda_{kk}^{(i)}$ se, slično kao u (5.11), mogu zapisati na sledeći način:

$$\lambda_{kk}^{(i)} = \lambda_{kk}^{(i,\text{EF})} + \lambda_{kk}^{(i,\text{SE})}, \quad (5.15)$$

gde je član koji je posledica elektron-fononske interakcije dat kao

$$\lambda_{kk}^{(i,\text{EF})} = \gamma_{kk} \delta_{i1}, \quad (5.16)$$

a koeficijent raspada povezan sa spontanom emisijom kao

$$\lambda_{kk}^{(i,\text{SE})} = \Gamma_{ki}. \quad (5.17)$$

Vidimo da član opisan formulom (5.16) postoji samo ako je reč o raspadu *na osnovni nivo*. Ova pretpostavka je vrlo česta u literaturi i može se opravdati činjenicom da kvantni sistem, kakav je sistem poluprovodničkih kvantnih tačaka, teži minimumu energije, što odgovara situaciji da se, nakon dovoljno dugog vremena, svi elektroni nađu u osnovnom stanju, u ma kom stanju da su se nalazili u početku. Nasuprot tome, izraz (5.17) ukazuje na to da će porast naseljenosti nivoa $|i\rangle$ (bez obzira na to da li se radi o osnovnom nivou ili ne), ukoliko računamo samo spontanu emisiju, doći od nivoa više energije, i to tako da su brzine tih raspada date upravo koeficijentima spontane emisije sa nivoa $|k\rangle$ na nivo $|i\rangle$. Ovaj izraz je ispravan čak i ako je prelaz $|k\rangle \leftrightarrow |i\rangle$ zabranjen, jer će u tom slučaju biti $\Gamma_{ki} = 0$, pa odgovarajući član u (5.10) neće ni postojati.

5.2 Hamiltonijan sistema svetlost–materija

Krenimo najpre od nalaženja hamiltonijana sistema koji se sastoji od lasera i materijalne sredine, koristeći, kao što je već napomenuto, poluklasični pristup (dakle, u hamiltonijanu ne figuriše hamiltonijan elektromagnetnog polja) [7]. Naravno, ovu proceduru je potrebno sprovesti za sve tri konfiguracije koje će biti od interesa u ovoj disertaciji, ali je to detaljno urađeno samo za zatvoren sistem sa tri nivoa. U preostala dva slučaja, biće navedeni samo ključni koraci i relevantni izrazi – svi međukoraci se mogu dobiti po analogiji sa zatvorenim sistemom sa tri nivoa.

Zajedničko za sve konfiguracije jeste polazni zapis hamiltonijana sistema svetlost–materija. Konkretno, on se može zapisati u obliku

$$H = H_0 + H_{\text{int}}, \quad (5.18)$$

gde je H_0 tzv. slobodni („atomski“) hamiltonijan, tj. hamiltonijan atoma koji nije izložen dejstvu elektromagnetnih polja, a H_{int} hamiltonijan interakcije elektromagnetnih polja i materijalne sredine. Ukoliko nema elektromagnetnih polja, energijski nivoi su onakvi kakvi su dati na slici 5.1, i tada važi:

$$H_0|i\rangle = E_i|i\rangle, i = \begin{cases} \overline{1,3}, & \text{zatvoren sistem sa tri nivoa,} \\ \overline{1,5}, & \text{otvoren sistem sa tri nivoa,} \\ \overline{1,4}, & \text{sistem sa četiri nivoa.} \end{cases} \quad (5.19)$$

Zahvaljujući ovoj relaciji, prilikom izvođenja koja će biti sprovedena u ovoj glavi, poznavanje eksplicitnog oblika slobodnog hamiltonijana neće biti neophodno – to će biti učinjeno tek u Glavi 7.

Sa druge strane, interakcija svetlosti i materije se u potpunosti ogleda kroz član H_{int} . Ovaj hamiltonijan može da poprimi razne složene oblike u kojima figurišu spregnute veličine koje reprezentuju materijalnu sredinu i primenjeno polje. Međutim, uvođenje *električne dipolne aproksimacije* (EDA) znatno pojednostavljuje oblik hamiltonijana interakcije. Suština ove aproksimacije ogleda se u tome da se u hamiltonijanu interakcije, koji se prethodno razvije u Tejlorov red, mogu zanemariti svi članovi nakon dipolnog.⁶ Tada se on može zapisati u sledećem obliku:

$$H_{\text{int}} = -\mathbf{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}, \quad (5.20)$$

pri čemu je $\vec{\mathcal{E}}$ rezultanta jačine električnog polja svih elektromagnetnih talasa koji interaguju sa materijalnom sredinom,

$$\mathbf{d} = -e \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{r}_i \quad (5.21)$$

električni dipolni moment atoma sredine koji se sastoji od N_e elektrona, e elementarno naelektrisanje, a \mathbf{r}_i vektor položaja i -tog elektrona u atomu.⁷ Opravdanje za korišćenje EDA leži u činjenici da

⁶ Ovo je praktično reformulacija tvrdjenja iz poglavlja 5.1 kojim se opravdava izostavljanje vektora magnetnog polja elektromagnetnog talasa iz daljih jednačina.

⁷ U nekim radovima, gde se proučavaju sistemi koji se sastoje od drugog tipa čestica, kao i gde se šupljine takođe tretiraju kao nosioci naelektrisanja (što iziskuje uvođenje tzv. *ekscitona* kao fiktivnih čestica), gornji izraz će morati da se modifikuje tako što se u njemu mora uračunati naelektrisanje svakog tipa čestica. Budući da će u ovoj disertaciji od interesa biti samo sistemi u kojima su nosioci naelektrisanja elektroni, otuda i oblik jednačine date u glavnom tekstu.

se u ovoj disertaciji razmatraju takvi sistemi gde se elektromagnetno polje neznatno menja u oblasti prostora u kojoj se nalazi atom sa kojim interaguje. Drugim rečima, ova aproksimacija podrazumeva da je talasna dužina elektromagnetnih talasa mnogo veća od prostornih dimenzija atoma, $\lambda \gg r$. Kako je intenzitet talasnog vektora obrnuto srazmeran talasnoj dužini, imamo da je $kr \ll 1$, a to praktično znači i da je $\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r} \ll 1$, $\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{r} \ll 1$, odnosno $\mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r} \ll 1$. U tom slučaju, dobijamo da je

$$e^{\pm i\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r}} \approx 1, \quad e^{\pm i\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{r}} \approx 1, \quad e^{\pm i\mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r}} \approx 1, \quad (5.22)$$

pa se, nakon zamene (5.22) u (5.1)–(5.3), za vektore električnog polja sondirajućeg, kontrolnog i dodatnog lasera, dobijaju sledeći izrazi:

$$\vec{\mathcal{E}}_p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{E}_p(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_p t} + \mathbf{E}_p^*(\mathbf{r}, t) e^{i\omega_p t} \right), \quad (5.23)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_c(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_c t} + \mathbf{E}_c^*(\mathbf{r}, t) e^{i\omega_c t} \right), \quad (5.24)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_d(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{E}_d(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_d t} + \mathbf{E}_d^*(\mathbf{r}, t) e^{i\omega_d t} \right). \quad (5.25)$$

Vidimo da dobijeni izrazi eksplicitno zavise samo od vremena, koje se pojavljuje u oscilujućim članovima, dok se zavisnost od prostornih koordinata pojavljuje isključivo preko izraza za envelope ovih talasa, \mathbf{E}_p , \mathbf{E}_c i \mathbf{E}_d .

5.2.1 Hamiltonijan zatvorenog sistema sa tri nivoa

Pređimo sada na nalaženje hamiltonijana sistema svetlost–materija za zatvoren sistem sa tri nivoa, prikazan na slici 5.1 (a). Imajući u vidu da se svojstveni vektori hamiltonijana H_0 ovde mogu još zapisati i kao

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

za slobodni hamiltonijan u matricnoj formi u bazu ovih stanja dobijamo

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 \end{pmatrix}, \quad (5.27)$$

pri čemu je jasno da ovako odabrana matična reprezentacija hamiltonijana i svojstvenih vektora zadovoljava relaciju (5.19). Sa druge strane, pošto je ovde $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_p + \vec{\mathcal{E}}_c$, hamiltonijan interakcije (5.20) se može zapisati u sledećem obliku:

$$H_{\text{int}} = V_p + V_c, \quad (5.28)$$

gde su V_p i V_c članovi koji opisuju interakciju sredine sa sondirajućim i kontrolnim poljem, respektivno. U EDA koju ovde koristimo, oni su dati kao

$$V_p = -\mathbf{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}_p, \quad V_c = -\mathbf{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}_c. \quad (5.29)$$

Budući da električni dipolni moment karakteriše materijalnu sredinu za koju smo rekli da se opisuje kvantnomehanički, on se tretira kao operator, koji u matricnoj reprezentaciji u bazu $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ ima oblik:

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{11} & \mathbf{d}_{12} & \mathbf{d}_{13} \\ \mathbf{d}_{21} & \mathbf{d}_{22} & \mathbf{d}_{23} \\ \mathbf{d}_{31} & \mathbf{d}_{32} & \mathbf{d}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{d}_{12} & \mathbf{d}_{13} \\ \mathbf{d}_{21} & 0 & \mathbf{d}_{23} \\ \mathbf{d}_{31} & \mathbf{d}_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.30)$$

pri čemu matricni element $\mathbf{d}_{ij} = \langle i|\mathbf{d}|j\rangle$ opisuje odgovarajući prelaz $|i\rangle \leftrightarrow |j\rangle$. Pošto nema smisla govoriti o prelazu sa jednog nivoa na taj isti nivo, dijagonalni elementi su automatski jednaki nuli.⁸

Zamenivši (5.30) u (5.29), dobijamo

$$V_p = - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{d}_{12} \cdot \vec{\mathcal{E}}_p & \mathbf{d}_{13} \cdot \vec{\mathcal{E}}_p \\ \mathbf{d}_{21} \cdot \vec{\mathcal{E}}_p & 0 & \mathbf{d}_{23} \cdot \vec{\mathcal{E}}_p \\ \mathbf{d}_{31} \cdot \vec{\mathcal{E}}_p & \mathbf{d}_{32} \cdot \vec{\mathcal{E}}_p & 0 \end{pmatrix}, \quad V_c = - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{d}_{12} \cdot \vec{\mathcal{E}}_c & \mathbf{d}_{13} \cdot \vec{\mathcal{E}}_c \\ \mathbf{d}_{21} \cdot \vec{\mathcal{E}}_c & 0 & \mathbf{d}_{23} \cdot \vec{\mathcal{E}}_c \\ \mathbf{d}_{31} \cdot \vec{\mathcal{E}}_c & \mathbf{d}_{32} \cdot \vec{\mathcal{E}}_c & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

Gornji izrazi predstavljaju najopštiji oblik interakcije lasera sa materijalnom sredinom, i mogu se dalje pojednostaviti ukoliko se uzme u obzir na koji način se vrši sprezanje lasera i sredine. Kako je nama od interesa sprezanje u lestvičastoj konfiguraciji sa tri nivoa koji nisu degenerisani, izbor sondirajućeg i kontrolnog polja, odnosno energijskih nivoa treba da bude takav da $\vec{\mathcal{E}}_p$ pobuđuje prelaz $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ a $\vec{\mathcal{E}}_c$ prelaz $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$, dok su ostali prelazi, a u ovom slučaju je to samo prelaz $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$, zabranjeni. Drugim rečima, važiće $\mathbf{d}_{13} \cdot \vec{\mathcal{E}}_i = \mathbf{d}_{31} \cdot \vec{\mathcal{E}}_i = 0$, $i = p, c$, a iz gornjih izraza preostaje samo matricni elementi $\mathbf{d}_{12} \cdot \vec{\mathcal{E}}_p$ i $\mathbf{d}_{21} \cdot \vec{\mathcal{E}}_p$, odnosno $\mathbf{d}_{23} \cdot \vec{\mathcal{E}}_c$ i $\mathbf{d}_{32} \cdot \vec{\mathcal{E}}_c$.⁹ Da bi se ovo realizovalo, i sondirajuće i kontrolno polje treba da imaju tačno određenu polarizaciju, koja će zavisi od konkretnog izbora fizičkog sistema i energijskih nivoa, i o čemu će više biti reči u narednim glavama. Imajući u vidu ove činjenice, iz (5.18), (5.27), (5.28) i (5.31) sledi da je hamiltonijan sistema svetlost–materija u matricnoj reprezentaciji

$$H^{(S)} = \begin{pmatrix} \hbar\omega_1 & -\mathbf{d}_{12} \cdot \vec{\mathcal{E}}_p & 0 \\ -\mathbf{d}_{21} \cdot \vec{\mathcal{E}}_p & \hbar\omega_2 & -\mathbf{d}_{23} \cdot \vec{\mathcal{E}}_c \\ 0 & -\mathbf{d}_{32} \cdot \vec{\mathcal{E}}_c & \hbar\omega_3 \end{pmatrix}, \quad (5.32)$$

pri čemu smo, iz razloga koji će ubrzo biti jasniji, eksplicitno naglasili da se radi o hamiltonijanu u Šredingerovoj slici.

Ubacimo sada izraze (5.23) i (5.24) u (5.32), izostavljajući radi preglednosti zavisnost od \mathbf{r} i t i

⁸ Tačnije, ako pretpostavimo da se elektron nalazi u stacionarnom stanju i sa $\psi_i(\mathbf{r})$ označimo talasnu funkciju elektrona koji se nalazi u stanju $|i\rangle$, imamo da je

$$\mathbf{d}_{ii} = \langle i|\mathbf{d}|i\rangle = -e \langle i|\mathbf{r}|i\rangle = -e \int \psi_i^*(\mathbf{r}) \mathbf{r} \psi_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = -e \int \mathbf{r} |\psi_i(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = 0,$$

gde smo iskoristili činjenicu da je \mathbf{r} multiplikativni operator, zatim podintegralnu funkciju zapisali u Dekartovim koordinatama, i potom se poslužili osobinom da je integral neparne funkcije u simetričnim granicama (integracija se vrši po čitavom prostoru) jednak nuli.

⁹ Kako je verovatnoća prelaza $|i\rangle \leftrightarrow |j\rangle$ proporcionalna $|\langle i|H_{\text{int}}|j\rangle|^2$, to će ona biti jednaka nuli, a dati prelaz *zabranjen* (u EDA) ukoliko je i odgovarajući matricni element hamiltonijana interakcije jednak nuli. U našem slučaju, jedini nenulti matricni elementi će, stoga, biti $\langle 1|V_p|2\rangle$, $\langle 2|V_p|1\rangle$, $\langle 2|V_c|3\rangle$ i $\langle 3|V_c|2\rangle$.

slici:

$$H^{(I)} = \hbar \begin{pmatrix} \omega_1 & \dots & \dots \\ -\frac{\mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}_p}{2\hbar} e^{i(\omega_{21} - \omega_p)t} - \frac{\mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}_p^*}{2\hbar} e^{i(\omega_{21} + \omega_p)t} & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \\ -\frac{\mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_p}{2\hbar} e^{-i(\omega_{21} + \omega_p)t} - \frac{\mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_p^*}{2\hbar} e^{-i(\omega_{21} - \omega_p)t} & 0 & \dots \\ \omega_2 & -\frac{\mathbf{d}_{23} \cdot \mathbf{E}_c}{2\hbar} e^{-i(\omega_{32} + \omega_c)t} - \frac{\mathbf{d}_{23} \cdot \mathbf{E}_c^*}{2\hbar} e^{-i(\omega_{32} - \omega_c)t} & \dots \\ -\frac{\mathbf{d}_{32} \cdot \mathbf{E}_c}{2\hbar} e^{i(\omega_{32} - \omega_c)t} - \frac{\mathbf{d}_{32} \cdot \mathbf{E}_c^*}{2\hbar} e^{i(\omega_{32} + \omega_c)t} & \omega_3 & \dots \end{pmatrix}, \quad (5.37)$$

gde je sa

$$\omega_{ij} = \omega_i - \omega_j \quad (5.38)$$

označena frekvencija prelaza $|i\rangle \leftrightarrow |j\rangle$. Primetimo da u izrazu (5.37) figurišu članovi koji osciluju frekvencijama $\omega_{21} + \omega_p$, odnosno $\omega_{32} + \omega_c$. Ove frekvencije imaju vrlo velike vrednosti, zbog čega se članovi koji ih sadrže jako brzo menjaju sa vremenom. Na ovom mestu je zgodno primeniti *aproksimaciju rotirajućeg talasa* (ART, engl. rotating wave approximation, RWA), koja se sastoji u tome da se brzo osciljući članovi zanemare, budući da bi, usrednjeni po vremenu po ma kojoj relevantnoj vremenskoj skali, dali nulu [15]. Sa druge strane, kako pretpostavljamo da su frekvencije oba lasera jako bliske frekvencijama prelaza koje pobuđuju, to su veličine $\omega_{21} - \omega_p$ i $\omega_{32} - \omega_c$ male, a odgovarajući članovi sporo osciljući i ne mogu se zanemariti. Nakon izvršene ART, za hamiltonijan u interakcionoj slici se dobija

$$H^{(I, \text{ART})} = \hbar \begin{pmatrix} \omega_1 & -\frac{\mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_p^*}{2\hbar} e^{-i(\omega_{21} - \omega_p)t} & 0 \\ -\frac{\mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}_p}{2\hbar} e^{i(\omega_{21} - \omega_p)t} & \omega_2 & -\frac{\mathbf{d}_{23} \cdot \mathbf{E}_c^*}{2\hbar} e^{-i(\omega_{32} - \omega_c)t} \\ 0 & -\frac{\mathbf{d}_{32} \cdot \mathbf{E}_c}{2\hbar} e^{i(\omega_{32} - \omega_c)t} & \omega_3 \end{pmatrix}. \quad (5.39)$$

Pošto je cilj prelaska na interakcionu sliku bio isključivo da se izvrši ART, sada se možemo vratiti na Šredingerovu sliku, primenom inverzne transformacije U^\dagger , što će dovesti do izraza:

$$H^{(S, \text{ART})} = U^\dagger H^{(I, \text{ART})} U = \hbar \begin{pmatrix} \omega_1 & -\frac{\mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_p^*}{2\hbar} e^{i\omega_p t} & 0 \\ -\frac{\mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}_p}{2\hbar} e^{-i\omega_p t} & \omega_2 & -\frac{\mathbf{d}_{23} \cdot \mathbf{E}_c^*}{2\hbar} e^{i\omega_c t} \\ 0 & -\frac{\mathbf{d}_{32} \cdot \mathbf{E}_c}{2\hbar} e^{-i\omega_c t} & \omega_3 \end{pmatrix}, \quad (5.40)$$

gde smo iskoristili rezultat dobijen u Dodatku A.1, ovaj put za unitarnu transformaciju inverznu transformaciji U .

Jasno je da je hamiltonijan (5.40) već prilično pojednostavljen, ali u njemu i dalje eksplicitno figuriše vreme. Ovu eksplicitnu zavisnost možemo da eliminišemo prelaskom na *korotirajući bazis* (engl. co-rotating frame), tj. onaj koordinatni sistem koji rotira zajedno sa vektorom električnog polja elektromagnetnog talasa. Ovaj prelazak se vrši preko nove unitarne transformacije, koja je u matičnoj reprezentaciji data kao

$$U' = \begin{pmatrix} e^{i\alpha t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma t} \end{pmatrix}, \quad U'^\dagger U' = I, \quad (5.41)$$

gde su α , β i γ proizvoljni realni skalari koje ćemo kasnije odrediti. Hamiltonijan se, pri ovoj transformaciji, menja prema relaciji¹¹

$$H^{(KB)} = i\hbar \frac{dU'}{dt} U'^{\dagger} + U' H^{(S, ART)} U'^{\dagger}. \quad (5.42)$$

S obzirom na to da imamo da je

$$U'^{\dagger} = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\beta t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\gamma t} \end{pmatrix}, \quad i\hbar \frac{dU'}{dt} U'^{\dagger} = \hbar \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \quad (5.43)$$

kao i to da se drugi sabirak sa desne strane u jednačini (5.42) u matricnoj reprezentaciji svodi na izraz analogan izrazu (5.37), pri čemu treba zameniti ω_1 , ω_2 i ω_3 sa α , β i γ , respektivno, za hamiltonijan sistema svetlost–materija se dobija

$$H^{(KB)} = \hbar \begin{pmatrix} \omega_1 - \alpha & -\frac{\mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_p^*}{2\hbar} e^{i(\omega_p + \alpha - \beta)t} & 0 \\ -\frac{\mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}_p}{2\hbar} e^{-i(\omega_p + \alpha - \beta)t} & \omega_2 - \beta & -\frac{\mathbf{d}_{23} \cdot \mathbf{E}_c^*}{2\hbar} e^{i(\omega_c + \beta - \gamma)t} \\ 0 & -\frac{\mathbf{d}_{32} \cdot \mathbf{E}_c}{2\hbar} e^{-i(\omega_c + \beta - \gamma)t} & \omega_3 - \gamma \end{pmatrix}. \quad (5.44)$$

Konačno, vidimo da se eliminacija eksplicitne zavisnosti od vremena može postići takvim izborom skalara α , β i γ koji zadovoljavaju relacije

$$\omega_p + \alpha - \beta = 0, \quad \omega_c + \beta - \gamma = 0. \quad (5.45)$$

Ove dve relacije, međutim, nisu dovoljne da se skalari jednoznačno odrede. Za to je potrebna još jedna relacija, koju ćemo pogodno izabrati tako da što je više moguće pojednostavimo krajnji oblik hamiltonijana. Najčešće se u literaturi ona nameće tako da obezbedi da matricni element u prvoj vrsti i prvoj koloni hamiltonijana (5.44) bude jednak nuli. Dakle,

$$\omega_1 - \alpha = 0, \quad (5.46)$$

odakle sledi da je

$$\alpha = \omega_1, \quad (5.47)$$

nakon čega, ubacivanjem dobijenog izraza u (5.45), dobijamo

$$\beta = \omega_p + \omega_1, \quad (5.48)$$

$$\gamma = \omega_c + \beta = \omega_c + \omega_p + \omega_1. \quad (5.49)$$

Sada možemo naći i preostala dva dijagonalna elementa matrice u (5.44). Rezultat je

$$\omega_2 - \beta = \omega_2 - \omega_1 - \omega_p = \omega_{21} - \omega_p = \Delta_p, \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} \omega_3 - \gamma &= \omega_3 - \omega_1 - \omega_c - \omega_p = \omega_3 - \omega_2 - \omega_c + \omega_2 - \omega_1 - \omega_p \\ &= \omega_{32} - \omega_c + \omega_{21} - \omega_p = \Delta_c + \Delta_p, \end{aligned} \quad (5.51)$$

¹¹Primerimo da se transformacija hamiltonijana (5.42) razlikuje od one date jednačinom (5.36). Ovo je zato što se, pri prelasku sa Šredingerove na interakcionu sliku (i obrnuto), transformacija proizvoljnog linearnog operatora nameće kao posledica činjenice da očekivane vrednosti ovog operatora moraju biti jednake i u Šredingerovoj i u interakcionoj slici. Budući da ovo važi i za sam hamiltonijan, to će se on transformisati preko formule (5.36). Sa druge strane, delovanje unitarne transformacije koje ne odgovara prelazu sa jedne na drugu sliku ne nameće iste restrikcije kao u prethodnom slučaju, i dobija se uz pomoć Šredingerove jednačine za dati sistem, odakle sledi transformaciona relacija (5.42).

pri čemu smo uveli *razdešenosti* sondirajućeg, odnosno kontrolnog polja:

$$\Delta_p = \omega_{21} - \omega_p, \quad \Delta_c = \omega_{32} - \omega_c. \quad (5.52)$$

Ukoliko još uvedemo i, u opštem slučaju kompleksne *Rabijeve frekvencije* sondirajućeg, odnosno kontrolnog polja:

$$\Omega_p = \frac{\mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}_p}{2\hbar}, \quad \Omega_c = \frac{\mathbf{d}_{32} \cdot \mathbf{E}_c}{2\hbar}, \quad (5.53)$$

dobićemo konačan oblik hamiltonijana spregnutog sistema sačinjenog od dva lasera i materijalne sredine koji zajedno čine lestvičastu konfiguraciju sa tri nivoa bez degeneracije, u električnoj dipolnoj aproksimaciji, aproksimaciji rotirajućeg talasa i u korotirajućem bazu (izostavljajući radi jednostavnosti bilo kakve indekse i oznake):

$$H = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_p^* & 0 \\ -\Omega_p & \Delta_p & -\Omega_c^* \\ 0 & -\Omega_c & \Delta_p + \Delta_c \end{pmatrix}. \quad (5.54)$$

Dobijeni izraz predstavlja polaznu osnovu za dobijanje jednačina koje opisuju evoluciju operatora gustine materijalne sredine koja interaguje sa datim laserskim poljima. Primetimo na kraju da veličina

$$\Delta_1 = \Delta_p + \Delta_c = (\omega_{21} + \omega_{32}) - (\omega_p + \omega_c) \quad (5.55)$$

predstavlja *dvo-fotonsku razdešenost* ovog sistema, za razliku od veličina Δ_p i Δ_c koje predstavljaju *jedno-fotonske* razdešenosti.

5.2.2 Hamiltonijan otvorenog sistema sa tri nivoa

Otvoren sistem sa tri nivoa se, kao što se to vidi na slici 5.1 (b), razlikuje od zatvorenog sistema sa tri nivoa u tome što obuhvata i dva dodatna nivoa, $|4\rangle$ i $|5\rangle$, koji imaju istu energiju kao i nivo $|2\rangle$, ali koji nisu spregnuti sa ostalim nivoima preko laserskih polja. Jedini način na koji oni interaguju sa ostatkom sistema je putem radijativnih i neradijativnih prelaza. Zbog toga je potrebno modifikovati bazu u kome se zapisuju relevantni operatori – on će sada sadržati i dodatne nivoe, konkretno $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle, |5\rangle\}$, koji će u matricnoj reprezentaciji biti prikazani tako da je nivo $|i\rangle$ predstavljen petodimenzionom matricom kolonom sa jedinicom na i -toj poziciji, a nulama na svim ostalim mestima, slično kao što je to slučaj sa izrazom (5.26). Takođe, po analogiji sa (5.27), dobiće se i izraz za slobodni hamiltonijan, gde još treba staviti $E_2 = E_4 = E_5$. Kako je sredina ovde izložena dejstvu istih polja kao i kod zatvorenog sistema, pri čemu ta polja pobuđuju iste prelaze, izrazi (5.28) i (5.29) će i dalje važiti, sa tom razlikom da je sada električni dipolni moment potrebno reprezentovati petodimenzionom kvadratnom matricom, sličnoj (5.30). Imajući ponovo u vidu da sondirajuće i kontrolno polje pobuđuju samo prelaze $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$, odnosno $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$, respektivno (pa će svi matricni elementi operatora električnog dipolnog momenta koji odgovaraju zabranjenim prelazima biti jednaki nuli), hamiltonijan sistema svetlost–materija u Šredingerovoj slici se svodi na

$$H^{(S)} = \begin{pmatrix} \hbar\omega_1 & -\mathbf{d}_{12} \cdot \vec{\mathcal{E}}_p & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{d}_{21} \cdot \vec{\mathcal{E}}_p & \hbar\omega_2 & -\mathbf{d}_{23} \cdot \vec{\mathcal{E}}_c & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{d}_{32} \cdot \vec{\mathcal{E}}_c & \hbar\omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hbar\omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hbar\omega_2 \end{pmatrix}. \quad (5.56)$$

Vidimo da je oblik ovog hamiltonijana vrlo sličan izrazu (5.32), što ne čudi, budući da laserska polja ne pobuđuju dodatne energijske nivoe, pa dodatni nedijagonalni članovi ne postoje.

Ukoliko izraze za jačine električnog polja dva lasera (5.23) i (5.24) sada zamenimo u (5.56), dobićemo izraz sličan izrazu (5.33), sa tom razlikom što će se u njemu pojaviti dodatni nenulti dijagonalni elementi. Ovaj hamiltonijan je ponovo polazna tačka za prelaz na interakcionu sliku, koji se vrši pomoću unitarnog operatora U , definisanog relacijom (5.34), i transformacije (5.36). Primena ART na dobijeni izraz, tj. zanemarivanje brzo oscilujućih članova, daje hamiltonijan u interakcionoj slici analogan hamiltonijanu (5.39), dok nam povratak na Šredingerovu sliku preko inverzne transformacije U^\dagger daje:

$$H^{(S,ART)} = \hbar \begin{pmatrix} \omega_1 & -\frac{\mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_p^*}{2\hbar} e^{i\omega_p t} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}_p}{2\hbar} e^{-i\omega_p t} & \omega_2 & -\frac{\mathbf{d}_{23} \cdot \mathbf{E}_c^*}{2\hbar} e^{i\omega_c t} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mathbf{d}_{32} \cdot \mathbf{E}_c}{2\hbar} e^{-i\omega_c t} & \omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_2 \end{pmatrix}, \quad (5.57)$$

pri čemu se detalji sprovedenih transformacija ponovo nalaze u Dodatku A.1.

Preostalo je još da prelaskom na korotirajući bazis pojednostavimo hamiltonijan tako da iz njega eliminišemo eksplicitnu zavisnost od vremena. U tu svrhu uvodimo novu unitarnu transformaciju

$$U' = \begin{pmatrix} e^{i\alpha t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\delta t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\epsilon t} \end{pmatrix}, \quad U'^\dagger U' = I, \quad (5.58)$$

gde su $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ i ϵ proizvoljni realni skalari. Transformacija se dalje vrši pomoću izraza (5.42), pri čemu je matricno množenje analogno onom za zatvoren sistem sa tri nivoea, a više detalja se može naći u Dodatku A.2. Rezultat je

$$H^{(KB)} = \hbar \begin{pmatrix} \omega_1 - \alpha & -\frac{\mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_p^*}{2\hbar} e^{i(\omega_p + \alpha - \beta)t} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}_p}{2\hbar} e^{-i(\omega_p + \alpha - \beta)t} & \omega_2 - \beta & -\frac{\mathbf{d}_{23} \cdot \mathbf{E}_c^*}{2\hbar} e^{i(\omega_c + \beta - \gamma)t} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mathbf{d}_{32} \cdot \mathbf{E}_c}{2\hbar} e^{-i(\omega_c + \beta - \gamma)t} & \omega_3 - \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 - \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_2 - \epsilon \end{pmatrix}. \quad (5.59)$$

Da bismo iz gornje matrice eliminisali eksplicitnu zavisnost od t , odaberimo parametre tako da važi $\omega_p + \alpha - \beta = 0$ i $\omega_c + \beta - \gamma = 0$, što nam omogućava da odredimo dva od pet parametara. Preostali neodređeni parametri se, radi jednostavnosti, mogu odrediti uz odabir uslova da elementi na pozicijama (1, 1), (4, 4) i (5, 5) budu jednaki nuli. Kao rezultat toga, imamo da je

$$\alpha = \omega_1, \quad \delta = \epsilon = \omega_2, \quad (5.60)$$

odnosno, dobijamo

$$\beta = \omega_p + \omega_1, \quad (5.61)$$

$$\gamma = \omega_c + \beta = \omega_c + \omega_p + \omega_1. \quad (5.62)$$

Preostali dijagonalni elementi će sada, po analogiji sa (5.50) i (5.51), biti

$$\omega_2 - \beta = \Delta_p, \quad \omega_3 - \gamma = \Delta_c + \Delta_p, \quad (5.63)$$

gde su razdešenosti sondirajućeg i kontrolnog polja ponovo date izrazima u okviru jednačine (5.52). Na sličan način, za Rabijeve frekvencije oba polja dobijamo iste izraze kao za zatvoren sistem, čiji je zapis dat pomoću jednačine (5.53). Ovo nas, konačno, dovodi do izraza za hamiltonijan sistema svetlost–materija u lestvičastoj konfiguraciji sa tri nivoa, pri čemu je srednji nivo tri puta degenerisan:

$$H = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_p^* & 0 & 0 & 0 \\ -\Omega_p & \Delta_p & -\Omega_c^* & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega_c & \Delta_p + \Delta_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.64)$$

gde je hamiltonijan naravno zapisan u EDA, ART i korotirajućem bazu. Vidimo da je dobijeni hamiltonijan praktično identičan hamiltonijanu (5.54) za zatvoren sistem, jer su svi matrični elementi četvrte i pete vrste/kolone jednaki nuli. Razlog za ovo je, ponavljamo, činjenica da dodatni nivoi nisu spregnuti sa laserskim poljima, i njihov uticaj će se ogledati samo kroz dekoherentne procese, koji će biti opisani u poglavljima 5.3 i 5.5.

5.2.3 Hamiltonijan sistema sa četiri nivoa

Na kraju, razmotrimo i kako se dolazi do hamiltonijana sistema svetlost–materija za (zatvoren) sistem sa četiri nivoa sa slike 5.1 (c). Ovde će bazu u kome zapisujemo operatore biti $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\}$, s tim što sada nivo $|4\rangle$ ne treba mešati sa istovetno označenim nivoom kod otvorenog sistema sa tri nivoa, posebno što je ovaj nivo sada spregnut sa nivoom $|3\rangle$ preko dodatnog kontrolnog polja $\vec{\mathcal{E}}_d$. Dakle, pomenuti bazu se sada može zapisati u formi četvorodimenzionih matrica kolona, analogno kao kod (5.26), dok se za slobodni hamiltonijan dobija četvorodimenziona kvadratna dijagonalna matrica sa frekvencijama odgovarajućih nivoa na glavnoj dijagonali, slično kao u (5.27). Glavna razlika u odnosu na sisteme sa tri nivoa je postojanje dodatnog polja, zbog kog će izraz (5.20) sada biti:

$$H_{\text{int}} = V_p + V_c + V_d, \quad (5.65)$$

gde je uzeto u obzir da je $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_p + \vec{\mathcal{E}}_c + \vec{\mathcal{E}}_d$ i gde (5.29) i dalje važi, dok $V_d = -\mathbf{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}_d$ predstavlja novi član koji opisuje interakciju dodatnog polja sa materijalnom sredinom. Operator električnog dipolnog momenta će sada u matričnoj reprezentaciji biti reprezentovan četvorodimenzionom kvadratnom matricom sličnom onoj iz jednačine (5.30), što će nam dati ukupni hamiltonijan sistema svetlost–materija u Šredingerovoj slici:

$$H^{(S)} = \begin{pmatrix} \hbar\omega_1 & -\mathbf{d}_{12} \cdot \vec{\mathcal{E}}_p & 0 & 0 \\ -\mathbf{d}_{21} \cdot \vec{\mathcal{E}}_p & \hbar\omega_2 & -\mathbf{d}_{23} \cdot \vec{\mathcal{E}}_c & 0 \\ 0 & -\mathbf{d}_{32} \cdot \vec{\mathcal{E}}_c & \hbar\omega_3 & -\mathbf{d}_{34} \cdot \vec{\mathcal{E}}_d \\ 0 & 0 & -\mathbf{d}_{43} \cdot \vec{\mathcal{E}}_d & \hbar\omega_4 \end{pmatrix}. \quad (5.66)$$

Kao i u prethodnim poglavljima, i ovde je iskorišćena činjenica da se laserska polja biraju tako da pobude tačno određene prelaze – u ovom slučaju, pored polja $\vec{\mathcal{E}}_p$ i $\vec{\mathcal{E}}_c$ koja pobuđuju prelaze

$|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$, odnosno $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$, imamo i dodatno polje $\vec{\mathcal{E}}_d$ koje je odgovorno za prelaz $|3\rangle \leftrightarrow |4\rangle$, dok su svi ostali prelazi zabranjeni.¹²

Prelaz na interakcionu sliku i ART se vrše na analogan način kao u prethodna dva poglavlja. Jedina razlika je ta što će se sada u transformisanom hamiltonijanu $H^{(S)}$ pojaviti i članovi koji osciluju frekvencijom $\omega_{43} + \omega_d$, koji se takođe mogu zanemariti kao brzo oscilujući. Detalji transformacije hamiltonijana pod dejstvom direktne unitarne transformacije $U = e^{\frac{i}{\hbar}H_0t}$, kao i njoj inverzne $U^\dagger = e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t}$ su prikazani u Dodatku A.1. Na osnovu svega navedenog, za hamiltonijan sistema svetlost–materija u interakcionoj slici i u ART dobijamo rezultat analogan (5.39), dok, sa druge strane, hamiltonijan

$$H^{(S,ART)} = \hbar \begin{pmatrix} \omega_1 & -\frac{\mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_p^*}{2\hbar} e^{i\omega_p t} & 0 & 0 \\ -\frac{\mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}_p}{2\hbar} e^{-i\omega_p t} & \omega_2 & -\frac{\mathbf{d}_{23} \cdot \mathbf{E}_c^*}{2\hbar} e^{i\omega_c t} & 0 \\ 0 & -\frac{\mathbf{d}_{32} \cdot \mathbf{E}_c}{2\hbar} e^{-i\omega_c t} & \omega_3 & -\frac{\mathbf{d}_{34} \cdot \mathbf{E}_d^*}{2\hbar} e^{i\omega_d t} \\ 0 & 0 & -\frac{\mathbf{d}_{43} \cdot \mathbf{E}_d}{2\hbar} e^{-i\omega_d t} & \omega_4 \end{pmatrix} \quad (5.67)$$

dobijamo pri povratku na Šredingerovu sliku.

Prelazak na korotirajući bazis se vrši preko unitarne transformacije analogne transformaciji (5.58), koja se iz nje može dobiti ako se petodimenzionoj kvadratnoj unitarnoj matrici prethodno odstrane peta vrsta i peta kolona. U bazisu svojstvenih stanja hamiltonijana sistema sa četiri nivoa, uz primenu jednačine (5.42) i rezultata iz Dodatka A.2, dolazimo do izraza

$$H^{(KB)} = \hbar \begin{pmatrix} \omega_1 - \alpha & -\frac{\mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}_p^*}{2\hbar} e^{i(\omega_p + \alpha - \beta)t} & 0 & 0 \\ -\frac{\mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}_p}{2\hbar} e^{-i(\omega_p + \alpha - \beta)t} & \omega_2 - \beta & -\frac{\mathbf{d}_{23} \cdot \mathbf{E}_c^*}{2\hbar} e^{i(\omega_c + \beta - \gamma)t} & 0 \\ 0 & -\frac{\mathbf{d}_{32} \cdot \mathbf{E}_c}{2\hbar} e^{-i(\omega_c + \beta - \gamma)t} & \omega_3 - \gamma & -\frac{\mathbf{d}_{34} \cdot \mathbf{E}_d^*}{2\hbar} e^{i(\omega_d + \gamma - \delta)t} \\ 0 & 0 & -\frac{\mathbf{d}_{43} \cdot \mathbf{E}_d}{2\hbar} e^{-i(\omega_d + \gamma - \delta)t} & \omega_4 - \delta \end{pmatrix}. \quad (5.68)$$

U cilju eliminacije članova koji eksplicitno zavise od t , izbor parametara α , β , γ i δ mora da bude takav da važi $\omega_p + \alpha - \beta = 0$, $\omega_c + \beta - \gamma = 0$, odnosno $\omega_d + \gamma - \delta = 0$. Preostali uslov koji je potrebno nametnuti da bi se jednoznačno odredili svi parametri biramo kao i do sada – tako da važi $\omega_1 - \alpha = 0$, što nas dovodi do toga da je

$$\alpha = \omega_1, \quad (5.69)$$

dok za preostale parametre dobijamo

$$\beta = \omega_p + \omega_1, \quad (5.70)$$

$$\gamma = \omega_c + \beta = \omega_c + \omega_p + \omega_1, \quad (5.71)$$

$$\delta = \omega_d + \gamma = \omega_d + \omega_c + \omega_p + \omega_1, \quad (5.72)$$

što nas dovodi do izraza za dijagonalne matricele elemente u (5.68) koji su ostali neodređeni. Kao i ranije, dobijamo da je

$$\omega_2 - \beta = \Delta_p, \quad \omega_3 - \gamma = \Delta_c + \Delta_p, \quad (5.73)$$

¹²Drugim rečima, jedini nenulti matricele elementi hamiltonijana interakcije će, pored dosadašnjih $\langle 1|V_p|2\rangle$, $\langle 2|V_p|1\rangle$, $\langle 2|V_c|3\rangle$ i $\langle 3|V_c|2\rangle$, biti i $\langle 3|V_d|4\rangle$ i $\langle 4|V_d|3\rangle$.

dok za matični element u četvrtoj vrsti i četvrtoj koloni imamo

$$\begin{aligned}\omega_4 - \delta &= \omega_4 - \omega_1 - \omega_d - \omega_c - \omega_p \\ &= \omega_4 - \omega_3 - \omega_d + \omega_3 - \omega_2 - \omega_c + \omega_2 - \omega_1 - \omega_p \\ &= \omega_{43} - \omega_d + \omega_{32} - \omega_c + \omega_{21} - \omega_p = \Delta_d + \Delta_c + \Delta_p.\end{aligned}\quad (5.74)$$

U gornjem izrazu, razdešenosti sondirajućeg i kontrolnog polja su već definisane izrazima (5.52), dok za dodatno polje razdešenost definišemo na sledeći način:

$$\Delta_d = \omega_{43} - \omega_d. \quad (5.75)$$

Slično, potrebno je definisati i novu, Rabijevu frekvenciju dodatnog polja:

$$\Omega_d = \frac{\mathbf{d}_{43} \cdot \mathbf{E}_d}{2\hbar}, \quad (5.76)$$

koja kompletira izraze za Rabijeve frekvencije, od kojih su sondirajuća i kontrolna definisane preko (5.53). Konačno, hamiltonijan sistema svetlost–materija u lestvičastoj konfiguraciji sa četiri nivoa, u EDA, ART i korotirajućem bazisu, ima oblik:

$$H = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_p^* & 0 & 0 \\ -\Omega_p & \Delta_p & -\Omega_c^* & 0 \\ 0 & -\Omega_c & \Delta_p + \Delta_c & -\Omega_d^* \\ 0 & 0 & -\Omega_d & \Delta_p + \Delta_c + \Delta_d \end{pmatrix}. \quad (5.77)$$

Poređenjem dobijenog izraza sa (5.54) i (5.64), jasno se vide sličnosti i razlike sa prethodno dobijenim rezultatima. Najuočljivija razlika je svakako ta što se u (5.77) pojavljuju veličine povezane sa dodatnim kontrolnim poljem, Ω_d i Δ_d . Pored toga, ono što je očigledno je da u sva tri slučaja postoje samo oni nedijagonalni elementi H_{ij} za koje su i i j takvi da je prelaz $|i\rangle \leftrightarrow |j\rangle$ dozvoljen, i u njima će figurisati upravo Rabijeve frekvencije (ili njihove kompleksno konjugovane vrednosti) polja koje pobuđuju taj prelaz. Ostali nedijagonalni elementi će uvek biti jednaki nuli. Što se tiče dijagonalnih elemenata, prvi je uvek jednak nuli, drugi sadrži jednofotonsku, treći dvofotonsku a četvrti *trofotonsku razdešenost*, koja je za ovaj sistem definisana kao

$$\Delta_2 = \Delta_p + \Delta_c + \Delta_d = (\omega_{21} + \omega_{32} + \omega_{43}) - (\omega_p + \omega_c + \omega_d). \quad (5.78)$$

Odavde se lako može ustanoviti pravilo za određivanje dijagonalnih elemenata za hamiltonijan lestvičastih sistema i sa više od četiri nivoa – to će biti razdešenosti četvrtog, petog i viših redova, što nećemo dalje diskutovati budući da izlazi iz okvira ove disertacije.

5.3 Dobijanje optičkih Blohovich jednačina

Dobijanje hamiltonijana sistema kog čine materijalna sredina i primenjena elektromagnetna polja bilo je važno prevashodno zbog koraka koji sledi – dobijanja jednačina koje opisuju evoluciju operatora gustine koji karakteriše datu sredinu. Ove jednačine zovu se *optičke Blohove jednačine* (OB jednačine, engl. optical Bloch equations, OBE), i dobijaju se kada se Liuvilova jednačina (5.8) razvije po odgovarajućem bazisu svojstvenih stanja – OB jednačine će tada biti jednačine za odgovarajuće matične elemente operatora gustine. Rešenje ovih jednačina će nam dati informaciju o tome kako se sa vremenom menja naseljenost energijskih nivoa atoma u sredini, kao i vremensku zavisnost odgovarajućih koherencija koje povezuju različite nivoe, odgovornih za oblik apsorpcione i disperzione krive, a koje će u ovoj disertaciji biti od velikog značaja. Kao i prilikom izvođenja hamiltonijana sistema svetlost–materija, i izvođenje OB jednačina će biti dato za svaku konfiguraciju ponaosob, nešto detaljnije za zatvoren sistem sa tri nivoa, a analogno za preostale dve konfiguracije.

5.3.1 OB jednačine za zatvoren sistem sa tri nivoa

U bazu svojstvenih stanja $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$, karakterističnih za sistem sa tri nivoa bez degeneracije i datih jednačinama (5.26), operator gustine materijalne sredine će moći da se prikaže u formi matrice gustine na sledeći način:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix}, \quad (5.79)$$

pri čemu podsećamo da važi relacija (5.6), i to konkretno:

$$\rho_{21}^* = \rho_{12}, \quad \rho_{31}^* = \rho_{13}, \quad \rho_{32}^* = \rho_{23}, \quad (5.80)$$

dok relacija zatvorenosti (5.5) sada dobija oblik:

$$\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} = 1. \quad (5.81)$$

Zapišimo sada Liuvilovu jednačinu (5.8) u matričnoj formi. Sa leve strane ove jednačine imamo

$$\dot{\rho} = \begin{pmatrix} \dot{\rho}_{11} & \dot{\rho}_{12} & \dot{\rho}_{13} \\ \dot{\rho}_{21} & \dot{\rho}_{22} & \dot{\rho}_{23} \\ \dot{\rho}_{31} & \dot{\rho}_{32} & \dot{\rho}_{33} \end{pmatrix}, \quad (5.82)$$

dok je izraz sa desne strane vidno komplikovaniji. Pođimo najpre, od prvog sabirka sa desne strane Liuvilove jednačine, $[H, \rho]/(i\hbar) = (H\rho - \rho H)/(i\hbar)$. On se, naravno, dobija matričnim množenjem operatora (5.54) i (5.79), što u konačnom daje sledeći rezultat:

$$\frac{1}{i\hbar} [H, \rho] = \begin{pmatrix} -i\Omega_p \rho_{12} + i\Omega_p^* \rho_{21} & \cdots & \cdots \\ i\Omega_p (\rho_{11} - \rho_{22}) + i\Omega_c^* \rho_{31} - i\Delta_p \rho_{21} & \cdots & \cdots \\ -i\Omega_p \rho_{32} + i\Omega_c \rho_{21} - i(\Delta_p + \Delta_c) \rho_{31} & \cdots & \cdots \\ -i\Omega_p^* (\rho_{11} - \rho_{22}) - i\Omega_c \rho_{13} + i\Delta_p \rho_{12} & i\Omega_p^* \rho_{23} - i\Omega_c^* \rho_{12} + i(\Delta_p + \Delta_c) \rho_{13} & \cdots \\ i\Omega_p \rho_{12} - i\Omega_p^* \rho_{21} - i\Omega_c \rho_{23} + i\Omega_c^* \rho_{32} & -i\Omega_p \rho_{13} - i\Omega_c^* (\rho_{22} - \rho_{33}) + i\Delta_c \rho_{23} & \cdots \\ -i\Omega_p^* \rho_{31} + i\Omega_c (\rho_{22} - \rho_{33}) - i\Delta_c \rho_{32} & i\Omega_c \rho_{23} - i\Omega_c^* \rho_{32} & \cdots \end{pmatrix}. \quad (5.83)$$

Sa druge strane, u poglavlju 5.1 je već napomenuto da drugi sabirak sa desne strane iste jednačine opisuje dekoherentne procese. Kombinacijom izraza (5.9) i (5.10) dolazimo do matrične reprezentacije dekoherentnog člana

$$\Lambda \rho = \begin{pmatrix} \lambda_{22}^{(1)} \rho_{22} + \lambda_{33}^{(1)} \rho_{33} & -\lambda_{21} \rho_{12} & -\lambda_{31} \rho_{13} \\ -\lambda_{21} \rho_{21} & \lambda_{33}^{(2)} \rho_{33} - \lambda_{22} \rho_{22} & -\lambda_{32} \rho_{23} \\ -\lambda_{31} \rho_{31} & -\lambda_{32} \rho_{32} & -\lambda_{33} \rho_{33} \end{pmatrix}, \quad (5.84)$$

pri čemu smo element prve vrste i prve kolone pojednostavili stavljajući $\lambda_{11} = 0$, pošto smatramo da je nivo $|1\rangle$ osnovni i ne raspada se na niže nivoe. U skladu sa ranijom diskusijom, a preko jednačina (5.11) i (5.15), ovaj član će se svesti na dva moguća oblika, od kojih se jedan najčešće koristi za opisivanje poluprovodničkih nanostrukture, a drugi u slučaju atomskih gasova (mada ga je moguće koristiti i kod čvrstih tela koja se nalaze na izuzetno niskim temperaturama).

Pažljivim posmatranjem izraza (5.82), (5.83) i (5.84) vidimo da za nedijagonalne članove važi $a_{ij}^* = a_{ji}$, tj. reč je o ermitskim matricama. Zbog toga ovi članovi nisu nezavisni, i dovoljno je pisati

po jednu OB jednačinu za svaki od tih parova – sistem jednačina će se tada zatvoriti pomoću relacija (5.80), što znatno pojednostavljuje pisanje. Ove jednačine su

$$\dot{\rho}_{11} = i \left(\Omega_p^* \rho_{21} - \Omega_p \rho_{12} \right) + \lambda_{22}^{(1)} \rho_{22} + \lambda_{33}^{(1)} \rho_{33}, \quad (5.85)$$

$$\dot{\rho}_{21} = i \Omega_p (\rho_{11} - \rho_{22}) + i \Omega_c^* \rho_{31} - (i \Delta_p + \lambda_{21}) \rho_{21}, \quad (5.86)$$

$$\dot{\rho}_{31} = i \Omega_c \rho_{21} - i \Omega_p \rho_{32} - (i(\Delta_p + \Delta_c) + \lambda_{31}) \rho_{31}, \quad (5.87)$$

$$\dot{\rho}_{32} = i \Omega_c (\rho_{22} - \rho_{33}) - i \Omega_p^* \rho_{31} - (i \Delta_c + \lambda_{32}) \rho_{32}, \quad (5.88)$$

$$\dot{\rho}_{33} = i (\Omega_c \rho_{23} - \Omega_c^* \rho_{32}) - \lambda_{33} \rho_{33}, \quad (5.89)$$

i predstavljaju *OB jednačine za zatvoren sistem sa tri nivoa*. Primetimo da je iz gornjeg sistema izostavljena jednačina za ρ_{22} – ponovo, zbog jednostavnijeg zapisa jednačina, umesto nje koristimo relaciju zatvorenosti (5.81). Alternativno, umesto relacije zatvorenosti može se koristiti njoj ekvivalentan izraz koji se dobija diferenciranjem po vremenu:

$$\dot{\rho}_{22} = -\dot{\rho}_{11} - \dot{\rho}_{33}. \quad (5.90)$$

Dakle, *devet* nepoznatih matričnih elemenata $\rho_{ij}(t)$ dobijaju se rešavanjem sistema koji se sastoji od *pet* OB jednačina (5.85)–(5.89), *tri* relacije (5.80) koje povezuju nedijagonalne elemente, i *jedne* relacije zatvorenosti, koja može biti data bilo preko (5.81) ili (5.90). Ukoliko su sve ostale veličine konstantne, ovako odabrane jednačine čine zatvoren sistem i mogu se, uz poznavanje odgovarajućih početnih uslova $\rho_{ij}(0)$, jednoznačno rešiti.

5.3.2 OB jednačine za otvoren sistem sa tri nivoa

Otvoren sistem sa tri nivoa se karakteriše bazisom $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle, |5\rangle\}$, u kome će matrica gustine biti petodimenziona kvadratna matrica analogna (5.79). Relacija (5.6) će važiti kao i do sada, dok će relacija zatvorenosti (5.5) u razvijenom obliku biti

$$\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} + \rho_{44} + \rho_{55} = 1. \quad (5.91)$$

Ukoliko krenemo od jednačine (5.8) i primenimo postupak analogan onom za zatvoren sistem sa tri nivoa, *OB jednačine za otvoren sistem sa tri nivoa* glasiće:

$$\dot{\rho}_{11} = i \left(\Omega_p^* \rho_{21} - \Omega_p \rho_{12} \right) + \lambda_{22}^{(1)} \rho_{22} + \lambda_{33}^{(1)} \rho_{33} + \lambda_{44}^{(1)} \rho_{44} + \lambda_{55}^{(1)} \rho_{55}, \quad (5.92)$$

$$\dot{\rho}_{21} = i \Omega_p (\rho_{11} - \rho_{22}) + i \Omega_c^* \rho_{31} - (i \Delta_p + \lambda_{21}) \rho_{21}, \quad (5.93)$$

$$\dot{\rho}_{31} = i \Omega_c \rho_{21} - i \Omega_p \rho_{32} - (i(\Delta_p + \Delta_c) + \lambda_{31}) \rho_{31}, \quad (5.94)$$

$$\dot{\rho}_{41} = -i \Omega_p \rho_{42} - \lambda_{41} \rho_{41}, \quad (5.95)$$

$$\dot{\rho}_{51} = -i \Omega_p \rho_{52} - \lambda_{51} \rho_{51}, \quad (5.96)$$

$$\dot{\rho}_{32} = i \Omega_c (\rho_{22} - \rho_{33}) - i \Omega_p^* \rho_{31} - (i \Delta_c + \lambda_{32}) \rho_{32}, \quad (5.97)$$

$$\dot{\rho}_{42} = -i \Omega_p^* \rho_{41} - i \Omega_c \rho_{43} - (i \Delta_p + \lambda_{42}) \rho_{42}, \quad (5.98)$$

$$\dot{\rho}_{52} = -i \Omega_p^* \rho_{51} - i \Omega_c \rho_{53} - (i \Delta_p + \lambda_{52}) \rho_{52}, \quad (5.99)$$

$$\dot{\rho}_{33} = i (\Omega_c \rho_{23} - \Omega_c^* \rho_{32}) - \lambda_{33} \rho_{33}, \quad (5.100)$$

$$\dot{\rho}_{43} = -i \Omega_c^* \rho_{42} + (i(\Delta_p + \Delta_c) - \lambda_{43}) \rho_{43}, \quad (5.101)$$

$$\dot{\rho}_{53} = -i \Omega_c^* \rho_{52} + (i(\Delta_p + \Delta_c) - \lambda_{53}) \rho_{53}, \quad (5.102)$$

$$\dot{\rho}_{44} = \lambda_{33}^{(4)} \rho_{33} - \lambda_{44} \rho_{44}, \quad (5.103)$$

$$\dot{\rho}_{54} = -\lambda_{54}\rho_{54}, \quad (5.104)$$

$$\dot{\rho}_{55} = \lambda_{33}^{(5)}\rho_{33} - \lambda_{55}\rho_{55}, \quad (5.105)$$

gde je dekoherentni član sada zadat kao

$$\Lambda\rho = \begin{pmatrix} \sum_{i=2}^5 \lambda_{ii}^{(1)} \rho_{ii} & -\lambda_{21}\rho_{12} & -\lambda_{31}\rho_{13} & -\lambda_{41}\rho_{14} & -\lambda_{51}\rho_{15} \\ -\lambda_{21}\rho_{21} & \lambda_{33}^{(2)}\rho_{33} - \lambda_{22}\rho_{22} & -\lambda_{32}\rho_{23} & -\lambda_{42}\rho_{24} & -\lambda_{52}\rho_{25} \\ -\lambda_{31}\rho_{31} & -\lambda_{32}\rho_{32} & -\lambda_{33}\rho_{33} & -\lambda_{43}\rho_{34} & -\lambda_{53}\rho_{35} \\ -\lambda_{41}\rho_{41} & -\lambda_{42}\rho_{42} & -\lambda_{43}\rho_{43} & \lambda_{33}^{(4)}\rho_{33} - \lambda_{44}\rho_{44} & -\lambda_{54}\rho_{45} \\ -\lambda_{51}\rho_{51} & -\lambda_{52}\rho_{52} & -\lambda_{53}\rho_{53} & -\lambda_{54}\rho_{54} & \lambda_{33}^{(5)}\rho_{33} - \lambda_{55}\rho_{55} \end{pmatrix}, \quad (5.106)$$

pri čemu je ponovo stavljeno da je $\lambda_{11} = 0$. Vidimo da 14 OB jednačina (5.92)–(5.105), zajedno sa 10 relacija datih preko (5.6) i relacijom zatvorenosti (5.91), daje neophodan broj jednačina za jednoznačno određivanje 25 nepoznatih matičnih elemenata matrice gustine, uz pretpostavku da su ostali parametri u njima konstantne veličine. Naravno, poznavanje početnih uslova $\rho_{ij}(0)$ se podrazumeva.

5.3.3 OB jednačine za sistem sa četiri nivoa

Na kraju, pozabavimo se dobijanjem OB jednačina za sistem sa četiri nivoa, gde je bazis svojstvenih stanja $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\}$, a matrica gustine u tom slučaju četvorodimenziona matrica analogna matrici (5.79). Pored toga, ponovo ističemo da važi (5.6), kao i

$$\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} + \rho_{44} = 1, \quad (5.107)$$

što predstavlja razvijen oblik relacije zatvorenosti (5.5) za sistem sa četiri nivoa. Ukoliko uvedemo dekoherentni član analogno onima u prethodna dva slučaja, on će imati sledeći oblik:

$$\Lambda\rho = \begin{pmatrix} \sum_{i=2}^4 \lambda_{ii}^{(1)} \rho_{ii} & -\lambda_{21}\rho_{12} & -\lambda_{31}\rho_{13} & -\lambda_{41}\rho_{14} \\ -\lambda_{21}\rho_{21} & \lambda_{33}^{(2)}\rho_{33} - \lambda_{22}\rho_{22} & -\lambda_{32}\rho_{23} & -\lambda_{42}\rho_{24} \\ -\lambda_{31}\rho_{31} & -\lambda_{32}\rho_{32} & \lambda_{44}^{(3)}\rho_{44} - \lambda_{33}\rho_{33} & -\lambda_{43}\rho_{34} \\ -\lambda_{41}\rho_{41} & -\lambda_{42}\rho_{42} & -\lambda_{43}\rho_{43} & -\lambda_{44}\rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (5.108)$$

gde je, kao i ranije, $\lambda_{11} = 0$, i gde smo u element druge vrste i druge kolone uvrstili $\lambda_{44}^{(2)} = 0$, što sledi iz (5.16) i (5.17), kao i činjenice da je prelaz $|2\rangle \leftrightarrow |4\rangle$ dipolno zabranjen ($\Gamma_{42} = 0$). Ukoliko, zatim, nastavimo sa procedurom analognom onom za sisteme sa tri nivoa, polazeći ponovo od jednačine (5.8), dobićemo sledeći sistem jednačina:

$$\dot{\rho}_{11} = i\left(\Omega_p^* \rho_{21} - \Omega_p \rho_{12}\right) + \lambda_{22}^{(1)} \rho_{22} + \lambda_{33}^{(1)} \rho_{33} + \lambda_{44}^{(1)} \rho_{44}, \quad (5.109)$$

$$\dot{\rho}_{21} = i\Omega_p (\rho_{11} - \rho_{22}) + i\Omega_c^* \rho_{31} - (i\Delta_p + \lambda_{21}) \rho_{21}, \quad (5.110)$$

$$\dot{\rho}_{31} = i\Omega_c \rho_{21} + i\Omega_d^* \rho_{41} - i\Omega_p \rho_{32} - (i(\Delta_p + \Delta_c) + \lambda_{31}) \rho_{31}, \quad (5.111)$$

$$\dot{\rho}_{41} = i\Omega_d \rho_{31} - i\Omega_p \rho_{42} - (i(\Delta_p + \Delta_c + \Delta_d) + \lambda_{41}) \rho_{41}, \quad (5.112)$$

$$\dot{\rho}_{32} = i\Omega_c (\rho_{22} - \rho_{33}) + i\Omega_d^* \rho_{42} - i\Omega_p^* \rho_{31} - (i\Delta_c + \lambda_{32}) \rho_{32}, \quad (5.113)$$

$$\dot{\rho}_{42} = i\Omega_d \rho_{32} - i\Omega_c \rho_{43} - i\Omega_p^* \rho_{41} - (i(\Delta_c + \Delta_d) + \lambda_{42}) \rho_{42}, \quad (5.114)$$

$$\dot{\rho}_{33} = i(\Omega_c \rho_{23} - \Omega_c^* \rho_{32}) - i(\Omega_d \rho_{34} - \Omega_d^* \rho_{43}) + \lambda_{44}^{(3)} \rho_{44} - \lambda_{33} \rho_{33}, \quad (5.115)$$

$$\dot{\rho}_{43} = i\Omega_d (\rho_{33} - \rho_{44}) - i\Omega_c^* \rho_{42} - (i\Delta_d + \lambda_{43}) \rho_{43}, \quad (5.116)$$

$$\dot{\rho}_{44} = i(\Omega_d \rho_{34} - \Omega_d^* \rho_{43}) - \lambda_{44} \rho_{44}. \quad (5.117)$$

Ovih devet jednačina predstavljaju *OB jednačine za sistem sa četiri nivoa*. Ukoliko su sve druge veličine konstantne, zajedno sa šest relacija (5.6) i relacijom zatvorenosti (5.107) čine zatvoren sistem jednačina za nalaženje 16 nepoznatih veličina $\rho_{ij}(t)$, pri čemu je neophodno poznavanje i isto toliko početnih uslova.

5.4 Prostiranje elektromagnetnih talasa

Kao što smo u prethodnom poglavlju naglasili, OB jednačine činiće zatvoren sistem za nalaženje matrice elementa matrice gustine ukoliko su sve preostale veličine konstantne. Među njima se nalaze i Rabijeve frekvencije odgovarajućih polja, koje mogu da budu funkcije prostornih koordinata i vremena. Zbog toga je potrebno proširiti ovaj sistem jednačinama za elektromagnetna polja – *propagacionim jednačinama*. Kako bismo opisali prostiranje elektromagnetnih talasa kroz željenu sredinu, pođimo najpre od činjenice da se ukupno elektromagnetno polje koje interaguje sa materijalnom sredinom može zapisati preko rezultujućeg vektora električnog polja kao

$$\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \vec{\mathcal{E}}_i(\mathbf{r}, t), \quad (5.118)$$

gde su sa $\vec{\mathcal{E}}_i(\mathbf{r}, t)$ označeni vektori električnog polja odgovarajućih komponenti. Konkretno, za oba sistema sa tri nivoa, imaćemo dve komponente, pa će biti $i = p, c$, dok će sistem sa četiri nivoa sadržati tri komponente, odnosno $i = p, c, d$. Kao što je u poglavlju 5.1 već diskutovano, za potpun opis propagacije elektromagnetnih talasa nije nam neophodno nalaženje vektora magnetnog polja – ukoliko je potrebno, on se može dobiti pomoću vektora električnog polja. Polazeći od Maksvelovih jednačina za slobodno elektromagnetno polje u supstancijalnoj sredini [8,259], dobija se *nelinearna talasna jednačina* koju mora da zadovoljava vektor električnog polja pripadajućeg elektromagnetnog talasa:

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{P}}}{\partial t^2}, \quad (5.119)$$

gde je, radi jednostavnijeg zapisa, izostavljena zavisnost od prostornih koordinata i vremena. Veličina $\vec{\mathcal{P}}(\mathbf{r}, t)$ predstavlja *vektor polarizacije* sredine u odnosu na primenjeno polje, tj. odziv materijalne sredine na spoljašnje elektromagnetno polje čijem dejstvu se ona podvrgava. Gornja jednačina se naziva nelinearnom zbog toga što je, sasvim uopšte, veza između vektora polarizacije i električnog polja nelinearna, što je detaljno pojašnjeno u poglavlju 5.6. Za vektor polarizacije je takođe moguće pisati

$$\vec{\mathcal{P}}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \vec{\mathcal{P}}_i(\mathbf{r}, t), \quad (5.120)$$

gde su njegove komponente analogne onima u slučaju električnog polja. Budući da važe relacije (5.118) i (5.120), njihovo ubacivanje u (5.119) će dati nelinearne talasne jednačine za svaku od komponenti:

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}}_i - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}_i}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{P}}_i}{\partial t^2}, \quad (5.121)$$

gde je ∇^2 Laplasov operator, $i = p, c$ za sisteme sa tri nivoa, odnosno $i = p, c, d$ za sistem sa četiri nivoa. Krajnji cilj ovog poglavlja biće dobijanje propagacionih jednačina za svaku od komponenti, što

implicira da će nam polazna jednačina biti (5.121). Ipak, radi jednostavnijeg pisanja, izostavićemo indeks i iz oznaka za vektore električnog polja i polarizacije i faktički krenuti od jednačine (5.119) – dobijeni rezultati važiće za svaku komponentu ponaosob. Kada se za to bude ukazala potreba, vratićemo se na razmatranje svake od komponenti pojedinačno, i krajnje jednačine biće zapisane posebno za sondirajuće, kontrolno, odnosno dodatno polje.

5.4.1 Nelinearna talasna jednačina za envelope

Vratimo se na jednačine (5.1)–(5.3) kojima je zadat oblik električnog polja svakog od relevantnih elektromagnetnih talasa. U skladu sa gornjom diskusijom, izostavićemo indekse koji označavaju komponente i dobiti univerzalan izraz

$$\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right) = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \text{c.c.}, \quad (5.122)$$

koji opisuje sva tri posmatrana polja. S obzirom na to da vektor polarizacije predstavlja odziv sredine na električno polje, validno je pretpostaviti isti matematički oblik za njegove komponente kao u gornjoj jednačini:

$$\vec{\mathcal{P}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{P}^*(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right) = \frac{1}{2} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \text{c.c.}, \quad (5.123)$$

gde su ponovo, radi jednostavnosti, izostavljeni odgovarajući indeksi, i gde c.c. označava kompleksno konjugovanu vrednost. U gornjim izrazima, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ i $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ predstavljaju envelope vektora električnog polja, odnosno polarizacije, respektivno, \mathbf{k} je talasni vektor a ω frekvencija elektromagnetnog talasa.

Pridružimo sada ovim poljima Dekartov koordinatni sistem, takav da mu je z -osa orijentisana duž pravca i smera prostiranja talasa. U tom slučaju imamo da je $\mathbf{k} = k \vec{e}_z$, gde je k intenzitet talasnog vektora (talasni broj), a \vec{e}_z jedinični vektor z -ose. Na ovaj način, gornji izrazi se pojednostavljaju tako da je $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kz$. Zamenimo sada izraze (5.122) i (5.123) u nelinearnu talasnu jednačinu (5.119). Napišimo, najpre, prvi sabirak u (5.119) kao:

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{\mathcal{E}} = \nabla_{\perp}^2 \vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial z^2}, \quad (5.124)$$

gde smo najpre Laplasov operator zapisali u Dekartovim koordinatama, i gde je $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ tzv. „transverzalni” laplasijan. Sabirak koji sadrži „transverzalni” laplasijan sada dobija oblik

$$\nabla_{\perp}^2 \vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \left(\nabla_{\perp}^2 \mathbf{E} \right) e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.}, \quad (5.125)$$

jer ovaj operator deluje samo na envelope $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. Da bismo odredili drugi sabirak u (5.124), potražimo najpre prvi parcijalni izvod vektora električnog polja po z koordinati:

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} + ik \mathbf{E} \right) e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.}, \quad (5.126)$$

gde smo se poslužili pravilom izvoda proizvoda dve funkcije. Nastavljajući proceduru, a potom sređujući dobijeni izraz, za drugi izvod dobijamo

$$\frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial z^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} - k^2 \mathbf{E} \right) e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.} \quad (5.127)$$

Na sličan način, traženjem prvog, a potom i drugog parcijalnog izvoda vektora električnog polja po vremenu, nalazimo

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - i\omega \mathbf{E} \right) e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.}, \quad (5.128)$$

odnosno

$$\frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - 2i\omega \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \omega^2 \mathbf{E} \right) e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.}, \quad (5.129)$$

čime smo (do na multiplikativni faktor) razvili drugi sabirak u jednačini (5.119). Analogno tome, za vektor polarizacije konačno dobijamo

$$\frac{\partial^2 \vec{\mathcal{P}}}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} - 2i\omega \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \omega^2 \mathbf{P} \right) e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.}, \quad (5.130)$$

što nam daje razvijen oblik člana sa desne strane znaka jednakosti u (5.119).

Sledeći korak je zamena izraza (5.124), (5.125), (5.127), (5.129) i (5.130) u (5.119). Pažljivim posmatranjem ovih izraza, vidimo da će nelinearna talasna jednačina u razvijenom obliku sadržati dva zasebna dela, pri čemu je jedan kompleksno konjugovana vrednost drugog. Zbog toga je dovoljno da, u procesu izvođenja propagacionih jednačina, zadržimo samo one delove gornjih izraza gde figurišu \mathbf{E} i \mathbf{P} . Na taj način dobijaju se *propagacione jednačine za envelope* svih komponenti od interesa. Delovi koje smo izostavili dovedeće do drugog seta propagacionih jednačina, ovoga puta za \mathbf{E}^* i \mathbf{P}^* , koje neće dovesti ni do kakvih novih jednačina. Rezultat je

$$\nabla_{\perp}^2 \mathbf{E} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} - k^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - 2i\omega \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \omega^2 \mathbf{E} \right) = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} - 2i\omega \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \omega^2 \mathbf{P} \right), \quad (5.131)$$

gde su izostavljeni eksponencijalni članovi koji se javljaju i sa jedne i sa druge strane znaka jednakosti, kao i faktori 1/2 kojim se množe svi članovi. U ovoj disertaciji, od interesa će biti prostiranje takve svetlosti čija envelope ne zavisi od transverzalnih koordinata x i y , dakle $\mathbf{E} = \mathbf{E}(z, t)$. Drugim rečima, posmatraćemo prostiranje elektromagnetnih talasa kroz vrlo uske uzorke, gde transverzalni (lateralni) efekti neće doći do izražaja. Ova činjenica nam omogućava da stavimo

$$\nabla_{\perp}^2 \mathbf{E} = 0. \quad (5.132)$$

Imajući to u vidu, jednačina (5.131) postaje

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} - k^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{2i\omega}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \frac{2i\omega}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{\omega^2}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{P}, \quad (5.133)$$

gde je dobijeni izraz neznatno preuređen.

Kako bismo dalje pojednostavili nelinearnu talasnu jednačinu, primenimo *aproksimaciju sporo promenljive envelope* (ASPE, engl. slowly-varying envelope approximation, SVEA) [8]. Ova aproksimacija posledica je pretpostavke da se envelope svih talasa (ovde su to i vektor električnog polja i vektor polarizacije, koji je takođe zadat u formi talasa) vrlo malo menjaju u prostoru i vremenu, u poređenju sa talasnom dužinom i frekvencijom tih talasa. Matematičkim jezikom, ASPE će biti iskazana na sledeći način:

$$\left| \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} \right| \ll k \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \right| \ll k \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|, \quad (5.134)$$

$$\left| \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \right| \ll \omega \left| \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right|, \quad \left| \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right| \ll \omega |\mathbf{P}|, \quad (5.135)$$

što implicira da u izrazu (5.133) možemo zanemariti sve druge izvode, kao i prvi izvod vektora polarizacije po vremenu. Kao rezultat ovog zanemarivanja, nakon neznatnog sređivanja, dobijamo konačno

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = i \frac{\omega}{2\epsilon_0 c} \mathbf{P}, \quad (5.136)$$

pri čemu je iskorišćena činjenica da je $k = \omega/c$.¹³

5.4.2 Propagacione jednačine za komponente

Podsetimo se da propagaciona jednačina (5.136) važi za svaku od komponenti elektromagnetnog polja koje učestvuju u interakciji sa materijalnom sredinom. Kako se u ovoj disertaciji pojavljuju sondirajuće, kontrolno i dodatno polje, to ćemo ovu jednačinu zapisati za svako od ovih polja pojedinačno, u skladu sa ranije uvedenim oznakama:

$$\frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial t} = i \frac{\omega_p}{2\epsilon_0 c} \mathbf{P}_p, \quad (5.137)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_c}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_c}{\partial t} = i \frac{\omega_c}{2\epsilon_0 c} \mathbf{P}_c, \quad (5.138)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_d}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_d}{\partial t} = i \frac{\omega_d}{2\epsilon_0 c} \mathbf{P}_d. \quad (5.139)$$

Kako bismo dobili željeni oblik propagacionih jednačina, koncentrišimo se na ukupni vektor polarizacije materijalne sredine. U najopštijem slučaju, kada postoje sve tri komponente polja, ovaj vektor se može prikazati kao $\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}_p + \vec{\mathcal{P}}_c + \vec{\mathcal{P}}_d$, gde je jasno da $\vec{\mathcal{P}}_p$, $\vec{\mathcal{P}}_c$ i $\vec{\mathcal{P}}_d$ predstavljaju polarizaciju, tj. odgovor sredine na primenjeno sondirajuće, kontrolno, odnosno dodatno polje, respektivno. Vektor polarizacije se, podsetimo, definiše kao ukupni električni dipolni moment po jedinici zapremine materijalne sredine koja je izložena dejstvu električnog polja. Budući da električni dipolni momenti pojedinačnih atoma sredine mogu da variraju, jer je reč o *mikroskopskoj* veličini koja zavisi od raznih faktora (relativno kretanje između atoma, sudari ili razni spoljašnji uticaji), za dobijanje *makroskopske* veličine kakva je ukupni vektor polarizacije potrebno je primeniti zakonitosti kvantne statistike. Tada se nalaženje vektora polarizacije svodi na usrednjavanje električnog dipolnog momenta atoma po ansamblu, tj. po mnoštvu prisutnih atoma sredine. U tu svrhu iskoristićemo ponovo formalizam matrice gustine, i formulu (5.7) za očekivanu vrednost proizvoljne opservable. Dakle, vodeći se definicijom vektora polarizacije i rezultata kvantne statistike, imamo

$$\vec{\mathcal{P}} = \mathcal{N} \langle \mathbf{d} \rangle = \mathcal{N} \text{Tr}(\rho \mathbf{d}), \quad (5.140)$$

gde je \mathcal{N} broj atoma po jedinici zapremine sredine (atomska gustina).

¹³Strogo govoreći, veza intenziteta talasnog vektora i frekvencije bi trebalo da bude $k = n\omega/c$, gde je n indeks prelamanja sredine kroz koju se talas prostire. Međutim, u daljem radu ćemo pretpostaviti da se laseri kreću kroz sredinu čiji je indeks prelamanja jednak jedinici, odakle sledi izraz naveden u glavnom tekstu.

U poglavlju 5.2 detaljno je prikazano izvođenje hamiltonijana za sistem svetlost–materija, gde su najpre izvršene EDA i ART, a potom i prelazak na korotirajući bazis. Nakon toga, u poglavlju 5.3 izvedene su i OB jednačine za svaku konfiguraciju ponaosob, koristeći dobijene hamiltonijane, kao i matrice gustine za odgovarajuće konfiguracije. Pri tome je prećutno pretpostavljeno da je i matrica gustine za svaki od tri slučaja od interesa, kao uostalom i hamiltonijan, zapisana u korotirajućem bazisu.¹⁴ Dakle, za svaku od komponenti je (prećutno) izvršena unitarna transformacija U' , zadata preko (5.41) za zatvoren sistem sa tri nivoa i analogno za preostale dve konfiguracije. Zbog toga je potrebno da izraz (5.140) zapišemo korektnije,

$$\vec{\mathcal{P}} = \mathcal{N}\langle \mathbf{d} \rangle = \mathcal{N}\text{Tr}(\sigma \mathbf{d}), \quad (5.141)$$

gde je

$$\sigma = U'^{\dagger} \sigma^{(\text{KB})} U' = U'^{\dagger} \rho U' \quad (5.142)$$

matrica gustine zapisana u laboratorijskom, a ne korotirajućem bazisu. Pored toga, vektor polarizacije mora biti zapisan u EDA, što znači da će u izraz (5.123) moći da se stavi $e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \approx 1$ za svaku od komponenti. Dalje izvođenje propagacionih jednačina za envelope zavisiće od konfiguracije za koju se opredelimo. Konkretno, kod oba sistema sa tri nivoa postojaće samo sondirajuće i kontrolno polje, pa ćemo imati dve propagacione jednačine. Kod sistema sa četiri nivoa, sistem propagacionih jednačina dopuniće se jednačinom za dodatno polje. Kao i do sada, detaljan postupak sprovedemo za zatvoren sistem sa tri nivoa, dok će se za ostala dva propagacione jednačine dobiti analogno, pri čemu će iste propagacione jednačine za sondirajuće i kontrolno polje važiti u sva tri slučaja.

Zatvoren sistem sa tri nivoa karakteriše se matricom gustine i operatorom električnog dipolnog momenta zadatim preko (5.79) i (5.30), respektivno. Uzimajući u obzir da će u laboratorijskom bazisu matrica gustine σ moći da se zapiše na analogan način kao i ρ , kao i da je $\mathbf{d}_{13} = \mathbf{d}_{31} = 0$ jer je reč o zabranjenim prelazima, tada će vektor polarizacije (5.141) biti

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{P}} &= \mathcal{N}\text{Tr} \left(\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{d}_{12} & 0 \\ \mathbf{d}_{21} & 0 & \mathbf{d}_{23} \\ 0 & \mathbf{d}_{32} & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \mathcal{N}\text{Tr} \begin{pmatrix} \sigma_{12}\mathbf{d}_{21} & \sigma_{11}\mathbf{d}_{12} + \sigma_{13}\mathbf{d}_{32} & \sigma_{12}\mathbf{d}_{23} \\ \sigma_{22}\mathbf{d}_{21} & \sigma_{21}\mathbf{d}_{12} + \sigma_{23}\mathbf{d}_{32} & \sigma_{22}\mathbf{d}_{23} \\ \sigma_{32}\mathbf{d}_{21} & \sigma_{31}\mathbf{d}_{12} + \sigma_{33}\mathbf{d}_{32} & \sigma_{32}\mathbf{d}_{23} \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{N}(\sigma_{12}\mathbf{d}_{21} + \sigma_{21}\mathbf{d}_{12} + \sigma_{23}\mathbf{d}_{32} + \sigma_{32}\mathbf{d}_{23}). \end{aligned} \quad (5.143)$$

Matricu gustine σ za sistem sa tri nivoa nalazimo zamenom (5.41) i (5.43) u (5.142), pri čemu je efekat ove transformacije već diskutovan i detaljno objašnjen u Dodatku A.2. Rezultat je

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12}e^{-i(\alpha-\beta)t} & \rho_{13}e^{-i(\alpha-\gamma)t} \\ \rho_{21}e^{i(\alpha-\beta)t} & \rho_{22} & \rho_{23}e^{-i(\beta-\gamma)t} \\ \rho_{31}e^{i(\alpha-\gamma)t} & \rho_{32}e^{i(\beta-\gamma)t} & \rho_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12}e^{i\omega_p t} & \rho_{13}e^{i(\omega_p+\omega_c)t} \\ \rho_{21}e^{-i\omega_p t} & \rho_{22} & \rho_{23}e^{i\omega_c t} \\ \rho_{31}e^{-i(\omega_p+\omega_c)t} & \rho_{32}e^{-i\omega_c t} & \rho_{33} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.144)$$

¹⁴Primitimo da nismo naveli da je na matricu gustine primenjena EDA, odnosno ART. Sa jedne strane, EDA važi univerzalno, za sve relevantne članove, pa nikakve dalje modifikacije matrice gustine nisu neophodne. Sa druge strane, ART se prosto ne može primeniti, jer se u izrazu za ρ , pri prelasku na interakcionu sliku, neće javiti brzo oscilujuć članovi kao kod hamiltonijana, pa je nema smisla ni vršiti, a samim tim nema potrebe ni prelaziti na interakcionu sliku. Oba ova operatora će na kraju biti zapisana u istoj, Šredingerovoj slici.

pri čemu su iskorišćeni izrazi (5.47)–(5.49). Zamenom u (5.143) dobijamo

$$\vec{\mathcal{P}} = \mathcal{N}(\rho_{12}e^{i\omega_p t} \mathbf{d}_{21} + \rho_{21}e^{-i\omega_p t} \mathbf{d}_{12} + \rho_{23}e^{i\omega_c t} \mathbf{d}_{32} + \rho_{32}e^{-i\omega_c t} \mathbf{d}_{23}). \quad (5.145)$$

Sa druge strane, vektor polarizacije se može zapisati kao $\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}_p + \vec{\mathcal{P}}_c$, što, uz pomoć (5.123) i činjenice da je izvršena EDA, daje

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} \mathbf{P}_p e^{-i\omega_p t} + \frac{1}{2} \mathbf{P}_p^* e^{i\omega_p t} + \frac{1}{2} \mathbf{P}_c e^{-i\omega_c t} + \frac{1}{2} \mathbf{P}_c^* e^{i\omega_c t}. \quad (5.146)$$

Izjednačavanjem (5.145) i (5.146) a zatim uočavanjem članova koji stoje uz iste eksponente sa leve i desne strane, sledi

$$\mathbf{P}_p = 2\mathcal{N} \mathbf{d}_{12} \rho_{21} \quad (5.147)$$

za envelopu vektora polarizacije u odnosu na sondirajuće polje, odnosno

$$\mathbf{P}_c = 2\mathcal{N} \mathbf{d}_{23} \rho_{32} \quad (5.148)$$

za envelopu vektora polarizacije u odnosu na kontrolno polje. Preostale jednakosti smo izostavili, jer se dobijaju izrazi kompleksno konjugovani gornjim izrazima. Zamenom (5.147) i (5.148) u (5.137) i (5.138), respektivno, za propagacione jednačine dobijamo

$$\frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial t} = i \frac{\mathcal{N} \omega_p \mathbf{d}_{12}}{\varepsilon_0 c} \rho_{21}, \quad (5.149)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_c}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_c}{\partial t} = i \frac{\mathcal{N} \omega_c \mathbf{d}_{23}}{\varepsilon_0 c} \rho_{32}, \quad (5.150)$$

za zatvoren sistem sa tri nivoa. Množenjem gornjih izraza sa $\mathbf{d}_{21}/(2\hbar)$ i $\mathbf{d}_{32}/(2\hbar)$, respektivno, imajući u vidu definicije Rabijevih frekvencija (5.53) za ova dva polja, kao i činjenicu da je $\mathbf{d}_{ij} \cdot \mathbf{d}_{ji} = \mathbf{d}_{ij} \cdot \mathbf{d}_{ij}^* = |\mathbf{d}_{ij}|^2$, dobijamo

$$\frac{\partial \Omega_p}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Omega_p}{\partial t} = i \frac{\mathcal{N} \omega_p |\mathbf{d}_{21}|^2}{2\varepsilon_0 \hbar c} \rho_{21}, \quad (5.151)$$

$$\frac{\partial \Omega_c}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Omega_c}{\partial t} = i \frac{\mathcal{N} \omega_c |\mathbf{d}_{32}|^2}{2\varepsilon_0 \hbar c} \rho_{32}. \quad (5.152)$$

U nastavku disertacije ćemo, iz razloga konzistentnosti sa oznakama iz poglavlja 5.3, koristiti ove propagacione jednačine u kojima kao nepoznate veličine figurišu Rabijeve frekvencije $\Omega_p(z, t)$ i $\Omega_c(z, t)$.

Kada je reč o otvorenom sistemu sa tri nivoa, ovde je potrebno poći od operatora električnog dipolnog momenta i matrice σ u (petodimenzionoj) matricnoj reprezentaciji. Nakon ubacivanja tih izraza u (5.141), matricnog množenja i nalaženja traga dobijene matrice, imaćemo

$$\vec{\mathcal{P}} = \mathcal{N}(\sigma_{12} \mathbf{d}_{21} + \sigma_{21} \mathbf{d}_{12} + \sigma_{23} \mathbf{d}_{32} + \sigma_{32} \mathbf{d}_{23}), \quad (5.153)$$

što je izraz identičan izrazu (5.143). Unitarna transformacija U' , neophodna za nalaženje veze između σ i ρ , sada je data izrazom (5.58), odakle je lako naći njoj inverznu transformaciju. Na ovom mestu nećemo davati izraze za svaki od matricnih elemenata matrice gustine u laboratorijskom bazu – dovoljno je osvrnuti se samo na one koji se pojavljuju u (5.153). Lako se pokazuje da se

ovi matricni elementi transformišu na isti način kao u slučaju zatvorenog sistema, što nas ponovo dovodi do izraza (5.145). Sa druge strane, kako se i ovde elektromagnetno polje sastoji od dve komponente, vektor polarizacije je ponovo dat relacijom (5.146). Izjednačavanjem (5.145) i (5.146), uz izjednačavanje članova koji stoje uz iste eksponente, za envelope vektora polarizacije sondirajućeg i kontrolnog talasa ponovo dobijamo jednačine (5.147) i (5.148), respektivno. Ovo praktično znači da su propagacione jednačine za sondirajuće i kontrolno polje *identične* onima za zatvoren sistem sa tri nivoa – (5.149) i (5.150) za envelope električnog polja, odnosno (5.151) i (5.152) za odgovarajuće Rabijeve frekvencije, koje su definisane na isti način kao i kod zatvorenog sistema.

Konačno, kod sistema sa četiri nivoa, koji se opisuje pomoću operatora električnog dipolnog momenta i matrice σ u četvorodimenzionoj matricnoj reprezentaciji, jednačina (5.141) glasi:

$$\vec{\mathcal{P}} = \mathcal{N}(\sigma_{12}\mathbf{d}_{21} + \sigma_{21}\mathbf{d}_{12} + \sigma_{23}\mathbf{d}_{32} + \sigma_{32}\mathbf{d}_{23} + \sigma_{34}\mathbf{d}_{43} + \sigma_{43}\mathbf{d}_{34}), \quad (5.154)$$

pri čemu su, iz istih razloga kao ranije, izostavljeni članovi koje nijedno od tri primenjena polja ne pobuđuje. Nakon primene unitarne transformacije U' i njoj inverzne transformacije na analogan način kao gore, lako vidimo da se matricni elementi koji su figurisali u prethodnim izrazima transformišu isto kao do sada, dok ρ_{43} u laboratorijskom bazu dobija oblik $\sigma_{43} = \rho_{43}e^{i(\gamma-\delta)t} = \rho_{43}e^{-i\omega_d t}$, gde smo se poslužili jednačinama (5.71) i (5.72) (jasno je da se σ_{34} dobija kompleksnim konjugovanjem ovog izraza). Rezultat je

$$\vec{\mathcal{P}} = \mathcal{N}(\rho_{12}e^{i\omega_p t}\mathbf{d}_{21} + \rho_{21}e^{-i\omega_p t}\mathbf{d}_{12} + \rho_{23}e^{i\omega_c t}\mathbf{d}_{32} + \rho_{32}e^{-i\omega_c t}\mathbf{d}_{23} + \rho_{34}e^{i\omega_d t}\mathbf{d}_{43} + \rho_{43}e^{-i\omega_d t}\mathbf{d}_{34}). \quad (5.155)$$

Sa druge strane, kako elektromagnetno polje sada čine tri komponente, u EDA će važiti

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}\mathbf{P}_p e^{-i\omega_p t} + \frac{1}{2}\mathbf{P}_p^* e^{i\omega_p t} + \frac{1}{2}\mathbf{P}_c e^{-i\omega_c t} + \frac{1}{2}\mathbf{P}_c^* e^{i\omega_c t} + \frac{1}{2}\mathbf{P}_d e^{-i\omega_d t} + \frac{1}{2}\mathbf{P}_d^* e^{i\omega_d t}, \quad (5.156)$$

pa će se, izjednačavanjem poslednja dva izraza, slično kao do sada, dobiti jednačine (5.147) i (5.148), kao i jedna dodatna jednačina

$$\mathbf{P}_d = 2\mathcal{N}\mathbf{d}_{34}\rho_{43}. \quad (5.157)$$

Vidimo da će propagacione jednačine za sondirajuće i kontrolno polje ponovo biti date izrazima (5.149) i (5.150), odnosno (5.151) i (5.152). Naravno, ovde je potrebno dopuniti sistem jednačina propagacionom jednačinom za dodatno polje, koja se dobija zamenom (5.157) u (5.139), što daje

$$\frac{\partial \mathbf{E}_d}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_d}{\partial t} = i \frac{\mathcal{N}\omega_d \mathbf{d}_{34}}{\varepsilon_0 c} \rho_{43}. \quad (5.158)$$

Ukoliko se, dalje, iskoristi relacija (5.76) gde se definiše Rabijeva frekvencija dodatnog polja, množenjem gornjeg izraza sa $\mathbf{d}_{43}/(2\hbar)$ dobijamo

$$\frac{\partial \Omega_d}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Omega_d}{\partial t} = i \frac{\mathcal{N}\omega_d |\mathbf{d}_{43}|^2}{2\varepsilon_0 \hbar c} \rho_{43}, \quad (5.159)$$

što predstavlja propagacionu jednačinu za dodatno polje, gde je Rabijeva frekvencija $\Omega_d(z, t)$ nepoznata funkcija koju treba odrediti.

Sumirajmo sada dobijene rezultate. Vidimo da propagacione jednačine za sondirajuće i kontrolno polje, (5.151) i (5.152), imaju isti oblik za sve tri konfiguracije od interesa. Sa druge strane, kod

sistema sa četiri nivoa se javlja i propagaciona jednačina (5.159) za dodatno polje. Sve tri jednačine matematički imaju isti oblik, sa jasno uočljivim razlikama. U svakoj od tri jednačine, sa desne strane znaka jednakosti javlja se nelinearni član (zbog čega se ove nelinearne talasne jednačine tako i zovu), u kome figuriše frekvencija odgovarajućeg talasa. Pored toga, u propagacionoj jednačini za svako od tri polja figurišu matrični elementi električnog dipolnog momenta, odnosno matrice gustine, i to upravo za prelaze koje ta polja pobuđuju. Kako su sve tri propagacione jednačine spregnute sa odgovarajućim matričnim elementima operatora gustine, to je jednačinama za određivanje nepoznatih funkcija $\Omega_p(z, t)$, $\Omega_c(z, t)$ i $\Omega_d(z, t)$, pored odgovarajućih početnih/graničnih uslova, potrebno pridodati i OB jednačine za odgovarajuću konfiguraciju.

5.5 Maksvel-Blohove jednačine u raznim sredinama

U ovom poglavlju ćemo sumirati rezultate do kojih smo došli u ovoj Glavi. Pokazali smo da se interakcija svetlosti i materije može opisati preko OB jednačina za evoluciju matričnih elemenata matrice gustine koji karakterišu materijalnu sredinu, i propagacionih jednačina za elektromagnetna polja koja sa tom sredinom interaguju. Radi jednostavnosti, umesto da prikazemo sve OB jednačine, sistem jednačina kompletirali smo relacijom zatvorenosti i vezom između nedijagonalnih elemenata matrice gustine. Broj ovih jednačina, kao i propagacionih jednačina, zavisiće od toga koju konfiguraciju posmatramo. Sve ove jednačine mogu se objediniti pod jednim jedinstvenim imenom – *Maksvel-Blohove jednačine* (MB jednačine, engl. Maxwell-Bloch equations, MBE), i ovaj naziv ćemo koristiti praktično kroz čitavu disertaciju. Pored toga, zadržaćemo se detaljno na diskusiji dekoherentnog člana u (5.8), zato što njegov oblik direktno zavisi od prirode materijalne sredine, i prodiskutovati u kojim situacijama se opšti oblik zadat jednačinama (5.11) i (5.15) svodi na posebne slučajeve od interesa.

Krenimo najpre od zatvorenog sistema sa tri nivoa. Ovde u sistem MB jednačina ulaze OB jednačine (5.85)–(5.89), zatim (5.80) i relacija zatvorenosti (5.81), i na posletku propagacione jednačine (5.151) i (5.152). Ovih 11 jednačina potpadaju, dakle, pod *MB jednačine za zatvoren sistem sa tri nivoa*, čije rešenje je 11 funkcija prostornih koordinata i vremena, $\rho_{ij}(z, t)$ (ukupno 9 matričnih elemenata), $\Omega_p(z, t)$ i $\Omega_c(z, t)$.

Kombinovanjem OB jednačina (5.92)–(5.105) i njenih „dopuna” (5.6) i (5.91) sa propagacionim jednačinama (5.151) i (5.152) dobijamo *MB jednačine za otvoren sistem sa tri nivoa*. Ovih jednačina ima 27 i služe za dobijanje isto toliko funkcija, $\rho_{ij}(z, t)$ (njih 25), $\Omega_p(z, t)$ i $\Omega_c(z, t)$.

Na posletku, navedimo i to da u sistem *MB jednačina za sistem sa četiri nivoa*, njih 19, ulaze jednačine (5.109)–(5.117), zatim (5.80) i (5.81), i napokon propagacione jednačine (5.151), (5.152) i (5.159). Ove jednačine služe za određivanje 19 nepoznatih funkcija, $\rho_{ij}(z, t)$ (ukupno 16 funkcija), $\Omega_p(z, t)$, $\Omega_c(z, t)$ i $\Omega_d(z, t)$.

Matematički gledano, MB jednačine predstavljaju sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda po vremenu (OB jednačine) i nelinearnih talasnih jednačina u kojima figurišu oba prva parcijalna izvoda – i po t i po z (propagacione jednačine), i koje pripadaju tipu tzv. *advekcioni jednačina* [262]. Rešavanje ovih jednačina se mora upotpuniti poznavanjem *početnih i graničnih uslova*, što su u našem slučaju $\rho_{ij}(z, 0)$, $\Omega_p(0, t)$, $\Omega_c(0, t)$ i $\Omega_d(0, t)$, u slučaju da nije drugačije naznačeno.¹⁵ Nakon toga, proces rešavanja može ići u dva pravca: (1) *analitički*, što nije nimalo

¹⁵Većina problema kojima ćemo se u okviru ove disertacije baviti koristiće unapred zadate oblike za kontrolno i dodatno polje, pa će propagacione jednačine za ova polja izostati, a samim tim i odgovarajući granični uslovi.

jednostavan zadatak, budući da imamo veliki broj spregnutih diferencijalnih jednačina, te se moramo koristiti raznim aproksimacijama i (2) *numerički*, pomoću postojećih numeričkih metoda za rešavanje ovakvog tipa jednačina. U ovoj disertaciji će velika pažnja biti posvećena i jednom i drugom pravcu rešavanja MB jednačina.

5.5.1 MB jednačine u slučaju dominantne elektron-fononske interakcije

Pobrojane MB jednačine važe za sistem svetlost–materija u kome nije precizirana priroda materijalne sredine sa kojom laseri interaguju. Uticaj sredine ogleda se u drugom članu sa desne strane Liuvilove jednačine (5.8), koji opisuje dekoherentne procese. U različitoj literaturi mogu se javiti različiti načini za uvođenje dekoherentnog člana, pri čemu smo se mi opredelili za najopštije moguće izraze (5.84), (5.106) i (5.108), za zatvoren i otvoren sistem sa tri nivoa, kao i sistem sa četiri nivoa, respektivno.

Izvori dekoherencije mogu biti brojni i njihovo detaljno razmatranje izlazi van okvira ove disertacije. Napomenimo samo da se među najčešće izvore ubrajaju sudari između atoma, spontana emisija sa viših na niže nivoe, kao i elektron-fononska interakcija u čvrstim telima. Tako će u razređenim gasovima i parama, gde je međuatomska interakcija slaba, dominirati *spontana emisija*, pa se dekoherencija može kompletno prikazati preko *analitičkih* izraza datih u narednom odeljku. Nasuprot tome, spontana emisija je u čvrstim telima samo jedan od mnoštva procesa raspada koji u konačnom dovode do gubitka koherentnih svojstava sistema svetlost–materija. Razlog za ovo je, sa jedne strane, taj što atomi više nisu dovoljno daleko jedni od drugih da bi se njihova međusobna interakcija zanemarila, a sa druge strane činjenica da elektroni u atomima mogu da interaguju i sa kristalnom rešetkom. Prvi navedeni izazov se rešava uvođenjem aproksimacije efektivne mase o kojoj će više biti reči u Glavi 7, dok se drugi obično pominje pod nazivom *elektron-fononska interakcija* (interakcija elektrona sa fononima kristalne rešetke) čije modelovanje izlazi iz okvira disertacije. Zbog svega rečenog, koeficijenti raspada karakteristični za čvrsta tela mogu imati veliki opseg vrednosti – počev od 10^6 Hz, što su vrednosti karakteristične za koeficijente spontane emisije, pa i do 10^{11} Hz, gde je uticaj spontane emisije zanemarljiv [105, 106, 263]. Zbog svoje složenosti, ove vrednosti se, za razliku od koeficijenata spontane emisije, u relevantne jednačine uvode *fenomenološki*.

Kako je od centralnog značaja za ovu disertaciju proučavanje poluprovodničkih kvantnih tačaka, u ovoj disertaciji ćemo mahom koristiti oblik MB jednačina prilagođen opisivanju čvrstih tela, tj. situacijama u kojima je elektron-fononska interakcija dominantna. Drugim rečima, stavljanjem

$$\lambda_{ij}^{(SE)} = 0, \quad \lambda_{kk}^{(i,SE)} = 0, \quad (5.160)$$

u jednačine (5.11) i (5.15), respektivno, uz korišćenje (5.12) i (5.16), dobijamo dekoherentni član u matričnoj formi za slučaj zanemarljive spontane emisije. Matrična reprezentacija dekoherentnog člana će sada zavisiti samo od izbora konkretne konfiguracije. Tako će, u slučaju zatvorenog sistema sa tri nivoa, dekoherentni član (5.84) dobiti oblik

$$\Lambda\rho = \begin{pmatrix} \gamma_{22}\rho_{22} + \gamma_{33}\rho_{33} & -\gamma_{21}\rho_{12} & -\gamma_{31}\rho_{13} \\ -\gamma_{21}\rho_{21} & -\gamma_{22}\rho_{22} & -\gamma_{32}\rho_{23} \\ -\gamma_{31}\rho_{31} & -\gamma_{32}\rho_{32} & -\gamma_{33}\rho_{33} \end{pmatrix}, \quad (5.161)$$

a umesto OB jednačina (5.85)–(5.89) koristićemo sledeći, pojednostavljeni sistem jednačina:¹⁶

$$\dot{\rho}_{11} = i \left(\Omega_p^* \rho_{21} - \Omega_p \rho_{12} \right) + \gamma_{22} \rho_{22} + \gamma_{33} \rho_{33}, \quad (5.162)$$

$$\dot{\rho}_{21} = i \Omega_p (\rho_{11} - \rho_{22}) + i \Omega_c^* \rho_{31} - (i \Delta_p + \gamma_{21}) \rho_{21}, \quad (5.163)$$

$$\dot{\rho}_{31} = i \Omega_c \rho_{21} - i \Omega_p \rho_{32} - (i(\Delta_p + \Delta_c) + \gamma_{31}) \rho_{31}, \quad (5.164)$$

$$\dot{\rho}_{32} = i \Omega_c (\rho_{22} - \rho_{33}) - i \Omega_p^* \rho_{31} - (i \Delta_c + \gamma_{32}) \rho_{32}, \quad (5.165)$$

$$\dot{\rho}_{33} = i (\Omega_c \rho_{23} - \Omega_c^* \rho_{32}) - \gamma_{33} \rho_{33}, \quad (5.166)$$

pri čemu preostale MB jednačine ostaju nepromenjene. Kao što je već naglašeno, veličine γ_{ij} predstavljaju koeficijente raspada (odgovarajućih energijskih nivoa/koherencija), sa karakterističnim vremenima života datim kao $\tau_{ij} = 1/\gamma_{ij}$. Analogno sa diskusijom za dekoherentni član u najopštijem obliku, zaključujemo da γ_{ij} , $i \neq j$, predstavlja brzinu raspada koherencije ρ_{ij} , dok koeficijent γ_{ii} predstavlja brzinu kojom se smanjuje naseljenost nivoa $|i\rangle$. Kako se ukupna naseljenost čitavog ansambla ne može menjati (relacija zatvorenosti), potrebno je da važi $\text{Tr}(\Lambda \rho) = 0$, što vidimo da i jeste slučaj. Na samom kraju treba, istini za volju, reći i to da fenomenološki članovi u izrazu (5.161) mogu da se uvedu i na neki drugi način, ali da smo se mi opredelili za način koji se najčešće pojavljuje u relevantnoj literaturi [103].

Navedimo sada modifikovane OB jednačine za preostale dve konfiguracije od interesa. Kao prvo, kod otvorenog sistema sa tri nivoa, jednačine (5.92)–(5.105) biće zamenjene sledećim jednačinama:

$$\dot{\rho}_{11} = i \left(\Omega_p^* \rho_{21} - \Omega_p \rho_{12} \right) + \gamma_{22} \rho_{22} + \gamma_{33} \rho_{33} + \gamma_{44} \rho_{44} + \gamma_{55} \rho_{55}, \quad (5.167)$$

$$\dot{\rho}_{21} = i \Omega_p (\rho_{11} - \rho_{22}) + i \Omega_c^* \rho_{31} - (i \Delta_p + \gamma_{21}) \rho_{21}, \quad (5.168)$$

$$\dot{\rho}_{31} = i \Omega_c \rho_{21} - i \Omega_p \rho_{32} - (i(\Delta_p + \Delta_c) + \gamma_{31}) \rho_{31}, \quad (5.169)$$

$$\dot{\rho}_{41} = -i \Omega_p \rho_{42} - \gamma_{41} \rho_{41}, \quad (5.170)$$

$$\dot{\rho}_{51} = -i \Omega_p \rho_{52} - \gamma_{51} \rho_{51}, \quad (5.171)$$

$$\dot{\rho}_{32} = i \Omega_c (\rho_{22} - \rho_{33}) - i \Omega_p^* \rho_{31} - (i \Delta_c + \gamma_{32}) \rho_{32}, \quad (5.172)$$

$$\dot{\rho}_{42} = -i \Omega_p^* \rho_{41} - i \Omega_c \rho_{43} - (i \Delta_p + \gamma_{42}) \rho_{42}, \quad (5.173)$$

$$\dot{\rho}_{52} = -i \Omega_p^* \rho_{51} - i \Omega_c \rho_{53} - (i \Delta_p + \gamma_{52}) \rho_{52}, \quad (5.174)$$

$$\dot{\rho}_{33} = i (\Omega_c \rho_{23} - \Omega_c^* \rho_{32}) - \gamma_{33} \rho_{33}, \quad (5.175)$$

$$\dot{\rho}_{43} = -i \Omega_c^* \rho_{42} + (i(\Delta_p + \Delta_c) - \gamma_{43}) \rho_{43}, \quad (5.176)$$

$$\dot{\rho}_{53} = -i \Omega_c^* \rho_{52} + (i(\Delta_p + \Delta_c) - \gamma_{53}) \rho_{53}, \quad (5.177)$$

$$\dot{\rho}_{44} = -\gamma_{44} \rho_{44}, \quad (5.178)$$

$$\dot{\rho}_{54} = -\gamma_{54} \rho_{54}, \quad (5.179)$$

$$\dot{\rho}_{55} = -\gamma_{55} \rho_{55}, \quad (5.180)$$

pri čemu, ponovo, nema promene preostalih MB jednačina. Smisao koeficijenata raspada je isti kao i za zatvoren sistem sa tri nivoa, osim što ih sada ima više. Na posletku, navedimo i modifikovane

¹⁶Naglasimo da je, matematički sasvim formalno, umesto tački koje ukazuju na to da se radi o totalnim izvodima po vremenu, u OB jednačinama potrebno staviti *parcijalne* izvode po vremenu, budući da sada matricni elementi ρ_{ij} mogu zavisiti i od prostorne koordinate z duž koje se talas prostire. Ipak, kako bismo pojednostavili oznake i pisanje već ionako glomaznih jednačina, opredelili smo se da tačke iznad ρ_{ij} zadžimo, vodeći računa o ekvivalenciji između $\dot{\rho}_{ij}$ i $\partial \rho_{ij} / \partial t$.

OB jednačine za sistem sa četiri nivoa. U ovom slučaju, OB jednačine (5.109)–(5.117) napisane u opštem obliku, svode se na:

$$\dot{\rho}_{11} = i \left(\Omega_p^* \rho_{21} - \Omega_p \rho_{12} \right) + \gamma_{22} \rho_{22} + \gamma_{33} \rho_{33} + \gamma_{44} \rho_{44}, \quad (5.181)$$

$$\dot{\rho}_{21} = i \Omega_p (\rho_{11} - \rho_{22}) + i \Omega_c^* \rho_{31} - (i \Delta_p + \gamma_{21}) \rho_{21}, \quad (5.182)$$

$$\dot{\rho}_{31} = i \Omega_c \rho_{21} + i \Omega_d^* \rho_{41} - i \Omega_p \rho_{32} - (i (\Delta_p + \Delta_c) + \gamma_{31}) \rho_{31}, \quad (5.183)$$

$$\dot{\rho}_{41} = i \Omega_d \rho_{31} - i \Omega_p \rho_{42} - (i (\Delta_p + \Delta_c + \Delta_d) + \gamma_{41}) \rho_{41}, \quad (5.184)$$

$$\dot{\rho}_{32} = i \Omega_c (\rho_{22} - \rho_{33}) + i \Omega_d^* \rho_{42} - i \Omega_p^* \rho_{31} - (i \Delta_c + \gamma_{32}) \rho_{32}, \quad (5.185)$$

$$\dot{\rho}_{42} = i \Omega_d \rho_{32} - i \Omega_c \rho_{43} - i \Omega_p^* \rho_{41} - (i (\Delta_c + \Delta_d) + \gamma_{42}) \rho_{42}, \quad (5.186)$$

$$\dot{\rho}_{33} = i (\Omega_c \rho_{23} - \Omega_c^* \rho_{32}) - i (\Omega_d \rho_{34} - \Omega_d^* \rho_{43}) - \gamma_{33} \rho_{33}, \quad (5.187)$$

$$\dot{\rho}_{43} = i \Omega_d (\rho_{33} - \rho_{44}) - i \Omega_c^* \rho_{42} - (i \Delta_d + \gamma_{43}) \rho_{43}, \quad (5.188)$$

$$\dot{\rho}_{44} = i (\Omega_d \rho_{34} - \Omega_d^* \rho_{43}) - \gamma_{44} \rho_{44}, \quad (5.189)$$

dok su ostale MB jednačine nepromenjene. Kao što smo rekli, ove jednačine će biti korišćene u najvećem delu rada, budući da ćemo se u disertaciji uglavnom baviti poluprovodničkim kvantnim tačkama na sobnim temperaturama.

5.5.2 MB jednačine u slučaju dominantne spontane emisije

Iako će predmet našeg proučavanja biti poluprovodničke kvantne tačke, postojaće situacije gde ćemo moći da zanemarimo elektron-fononsku interakciju koja se u njima javlja pri interakciji sa svetlošću. Ovo će biti moguće ukoliko se materijalna sredina ohladi do jako niskih, *kriogenih* temperatura, gde će jedini relevantan proces raspada biti spontana emisija [105, 264]. Budući da će deo disertacije biti posvećen upravo proučavanju interakcije svetlosti i materije na kriogenim temperaturama, smatrali smo za shodno da na ovom mestu prikažemo i MB jednačine za ovaj slučaj. Dobijene jednačine će nam na nekim mestima u disertaciji biti pogodnije za izvođenje važnih zaključaka, kao što je, na primer, uticaj degeneracije srednjeg nivoa na prostiranje laserskog pulsa kroz sredinu opisanu konfiguracijom sa tri nivoa. Istovremeno, dobijene jednačine se, ukoliko je potrebno, mogu primeniti i na proučavanje interakcije svetlosti sa jako razređenim gasovima i atomskim parama.

Sa jedne strane, dekoherentni član koji opisuje čisto spontanu emisiju, može se dobiti zamenom

$$\lambda_{ij}^{(EF)} = 0, \quad \lambda_{kk}^{(i,EF)} = 0, \quad (5.190)$$

u jednačine (5.11) i (5.15), respektivno. Uz dalju pomoć (5.13) i (5.17), odnosno (5.14), možemo doći do željenog oblika MB (OB) jednačina za slučaj dominantne spontane emisije. Naglasimo još i to da koeficijent spontane emisije Γ_{ij} koji se pojavljuje u gornjim izrazima može da se izračuna po formuli

$$\Gamma_{ij} = \frac{\omega_{ij}^3 |\mathbf{d}_{ij}|^2}{6\pi \epsilon_0 \hbar c^3}, \quad (5.191)$$

gde je ϵ_0 dielektrična konstanta vakuuma a c brzina svetlosti u vakuumu [260]. Gore opisana procedura će dati željene izraze, ali se do potpuno istih izraza može doći i na elegantniji način, budući da za dekoherentni član u slučaju spontane emisije postoji poznat analitički izraz. U daljem tekstu ćemo predstaviti ovaj drugi način.

Ukoliko je spontana emisija dominantan izvor dekoherencije, onda je dekoherentni član dat izrazom

$$\Lambda\rho = -\frac{1}{2} \sum_{m,n}^{E_n > E_m} \sum_{p,q}^{E_q > E_p} \Gamma_{nm,qp} (\rho S_{nm} S_{pq} + S_{nm} S_{pq} \rho - 2S_{pq} \rho S_{nm}) e^{i(\omega_{nm} - \omega_{pq})t} \quad (5.192)$$

pri čemu veličina

$$S_{ij} = |i\rangle\langle j| \quad (5.193)$$

predstavlja operator preslikavanja iz stanja $|j\rangle$ u $|i\rangle$, dok je

$$\Gamma_{nm,qp} = \sqrt{\Gamma_{nm}} \sqrt{\Gamma_{qp}} \cos \theta_{nm,qp}. \quad (5.194)$$

U gornjem izrazu, $\theta_{nm,qp}$ predstavlja ugao između matričnih elemenata električnih dipolnih prelaza $\mathbf{d}_{nm} = \langle n|\mathbf{d}|m\rangle$ i $\mathbf{d}_{qp} = \langle q|\mathbf{d}|p\rangle$, dok se vidi da važi i $\Gamma_{ij,ij} = \Gamma_{ij}$ ($\cos \theta_{ij,ij} = 1$) [15]. Pretpostavimo, najpre, da su polarizacije lasera odabrane tako da je $\cos \theta_{nm,qp} = \delta_{nq} \delta_{mp}$, gde je δ_{ij} Kronekerova delta. Tada izraz (5.192) može da se pojednostavi, pošto će eksponencijalni član uvek biti $e^{i(\omega_{nm} - \omega_{nm})t} = e^0 = 1$, odnosno $\Gamma_{nm,nn} = \Gamma_{nm}$, i sumacija se vrši po dva umesto po četiri indeksa:

$$\Lambda\rho = -\frac{1}{2} \sum_{m,n}^{E_n > E_m} \Gamma_{nm} (\rho S_{nm} S_{mn} + S_{nm} S_{mn} \rho - 2S_{mn} \rho S_{nm}). \quad (5.195)$$

Ukoliko iskoristimo još i činjenicu da su svojstvena stanja ortonormirana, tj. $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$, dobijamo da je

$$S_{nm} S_{mn} = |n\rangle\langle m|m\rangle\langle n| = |n\rangle\langle n| = S_{nn}, \quad (5.196)$$

gde smo iskoristili definicionu relaciju operatora preslikavanja (5.193). Pored toga, uz pomoć (5.4) imamo

$$S_{mn} \rho S_{nm} = |m\rangle\langle n|\rho|n\rangle\langle m| = |m\rangle\rho_{nn}\langle m| = \rho_{nn}|m\rangle\langle m| = \rho_{nn} S_{mm}, \quad (5.197)$$

što nas, zamenom u (5.195) dovodi do

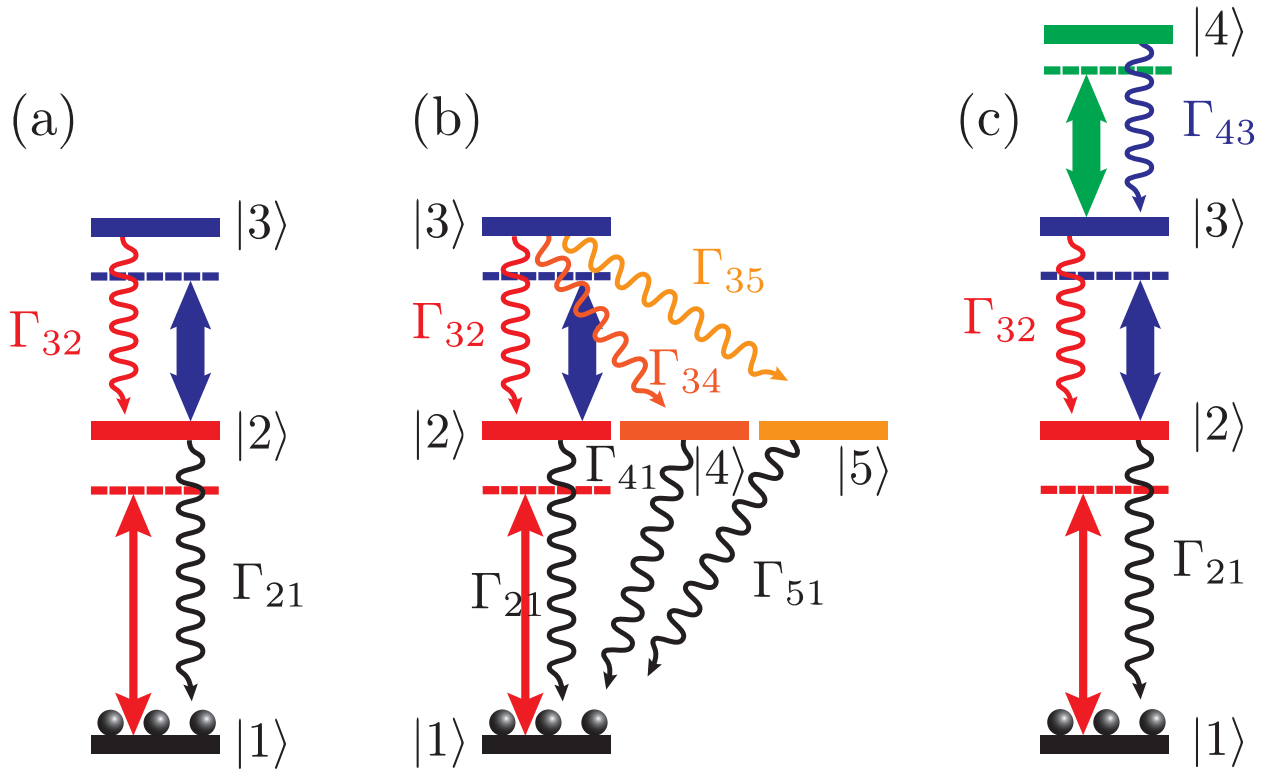
$$\Lambda\rho = -\frac{1}{2} \sum_{m,n}^{E_n > E_m} \Gamma_{nm} (\rho S_{nm} + S_{nn} \rho - 2\rho_{nn} S_{mm}). \quad (5.198)$$

Dalji oblik dekoherentnog člana zavisiće od odabrane konfiguracije.

Kao i do sada, krenimo prvo od zatvorenog sistema sa tri nivoa, gde su nivoi odabrani tako da su jedini dozvoljeni prelazi $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ i $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$, kojima će onda odgovarati koeficijenti spontane emisije Γ_{21} i Γ_{32} , respektivno (slika 5.2 (a)). Tada će se u sumi u (5.198) pojaviti samo parovi indeksa $(n, m) = (2, 1), (3, 2)$, što će, nakon razvijanja izraza, dati

$$\Lambda\rho = -\frac{1}{2} \Gamma_{21} (\rho S_{22} + S_{22} \rho - 2\rho_{22} S_{11}) - \frac{1}{2} \Gamma_{32} (\rho S_{33} + S_{33} \rho - 2\rho_{33} S_{22}). \quad (5.199)$$

Detaljno dobijanje matričnih elemenata ove matrice prikazano je u Dodatku A.3. Kao što vidimo, kako $\Lambda\rho$ ulazi samo u OB jednačine, to će se sistem MB jednačina za zatvoren sistem sa tri nivoa



Slika 5.2: Šematski prikaz spontane emisije u (a) zatvorenom sistemu sa tri nivoa, (b) otvorenom sistemu sa tri nivoa i (c) sistemu sa četiri nivoa u lestvičastoj konfiguraciji. Linijama sa strelicama na oba kraja označena su laserska polja – sondirajuće crvenom, kontrolno plavom, a dodatno zelenom bojom, pri čemu je debljina linija srazmerna intenzitetu lasera. Nivoi se raspadaju spontanom emisijom na niže nivoe, što je prikazano talasastim linijama sa strelicama, pri čemu se poklapaju boja linije i nivoa na koji se odgovarajući viši nivo raspada.

modifikovati tako da nove jednačine

$$\dot{\rho}_{11} = i(\Omega_p^* \rho_{21} - \Omega_p \rho_{12}) + \Gamma_{21} \rho_{22}, \quad (5.200)$$

$$\dot{\rho}_{21} = i\Omega_p (\rho_{11} - \rho_{22}) + i\Omega_c^* \rho_{31} - \left(i\Delta_p + \frac{1}{2}\Gamma_{21}\right) \rho_{21}, \quad (5.201)$$

$$\dot{\rho}_{31} = i\Omega_c \rho_{21} - i\Omega_p \rho_{32} - \left(i(\Delta_p + \Delta_c) + \frac{1}{2}\Gamma_{32}\right) \rho_{31}, \quad (5.202)$$

$$\dot{\rho}_{32} = i\Omega_c (\rho_{22} - \rho_{33}) - i\Omega_p^* \rho_{31} - \left(i\Delta_c + \frac{1}{2}(\Gamma_{21} + \Gamma_{32})\right) \rho_{32}, \quad (5.203)$$

$$\dot{\rho}_{33} = i(\Omega_c \rho_{23} - \Omega_c^* \rho_{32}) - \Gamma_{32} \rho_{33}, \quad (5.204)$$

zamenjuju postojeće jednačine (5.85)–(5.89), dok su preostale jednačine iz sistema nepromenjene.

Što se tiče otvorenog sistema sa tri nivoa, ovde spontana emisija može da se vrši sa nivoa $|3\rangle$ na nivoe $|2\rangle$, $|4\rangle$ i $|5\rangle$, odnosno sa $|2\rangle$, $|4\rangle$ i $|5\rangle$ na nivo $|1\rangle$, svaki sa odgovarajućim koeficijentom raspada definisanim pomoću (5.191), a prikazanim na slici 5.2 (b). Tada će dekoherentni član (5.198)

postati [5]:

$$\begin{aligned} \Lambda\rho = & -\frac{1}{2}\Gamma_{21}(\rho S_{22} + S_{22}\rho - 2\rho_{22}S_{11}) - \frac{1}{2}\Gamma_{41}(\rho S_{44} + S_{44}\rho - 2\rho_{44}S_{11}) \\ & -\frac{1}{2}\Gamma_{51}(\rho S_{55} + S_{55}\rho - 2\rho_{55}S_{11}) - \frac{1}{2}\Gamma_{32}(\rho S_{33} + S_{33}\rho - 2\rho_{33}S_{22}) \\ & -\frac{1}{2}\Gamma_{34}(\rho S_{33} + S_{33}\rho - 2\rho_{33}S_{44}) - \frac{1}{2}\Gamma_{35}(\rho S_{33} + S_{33}\rho - 2\rho_{33}S_{55}), \end{aligned} \quad (5.205)$$

što nas dovodi do sledećeg seta jednačina:

$$\dot{\rho}_{11} = i\left(\Omega_p^*\rho_{21} - \Omega_p\rho_{12}\right) + \Gamma_{21}\rho_{22} + \Gamma_{41}\rho_{44} + \Gamma_{51}\rho_{55}, \quad (5.206)$$

$$\dot{\rho}_{21} = i\Omega_p(\rho_{11} - \rho_{22}) + i\Omega_c^*\rho_{31} - \left(i\Delta_p + \frac{1}{2}\Gamma_{21}\right)\rho_{21}, \quad (5.207)$$

$$\dot{\rho}_{31} = i\Omega_c\rho_{21} - i\Omega_p\rho_{32} - \left(i(\Delta_p + \Delta_c) + \frac{1}{2}(\Gamma_{32} + \Gamma_{34} + \Gamma_{35})\right)\rho_{31}, \quad (5.208)$$

$$\dot{\rho}_{41} = -i\Omega_p\rho_{42} - \frac{1}{2}\Gamma_{41}\rho_{41}, \quad (5.209)$$

$$\dot{\rho}_{51} = -i\Omega_p\rho_{52} - \frac{1}{2}\Gamma_{51}\rho_{51}, \quad (5.210)$$

$$\dot{\rho}_{32} = i\Omega_c(\rho_{22} - \rho_{33}) - i\Omega_p^*\rho_{31} - \left(i\Delta_c + \frac{1}{2}(\Gamma_{21} + \Gamma_{32} + \Gamma_{34} + \Gamma_{35})\right)\rho_{32}, \quad (5.211)$$

$$\dot{\rho}_{42} = -i\Omega_p^*\rho_{41} - i\Omega_c\rho_{43} - \left(i\Delta_p + \frac{1}{2}(\Gamma_{21} + \Gamma_{41})\right)\rho_{42}, \quad (5.212)$$

$$\dot{\rho}_{52} = -i\Omega_p^*\rho_{51} - i\Omega_c\rho_{53} - \left(i\Delta_p + \frac{1}{2}(\Gamma_{21} + \Gamma_{51})\right)\rho_{52}, \quad (5.213)$$

$$\dot{\rho}_{33} = i(\Omega_c\rho_{23} - \Omega_c^*\rho_{32}) - (\Gamma_{32} + \Gamma_{34} + \Gamma_{35})\rho_{33}, \quad (5.214)$$

$$\dot{\rho}_{43} = -i\Omega_c^*\rho_{42} + \left(i(\Delta_p + \Delta_c) - \frac{1}{2}(\Gamma_{41} + \Gamma_{32} + \Gamma_{34} + \Gamma_{35})\right)\rho_{43}, \quad (5.215)$$

$$\dot{\rho}_{53} = -i\Omega_c^*\rho_{52} + \left(i(\Delta_p + \Delta_c) - \frac{1}{2}(\Gamma_{51} + \Gamma_{32} + \Gamma_{34} + \Gamma_{35})\right)\rho_{53}, \quad (5.216)$$

$$\dot{\rho}_{44} = \Gamma_{34}\rho_{33} - \Gamma_{41}\rho_{44}, \quad (5.217)$$

$$\dot{\rho}_{54} = -\frac{1}{2}(\Gamma_{41} + \Gamma_{51})\rho_{54}, \quad (5.218)$$

$$\dot{\rho}_{55} = \Gamma_{35}\rho_{33} - \Gamma_{51}\rho_{55}. \quad (5.219)$$

Vidimo da ove jednačine važe umesto OB jednačina (5.92)–(5.105), dok preostale jednačine ostaju na snazi.

Navedimo na kraju i oblik dekoherentnog člana za sistem sa četiri nivoa. Dozvoljeni prelazi su ovde $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$, $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ i $|3\rangle \leftrightarrow |4\rangle$, dok su ostali prelazi zabranjeni (slika 5.2 (c)). Koeficijenti raspada odgovarajućih nivoa na niža stanja su Γ_{21} , Γ_{32} i Γ_{43} , respektivno, a članovi u (5.198) koji preostaju daju sledeći izraz:

$$\begin{aligned} \Lambda\rho = & -\frac{1}{2}\Gamma_{21}(\rho S_{22} + S_{22}\rho - 2\rho_{22}S_{11}) - \frac{1}{2}\Gamma_{32}(\rho S_{33} + S_{33}\rho - 2\rho_{33}S_{22}) \\ & -\frac{1}{2}\Gamma_{43}(\rho S_{44} + S_{44}\rho - 2\rho_{44}S_{33}). \end{aligned} \quad (5.220)$$

Na osnovu toga, MB jednačine se za sistem sa četiri nivoa modifikuju tako da umesto (5.109)–(5.117) važi

$$\dot{\rho}_{11} = i\left(\Omega_p^* \rho_{21} - \Omega_p \rho_{12}\right) + \Gamma_{21} \rho_{22}, \quad (5.221)$$

$$\dot{\rho}_{21} = i\Omega_p (\rho_{11} - \rho_{22}) + i\Omega_c^* \rho_{31} - \left(i\Delta_p + \frac{1}{2}\Gamma_{21}\right) \rho_{21}, \quad (5.222)$$

$$\dot{\rho}_{31} = i\Omega_c \rho_{21} + i\Omega_d^* \rho_{41} - i\Omega_p \rho_{32} - \left(i(\Delta_p + \Delta_c) + \frac{1}{2}\Gamma_{32}\right) \rho_{31}, \quad (5.223)$$

$$\dot{\rho}_{41} = i\Omega_d \rho_{31} - i\Omega_p \rho_{42} - \left(i(\Delta_p + \Delta_c + \Delta_d) + \frac{1}{2}\Gamma_{43}\right) \rho_{41}, \quad (5.224)$$

$$\dot{\rho}_{32} = i\Omega_c (\rho_{22} - \rho_{33}) + i\Omega_d^* \rho_{42} - i\Omega_p^* \rho_{31} - \left(i\Delta_c + \frac{1}{2}(\Gamma_{21} + \Gamma_{32})\right) \rho_{32}, \quad (5.225)$$

$$\dot{\rho}_{42} = i\Omega_d \rho_{32} - i\Omega_c \rho_{43} - i\Omega_p^* \rho_{41} - \left(i(\Delta_c + \Delta_d) + \frac{1}{2}(\Gamma_{21} + \Gamma_{43})\right) \rho_{42}, \quad (5.226)$$

$$\dot{\rho}_{33} = i(\Omega_c \rho_{23} - \Omega_c^* \rho_{32}) - i(\Omega_d \rho_{34} - \Omega_d^* \rho_{43}) - \Gamma_{32} \rho_{33} + \Gamma_{43} \rho_{44}, \quad (5.227)$$

$$\dot{\rho}_{43} = i\Omega_d (\rho_{33} - \rho_{44}) - i\Omega_c^* \rho_{42} - \left(i\Delta_d + \frac{1}{2}(\Gamma_{32} + \Gamma_{43})\right) \rho_{43}, \quad (5.228)$$

$$\dot{\rho}_{44} = i(\Omega_d \rho_{34} - \Omega_d^* \rho_{43}) - \Gamma_{43} \rho_{44}, \quad (5.229)$$

pri čemu ostale jednačine (relacija zatvorenosti, relacija za koherencije i propagacione jednačine) zadržavaju prethodni oblik.

Pažljivim poređenjem MB (preciznije, OB) jednačina za svaku od konfiguracija mogu se ustanoviti sličnosti i razlike između dekoherentnih članova uvedenih fenomenološki, za čvrsta tela, i članova koji opisuju spontanu emisiju, što je dominantan izvor dekoherencije u atomskim gasovima i čvrstim telima na kriogenim temperaturama [265]. Ukoliko najpre obratimo pažnju na jednačine za nedijagonalne elemente, i ograničimo se, primera radi, na zatvoren sistem sa tri nivoa, videćemo da se u njima pojavljuju sledeći dekoherentni članovi:

$$-\gamma_{21} \rho_{21} \longleftrightarrow -\frac{1}{2}\Gamma_{21} \rho_{21}, \quad -\gamma_{31} \rho_{31} \longleftrightarrow -\frac{1}{2}\Gamma_{32} \rho_{31}, \quad -\gamma_{32} \rho_{32} \longleftrightarrow -\frac{1}{2}(\Gamma_{21} + \Gamma_{32}) \rho_{32}. \quad (5.230)$$

Vidimo da, dok koeficijenti γ_{21} , γ_{31} i γ_{32} mogu biti dati potpuno nezavisno jedni od drugih, kod dekoherentnih članova za spontanu emisiju postoji veza, i svi oni dati su preko samo dva koeficijenta Γ_{21} i Γ_{32} . Slično je ako pogledamo dijagonalne elemente (radi preglednosti, prikazali smo i elemente koji stoje uz ρ_{22} iako je ova jednačina izostavljena iz sistema i zamenjena relacijom zatvorenosti):

$$\gamma_{22} \rho_{22} + \gamma_{33} \rho_{33} \longleftrightarrow \Gamma_{21} \rho_{22}, \quad -\gamma_{22} \rho_{22} \longleftrightarrow -\Gamma_{21} \rho_{22} + \Gamma_{32} \rho_{33}, \quad -\gamma_{33} \rho_{33} \longleftrightarrow -\Gamma_{32} \rho_{33}, \quad (5.231)$$

s tim da ovde vidimo i drugu bitnu razliku. Naime, prelazi između nivoa se preko spontane emisije odvijaju potpuno u skladu sa selekcionim pravilima, dok se, na primer, u opštem slučaju može desiti da se nivo $|1\rangle$ „puni” direktno sa nivoa $|3\rangle$, što je zabranjeno sa stanovišta spontane emisije, ali ne i ako se uzmu u obzir drugi, ne nužno radijativni procesi raspada. Ono što je važno jeste da će, bez obzira na sve, oba seta MB jednačina *korektno opisivati* probleme na koje se mogu primeniti, uz napomenu da se fenomenološki uvedeni dekoherentni (pre svega dijagonalni) članovi mogu uvesti i na neki drugi način, pri čemu je neophodno da bude zadovoljen uslov $\text{Tr}(\Lambda\rho) = 0$. Naravno, u daljem radu će uvek biti naglašeno sa kojim od ova dva seta jednačina ćemo raditi.

5.6 Određivanje apsorpcione i disperzione krive

Nakon detaljnog izlaganja sadržanog u ovoj Glavi, nedvosmisleno je postalo jasno da MB jednačine i njihova rešenja igraju vodeću ulogu u opisivanju svojstava fizičkog sistema koji se sastoji iz laserskih polja i materijalne sredine. Sa jedne strane, one omogućavaju poznavanje vremenske i prostorne zavisnosti envelope elektromagnetnih talasa koji interaguju sa sredinom, oličenim u Rabi-jevima frekvencijama, $\Omega_p(z, t)$, $\Omega_c(z, t)$ i $\Omega_d(z, t)$. Sa druge strane, daju nam informaciju o operatoru gustine atomskog sistema, odakle možemo odrediti kako naseljenosti željenih nivoa, tako i apsorpciju, odnosno disperziju koja odgovara prelazu od interesa. U ovom poglavlju, koncentrisaćemo se na proceduru određivanja apsorpcione, odnosno disperzione krive u odnosu na sondirajuće polje, koje je odgovorno za prelaz $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$. Pri razmatranju sistema sa četiri nivoa, na kratko ćemo spomenuti i situaciju kada je dodatno polje moguće tretirati kao sondirajuće, i po analogiji sprovesti proceduru za nalaženje apsorpcione i disperzione krive u odnosu na dodatno polje. Na kraju, pozabavićemo se i određivanjem grupe brzine kao i grupnog indeksa materijalne sredine.

5.6.1 Električna susceptibilnost sredine

Podsetimo se da je, u postavci uvedenoj u poglavlju 5.4, prostiranje elektromagnetnog talasa kroz nelinearnu sredinu, za svaku komponentu ponaosob, opisano nelinearnom talasnom jednačinom (5.119), gde su izostavljeni indeksi koji ukazuju na to da se radi o zasebnoj komponenti. Sada je vreme da prodiskutujemo vezu između vektora $\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t)$ i $\vec{\mathcal{P}}(\mathbf{r}, t)$ koji se pojavljuju u pomenutoj talasnoj jednačini [8]. U slučaju slabih polja, kada se razmatranje problema može vršiti u granicama konvencionalne, *linearne* optike, ova veza data je sledećom jednačinom:

$$\vec{\mathcal{P}}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \chi^{(1)}(\omega) \vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t), \quad (5.232)$$

gde je sa $\chi^{(1)}(\omega)$ označena *linearna optička susceptibilnost* sredine,¹⁷ i gde je naznačena njena eksplicitna zavisnost od frekvencije lasera. Sa druge strane, potrebno je izvršiti generalizaciju dobijenog izraza na slučaj polja jakog intenziteta, kakva su po pravilu laserska polja sa kojima se srećemo u radu. U slučaju jakih polja, veza između električne polarizacije i polja ima oblik stepenog razvoja:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{P}}(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 \left(\chi^{(1)}(\omega) + \chi^{(2)}(\omega) |\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t)| + \chi^{(3)}(\omega) |\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t)|^2 + \dots \right) \vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t) \\ &= \varepsilon_0 \chi(\omega) \vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (5.233)$$

gde su $\chi^{(k)}(\omega)$, $k = 2, 3, \dots$, *nelinearne susceptibilnosti* k -tog reda. U opštem slučaju, susceptibilnosti su kompleksne tenzorske veličine,¹⁸ ali ćemo u ovoj disertaciji raditi pod pretpostavkom da

¹⁷Nekada će se, radi jednostavnosti, termin „linearna optička susceptibilnost sredine” pojavljivati samo kao „linearna susceptibilnost”, što je rezovoanje koje ćemo primenjivati i kod pominjanja nelinearnih susceptibilnosti.

¹⁸Veza između polarizacije i polja je, sasvim uopšteno govoreći, data izrazom za (Dekartove) komponente vektora polarizacije

$$\mathcal{P}_i = \varepsilon_0 \left(\chi_{ij}^{(1)} \mathcal{E}_j + \chi_{ijk}^{(2)} \mathcal{E}_j \mathcal{E}_k + \chi_{ijkl}^{(3)} \mathcal{E}_j \mathcal{E}_k \mathcal{E}_l + \dots \right),$$

gde je, radi jednostavnosti, izostavljeno eksplicitno pisanje prostorne i vremenske zavisnosti. U gornjem izrazu, indeksi se mogu označiti bilo sa x, y, z , bilo sa $1, 2, 3$, pri čemu se još vrši i sumiranje po ponovljenim indeksima. Vidimo da su, dakle, susceptibilnosti zapravo tenzorske veličine drugog, trećeg i viših redova, na šta ukazuje i broj indeksa koji te veličine karakteriše.

je materijalna sredina izotropna, što automatski „prevodi” susceptibilnosti u obične (kompleksne) skalare. Za potrebe izvođenja u ovom odeljku, sa $\chi(\omega)$ označili smo veličinu koju uslovno možemo smatrati *ukupnom* susceptibilnošću sredine, u smislu da predstavlja „koeficijent srazmernosti” između polarizacije i polja čak i za slučaj jakih polja.¹⁹ Za mnoge primene od interesa u ovoj disertaciji, moguće je čak zanemariti nelinearne članove i razmatrati željeni sistem u granicama linearne optike.

Vežu između susceptibilnosti i matrice gustine odredićemo na sledeći način. Podsetimo se da su vektori električnog polja i polarizacije dati u formi talasa preko jednačina (5.122) i (5.123), respektivno. Njihovom zamenom u (5.233) lako dobijamo jednačinu za envelope

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (5.234)$$

za svaku od tri komponente elektromagnetnog polja. Kako je nama prevashodno od interesa susceptibilnost u odnosu na sondirajuće polje, fokusiraćemo se na gornju jednačinu u obliku $\mathbf{P}_p = \varepsilon_0 \chi_p \mathbf{E}_p$. Ukoliko ponovo primenimo EDA i iskoristimo izraz (5.147), dobićemo sledeći rezultat:

$$2\mathcal{N} \mathbf{d}_{12} \rho_{21} = \varepsilon_0 \chi_p(\omega) \mathbf{E}_p, \quad (5.235)$$

gde smo izostavili eksplicitnu zavisnost od koordinata i vremena. Skalarnim množenjem leve i desne strane sa $\mathbf{d}_{21}/(2\hbar)$, uz podsećanje da je $\mathbf{d}_{ij} \cdot \mathbf{d}_{ji} = \mathbf{d}_{ij} \cdot \mathbf{d}_{ij}^* = |\mathbf{d}_{ij}|^2$, dobijamo

$$\frac{\mathcal{N} |\mathbf{d}_{21}|^2}{\hbar} \rho_{21} = \varepsilon_0 \chi_p(\omega) \Omega_p, \quad (5.236)$$

gde smo iskoristili definiciju sondirajuće Rabijeve frekvencije (5.53). Konačno, za optičku susceptibilnost sredine sledi²⁰

$$\chi_p(\omega) = \frac{\mathcal{N} |\mathbf{d}_{21}|^2}{\varepsilon_0 \hbar \Omega_p} \rho_{21}. \quad (5.237)$$

Po analogiji, ukoliko je potrebno, moguće je dobiti susceptibilnosti i u odnosu na kontrolno polje

$$\chi_c(\omega) = \frac{\mathcal{N} |\mathbf{d}_{32}|^2}{\varepsilon_0 \hbar \Omega_c} \rho_{32}, \quad (5.238)$$

kao i u odnosu na dodatno polje

$$\chi_d(\omega) = \frac{\mathcal{N} |\mathbf{d}_{43}|^2}{\varepsilon_0 \hbar \Omega_d} \rho_{43}. \quad (5.239)$$

Napomenimo da dobijeni izrazi važe kako za ukupnu susceptibilnost, tako i za linearnu, odnosno nelinearne susceptibilnosti pojedinačno. U drugom slučaju je jedino potrebno susceptibilnost k -tog reda povezati sa matrice elementom $\rho_{ij}^{(k)}$ u tom istom redu teorije perturbacija.

¹⁹Termin „uslovno” odnosi se na činjenicu da je ukupnu susceptibilnost moguće shvatiti i kao $\chi = \chi^{(1)} + \chi^{(2)} + \chi^{(3)} + \dots$, ali smo se mi ipak opredelili za rezonovanje dato u glavnom tekstu, budući da je to oblik u kojem se susceptibilnosti realno javljaju.

²⁰U literaturi se često sreće i izraz u kome umesto Rabijeve frekvencije figuriše jačina polja:

$$\chi_p(\omega) = \frac{2\mathcal{N} |d_{21}|}{\varepsilon_0 |E_p|} \rho_{21},$$

u kome je pretpostavljeno da je $\mathbf{d}_{21} \parallel \mathbf{E}_p$, odnosno $\mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{E}_p = |d_{21}| |E_p|$. U Glavi 7 će biti pokazano da je sasvim dovoljno poznavati projekciju električnog dipolnog momenta na osu polarizacije električnog polja $d_{21} \equiv d_{21}^{(s)}$, a ne kompletan vektor \mathbf{d}_{21} , što gore navedeni izraz čini praktično ekvivalentnim izrazu (5.237).

5.6.2 Koeficijent apsorpcije i indeks prelamanja

Određivanje apsorpcione i disperzione krive za odgovarajuću atomsku sredinu se u praksi svodi na nalaženje zavisnosti koeficijenta apsorpcije $\alpha(\omega)$ i indeksa prelamanja sredine $n(\omega)$, respektivno, od frekvencije upadnog elektromagnetnog talasa. U tom cilju, ograničimo se na razmatranje *monohromatskih* talasa – s obzirom na to da se laserski pulsevi, koje ćemo prevashodno proučavati, sastoje od zbira velikog broja monohromatskih komponenti, dobijeni rezultati važiće univerzalno. Vektor električnog polja neke od tri željene komponente će tada biti zadat izrazom

$$\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \text{c.c.}, \quad (5.240)$$

a vektor polarizacije izrazom

$$\vec{\mathcal{P}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{P}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \text{c.c.}, \quad (5.241)$$

gde su sa \mathbf{E}_0 i \mathbf{P}_0 označeni vektori amplitude električnog polja i polarizacije, respektivno. Zamenom ova dva izraza u jednačinu (5.119), uz poznatu proceduru za nalaženje prostornih i vremenskih izvoda složenih funkcija koje se javljaju u njima, dobijamo sledeću jednačinu:

$$-k^2 \mathbf{E}_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_0 = -\frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{P}_0. \quad (5.242)$$

S obzirom na to da, iz (5.233), (5.240) i (5.241) sledi da su i amplitude vektora polarizacije i električnog polja povezane kao i sama polja:

$$\mathbf{P}_0 = \epsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}_0, \quad (5.243)$$

možemo zameniti ovaj izraz u (5.242), što nam daje *disperzionu relaciju*

$$k^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi(\omega)), \quad (5.244)$$

koja daje zavisnost intenziteta talasnog vektora od frekvencije talasa. Korenujemo sada dobijenu relaciju, što nas dovodi do izraza:

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \chi(\omega)} \approx \frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \chi(\omega) \right), \quad (5.245)$$

gde smo iskoristili razvoj stepene funkcije u Tejlorov red, tj. $(1+x)^n \approx 1+nx$ za $x \ll 1$ [8]. Ovu aproksimaciju je moguće primeniti samo ukoliko susceptibilnost nije velika, $|\chi(\omega)| \ll 1$, što je obično zadovoljeno ako je atomska gustina \mathcal{N} relativno mala. Ukoliko to nije slučaj, neophodno je zadržati koren u izrazu za $k(\omega)$, i dobijene relacije će biti nešto komplikovanije.

Kao što smo napomenuli, susceptibilnost je kompleksna veličina, zbog čega ju je zgodno zapisati u standardnoj formi kompleksnog broja:

$$\chi(\omega) = \text{Re}\chi(\omega) + i \text{Im}\chi(\omega). \quad (5.246)$$

Zamenom u (5.245) imamo:

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \text{Re}\chi(\omega) + \frac{i}{2} \text{Im}\chi(\omega) \right) = \frac{n(\omega)\omega}{c} + i \frac{\alpha(\omega)}{2}, \quad (5.247)$$

gde je sa

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \chi(\omega) \approx \sqrt{1 + \operatorname{Re} \chi(\omega)} \quad (5.248)$$

označen *indeks prelamanja* sredine, i gde je naveden još jedan oblik (ponovo povezan sa Tejlorovim razvojem stepene funkcije) ovog izraza koji se u literaturi često sreće, dok relacija

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega}{c} \operatorname{Im} \chi(\omega) \quad (5.249)$$

predstavlja izraz za *koeficijent apsorpcije* materijalne sredine.

Pravi smisao gornjih definicija može se uvideti zamenom disperzione relacije (5.245) u (5.240). Ako pretpostavimo, kao i ranije, da je talasni vektor usmeren duž z -ose, za vektor električnog polja monohromatskog talasa imaćemo:

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 e^{i(k(\omega)z - \omega t)} + \text{c.c.} = \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 e^{-\frac{1}{2}\alpha z} e^{-i\omega(t - \frac{n}{c}z)} + \text{c.c.}, \quad (5.250)$$

gde je izostavljeno pisanje eksplicitne zavisnosti po frekvenciji. Posmatranjem izraza $t - nz/c = t - z/v$, odakle je jasno da v predstavlja *faznu brzinu* talasa, prepoznamo da

$$n = \frac{c}{v} \quad (5.251)$$

odgovara ničemu drugom do standardnoj definiciji indeksa prelamanja sredine koja se javlja već u konvencionalnoj optici. Sa druge strane, ako potražimo *intenzitet* talasa na rastojanju z , znajući da je $I(z) \sim |\vec{\mathcal{E}}(z, t)|^2$, dok je $I_0 = I(0) \sim |\vec{\mathcal{E}}(0, t)|^2 = |\mathbf{E}_0|^2$, dobićemo sledeći rezultat:²¹

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z}. \quad (5.252)$$

Vidimo da dobijeni izraz predstavlja dobro poznati *Lambert-Berov zakon* apsorpcije, sa koeficijentom apsorpcije definisanim upravo preko (5.249).

5.6.3 Grupna brzina svetlosti i grupni indeks sredine

Sada, kada smo odredili koeficijent apsorpcije i indeks prelamanja sredine, možemo da se koncentrišemo na nalaženje grupne brzine talasa. Na osnovu izloženog u Glavi 2, dobijamo da se grupna brzina može izraziti na sledeći način:

$$v_g = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} = \frac{c}{n_g}, \quad (5.253)$$

²¹Podsetimo da intenzitet elektromagnetnog talasa odgovara intenzitetu Pointingovog vektora (magnetna permeabilnost sredine je $\mu_r \approx 1$):

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B},$$

i može se predstaviti izrazom

$$I = |\mathbf{S}| = uv = \varepsilon_0 c n |E|^2,$$

gde je iskorišćena činjenica da je gustina energije talasa $u = \varepsilon_0 \varepsilon_r |E|^2$, a indeks prelamanja $n \approx \sqrt{\varepsilon_r}$ [8]. U kontekstu fusnote 13 iz ove Glave, u problemu koji razmatramo će biti $\varepsilon_r = 1$.

gde je sa n_g označen *grupni indeks* sredine:

$$n_g(\omega) = n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}. \quad (5.254)$$

Dakle, kao što indeks prelamanja predstavlja odnos brzine svetlosti u vakuumu i fazne brzine, tako je grupni indeks jednak odnosu brzine c i grupne brzine svetlosti. Pošto nas prevashodno interesuje grupni indeks u odnosu na sondirajuće polje, preciziraćemo da se radi o sondirajućem polju zamenom $\omega \rightarrow \omega_p$:

$$n_g(\omega_p) = n(\omega_p) + \omega_p \frac{dn}{d\omega_p}. \quad (5.255)$$

U najvećem delu disertacije će, pak, veličine koje zavise od frekvencije upadnog talasa, poput χ ili ρ_{ij} , biti izražene u zavisnosti od razdešenosti ove frekvencije u odnosu na frekvenciju prelaza koji odgovarajući laser pobuđuje. Konkretno, za slučaj sondirajućeg polja, ovo će odgovarati smeni $\omega_p = \omega_{21} - \Delta_p$ u sve relevantne jednačine.²² Grupni indeks ćemo tako dobiti zamenom ovog izraza u (5.255), pri čemu još moramo imati u vidu da je

$$\frac{dn}{d\omega_p} = \frac{dn}{d\omega_p} \frac{d\omega_p}{d\Delta_p} = - \frac{dn}{d\Delta_p}. \quad (5.256)$$

Primitimo da će se, zbog toga što nagib disperzione krive izražen preko Δ_p sada ima suprotan znak, promeniti i „definicija” disperzije, data izrazima (2.13) i (2.14). Naime, normalnoj disperziji će odgovarati slučaj $dn/d\Delta_p < 0$, a anomalnoj $dn/d\Delta_p > 0$. Na ovaj način, grupni indeks sredine u zavisnosti od razdešenosti sondirajućeg polja postaje

$$n_g(\Delta_p) = n(\Delta_p) - (\omega_{21} - \Delta_p) \frac{dn}{d\Delta_p}, \quad (5.257)$$

i ovo je izraz koji ćemo dalje koristiti. Ako iskoristimo relaciju (5.248), (5.237) i (5.246), uz $\chi \equiv \chi_p$, uz nezatno sređivanje izraza dobijamo:

$$n_g(\Delta_p) = 1 + \frac{N|d_{21}|^2}{2\varepsilon_0\hbar\Omega_p} \left(\text{Re}\rho_{21}(\Delta_p) - (\omega_{21} - \Delta_p) \frac{d}{d\Delta_p} \text{Re}\rho_{21}(\Delta_p) \right), \quad (5.258)$$

pri čemu se dobijeni izraz može dodatno uprostiti ako nas interesuje vrednost grupnog indeksa u minimumu apsorpcije, što odgovara situaciji kada je $\text{Re}\rho_{21}(\Delta_p) = 0$. Ovo uprošćavanje ima smisla, budući da spoljašnja manipulacija brzinom prostiranja talasa može da bude efikasna jedino onda kada je apsorpcija svedena na minimum.

Na kraju, navedimo još i rezultat za grupni indeks u odnosu na dodatno polje, što je situacija koja će se javiti kada budemo razmatrali sistem sa četiri nivoa u kome se dodatno polje može smatrati sondirajućim. Dobijanje ovog izraza je potpuno analogno proceduri prikazanoj za sondirajuće polje, te detalje izvođenja nećemo navoditi. Rezultat je:

$$n_g^d(\Delta_d) = 1 + \frac{N|d_{43}|^2}{2\varepsilon_0\hbar\Omega_d} \left(\text{Re}\rho_{43}(\Delta_d) - (\omega_{43} - \Delta_d) \frac{d}{d\Delta_d} \text{Re}\rho_{43}(\Delta_d) \right), \quad (5.259)$$

gde smo još eksplicitno naznačili da se radi o grupnom indeksu sredine u odnosu na dodatno polje, gde su iskorišćeni izrazi (5.255) i (5.239), i gde je izvršena smena $\omega \rightarrow \omega_d = \omega_{43} - \Delta_d$.

²²Ovo implicira da ćemo najčešće podrazumevati da disperziona i apsorpciona kriva oslikavaju zavisnost $n(\Delta_p)$ i $\alpha(\Delta_p)$, respektivno, umesto od frekvencije talasa ω_p .

6 Rešavanje Maksvel-Blochovih jednačina

MB jednačine za sistem svetlost–materija predstavljaju sistem spregnutih, nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda po jednoj prostornoj koordinati i vremenu. Detaljna analiza, sprovedena u Glavi 5, pokazala je da njihovo rešavanje može ići u dva pravca. Sa jedne strane, pribegava se *numeričkom* rešavanju MB jednačina, gde se za (vremensku) evoluciju koristi standardni *Runge-Kuta metod četvrtog reda*, dok je za (prostornu) propagaciju u ovoj disertaciji primenjen *Laks-Vendrofov metod*, koji spada u grupu metoda konačnih razlika. Naravno, pored uvođenja ovih metoda, potrebno je precizirati odgovarajuće početne i granične uslove, što će kasnije i biti učinjeno. Kako detaljno objašnjenje ovih metoda narušava strukturu i tok disertacije, to su oni detaljno izloženi u Dodatku C. Za potrebe numeričkog rešavanja MB jednačina nije potrebno vršiti nikakve dodatne pretpostavke i aproksimacije – dobijena rešenja će (uz očuvanje računarske preciznosti i stabilnosti algoritma) biti *egzaktna*.

Drugi pravac rešavanja MB jednačina odnosi se na njihovo *analitičko* rešavanje. Da bi ovo bilo moguće, pribegava se raznim, za datu situaciju opravdanim aproksimacijama. Za razliku od numeričkog, ovo rešenje neće biti opšte već će se odnositi samo na pojedine specijalne slučajeve. Međutim, s obzirom na to da će nama često upravo ti slučajevi biti od najveće važnosti, aproksimativna analitička rešenja će nam i dalje biti izuzetno značajna. Pored toga, poređenjem numeričkih i analitičkih rešenja, bićemo u situaciji da diskutujemo granice primenljivosti analitičkih rešenja, kao i da detaljnu analizu odgovarajućeg ponašanja parametara ili samih fizičkih pojava sprovedemo upravo zahvaljujući poznavanju smislenog analitičkog rešenja. U ovoj Glavi, posvetićemo se upravo dobijanju aproksimativnih analitičkih rešenja MB jednačina za niz fizičkih situacija od interesa, kao i za svaku od tri proučavane konfiguracije. Uporedo sa tim, deo pažnje posvetićemo objašnjenju formiranja AT pikova vršeci transformaciju u bazu obučenih stanja hamiltonijana svetlost–materija. Ovaj pristup pomoći će nam pri analizi apsorpcione i disperzione krive, čak i bez formalnog rešavanja MB jednačina.

6.1 Perturbacioni pristup i MB jednačine u stacionarnom režimu

U cilju rešavanja MB jednačina, poslužićemo se formalizmom teorije perturbacija. Zajednička pretpostavka za sve slučajeve koje razmatramo biće ona da je ansambl atoma sredine pripremljen tako da se u početnom trenutku svi atomi nalaze u osnovnom stanju $|1\rangle$, dok su naseljenosti ostalih nivoa, kao i sve koherencije, jednake nuli. Ovo će važiti za svaku tačku u prostoru koji ispunjava data sredina. Jezikom formalizma matrice gustine, ovo znači da je

$$\rho_{11}(z,0) = 1, \quad \rho_{ij}(z,0) = 0, \quad (i,j) \neq (1,1), \quad (6.1)$$

čime smo dobili početne uslove koji će biti na snazi u čitavoj disertaciji.

U odeljku 2.2.3, prilikom diskusije u vezi EIT i AT efekta, rekli smo da je čest slučaj da se, pri proučavanju ovih fenomena, pretpostavlja da su sondirajuća polja slabog intenziteta, odnosno da je Rabijeva frekvencija sondirajućih mnogo manja od Rabijeve frekvencije kontrolnih polja. Ovu pretpostavku ćemo koristiti i u ovom poglavlju, kao i u nastavku disertacije. U slučaju sistema sa tri nivoa, pomenuti uslov će biti opisan izrazom $\Omega_p \ll \Omega_c$, dok se sistem sa četiri nivoa, ako je dodatno polje kontrolno, mora dopuniti relacijom $\Omega_p \ll \Omega_d$. Ova činjenica nam omogućava da iskoristimo *perturbacioni pristup* za rešavanje MB jednačina – Ω_p tretiramo kao perturbaciju, što ćemo učiniti zamenom

$$\Omega_p(z, t) \rightarrow \lambda \Omega_p(z, t) \quad (6.2)$$

u MB jednačine.¹ Veličina λ predstavlja parametar koji se uvodi kako bi se izdvojili članovi uz iste stepene λ , da bi se na kraju čitave procedure stavilo $\lambda = 1$. Istovremeno, matrične elemente operatora gustine tražimo u obliku perturbacionog razvoja po istom parametru:

$$\rho_{ij}(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \rho_{ij}^{(n)}(z, t), \quad (6.3)$$

gde su $\rho_{ij}^{(n)}$ matrični elementi operatora gustine u n -tom redu teorije perturbacija. Ukoliko iskoristimo ovaj razvoj i ubacimo ga u (6.1), upoređivanjem sabiraka sa leve i desne strane znaka jednakosti koji stoji uz iste stepene λ^k , $k = 0, 1, 2, \dots$, dobićemo početne uslove za pojedinačne članove u razvoju:

$$\rho_{11}^{(0)}(z, 0) = 1, \quad \rho_{ij}^{(k)}(z, 0) = 0, \quad (i, j, k) \neq (1, 1, 0), \quad (6.4)$$

što važi nezavisno od odabira konfiguracije. Takođe, nezavisno od konfiguracije važi i relacija za nedijagonalne elemente

$$\left(\rho_{ij}^{(n)}(z, t)\right)^* = \rho_{ji}^{(n)}(z, t), \quad (6.5)$$

koja sledi iz (5.6) i (6.3), dok se relacija zatvorenosti (5.5), uz ponavljanje iste procedure kao gore, svodi na

$$\sum_i \rho_{ii}^{(0)} = 1, \quad \sum_i \rho_{ii}^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (6.6)$$

gde se sumiranje vrši po svim dijagonalnim elementima matrice gustine.

6.1.1 Zatvoren sistem sa tri nivoa

Sprovedimo detaljno proceduru za zatvoren sistem sa tri nivoa. Ovde su relevantne OB jednačine date izrazima (5.85)–(5.89). Ukoliko u njima zamenimo (6.2) i (6.3), i u dobijenim izrazima prepoznamo članove koji stoje uz iste stepene λ^n sa obe strane znaka jednakosti, dobićemo OB jednačine

¹ Treba naglasiti da se perturbacioni pristup koristi mahom kod rešavanja OB jednačina, u slučaju kada su Rabijeve frekvencije svih polja nezavisne od prostornih koordinata i vremena. Ipak, ovaj pristup je od velike koristi i u situaciji koja je od prevashodnog interesa u ovoj disertaciji, tj. kada pomenute Rabijeve frekvencije nisu konstantne i kada je OB jednačine potrebno dopuniti odgovarajućim propagacionim jednačinama.

u n -tom redu teorije perturbacija. Konkretno, izjednačavanjem sabiraka koji stoje uz λ^0 , za OB jednačine u nultom redu dobijamo

$$\dot{\rho}_{11}^{(0)} = \lambda_{22}^{(1)} \rho_{22}^{(0)} + \lambda_{33}^{(1)} \rho_{33}^{(0)}, \quad (6.7)$$

$$\dot{\rho}_{21}^{(0)} = i\Omega_c^* \rho_{31}^{(0)} - (i\Delta_p + \lambda_{21}) \rho_{21}^{(0)}, \quad (6.8)$$

$$\dot{\rho}_{31}^{(0)} = i\Omega_c \rho_{21}^{(0)} - (i(\Delta_p + \Delta_c) + \lambda_{31}) \rho_{31}^{(0)}, \quad (6.9)$$

$$\dot{\rho}_{32}^{(0)} = i\Omega_c (\rho_{22}^{(0)} - \rho_{33}^{(0)}) - (i\Delta_c + \lambda_{32}) \rho_{32}^{(0)}, \quad (6.10)$$

$$\dot{\rho}_{33}^{(0)} = i(\Omega_c \rho_{23}^{(0)} - \Omega_c^* \rho_{32}^{(0)}) - \lambda_{33} \rho_{33}^{(0)}. \quad (6.11)$$

U ovim jednačinama, kao i u onima koje slede, izostavili smo eksplicitnu zavisnost od prostornih koordinata i vremena, iako ona u opštem slučaju i dalje postoji. Kao što je već rečeno, relacija (6.5) važi i ovde, dok se u konkretnom slučaju (6.6) svodi na

$$\rho_{11}^{(0)} + \rho_{22}^{(0)} + \rho_{33}^{(0)} = 1. \quad (6.12)$$

Izjednačavanjem članova uz λ^k , $k = 1, 2, 3, \dots$, dobićemo svojevrsne rekurentne relacije

$$\dot{\rho}_{11}^{(k)} = i(\Omega_p^* \rho_{21}^{(k-1)} - \Omega_p \rho_{12}^{(k-1)}) + \lambda_{22}^{(1)} \rho_{22}^{(k)} + \lambda_{33}^{(1)} \rho_{33}^{(k)}, \quad (6.13)$$

$$\dot{\rho}_{21}^{(k)} = i\Omega_p (\rho_{11}^{(k-1)} - \rho_{22}^{(k-1)}) + i\Omega_c^* \rho_{31}^{(k)} - (i\Delta_p + \lambda_{21}) \rho_{21}^{(k)}, \quad (6.14)$$

$$\dot{\rho}_{31}^{(k)} = i\Omega_c \rho_{21}^{(k)} - i\Omega_p \rho_{32}^{(k-1)} - (i(\Delta_p + \Delta_c) + \lambda_{31}) \rho_{31}^{(k)}, \quad (6.15)$$

$$\dot{\rho}_{32}^{(k)} = i\Omega_c (\rho_{22}^{(k)} - \rho_{33}^{(k)}) - i\Omega_p^* \rho_{31}^{(k-1)} - (i\Delta_c + \lambda_{32}) \rho_{32}^{(k)}, \quad (6.16)$$

$$\dot{\rho}_{33}^{(k)} = i(\Omega_c \rho_{23}^{(k)} - \Omega_c^* \rho_{32}^{(k)}) - \lambda_{33} \rho_{33}^{(k)}, \quad (6.17)$$

koje predstavljaju OB jednačine u k -tom redu teorije perturbacija. Na kraju, iz (6.6) sledi i jednačina

$$\rho_{11}^{(k)} + \rho_{22}^{(k)} + \rho_{33}^{(k)} = 0, \quad (6.18)$$

koja dopunjuje već napisanu relaciju za nedijagonalne elemente.

Rešavanjem jednačina (6.7)–(6.11), uz korišćenje početnih uslova (6.4), za matrice elemente operatora gustine u nultom redu teorije perturbacija dobija se

$$\rho_{11}^{(0)}(z, t) = 1, \quad \rho_{ij}^{(0)}(z, t) = 0, \quad (i, j) \neq (1, 1), \quad (6.19)$$

dakle ove vrednosti se ne menjaju sa vremenom. Ovo znači da je, da bi se video efekat elektromagnetnih polja na materijalnu sredinu, neophodno uračunati više redove. U daljem radu će nam uglavnom biti dovoljne OB jednačine u prvom redu teorije perturbacija, koje dobijamo stavljanjem $k = 1$ u rekurentne relacije (6.13)–(6.17), u koje potom zamenimo dobijena rešenja za nulti red (6.19) (viši redovi unose vrlo male popravke koje mahom neće uticati na efekte koje proučavamo).²

² Ukoliko se zadržimo samo na matricnom elementu ρ_{21} koji nam je od elementarnog značaja za određivanje apsorpcione i disperzione krive, može se pokazati da se za drugi red teorije perturbacija dobija $\rho_{21}^{(2)} = 0$. Prvi sledeći nenulti element je $\rho_{21}^{(3)}$, ali je njegov uticaj na apsorpcionu i disperzionu krivu zanemarljiv praktično u svim slučajevima od interesa u ovoj disertaciji. Sa druge strane, ako nam je od interesa neki drugi element matrice gustine za koji se ispostavi da je u prvom redu jednak nuli, biće neophodno da potražimo njegove popravke u višim redovima, kao što je to slučaj u odeljku 6.1.4.

Rezultat je:

$$\dot{\rho}_{11}^{(1)} = \lambda_{22}^{(1)} \rho_{22}^{(1)} + \lambda_{33}^{(1)} \rho_{33}^{(1)}, \quad (6.20)$$

$$\dot{\rho}_{21}^{(1)} = i\Omega_p + i\Omega_c^* \rho_{31}^{(1)} - \Lambda_{21} \rho_{21}^{(1)}, \quad (6.21)$$

$$\dot{\rho}_{31}^{(1)} = i\Omega_c \rho_{21}^{(1)} - \Lambda_{31} \rho_{31}^{(1)}, \quad (6.22)$$

$$\dot{\rho}_{32}^{(1)} = i\Omega_c (\rho_{22}^{(1)} - \rho_{33}^{(1)}) - \Lambda_{32} \rho_{32}^{(1)}, \quad (6.23)$$

$$\dot{\rho}_{33}^{(1)} = i (\Omega_c \rho_{23}^{(1)} - \Omega_c^* \rho_{32}^{(1)}) - \lambda_{33} \rho_{33}^{(1)}, \quad (6.24)$$

gde smo, radi jednostavnijeg pisanja, uveli nove kompleksne veličine

$$\Lambda_{21} = \lambda_{21} + i\Delta_p, \quad (6.25)$$

$$\Lambda_{31} = \lambda_{31} + i(\Delta_p + \Delta_c) = \lambda_{31} + i\Delta_1, \quad (6.26)$$

$$\Lambda_{32} = \lambda_{32} + i\Delta_c. \quad (6.27)$$

Navedimo, na kraju, još i relaciju zatvorenosti

$$\rho_{11}^{(1)} + \rho_{22}^{(1)} + \rho_{33}^{(1)} = 0, \quad (6.28)$$

koja sledi iz (6.18) stavljanjem $k = 1$. Jednačine (6.20)–(6.24) se često nazivaju i *linearizovane* OB jednačine, budući da su se, zahvaljujući uvođenju perturbacionog razvoja po Ω_p , u jednačinama izgubili svi nelinearni članovi.³

Pažljivim posmatranjem (6.13)–(6.17), vidimo da su dve od pet jednačina *raspregnute*. Reč je o jednačinama (6.21) i (6.22), što nam omogućava da iz čitavog sistema OB jednačina izdvojimo i rešavamo jedino njih, posebno zbog toga što će nam najčešće za dalji rad od interesa biti samo poznavanje koherencije $\rho_{21}^{(1)}$.⁴ Fokusirajmo se sada na najjednostavniju moguću situaciju kada su Rabijeve frekvencije svih laserskih polja konstantne u svakoj tački prostora i u svakom trenutku vremena:

$$\Omega_p(z, t) = \Omega_p, \quad \Omega_c(z, t) = \Omega_c. \quad (6.29)$$

Kako Rabijeve frekvencije zavise od envelope električnog polja odgovarajućeg talasa, primećujemo da gornji uslov znači da elektromagnetni talasi definisani preko (5.122) poprimaju formu *monohromatskih* talasa, tj. baratamo sa *kontinualnim* laserima. Jednačina (6.29) implicira da ni elementi matrice gustine neće zavisiti od prostorne koordinate, dakle $\rho_{ij}(z, t) = \rho_{ij}(t)$, kao i da će iz sistema MB jednačina „otpasti” sve propagacione jednačine, pa će čitav sistem biti opisan isključivo OB jednačinama. Pored toga, ograničimo se na slučaj kada sistem svetlost–materija egzistira dovoljno dugo (mnogo duže od karakterističnih vremena života sistema) da se u njemu uspostavi stacionarno

³ Linearizovane jednačine se nekada u literaturi dobijaju skraćenim postupkom, kada se u polaznim OB jednačinama (5.85)–(5.89) prosto zanemare članovi oblika $\Omega_p \rho_{ij}$ i $\Omega_p^* \rho_{ij}$, koji predstavljaju infinitezimalne višeg reda. U pitanju je, suštinski, isti postupak kao onaj objašnjen u glavnom tekstu.

⁴ Sa jedne strane, poznavanje ove veličine nam omogućava da nađemo susceptibilnost u odnosu na sondirajuće polje, u skladu sa jednačinom (5.237), a samim tim apsorpcionu i disperzionu krivu za posmatrani sistem. Sa druge strane, ρ_{21} (a samim tim i $\rho_{21}^{(1)}$) je jedini matricni element operatora gustine koji ulazi u propagacionu jednačinu (5.151), a koja će najčešće i jedina biti rešavana (u većem delu disertacije pretpostavljamo da su kontrolno i dodatno polje konstantni u svakoj tački prostora i eventualno se menjaju samo sa vremenom).

stanje. Ovo će nam omogućiti da donesemo neke bitne zaključke koji će moći da se primene i prilikom opštijih razmatranja. U *stacionarnom* režimu će, dakle, OB jednačine (6.21) i (6.22), koje će nam, kao što smo rekli, ovde jedine biti od značaja, glasiti

$$0 = i\Omega_p + i\Omega_c^* \rho_{31}^{(1)} - \Lambda_{21} \rho_{21}^{(1)}, \quad (6.30)$$

$$0 = i\Omega_c \rho_{21}^{(1)} - \Lambda_{31} \rho_{31}^{(1)}, \quad (6.31)$$

gde je iskorišćena činjenica da se u stacionarnom slučaju relevantne veličine ne menjaju sa vremenom, pa su svi izvodi po vremenu jednaki nuli. Ovim smo dobili sistem običnih algebarskih jednačina koji se rešava tako što, na primer, pomoću jednačine (6.31) izrazimo $\rho_{31}^{(1)}$ preko $\rho_{21}^{(1)}$ i taj izraz zamenimo u (6.30). Nakon kraćeg sređivanja, dobijamo

$$\rho_{21}^{(1)} = \rho_{21}^{(1)}(t \rightarrow \infty) = \frac{i\Lambda_{31}}{|\Omega_c|^2 + \Lambda_{21}\Lambda_{31}} \Omega_p \quad (6.32)$$

za koherenciju koja odgovara prelazu $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ u stacionarnom slučaju. Radi kompletnosti, navedimo i izraz

$$\rho_{31}^{(1)} = \rho_{31}^{(1)}(t \rightarrow \infty) = -\frac{\Omega_p \Omega_c}{|\Omega_c|^2 + \Lambda_{21}\Lambda_{31}}, \quad (6.33)$$

koji predstavlja koherenciju povezanu sa prelazom $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$, dobijenu pomoću (6.31) i (6.32).

S obzirom na to da su apsorpciona i disperziona kriva direktno povezane sa imaginarnim, odnosno realnim delom upravo dobijene koherencije, respektivno, potrebno je izvršiti racionalizaciju izraza (6.32), njegovim istovremenim množenjem i deljenjem sa $|\Omega_c|^2 + \Lambda_{21}^* \Lambda_{31}^*$. Nakon nešto duže računice, za imaginarni deo dobijamo

$$\text{Im}\rho_{21}^{(1)} = \Omega_p \frac{\lambda_{21}(\lambda_{31}^2 + \Delta_1^2) + \lambda_{31}|\Omega_c|^2}{(\lambda_{21}^2 + \Delta_p^2)(\lambda_{31}^2 + \Delta_1^2) + |\Omega_c|^2 (|\Omega_c|^2 + 2(\lambda_{21}\lambda_{31} - \Delta_p\Delta_1))}, \quad (6.34)$$

dok za realni deo sledi

$$\text{Re}\rho_{21}^{(1)} = \Omega_p \frac{\Delta_p(\lambda_{31}^2 + \Delta_1^2) - \Delta_1|\Omega_c|^2}{(\lambda_{21}^2 + \Delta_p^2)(\lambda_{31}^2 + \Delta_1^2) + |\Omega_c|^2 (|\Omega_c|^2 + 2(\lambda_{21}\lambda_{31} - \Delta_p\Delta_1))} \quad (6.35)$$

u stacionarnom režimu [197]. Detaljna analiza ovih funkcija nezavisne promenljive Δ_p izlazi iz okvira disertacije, za čije potrebe ćemo se koncentrisati samo na neke karakteristične vrednosti za apsorpcionu krivu, direktno srazmernu veličini $\text{Im}\rho_{21}^{(1)}$, kao i na nagib disperzione krive, povezane sa $\text{Re}\rho_{21}^{(1)}$, što je detaljno diskutovano u poglavlju 5.6. Konkretno, funkcija $\text{Im}\rho_{21}^{(1)}(\Delta_p)$ ima dva maksimuma i jedan minimum – maksimumi odgovaraju pikovima apsorpcije, između kojih se nalazi *prozor transparentnosti* gde je apsorpcija smanjena i za odgovarajuće Δ_p ima minimum. U opštem slučaju, apsorpciona kriva, zajedno sa svojim pikovima i prozorom transparentnosti, ima asimetričan oblik, i njen minimum, tj. „dno” prozora transparentnosti, nastupa za $\Delta_p = -\Delta_c$. U slučaju koji će nama najčešće biti od interesa, uzimaćemo da je kontrolno polje u rezonanciji sa prelazom koje pobuđuje, dakle $\Delta_c = 0$. Tada će minimum apsorpcione krive postojati za $\Delta_p = 0$, dakle oba polja moraju biti rezonantna. Vrednost ovog minimuma će biti

$$\left(\text{Im}\rho_{21}^{(1)}\right)_{\min} = \text{Im}\rho_{21}^{(1)}(\Delta_p = 0) = \frac{\lambda_{31}}{|\Omega_c|^2 + \lambda_{21}\lambda_{31}} \Omega_p. \quad (6.36)$$

U isto vreme, možemo izračunati i razmak između AT apsorpcionih pikova, koji određuje širinu prozora transparentnosti:

$$\Delta_{AT} = 2\sqrt{\frac{(\lambda_{21} + \lambda_{31})|\Omega_c|\sqrt{|\Omega_c|^2 + \lambda_{21}\lambda_{31}} - \lambda_{31}(|\Omega_c|^2 + \lambda_{21}\lambda_{31})}{\lambda_{21}}}, \quad (6.37)$$

što važi ukoliko je ispunjen uslov [197]:

$$|\Omega_c| > \lambda_{31}\sqrt{\frac{\lambda_{31}}{\lambda_{21} + 2\lambda_{31}}}, \quad (6.38)$$

kada će se apsorpciona kriva sastojati od dva, *simetrično* postavljena apsorpciona pika. Najmanja apsorpcija, odnosno minimum prozora transparentnosti, postiže se, dakle, u slučaju *dvofotoske rezonancije*

$$\Delta_p + \Delta_c = 0. \quad (6.39)$$

Pored toga, da bi transparentnost sredine u odnosu na sondirajuće polje bila što veća, potreban je dodatni uslov da je kontrolno polje dovoljno velikog intenziteta. Iz (6.36) vidimo da će ovo biti slučaj ako važi

$$|\Omega_c| \gg \lambda_{21}, \lambda_{31}, \quad (6.40)$$

što ukazuje na to da koeficijent raspada λ_{31} igra bitniju ulogu u formiranju prozora transparentnosti od λ_{21} (izraz koji sadrži koeficijente raspada u imeniocu izraza (6.36) moći će da se zanemari, što nas ostavlja samo sa koeficijentom λ_{31} koji figuriše i u brojiocu). Nasuprot tome, koeficijent λ_{21} odgovoran je za *širinu* apsorpcionih pikova, budući da je ona direktno srazmerna ovoj veličini. Vidimo da će apsorpcija sondirajućeg polja na „dnu” prozora transparentnosti biti jednaka nuli jedino ako je $\lambda_{31} = 0$, što je u suprotnosti sa zaključcima dobijenim za Λ konfiguraciju, gde je ova vrednost *uvek* jednaka nuli, bez obzira na vrednosti koeficijenata raspada [52]. Pored toga, navedimo i da će, ukoliko je ispunjen gornji uslov, širina prozora transparentnosti dobiti znatno jednostavniji oblik:

$$\Delta_{AT} = 2|\Omega_c|, \quad (6.41)$$

odakle vidimo da, u slučaju jakih kontrolnih polja, širinu prozora određuje jedino vrednost Rabijeve frekvencije kontrolnog polja.

Naravno, AT cepanje će imati svoj uticaj i na karakteristike disperzione krive. Ukoliko su svi gore pobrojani uslovi i dalje zadovoljeni, važiće $\text{Re}\rho_{21}^{(1)}(\Delta_p = 0) = 0$, dok će nagib disperzione krive na „dnu” prozora transparentnosti imati vrednost:

$$\left(\frac{d}{d\Delta_p}\text{Re}\rho_{21}^{(1)}\right)_{\Delta_p=0} = -\frac{|\Omega_c|^2 - \lambda_{31}^2}{(|\Omega_c|^2 + \lambda_{21}\lambda_{31})^2}\Omega_p \approx -\frac{\Omega_p}{|\Omega_c|^2} < 0. \quad (6.42)$$

Vidimo da je znak ove veličine negativan, dakle radi se o *normalnoj* disperziji. Pored toga, može se zapaziti da je nagib disperzione krive (po apsolutnoj vrednosti) veći što je kontrolna Rabijeva frekvencija manja. Ukoliko u razmatranje uzmemo i izraz (6.41), zaključujemo da će disperziona kriva u $\Delta_p = 0$ biti *strmija* što je prozor transparentnosti *uži*. Ovo, naravno, ima direktan uticaj na grupnu brzinu kojom se sondirajući puls prostire kroz sredinu. Korišćenjem relacije (5.258), kao

i zaključaka dobijenih u ovom paragrafu, za grupni indeks materijalne sredine $n_g(\Delta_p = 0) \equiv n_g$ dobijamo

$$n_g = 1 + \frac{\mathcal{N}\omega_{21}|d_{21}|^2}{2\varepsilon_0\hbar} \frac{|\Omega_c|^2 - \lambda_{31}^2}{(|\Omega_c|^2 + \lambda_{21}\lambda_{31})^2} \approx 1 + \frac{\mathcal{N}\omega_{21}|d_{21}|^2}{2\varepsilon_0\hbar|\Omega_c|^2}. \quad (6.43)$$

Posmatrajući ovaj izraz, najpre vidimo da, ako je $\mathcal{N} = 0$, govorimo o vakuumu kao materijalnoj sredini, pa će biti $n_g = 1$, odnosno $v_g = c$. U ostalim slučajevima imamo $n_g > 1$, te se grupna brzina svetlosti smanjuje, $v_g < c$. Pored ostalog, ovo smanjenje je određeno vrednošću kontrolne Rabijeve frekvencije – što je ona manja (a prozor transparentnosti uži), grupni indeks je veći a svetlost se sve više usporava. Vidimo da vrlo male vrednosti kontrolne Rabijeve frekvencije mogu dovesti do povećanja grupnog indeksa, odnosno smanjenja grupne brzine i za nekoliko redova veličine. Sa druge strane, smanjenje Ω_c prouzrokuje približavanje a potom i spajanje dva apsorpciona pika, tako da apsorpcija u $\Delta_p = 0$ postaje isuviše velika. Zbog toga je potrebno naći svojevrsan balans pri biranju Rabijeve frekvencije kontrolnog polja, ili eventualno oprobati drugačije metode za smanjenje grupne brzine sondirajućeg lasera.

Ukoliko je, pak, kontrolno polje odsutno, izraz (6.34) svodi se na običan lorencijan:

$$\text{Im}\rho_{21}^{(1)} = \Omega_p \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{21}^2 + \Delta_p^2}, \quad (6.44)$$

dok za realni deo dobijamo

$$\text{Re}\rho_{21}^{(1)} = \Omega_p \frac{\Delta_p}{\lambda_{21}^2 + \Delta_p^2}, \quad (6.45)$$

što sledi iz (6.35) stavljanjem $\Omega_c = 0$. Ovi izrazi predstavljaju dobro poznate izraze dobijene još u okviru Lorencove teorije klasičnog oscilatora, prikazane u odeljku 2.1.3 (pri čemu sondirajuća razdešenost menja razliku $\omega - \omega_0$, a koeficijent λ_{21} dolazi umesto γ) – dakle, nastupa apsorpcija sondirajućeg polja ukoliko je ono rezonantno sa odgovarajućim prelazom. Drugim rečima, apsorpciona kriva ima jedan maksimum i to za $\Delta_p = 0$. Dobijeni izrazi jasno potvrđuju zaključke u vezi sa EIT (u širem smislu) date još u uvodnim glavama. Napomenimo još i da će, u ovom slučaju, nagib disperzione krive u slučaju rezonancije biti dat izrazom

$$\left(\frac{d}{d\Delta_p} \text{Re}\rho_{21}^{(1)} \right)_{\Delta_p=0} = \frac{\Omega_p}{\lambda_{21}^2} > 0, \quad (6.46)$$

koji ukazuje na to da se, za razliku od slučaja kada kontrolno polje uključeno, ovde radi o *anomalnoj* disperziji. Korišćenjem izraza (5.258), kao i činjenice da u slučaju rezonancije imamo $\text{Re}\rho_{21}^{(1)}(\Delta_p = 0) = 0$, za grupni indeks u ovom slučaju dobijamo

$$n_g = 1 - \frac{\mathcal{N}\omega_{21}|d_{21}|^2}{2\varepsilon_0\hbar\lambda_{21}^2}, \quad (6.47)$$

odakle sledi da je $n_g < 1$ i $v_g > c$, a moguće je da se desi čak i da je $n_g < 0$, što implicira i da je $v_g < 0$. Kao što je u okviru klasične elektrodinamike već poznato, ova svojstva svetlosti ne narušavaju Ajnštajnovе postulate specijalne teorije relativnosti, tim pre zbog toga što je u slučaju rezonancije svetlost kompletno apsorbovana.

6.1.2 Otvoren sistem sa tri nivoa

Bez obzira na to što sistem OB jednačina za otvoren sistem sadrži upadljivo više jednačina nego zatvoren sistem sa tri nivoa, perturbacioni metod primenjen na jednačine (5.92)–(5.105) daće iste rezultate kao za zatvoren sistem diskutovan u prethodnom odeljku, jer će se linearizovane jednačine (5.93) i (5.94) ponovo raspregnuti, i ponovo će nam biti dovoljno da samo njih rešavamo. Vidimo da one imaju isti oblik kao i jednačine (6.21) i (6.22), pa će rešenja dobijena za zatvoren sistem u stacionarnom slučaju moći da se primene i ovde. Naravno, razliku će uneti efekat degeneracije srednjeg nivoa, koji se najbolje može uočiti ukoliko se ograničimo na situaciju kada je u sredini dominantan proces spontane emisije. U skladu sa izrazima iz odeljka 5.1.3, vidimo da će se koeficijent raspada λ_{21} svesti na

$$\lambda_{21} = \frac{1}{2}\Gamma_{21} \quad (6.48)$$

bilo da je srednji nivo degenerisan ili ne. Međutim, preostali koeficijent raspada će biti

$$\lambda_{31} = \begin{cases} \frac{1}{2}\Gamma_{32}, & \text{zatvoren sistem sa tri nivoa,} \\ \frac{1}{2}(\Gamma_{32} + \Gamma_{34} + \Gamma_{35}), & \text{otvoren sistem sa tri nivoa.} \end{cases} \quad (6.49)$$

Dakle, nivo $|3\rangle$ se sada, prema selekcionim pravilima, raspada na tri umesto na jedan nivo, pa će i ukupni koeficijent raspada sa ovog nivoa biti veći. Označimo sa

$$\Gamma_3^{\text{ef}} = \Gamma_{32} + \Gamma_{34} + \Gamma_{35} \quad (6.50)$$

veličinu koju ćemo zvati *efektivni koeficijent raspada* [5].

Prema tome, sva rešenja dobijena za zatvoren sistem sa tri nivoa važiće i ovde. Konkretno, lako možemo porediti dva sistema ako uzmemo u obzir da će se zamenom (6.48) i (6.49) u jednačine iz prethodnog odeljka dobijaju karakteristike apsorpcione i disperzione krive za slučaj dominantne spontane emisije. Na ovom mestu nećemo ponovo navoditi sve jednačine, već ćemo se ograničiti samo na one gde je razlika između dve konfiguracije upadljiva. To je, konkretno, izraz (6.36), koji nam daje informaciju o vrednosti „dna” prozora transparentnosti, gde glavnu ulogu u određivanju te vrednosti igra upravo koeficijent λ_{31} . Tako dobijamo

$$\left(\text{Im}\rho_{21}^{(1)}\right)_{\min}^Z = \frac{\frac{1}{2}\Gamma_{32}}{|\Omega_c|^2 + \frac{1}{4}\Gamma_{21}\Gamma_{32}}\Omega_p \quad (6.51)$$

za zatvoren sistem sa tri nivoa, odnosno

$$\left(\text{Im}\rho_{21}^{(1)}\right)_{\min}^O = \frac{\frac{1}{2}(\Gamma_{32} + \Gamma_{34} + \Gamma_{35})}{|\Omega_c|^2 + \frac{1}{4}\Gamma_{21}(\Gamma_{32} + \Gamma_{34} + \Gamma_{35})}\Omega_p = \frac{\frac{1}{2}\Gamma_3^{\text{ef}}}{|\Omega_c|^2 + \frac{1}{4}\Gamma_{21}\Gamma_3^{\text{ef}}}\Omega_p \quad (6.52)$$

za otvoren sistem sa tri nivoa. Ukoliko se, prema već pomenutom uslovu $|\Omega_c| \gg \lambda_{21}, \lambda_{31}$, drugi sabirak u imeniocu oba izraza može zanemariti, jasno je da će „dno” prozora u slučaju degeneracije srednjeg nivoa imati veću vrednost, tj. apsorpcija sondirajućeg polja je u slučaju dvofotonske rezonancije veća za otvoren nego za zatvoren sistem, a razlog su dodatni raspadi sa najvišeg na podnivo srednjeg nivoa. Napomenimo još i to da je jedan od centralnih zaključaka kod degenerisanih sistema taj da se otvoren (degenerisan) sistem može tretirati kao zatvoren (nedegenerisan), ukoliko se za koeficijent raspada najvišeg nivoa umesto Γ_{32} uzme efektivni koeficijent Γ_3^{ef} [5, 6].

6.1.3 Sistem sa četiri nivoa i dva kontrolna polja

Kada je reč o sistemu sa četiri nivoa, postoje dva pravca u kojima se može tražiti rešenje – jedan u kome dodatno polje tretiramo kao kontrolno i drugi u kome ga tretiramo kao sondirajuće. Ukoliko dodatno polje $\Omega_d(z, t)$ smatramo kontrolnim, tj. poljem znatno većeg intenziteta od sondirajućeg, za posmatrani sistem važi $\Omega_p \ll \Omega_c, \Omega_d$ i sondirajuće polje možemo ponovo tretirati kao perturbaciju [196]. Zamenom (6.2) i (6.3) u OB jednačine (5.109)–(5.117), vidimo da su od interesa jedino jednačine

$$\dot{\rho}_{21}^{(k)} = i\Omega_p \left(\rho_{11}^{(k-1)} - \rho_{22}^{(k-1)} \right) + i\Omega_c^* \rho_{31}^{(k)} - (i\Delta_p + \lambda_{21}) \rho_{21}^{(k)}, \quad (6.53)$$

$$\dot{\rho}_{31}^{(k)} = i\Omega_c \rho_{21}^{(k)} + i\Omega_d^* \rho_{41}^{(k)} - i\Omega_p \rho_{32}^{(k-1)} - (i(\Delta_p + \Delta_c) + \lambda_{31}) \rho_{31}^{(k)}, \quad (6.54)$$

$$\dot{\rho}_{41}^{(k)} = i\Omega_d \rho_{31}^{(k)} - i\Omega_p \rho_{42}^{(k-1)} - (i(\Delta_p + \Delta_c + \Delta_d) + \lambda_{41}) \rho_{41}^{(k)}, \quad (6.55)$$

za $k > 0$, koje su u prvom redu teorije perturbacija raspregnute od ostalih. U stacionarnom slučaju, kao i uz pretpostavku da je dodatno polje konstantno, $\Omega_d(z, t) = \Omega_d$, koristeći početne uslove (6.4), u nultom redu dobijamo da je $\rho_{11}^{(0)} = 1$, $\rho_{ij}^{(0)} = 0$, $(i, j) \neq (1, 1)$. Stavljanjem $k = 1$ u gornje jednačine, kao i dobijenih rešenja za matrice elemente operatora gustine u nultom redu, u prvom redu teorije perturbacija imamo

$$0 = i\Omega_p + i\Omega_c^* \rho_{31}^{(1)} - \Lambda_{21} \rho_{21}^{(1)}, \quad (6.56)$$

$$0 = i\Omega_c \rho_{21}^{(1)} + i\Omega_d^* \rho_{41}^{(1)} - \Lambda_{31} \rho_{31}^{(1)}, \quad (6.57)$$

$$0 = i\Omega_d \rho_{31}^{(1)} - \Lambda_{41} \rho_{41}^{(1)}, \quad (6.58)$$

odakle, kao jedna od tri nepoznate veličine, proizlazi matricni element koherencije prelaza $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$:

$$\rho_{21}^{(1)} = \rho_{21}^{(1)}(t \rightarrow \infty) = i\Omega_p \frac{\Omega_d^2 + \Lambda_{31} \Lambda_{41}}{\Omega_c^2 \Lambda_{41} + \Omega_d^2 \Lambda_{21} + \Lambda_{21} \Lambda_{31} \Lambda_{41}}, \quad (6.59)$$

gde smo, pored veličina uvedenih preko (6.25) i (6.26), uveli i novu, kompleksnu veličinu

$$\Lambda_{41} = \lambda_{41} + i(\Delta_p + \Delta_c + \Delta_d) = \lambda_{41} + i\Delta_2, \quad (6.60)$$

a pretpostavili smo i da su sve Rabijeve frekvencije *realne* veličine, tj. $\Omega_p^* = \Omega_p$, $\Omega_c^* = \Omega_c$, $\Omega_d^* = \Omega_d$. Preostala dva matricna elementa iz sistema jednačina (6.56)–(6.58) mogu se izraziti preko $\rho_{21}^{(1)}$ na sledeći način:

$$\rho_{31}^{(1)} = \frac{i\Omega_c \Lambda_{41}}{\Omega_d^2 + \Lambda_{31} \Lambda_{41}} \rho_{21}^{(1)} = -\frac{\Omega_p \Omega_c \Lambda_{41}}{\Omega_c^2 \Lambda_{41} + \Omega_d^2 \Lambda_{21} + \Lambda_{21} \Lambda_{31} \Lambda_{41}}, \quad (6.61)$$

odnosno

$$\rho_{41}^{(1)} = \frac{i\Omega_d}{\Lambda_{41}} \rho_{31}^{(1)} = -\frac{i\Omega_p \Omega_c \Omega_d}{\Omega_c^2 \Lambda_{41} + \Omega_d^2 \Lambda_{21} + \Lambda_{21} \Lambda_{31} \Lambda_{41}}. \quad (6.62)$$

Analizu funkcije $\rho_{21}^{(1)}(\Delta_p)$ je u principu moguće sprovesti analogno kao za zatvoren sistem sa tri nivoa, ali će u ovom slučaju procedura biti znatno komplikovanija. Zbog toga ćemo dalju analizu

podeliti u dva dela – glavni deo ćemo sprovesti uz pomoć obučanih stanja, definisanih relacijama prikazanim u odeljku 6.2.2, dok će glavni zaključci vezani za disperzionu krivu biti navedeni ovde, i to na osnovu analize toka i grafika funkcije $\text{Re}\rho_{21}^{(1)}(\Delta_p)$.

U cilju ispitivanja disperzione krive za sistem za četiri nivoa i dva kontrolna polja, pretpostavimo da je $\Delta_c = \Delta_d = 0$, da su svi koeficijenti raspada međusobno jednaki, $\lambda_{21} = \lambda_{31} = \lambda_{41} = \gamma$, kao i da važi $\gamma \ll \Omega_c, \Omega_d$. Tada su nule funkcije $\text{Re}\rho_{21}^{(1)}(\Delta_p)$ locirane na pozicijama $\Delta_p = 0, \pm\Omega_d, \pm\sqrt{\Omega_c^2 + \Omega_d^2}$, pri čemu tri od ovih pet pozicija ($\Delta_p = 0, \pm\sqrt{\Omega_c^2 + \Omega_d^2}$) predstavljaju razdešenosti sondirajućeg polja kada je apsorpcija maksimalna. Preostale dve, $\Delta_p = \pm\Omega_d$, daju informaciju o *minimumu* apsorpcije unutar dva prozora transparentnosti. Ovo su, zapravo, vrednosti razdešenosti koje nas najviše interesuju, pošto će tada gubici koje trpi laser pri prolasku kroz sredinu biti najmanji mogući. U ovim minimumima, nagib disperzione krive iznosi

$$\left(\frac{d}{d\Delta_p} \text{Re}\rho_{21}^{(1)} \right)_{\Delta_p = \pm\Omega_d} = -\frac{2\Omega_p}{\Omega_c^2} < 0, \quad (6.63)$$

gde vidimo da se ponovo radi o normalnoj disperziji, kao i da je nagib krive u datim tačkama dvostruko veći od nagiba disperzione krive u minimumu apsorpcije kod sistema sa tri nivoa, datog jednačinom (6.42) (ukoliko, naravno, i ovde važi pretpostavka $\Omega_c^* = \Omega_c$). Zamenom u (5.258), dobićemo

$$n_g \equiv n_g(\pm\Omega_d) = 1 + \frac{\mathcal{N}(\omega_{21} \pm \Omega_d) |d_{21}|^2}{\varepsilon_0 \hbar \Omega_c^2} \approx 1 + \frac{\mathcal{N}\omega_{21} |d_{21}|^2}{\varepsilon_0 \hbar \Omega_c^2}, \quad (6.64)$$

gde smo iskoristili činjenicu da je $\Omega_d \ll \omega_{21}$ praktično u svim slučajeva od interesa u ovoj disertaciji. Poređenjem sa (6.43), vidimo da će dodatno polje omogućiti *dodatno usporenje* svetlosti, pri čemu će to usporenje zavisiti od izbora materijalne sredine i njenih konkretnih parametara, kao i Rabijeve frekvencije dodatnog polja.

6.1.4 Sistem sa četiri nivoa i dva sondirajuća polja

Drugi pravac odnosi se na situaciju kada se dodatno polje može smatrati sondirajućim, tj. poljem koje je mnogo slabijeg intenziteta od jedinog kontrolnog polja koje interaguje sa sredinom u posmatranom slučaju. Tada će važiti $\Omega_p, \Omega_d \ll \Omega_c$, pa se perturbacioni pristup modifikuje tako da sada u jednačine (5.109)–(5.117) treba staviti i

$$\Omega_d(z, t) \rightarrow \lambda \Omega_d(z, t). \quad (6.65)$$

Kako sada imamo dva sondirajuća polja, imaćemo i dve apsorpcione, odnosno disperzione krive. Jedna će odgovarati prelazu $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ koji pobuđuje sondirajuće polje Ω_p , koji je već razmatran u prethodnim odeljcima, i gde se rezultati neće previše razlikovati od onih koje smo već dobili. Sa druge strane, potrebno je da detaljnije ispitamo apsorpciju i disperziju sredine u odnosu na dodatno polje, odgovorno za prelaz $|3\rangle \leftrightarrow |4\rangle$. Ove veličine biće povezane sa susceptibilnošću u odnosu na dodatno polje, koja će pak biti u vezi sa matičnim elementom ρ_{43} preko jednačine (5.239). Ako se matrica gustine zapiše u obliku perturbacionog razvoja, a Ω_p i Ω_d u formi perturbacije, dobićemo

sledeći skup „rekurentnih” relacija za matrice elemente u k -tom redu teorije perturbacija:

$$\dot{\rho}_{11}^{(k)} = i \left(\Omega_p^* \rho_{21}^{(k-1)} - \Omega_p \rho_{12}^{(k-1)} \right) + \lambda_{22}^{(1)} \rho_{22}^{(k)} + \lambda_{33}^{(1)} \rho_{33}^{(k)} + \lambda_{44}^{(1)} \rho_{44}^{(k)}, \quad (6.66)$$

$$\dot{\rho}_{21}^{(k)} = i \Omega_p \left(\rho_{11}^{(k-1)} - \rho_{22}^{(k-1)} \right) + i \Omega_c^* \rho_{31}^{(k)} - \Lambda_{21} \rho_{21}^{(k)}, \quad (6.67)$$

$$\dot{\rho}_{31}^{(k)} = i \Omega_c \rho_{21}^{(k)} + i \Omega_d^* \rho_{41}^{(k-1)} - i \Omega_p \rho_{32}^{(k-1)} - \Lambda_{31} \rho_{31}^{(k)}, \quad (6.68)$$

$$\dot{\rho}_{41}^{(k)} = i \Omega_d \rho_{31}^{(k-1)} - i \Omega_p \rho_{42}^{(k-1)} - \Lambda_{41} \rho_{41}^{(k)}, \quad (6.69)$$

$$\dot{\rho}_{32}^{(k)} = i \Omega_c \left(\rho_{22}^{(k)} - \rho_{33}^{(k)} \right) + i \Omega_d^* \rho_{42}^{(k-1)} - i \Omega_p^* \rho_{31}^{(k-1)} - \Lambda_{32} \rho_{32}^{(k)}, \quad (6.70)$$

$$\dot{\rho}_{42}^{(k)} = i \Omega_d \rho_{32}^{(k-1)} - i \Omega_c \rho_{43}^{(k)} - i \Omega_p^* \rho_{41}^{(k-1)} - \Lambda_{42} \rho_{42}^{(k)}, \quad (6.71)$$

$$\dot{\rho}_{33}^{(k)} = i \left(\Omega_c \rho_{23}^{(k)} - \Omega_c^* \rho_{32}^{(k)} \right) - i \left(\Omega_d \rho_{34}^{(k-1)} - \Omega_d^* \rho_{43}^{(k-1)} \right) + \lambda_{44}^{(3)} \rho_{44}^{(k)} - \lambda_{33} \rho_{33}^{(k)}, \quad (6.72)$$

$$\dot{\rho}_{43}^{(k)} = i \Omega_d \left(\rho_{33}^{(k-1)} - \rho_{44}^{(k-1)} \right) - i \Omega_c^* \rho_{42}^{(k)} - \Lambda_{43} \rho_{43}^{(k)}, \quad (6.73)$$

$$\dot{\rho}_{44}^{(k)} = i \left(\Omega_d \rho_{34}^{(k-1)} - \Omega_d^* \rho_{43}^{(k-1)} \right) - \lambda_{44} \rho_{44}^{(k)}. \quad (6.74)$$

Navedene jednačine važe za $k > 0$, mada će i za $k = 0$ one važiti ako se iz pisanja izostave članovi $(k - 1)$ -tog reda. Napomenimo još i to da su, radi konciznijeg pisanja, uvedene nove kompleksne veličine

$$\Lambda_{42} = \lambda_{42} + i(\Delta_c + \Delta_d), \quad (6.75)$$

$$\Lambda_{43} = \lambda_{43} + i\Delta_d. \quad (6.76)$$

uz već postojeće Λ_{21} , Λ_{31} , Λ_{32} i Λ_{41} , koje smo definisali preko (6.25), (6.26), (6.27) i (6.60), respektivno.

Detaljnu proceduru rešavanja ovih jednačina u stacionarnom slučaju nećemo navoditi, ali ćemo istaći glavne zaključke i najvažnije relacije. Pored toga, ograničimo se na slučaj dominantne elektron-fononske interakcije, što će biti najvećim delom činjeno u nastavku rada, a ovde će u izvesnoj meri pojednostaviti pisanje. Ovo znači da ćemo, u skladu sa jednačinama (5.12) i (5.16), moći da stavimo $\lambda_{ii}^{(1)} = \lambda_{ii} = \gamma_{ii}$, $i = \overline{2, 4}$, $\lambda_{33}^{(2)} = \lambda_{44}^{(3)} = 0$ za dijagonalne, i $\lambda_{ij} = \gamma_{ij}$ za nedijagonalne elemente. Pre svega, kao i u prethodnim situacijama, imaćemo da je $\rho_{11}^{(0)}(z, t) = 1$, $\rho_{ij}^{(0)}(z, t) = 0$, $(i, j) \neq (1, 1)$. U prvom redu, jedini nenulti elementi matrice gustine biće

$$\rho_{21}^{(1)} = \frac{i\Lambda_{31}}{\Omega_c^2 + \Lambda_{21}\Lambda_{31}} \Omega_p, \quad \rho_{31}^{(1)} = -\frac{\Omega_p \Omega_c}{\Omega_c^2 + \Lambda_{21}\Lambda_{31}}, \quad (6.77)$$

što su izrazi koje smo već dobili kod razmatranja zatvorenog sistema sa tri nivoa, pri čemu smo razmatranje dodatno pojednostavili pretpostavkom da su sve Rabijevе frekvencije realne veličine. Drugim rečima, u slučaju slabog dodatnog polja, sistem se u prvom redu efektivno ponaša kao sistem sa tri nivoa. Pošto je sva populacija u početnom trenutku na osnovnom nivou, neće postojati elektroni koji mogu biti, pod dejstvom dodatnog polja, ekscitovani sa nivoa $|3\rangle$ na nivo $|4\rangle$, i najviši nivo se može smatrati raspregnutim od ostatka sistema. Ovo znači da će apsorpciona i disperziona kriva u odnosu na sondirajuće polje biti praktično ista kao za sistem sa tri nivoa, pri čemu popravke koje potiču od viših redova mogu da sadrže članove koji zavise od Ω_d ili Δ_d i samim tim unesu izvesne razlike, ali će one po pravilu biti zanemarljive. Sa druge strane, apsorpcija i disperzija u odnosu na dodatno polje u prvom redu biće jednaka nuli (jer je $\rho_{43}^{(1)} = 0$), tako da je u ovom slučaju

u obzir potrebno uzeti i popravke viših redova. Što se drugog reda tiče, nenulti matrični elementi biće $\rho_{11}^{(2)}$ i $\rho_{22}^{(2)}$, koje ovde nećemo navoditi, kao i

$$\rho_{41}^{(2)} = \frac{i\Omega_d}{\Lambda_{41}}\rho_{31}^{(1)}, \quad (6.78)$$

$$\rho_{33}^{(2)} = \Omega_p\Omega_c \frac{2i\gamma_{32}\Omega_c(\rho_{12}^{(1)} - \rho_{21}^{(1)}) - \gamma_{22}(\Lambda_{32}^*\rho_{31}^{(1)} + \Lambda_{32}\rho_{13}^{(1)})}{2\Omega_c^2\gamma_{32}(\gamma_{22} + \gamma_{33}) + \gamma_{22}\gamma_{33}|\Lambda_{32}|^2}, \quad (6.79)$$

$$\rho_{32}^{(2)} = \frac{1}{\gamma_{22}\Lambda_{32}} \left(\Omega_p\Omega_c(\rho_{21}^{(1)} - \rho_{12}^{(1)}) - i\Omega_p\gamma_{22}\rho_{31}^{(1)} - i\Omega_c(\gamma_{22} + \gamma_{33})\rho_{33}^{(2)} \right). \quad (6.80)$$

Primećujemo da je $\rho_{21}^{(2)} = 0$ – tek će naredna popravka uneti promene u ukupnom matričnom elementu ρ_{21} , i pritom će one biti neznatne (biće srazmerne maloj veličini Ω_p^3 , dok je član u prvom redu, kako vidimo, srazmeran Ω_p). Na kraju, u trećem redu teorije perturbacija dobijamo željeni izraz za matrični element koji odgovara prelazu koji pobuđuje dodatno polje:

$$\rho_{43}^{(3)} = \frac{i\Omega_d\Lambda_{42}\rho_{33}^{(2)} + \Omega_c(\Omega_d\rho_{32}^{(2)} - \Omega_p\rho_{41}^{(2)})}{\Omega_c^2 + \Lambda_{43}\Lambda_{42}}. \quad (6.81)$$

Ukoliko bismo u gornji izraz zamenili izraze za matrične elemente koji odgovaraju nižim redovima, dobili bismo da je $\rho_{43}^{(3)} \sim \Omega_d^3$. Dakle, efekat koji na čitav sistem ima dodatno sondirajuće polje je mali, i javlja se tek u trećem redu teorije perturbacija. Iako je to u principu moguće, na ovom mestu nećemo sprovesti niti analizu toka i grafika funkcije $\rho_{43}^{(3)}(\Delta_d)$, niti analizu preko obučenih stanja. Napomenimo samo da iz te analize sledi da će se u apsorpcionoj krivoj $\text{Im}\rho_{43}^{(3)}(\Delta_d)$ u odnosu na dodatno polje pojaviti *tri* apsorpciona maksimuma, između kojih dolazi do formiranja *dva* prozora transparentnosti. Za slučaj kada je $\Delta_p = \Delta_c = 0$, kao i kada su koeficijenti raspada međusobno jednaki, tako da važi $\gamma_{ij} = \gamma \ll \Omega_c$, dobićemo tri simetrično postavljena apsorpciona maksimuma, locirana u $\Delta_d = 0, \pm\Omega_c$. Istovremeno, minimumi apsorpcije u okviru dva prozora postojaće kada dodatna razdešenost ima vrednosti $\Delta_d = \pm\sqrt{2/3}\Omega_c$.⁵ U najvećem broju slučajeva od interesa, bočni pikovi imaće vrlo male vrednosti maksimuma, pa će središnji pik biti dominantan.

Razmotrimo konačno i disperziona karakteristike sredine u odnosu na dodatno polje. Za sondirajuće polje smo zaključili da niti disperziona kriva, a samim tim ni grupni indeks, odnosno ni grupna brzina neće pretrpeti skoro nikakve promene uključivanjem dodatnog polja – razlika će se pojaviti u trećem redu teorije perturbacija, što će praktično biti zanemarljivo. Dakle, nagib disperziona krive u minimumu apsorpcije ($\Delta_p = 0$), kao i grupni indeks sredine, biće ponovo dati jednačinama (6.42) i (6.43), respektivno. Naglasimo da je ovde uzeto i da je $\Delta_c = 0$, a vidimo da grupni indeks u prvom redu neće zavisiti od Δ_d – ovu vrednost možemo birati tako da obezbedimo minimalnu apsorpciju dodatnog polja. Sa druge strane, potrebno je da odredimo grupnu brzinu dodatnog polja, za šta ćemo iskoristiti relacije iz poglavlja 5.6, prilagođene za drugo sondirajuće polje. Konkretno, u ovoj situaciji krenućemo od jednačina (5.239) i (5.259) susceptibilnost, odnosno grupni indeks u odnosu na dodatno polje. Naravno, sada ćemo pisati $\rho_{43} \approx \rho_{43}^{(3)}$ jer je to član najnižeg reda različit od nule. Za početak, nađimo nagib disperziona krive u tačkama gde apsorpcija ima minimum:

$$\left(\frac{d}{d\Delta_d} \text{Re}\rho_{43}^{(3)} \right)_{\Delta_d = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\Omega_c} = -\frac{9\Omega_d\Omega_p^2}{\Omega_c^4} < 0, \quad (6.82)$$

⁵ Napomenimo da se pomenutih pet vrednosti dodatne razdešenosti (pozicije tri maksimuma i dva minimuma apsorpcije) mogu dobiti bilo kada se prvi izvod $\text{Im}\rho_{43}^{(3)}$ izjednači sa nulom, bilo kada se potraže nule funkcije $\text{Re}\rho_{43}^{(3)}$.

gde vidimo da se ponovo radi o normalnoj disperziji. Nakon toga, za grupni indeks u odnosu na dodatno polje dobijamo

$$n_g^d \equiv n_g^d \left(\pm \sqrt{\frac{2}{3}} \Omega_c \right) = 1 + \frac{\mathcal{N} \left(\omega_{43} \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \Omega_c \right) |d_{43}|^2 \Omega_p^2}{2\varepsilon_0 \hbar \Omega_c^4} \approx 1 + \frac{9\mathcal{N} \omega_{43} |d_{43}|^2 \Omega_p^2}{2\varepsilon_0 \hbar \Omega_c^4}, \quad (6.83)$$

gde smo ponovo iskoristili opravdanu pretpostavku da je $\Omega_c \ll \omega_{43}$. Posmatrajući ovaj izraz, jasno uočavamo da, iako na grupnu brzinu sondirajućeg pulsa dodatno polje praktično ne utiče, suprotno tvrđenje *ne* važi. Naime, promenom Rabijeve frekvencije sondirajućeg polja moguće je kontrolisati prostiranje dodatnog lasera, i to tako što povećanje Ω_p prouzrokuje povećanje grupnog indeksa, odnosno smanjenje grupne brzine dodatnog polja. Konkretno vrednosti ovih veličina zavisice, naravno, od vrednosti preostalih parametara koji figurišu u gornjem izrazu, i naravno od kontrolne Rabijeve frekvencije, čiji uticaj je sličan uticaju koji ima na sondirajuće polje – manja vrednost Ω_c uslovljava uži prozor transparentnosti, a istovremeno i veći nagib disperzione krive, što dovodi do smanjenja grupne brzine dodatnog lasera.

6.2 Formalizam obučenih stanja

U poglavlju 5.2 detaljno je prikazan postupak izvođenja hamiltonijana sistema svetlost–materija za sve tri konfiguracije. Ograničimo se, radi ilustracije principa i objašnjenja pojedinih važnih pojmova, na zatvoren sistem sa tri nivoa čiji je hamiltonijan dat izrazom (5.54) [197]. U cilju boljeg sagledavanja dobijenih rezultata, a kako je u delu prethodnog poglavlja već urađeno, uvešćemo pretpostavku da važi $\Omega_p^* = \Omega_p$, odnosno $\Omega_c^* = \Omega_c$, što će pomenuti hamiltonijan svesti na oblik

$$H = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_p & 0 \\ -\Omega_p & \Delta_p & -\Omega_c \\ 0 & -\Omega_c & \Delta_p + \Delta_c \end{pmatrix}. \quad (6.84)$$

Podsetimo se da je ovaj izraz zapisan u bazu svojstvenih stanja „atomske“ hamiltonijana, $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. U prisustvu elektromagnetnih polja, sondirajućeg i kontrolnog, ipak, dolazi do pomeranja ovih nivoa, što je posledica dinamičkog Štarkovog (AT) efekta, objašnjenog u odeljku 2.2.2. Kao što je tamo napomenuto, kaže se da laserska polja „oblače“ atom, a novi energijski nivoi, koji predstavljaju svojstvena stanja hamiltonijana (6.84), nazivaju se *obučena stanja*. U ovom poglavlju ćemo iskoristiti formalizam obučenih stanja kako bismo bolje objasnili pojavu AT efekta, i prokomentarisali neke osnovne karakteristike koji ga prate.

Svojstveni problem hamiltonijana (6.84) svodi se na svojstveni problem trodimenzione kvadratne matrice. U opštem slučaju, rešavanje svojstvenog problema nije sasvim jednostavno, ali ćemo za potrebe diskusije u ovom delu teksta pretpostaviti da važi $\Delta_1 = \Delta_p + \Delta_c = 0$, što predstavlja uslov za minimum apsorpcije, dobijen u prethodnom poglavlju. Za svojstvene energije sada se dobijaju vrednosti

$$E_0 = 0, \quad E_{\pm} = \frac{\hbar}{2} \left(\Delta_p \pm \sqrt{\Delta_p^2 + 4\Omega_0^2} \right), \quad (6.85)$$

pri čemu je

$$\Omega_0 = \sqrt{\Omega_p^2 + \Omega_c^2}. \quad (6.86)$$

Svojstveni vektori koji odgovaraju dobijenim vrednostima energije su

$$|0\rangle = \cos\theta|1\rangle - \sin\theta|3\rangle, \quad (6.87)$$

$$|+\rangle = \sin\theta\cos\phi|1\rangle - \sin\phi|2\rangle + \cos\theta\cos\phi|3\rangle, \quad (6.88)$$

$$|-\rangle = \sin\theta\sin\phi|1\rangle + \cos\phi|2\rangle + \cos\theta\sin\phi|3\rangle, \quad (6.89)$$

pri čemu su θ i ϕ tzv. *uglovi mešanja* i dati su relacijama

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\Omega_p}{\Omega_c}, \quad \operatorname{tg}2\phi = \frac{2\Omega_0}{\Delta_c}. \quad (6.90)$$

Dakle, u bazu obučenih stanja $\{|0\rangle, |+\rangle, |-\rangle\}$, hamiltonijan sistema svetlost–materija je dijagonalan, sa svojstvenim energijama datim preko (6.85). Transformacija iz atomskih u obučena stanja vrši se pomoću unitarnog operatora, koji u matricnoj reprezentaciji u bazu $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ ima oblik

$$U_D = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ \sin\theta\cos\phi & -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\phi & \cos\theta\sin\phi \end{pmatrix}, \quad (6.91)$$

pri čemu se proizvoljan linearni operator A transformiše kao $A' = U_D A U_D^\dagger$.

Zadržimo se, ilustracije radi, na slučaju kada je $\Delta_c = 0$, što implicira da je $\phi = \pi/4$. Ukoliko izračunamo matricne elemente operatora električnog dipolnog momenta koji su odgovorni za prelaze $|0\rangle \leftrightarrow |\pm\rangle$, dobićemo:

$$\langle \pm | \mathbf{d} | 0 \rangle = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\theta \langle 2 | \mathbf{d} | 1 \rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta \langle 2 | \mathbf{d} | 3 \rangle = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\theta \mathbf{d}_{21} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta \mathbf{d}_{23}, \quad (6.92)$$

gde su iskorišćene relacije (6.87)–(6.89), zatim (6.90), a matricni elementi određeni pomoću (5.30), gde smo uzeli u obzir još i da je $\mathbf{d}_{13} = \mathbf{d}_{31} = 0$. Vidimo da važi

$$\langle + | \mathbf{d} | 0 \rangle + \langle - | \mathbf{d} | 0 \rangle = 0, \quad (6.93)$$

što znači da sondirajuće polje *ne može* da pobudi sistem iz stanja $|0\rangle$ u neko drugo stanje [197]. Svi elektroni su, dakle, „zarobljeni” u stanju $|0\rangle$ koje se naziva *tamno stanje* sistema. Strogo govoreći, pojam tamnog stanja ima smisla jedino kod razmatranja Λ konfiguracije, u kojoj je koeficijent raspada ovog stanja jednak nuli (pa je i apsorpcija u minimumu prozora transparentnosti jednaka nuli) [52]. U tom slučaju, tamno stanje se ne raspada pa ne može ni da se detektuje, odnosno „vidi” – otuda i njegov naziv. Ovakvo tamno stanje predstavlja linearnu superpoziciju dva stanja koja se pojedinačno ne raspadaju na niža stanja, i već je pomenuto prilikom diskusije efekta KZN u odeljku 2.2.1. U lestvičastoj konfiguraciji, matematičkim postupkom ekvivalentnim onom za Λ konfiguraciju, za „tamno” stanje dobićemo stanje $|0\rangle$ dato jednačinom (6.87), koje sadrži nivo $|3\rangle$, pa će stoga morati da mu se pridruži nenulti koeficijent raspada. Ovaj koeficijent, naravno, uz izvesne pretpostavke može biti smanjen, ali u praksi nikada neće biti jednak nuli, što implicira da ni apsorpcija sondirajućeg polja ne može biti jednaka nuli. Ipak, bez obzira na ova ograničenja, zbog analogije sa „pravim” tamnim stanjem, mi ćemo stanje $|0\rangle$ nazivati tamnim stanjem u daljem toku disertacije, iako ćemo stalno imati na umu da u užem smislu to zapravo nije slučaj.

6.2.1 Obučena stanja sistema sa tri nivoa

U izrazima za obučena stanja (6.87)–(6.89) još uvek je dozvoljeno da intenziteti sondirajućeg i kontrolnog polja budu istog reda veličine. Uvedimo sada uslov koji smo koristili u poglavlju 6.1 – da sondirajuće polje bude znatno slabije od kontrolnog. To znači da će dominantan uticaj elektromagnetnog polja na energijske nivoe atoma poticati od kontrolnog polja, pa će doći do pomeranja nivoa $|2\rangle$ i $|3\rangle$, koje ono spreže, kao posledica dinamičkog Starkovog efekta. Sa druge strane, pretpostavljamo da je sondirajuće polje dovoljno slabo da se njegov uticaj na ukupni pomak može zanemariti. Kako je osnovni nivo $|1\rangle$ spregnut samo sa sondirajućim poljem, možemo smatrati da je pomak ovog nivoa zanemarljiv, dok se sistem sa dva nivoa $\{|2\rangle, |3\rangle\}$, spregnut jakim kontrolnim poljem, može izdvojiti kao zaseban sistem. Hamiltonijan tog sistema biće deo ukupnog hamiltonijana (6.84) u kome su izdvojeni samo članovi u kojima figurišu isključivo ova dva nivoa. U matricnoj reprezentaciji, ovaj hamiltonijan se može zapisati kao

$$H' = \hbar \begin{pmatrix} \Delta_p & -\Omega_c \\ -\Omega_c & \Delta_p + \Delta_c \end{pmatrix}, \quad (6.94)$$

gde smo ponovo dozvolili da Δ_p i Δ_c uzimaju proizvoljne vrednosti. Poređenjem sa diskusijom sa početka poglavlja, vidimo da se ovaj „redukovani” hamiltonijan može dobiti iz hamiltonijana (6.84) stavljanjem $\Omega_p \ll \Omega_c$, jer u tom slučaju prva vrsta i prva kolona postaju irelevantne. Ovo znači da je $\theta = 0$, pa se (6.87)–(6.89) dodatno pojednostavljaju, pri čemu tamno stanje postaje jednako osnovnom stanju, $|0\rangle \equiv |1\rangle$, što odgovara pretpostavci iz ovog odeljka da se osnovno stanje zanemarljivo malo menja pod dejstvom sondirajućeg lasera. Tako će bazis obučenih stanja, u slučaju slabog sondirajućeg polja, biti $\{|1\rangle, |+\rangle, |-\rangle\}$. U daljem radu, držaćemo se ove pretpostavke, što će nam omogućiti da za prvi ugao mešanja stavimo $\theta = 0$ u svim situacijama od interesa, dok ćemo dozvoliti da ugao ϕ uzima različite vrednosti, u zavisnosti od problema koji razmatramo.

Svojtveni problem H' se može, dakle, rešiti za proizvoljno Δ_p i Δ_c , što za svojstvene energije daje

$$E_{\pm} = \hbar \left(\Delta_p + \frac{1}{2}\Delta_c \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta_c^2 + 4\Omega_c^2} \right), \quad (6.95)$$

računate u odnosu na referentni nivo $|2\rangle$. Istovremeno, za svojstvena stanja se dobija

$$|+\rangle = \sin \phi |2\rangle - \cos \phi |3\rangle, \quad (6.96)$$

$$|-\rangle = \cos \phi |2\rangle + \sin \phi |3\rangle, \quad (6.97)$$

pri čemu važe sledeće relacije:

$$\sin \phi = \frac{\sqrt{2}\Omega_c}{\sqrt{\sqrt{\Delta_c^2 + 4\Omega_c^2} (\sqrt{\Delta_c^2 + 4\Omega_c^2} + \Delta_c)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{\Delta_c^2 + 4\Omega_c^2} - \Delta_c}{\sqrt{\Delta_c^2 + 4\Omega_c^2}}}, \quad (6.98)$$

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{\Delta_c^2 + 4\Omega_c^2} + \Delta_c}{\sqrt{\Delta_c^2 + 4\Omega_c^2}}} = \frac{\sqrt{2}\Omega_c}{\sqrt{\sqrt{\Delta_c^2 + 4\Omega_c^2} (\sqrt{\Delta_c^2 + 4\Omega_c^2} - \Delta_c)}}, \quad (6.99)$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{2\Omega_c}{\sqrt{\Delta_c^2 + 4\Omega_c^2} + \Delta_c} = \frac{\sqrt{\Delta_c^2 + 4\Omega_c^2} - \Delta_c}{2\Omega_c}, \quad (6.100)$$

$$\operatorname{tg} 2\phi = \frac{2\Omega_c}{\Delta_c}, \quad (6.101)$$

za ugao mešanja ϕ .

U prethodnom poglavlju, apsorpciona i disperziona kriva za sistem sa tri nivoa analizirane su direktno preko matričnog elementa ρ_{21} . Na ovom mestu, pokazaćemo kako analogan postupak može da se sprovede preko transformacije matrice gustine u bazis obučenih stanja. Unitarna matrica kojom se vrši ova transformacija ima oblik

$$U_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \phi & -\cos \phi \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \end{pmatrix}, \quad (6.102)$$

i „prevodi” matricu gustine u iz atomskog u „obučeni” bazis preko relacije $\rho' = U_D \rho U_D^\dagger$. Na ovom mestu ćemo navesti jedino transformaciju dva relevantna matrična elementa u novom bazisu:

$$\rho_{+,0} = \sin \phi \rho_{21} - \cos \phi \rho_{31}, \quad (6.103)$$

$$\rho_{-,0} = \cos \phi \rho_{21} + \sin \phi \rho_{31}, \quad (6.104)$$

dok se, primenom inverzne transformacije, dobija

$$\rho_{21} = \sin \phi \rho_{+,0} + \cos \phi \rho_{-,0}, \quad (6.105)$$

$$\rho_{31} = \cos \phi \rho_{+,0} - \sin \phi \rho_{-,0}. \quad (6.106)$$

U nastavku rada, za pobrojane matrične elemente korišćićemo izraze dobijene u prvom redu teorije perturbacija, ali ćemo iz pisanja izostaviti odgovarajuće oznake koje na to ukazuju.

Nađimo sada eksplicitne izraze za $\rho_{+,0}$ i $\rho_{-,0}$. U tom cilju, ubacimo izraze (6.32) i (6.33) u (6.103) i (6.104). Pretpostavimo, takođe, da su svi koeficijenti raspada međusobno jednaki, tj. $\lambda_{21} = \lambda_{31} = \gamma$. Nakon nešto dužeg sređivanja, kao i racionalizacije dobijenih izraza kako bismo odvojili realni od imaginarnog dela, dobijamo sledeći rezultat:

$$\text{Im} \rho_{+,0} = \frac{\gamma}{(\Delta_p + \Omega_c^+)^2 + \gamma^2} \Omega_p \sin \phi, \quad \text{Re} \rho_{+,0} = \frac{\Delta_p + \Omega_c^+}{(\Delta_p + \Omega_c^+)^2 + \gamma^2} \Omega_p \sin \phi, \quad (6.107)$$

za matrični element koji odgovara prelazu $|0\rangle \leftrightarrow |+\rangle$, odnosno

$$\text{Im} \rho_{-,0} = \frac{\gamma}{(\Delta_p - \Omega_c^-)^2 + \gamma^2} \Omega_p \cos \phi, \quad \text{Re} \rho_{-,0} = \frac{\Delta_p - \Omega_c^-}{(\Delta_p - \Omega_c^-)^2 + \gamma^2} \Omega_p \cos \phi, \quad (6.108)$$

za element matrice gustine odgovoran za prelaz $|0\rangle \leftrightarrow |-\rangle$. U gornjim izrazima, uvedene su veličine

$$\Omega_c^+ = \Omega_c \text{tg} \phi \left(1 + \frac{a^+}{b^+} \right), \quad \Omega_c^- = \Omega_c \text{ctg} \phi \left(1 - \frac{a^-}{b^-} \right), \quad (6.109)$$

gde je

$$a^+ = \left(-\frac{\Delta_p \Delta_c}{\Omega_c} + \Delta_c \text{tg} \phi \right) (\Omega_c - (\Delta_p + \Delta_c) \text{tg} \phi) + \frac{\gamma^2 \Delta_c}{\Omega_c} \text{tg} \phi, \quad (6.110)$$

$$a^- = \left(\frac{\Delta_p \Delta_c}{\Omega_c} + \Delta_c \text{ctg} \phi \right) (\Omega_c + (\Delta_p + \Delta_c) \text{ctg} \phi) + \frac{\gamma^2 \Delta_c}{\Omega_c} \text{ctg} \phi, \quad (6.111)$$

$$b^+ = (\Omega_c - (\Delta_p + \Delta_c) \text{tg} \phi)^2 + \gamma^2 \text{tg}^2 \phi, \quad (6.112)$$

$$b^- = (\Omega_c + (\Delta_p + \Delta_c) \text{ctg} \phi)^2 + \gamma^2 \text{ctg}^2 \phi. \quad (6.113)$$

Vidimo da prvi izrazi u (6.107) i (6.108) praktično predstavljaju lorencijane čija je širina direktno srazmerna γ , sa maksimumima čije se pozicije Δ_p^+ i Δ_p^- dobijaju rešavanjem jednačina

$$\Omega_c^+(\Delta_p) + \Delta_p = 0, \quad \Omega_c^-(\Delta_p) - \Delta_p = 0, \quad (6.114)$$

respektivno.

Vratimo se sada na atomski bazis, korišćenjem relacije (6.105). Apsorpciona kriva će sada biti proporcionalna veličini

$$\text{Im}\rho_{21} = \frac{\gamma}{(\Delta_p + \Omega_c^+)^2 + \gamma^2} \Omega_p \sin^2 \phi + \frac{\gamma}{(\Delta_p - \Omega_c^-)^2 + \gamma^2} \Omega_p \cos^2 \phi, \quad (6.115)$$

dok ćemo za disperzionu krivu imati

$$\text{Re}\rho_{21} = \frac{\Delta_p + \Omega_c^+}{(\Delta_p + \Omega_c^+)^2 + \gamma^2} \Omega_p \sin^2 \phi + \frac{\Delta_p - \Omega_c^-}{(\Delta_p - \Omega_c^-)^2 + \gamma^2} \Omega_p \cos^2 \phi. \quad (6.116)$$

U nastavku ćemo se mahom zadržati na analizi $\text{Im}\rho_{21}$. Vidimo da se apsorpciona kriva sastoji od *zbira dva lorencijana* – prvi sabirak u (6.115) odgovara apsorpciji nastaloj kao posledica prelaza $|0\rangle \leftrightarrow |+\rangle$, i maksimum mu se nalazi u $\Delta_p = \Delta_p^+$ (levi pik), dok drugi sabirak predstavlja lorencijan koji odgovara prelazu $|0\rangle \leftrightarrow |-\rangle$ i ima maksimalnu vrednost u $\Delta_p = \Delta_p^-$ (desni pik). Definišimo „visine” maksimuma ova dva apsorpciona pika relacijama

$$h_+ = \frac{\Omega_p}{\gamma} \sin^2 \phi, \quad h_- = \frac{\Omega_p}{\gamma} \cos^2 \phi, \quad (6.117)$$

čiji je odnos

$$\frac{h_+}{h_-} = \text{tg}^2 \phi = 1 + \frac{\Delta_c}{2\Omega_c^2} \left(\Delta_c - \sqrt{\Delta_c^2 + 4\Omega_c^2} \right), \quad (6.118)$$

što je izraz koji smo dobili služeći se relacijom (6.100) i neznatno sređujući izraz. Sada možemo prodiskutovati uticaj kontrolne razdešenosti na ovaj odnos. Ukoliko je $\Delta_c = 0$, imamo da je $h_+ = h_-$ i apsorpcioni pikovi su jednakih visina. U slučaju da je $\Delta_c < 0$, važiće $h_+ > h_-$, dok je za pozitivnu razdešenost situacija obrnuta. Dakle, veličina Δ_c igra značajnu ulogu u formiranju apsorpcione krive u odnosu na sondirajuće polje.

Prodiskutujemo uticaj kontrolne razdešenosti na položaj apsorpcionih maksimuma. Rekli smo da se u opštem slučaju oni određuju rešavanjem jednačina (6.114) po Δ_p , što može da bude matematički vrlo zahtevno. Zbog toga ćemo na ovom mestu njihovo rešavanje zaobići, i pomenutu analizu sprovesti polazeći od jednačine (6.95) za svojstvene energije „redukovanog” hamiltonijana (6.94). Maksimum apsorpcije će odgovarati situaciji kada je $E_{\pm} = 0$, odakle dobijamo

$$\Delta_p^{\pm} = \mp \Omega_c \sqrt{1 + \frac{\Delta_c^2}{4\Omega_c^2}} - \frac{1}{2} \Delta_c. \quad (6.119)$$

Dobijeni izraz je, moguće dodatno pojednostaviti ukoliko uzmemo da je $\Delta_c \ll \Omega_c$, što će u situacijama od interesa gotovo uvek biti zadovoljeno. Rezultat je

$$\Delta_p^+ = -\Omega_c - \frac{1}{2} \Delta_c, \quad \Delta_p^- = \Omega_c - \frac{1}{2} \Delta_c. \quad (6.120)$$

Vidimo da je, u slučaju rezonantnog kontrolnog polja, $\Delta_p^\pm = \mp\Omega_c$, što znači da su apsorpcioni pikovi ekvidistantni.⁶ Između pikova se formira prozor transparentnosti čija je širina

$$\Delta_{AT} = 2\Omega_c, \quad (6.121)$$

što u potpunosti odgovara jednačini (6.41) uz pretpostavku realnih Rabijevih frekvencija. Imajući u vidu da u ovom slučaju važi i $h_+ = h_-$, zaključujemo da je, za $\Delta_c = 0$, apsorpciona kriva *simetrična* oko $\Delta_p = 0$, sa minimumom apsorpcije upravo u toj tački. Ako je, pak, $\Delta_c < 0$, iz (6.120) vidimo da je $|\Delta_p^+| < \Omega_c$, odnosno $|\Delta_p^-| > \Omega_c$. To znači da se, u slučaju negativne kontrolne razdešenosti, oba pika pomeraju „na desno” – ka većim vrednostima Δ_p . Nasuprot tome, ukoliko je $\Delta_c > 0$, biće $|\Delta_p^+| > \Omega_c$ i $|\Delta_p^-| < \Omega_c$, pa će se maksimumi apsorpcije pomerati u suprotnom smeru, „na levo”. Ponavljamo, levi pik odgovara prelazu $|0\rangle \leftrightarrow |+\rangle$, a desni prelazu $|0\rangle \leftrightarrow |-\rangle$. Grafički ćemo ovo ponašanje imati prilike da vidimo u Delu III, na nekim konkretnim fizičkim primerima.

Na samom kraju, posvetimo pažnju izvesnom broju specijalnih slučajeva razmatranog problema, koji će igrati važnu ulogu u nastavku disertacije. Ukoliko uvedemo uslov nulte dvofotonske razdešenosti, $\Delta_p + \Delta_c = 0$, odnosno $\Delta_p = -\Delta_c = \Delta$, izraz (6.95) će se svesti na

$$E_\pm = \frac{\hbar}{2} \left(\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + 4\Omega_c^2} \right). \quad (6.122)$$

Ako je, pak, $\Delta_p = \Delta_c = \Delta$, imaćemo

$$E_\pm = \frac{\hbar}{2} \left(3\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + 4\Omega_c^2} \right), \quad (6.123)$$

što predstavlja izraz koji će nam biti od posebnog značaja pri analizi uticaja spoljašnjeg magnetnog polja na materijalnu sredinu sa kojom laserska polja interaguju. Treći specijalan slučaj smo već pomenuli i odnosi se na situaciju kada je $\Delta_c = 0$, dok je Δ_p proizvoljno, na osnovu čega se dobija

$$E_\pm = \hbar\Delta_p \pm \Omega_c, \quad (6.124)$$

što se, ukoliko je još i $\Delta_p = 0$, svodi na najjednostavniji izraz

$$E_\pm = \pm\Omega_c. \quad (6.125)$$

U svim gornjim izrazima, referentni nivo energije je nivo $|2\rangle$ originalnog atomskog hamiltonijana. Svojstvena stanja hamiltonijana H' u poslednja dva slučaja imaju isti oblik:

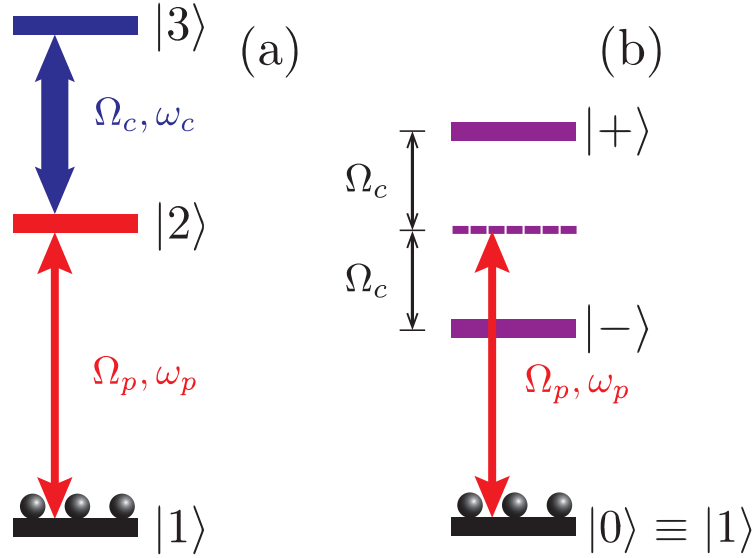
$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|2\rangle - |3\rangle), \quad (6.126)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|2\rangle + |3\rangle), \quad (6.127)$$

što sledi iz (6.96) i (6.97) stavljanjem $\phi = \pi/4$ (što se vidi da važi iz (6.101)). Čitava procedura transformacije matrice gustine u bazu obučenih stanja može se sprovesti, naravno, i ovde, sa rezultatima koji su već diskutovani.⁷

⁶ Isti rezultat se dobija i ako se u izrazu u jednačini (6.109) zameni $\Delta_c = 0$. Najpre dobijamo $\Omega_c^+ = \Omega_c^- = \Omega_c$, a potom koristeći (6.114) dobijamo i gorenavedeni izraz.

⁷ Radi kompletности, napomenimo još i da se jednačine (6.126) i (6.127), zajedno sa $|0\rangle = |1\rangle$, mogu dobiti iz opštijih jednačina (6.87)–(6.89), uzimajući da su uglovi mešanja $\theta = 0$ i $\phi = \pi/4$. Jedina, mada ne suštinska razlika, sastojace se u stanju $|+\rangle$, koje se dobija kada se polazno stanje (6.88) još pomnoži sa -1 .



Slika 6.1: (a) Energijski nivoi slobodnog „atomskog” hamiltonijana sistema sa tri nivoa u lestvičastoj konfiguraciji (ogoljena stanja), u slučaju kada je $\Delta_p = \Delta_c = 0$. (b) Obučena stanja kod sistema sa tri nivoa u slučaju jakog kontrolnog polja i $\Delta_p = \Delta_c = 0$.

Zaključci ove diskusije sumirani su na slici 6.1 za specijalan slučaj rezonantnih polja. Na slici 6.1 (a) prikazana je poznata šema nivoa i elektromagnetnih polja za $\Delta_c = \Delta_p = 0$ u atomskom bazisu. Oba polja su u rezonanciji sa odgovarajućim prelazima, i ukoliko kontrolno polje ne bi postojalo, ova rezonancija bi uslovala apsorpciju sondirajućeg polja – elektroni sa osnovnog prelaze na viši nivo, a apsorpciona kriva bi bila opisana lorencijanom sa maksimumom u $\Delta_p = 0$. Sa druge strane, na slici 6.1 (b), sistem svetlost–materija prikazan je u bazisu obučenih stanja, gde se vidi kako kontrolno polje modifikuje nivoe $|2\rangle$ i $|3\rangle$ prevodeći ih u $|+\rangle$ i $|-\rangle$ preko relacija (6.126) i (6.127), čije energije (u odnosu na nivo $|2\rangle$) su određene preko (6.125). Posmatrajući obučena stanja, vidimo da sondirajuće polje više nije u rezonanciji sa prelazima $|0\rangle \leftrightarrow |\pm\rangle$, te ono prolazi kroz materijalnu sredinu sa značajno umanjenom apsorpcijom. Oblik apsorpcione krive tada određuje veličina

$$\text{Im}\rho_{21} = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{(\Delta_p + \Omega_c)^2 + \gamma^2} \Omega_p + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{(\Delta_p - \Omega_c)^2 + \gamma^2} \Omega_p, \quad (6.128)$$

što je izraz koji se može dobiti i iz (6.115). Dakle, u prisustvu jakog kontrolnog polja dolazi do formiranja dva, u ovom slučaju simetrično postavljena AT pika, jednakih visina i lociranih na pozicijama $\Delta_p = \pm\Omega_c$, između kojih se formira prozor transparentnosti čija je širina data izrazom (6.121), što se na slici 6.1 (b) i vidi.⁸ Ako bi se frekvencija lasera smanjila ili povećala za Ω_c , jedan od dva prelaza $|0\rangle \leftrightarrow |\pm\rangle$ postao bi rezonantan sa sondirajućim poljem i ono bi se ponovo u potpunosti apsorbovalo. Slična analiza se može sprovesti i za $\text{Re}\rho_{21}$, što nas dovodi do sledećeg izraza za nagib disperzione krive u $\Delta_p = 0$, gde apsorpciona kriva ima minimum:

$$\left(\frac{d}{d\Delta_p} \text{Re}\rho_{21} \right)_{\Delta_p=0} = - \frac{\Omega_c^2 - \gamma^2}{(\Omega_c^2 + \gamma^2)^2} \Omega_p, \quad (6.129)$$

što ponovo odgovara anomalnoj disperziji u slučaju kada je $\Omega_c > \gamma$, što će u slučajevima od interesa praktično uvek biti zadovoljeno. Pored toga, ukoliko pretpostavimo da važi uslov $\Omega_c \gg \gamma$, dobijeni

⁸ Prvi sabirak u (6.128), lorencijan centriran oko $\Delta_p^+ = -\Omega_c$, odgovara prelazu $|+\rangle \leftrightarrow |0\rangle$, dok je drugi sabirak odgovoran za prelaz $|-\rangle \leftrightarrow |0\rangle$ i opisan je lorencijanom sa maksimumom u $\Delta_p^- = \Omega_c$.

izraz se svodi na (6.42), što je u skladu sa očekivanjima (uz pretpostavku da je kontrolna Rabijeva frekvencija ponovo realna veličina). Vidimo da tretiranje sistema svetlost–materija preko obučenih stanja može da nas dovede do nekih važnih zaključaka, nekada čak i na znatno jednostavniji način nego što je to ispitivanje toka i grafika funkcije $\text{Re}\rho_{21}$ i $\text{Im}\rho_{21}$ sprovedeno u poglavlju 6.1.

Na kraju, napomenimo da analizu otvorenog sistema sa tri nivoa preko obučenih stanja nismo sprovedili, jer se može pokazati da će se bazis svojstvenih stanja hamiltonijana (5.64), u aproksimaciji slabog sondirajućeg polja svesti na $\{|1\rangle, |+\rangle, |-\rangle, |4\rangle, |5\rangle\}$, gde su novi vektori $|+\rangle$ i $|-\rangle$ dati preko (6.96) i (6.97) [5]. Dakle, svi zaključci dobijeni u slučaju zatvorenog sistema važe i sada, sa tom razlikom što je potrebno uvesti efektivni koeficijent raspada, definisan izrazom (6.50).

6.2.2 Obučena stanja sistema sa četiri nivoa

Ukoliko je u sistemu prisutno dodatno lasersko polje, koje spreže nivo $|3\rangle$ i novi nivo $|4\rangle$, hamiltonijan svetlost–materija biće dat izrazom (5.77). Kao i do sada, pretpostavimo da su Rabijeve frekvencije realne veličine ($\Omega_p^* = \Omega_p$, $\Omega_c^* = \Omega_c$, $\Omega_d^* = \Omega_d$), što će nam dati hamiltonijan u sledećem obliku:

$$H = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_p & 0 & 0 \\ -\Omega_p & \Delta_p & -\Omega_c & 0 \\ 0 & -\Omega_c & \Delta_p + \Delta_c & -\Omega_d \\ 0 & 0 & -\Omega_d & \Delta_p + \Delta_c + \Delta_d \end{pmatrix}. \quad (6.130)$$

Već na samom početku pretpostavimo da je sondirajuće polje slabo, što nam omogućava da iz gornjeg hamiltonijana izdvojimo samo deo koji je spregnut jakim poljem Ω_c , i poljem Ω_d za koje ćemo takođe pretpostaviti da je jakog intenziteta (dodatno kontrolno polje), mada se opisana procedura može primeniti čak i ako dodatno polje smatramo slabim (sondirajućim). Novi hamiltonijan će biti:

$$H' = \hbar \begin{pmatrix} \Delta_p & -\Omega_c & 0 \\ -\Omega_c & \Delta_p + \Delta_c & -\Omega_d \\ 0 & -\Omega_d & \Delta_p + \Delta_c + \Delta_d \end{pmatrix}. \quad (6.131)$$

Svojstveni problem „redukovanog” hamiltonijana rešićemo uz pretpostavku da je $\Delta_c + \Delta_d = 0$, što razmatrani problem značajno uprošćava. Ovo će nam dati sledeće svojstvene vrednosti energije:

$$E_0 = \Delta_p, \quad E_{\pm} = \hbar \left(\Delta_p + \frac{1}{2}\Delta_c \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta_c^2 + 4\Omega^2} \right), \quad (6.132)$$

pri čemu je

$$\Omega = \sqrt{\Omega_c^2 + \Omega_d^2}. \quad (6.133)$$

Primetimo da, ukoliko se stavi $\Omega_d = 0$, izraz (6.132) postaje identičan izrazu (6.95). Svojstvena stanja H' , obučena stanja, biće data sledećim izrazima:

$$|0\rangle = \sin\theta |2\rangle - \cos\theta |4\rangle, \quad (6.134)$$

$$|+\rangle = -\cos\theta \sin\phi |2\rangle + \cos\phi |3\rangle - \sin\theta \sin\phi |4\rangle, \quad (6.135)$$

$$|-\rangle = \cos\theta \cos\phi |2\rangle + \sin\phi |3\rangle + \sin\theta \cos\phi |4\rangle, \quad (6.136)$$

pri čemu je nivo $|2\rangle$ ponovo referentni nivo. Uglovi mešanja dati su na sledeći način:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\Omega_d}{\Omega_c}, \quad \operatorname{tg} 2\phi = \frac{2\Omega}{\Delta_c}, \quad (6.137)$$

pri čemu se za ugao ϕ mogu koristiti i izrazi (6.98)–(6.100) ukoliko se zameni $\Omega_c \rightarrow \Omega$. Naglasimo da u ovom slučaju $|0\rangle$ nije tamno stanje, već da je oznaka odabrana u skladu sa time kojoj svojstvenoj vrednosti odgovara. Pored toga, jasno je da će uvek biti $|0\rangle \neq |1\rangle$. Dakle, bazis obučenih stanja sistema sa četiri nivoa u slučaju slabog sondirajućeg polja je $\{|1\rangle, |0\rangle, |+\rangle, |-\rangle\}$.

Kao što smo najavili, analizu apsorpcione i dispezione krive za sistem sa četiri nivoa izvršićemo uz pomoć formalizma obučenih stanja. Da bismo ovo uradili, iskoristimo matricu transformacije

$$U_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta & 0 & -\cos \theta \\ 0 & -\cos \theta \sin \phi & \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi \\ 0 & \cos \theta \cos \phi & \sin \phi & \sin \theta \cos \phi \end{pmatrix}, \quad (6.138)$$

koja prevodi atomski u „obučeni” bazis, primenimo je na matricu gustine, i zapišimo samo one matrice elemente koji će nam u daljem radu biti od interesa. Rezultat je

$$\rho_{0,1} = \sin \theta \rho_{21} - \cos \theta \rho_{41}, \quad (6.139)$$

$$\rho_{+,1} = -\cos \theta \sin \phi \rho_{21} + \cos \phi \rho_{31} - \sin \theta \sin \phi \rho_{41}, \quad (6.140)$$

$$\rho_{-,1} = \cos \theta \cos \phi \rho_{21} + \sin \phi \rho_{31} + \sin \theta \cos \phi \rho_{41}, \quad (6.141)$$

dok se, primenom inverzne transformacije, možemo vratiti na originalan bazis:

$$\rho_{21} = \sin \theta \rho_{0,1} - \cos \theta \sin \phi \rho_{+,1} + \cos \theta \cos \phi \rho_{-,1}, \quad (6.142)$$

$$\rho_{31} = \cos \phi \rho_{+,1} + \sin \phi \rho_{-,1}, \quad (6.143)$$

$$\rho_{41} = -\cos \theta \rho_{0,1} - \sin \theta \sin \phi \rho_{+,1} + \sin \theta \cos \phi \rho_{-,1}. \quad (6.144)$$

Kao i u odeljku 6.2.1, za elemente matrice gustine korišćićemo izraze dobijene u prvom redu teorije perturbacija, i smatraćemo da je $\rho_{k1} = \rho_{k1}^{(1)}$, $k = 2, 4$.

Analognim postupkom kao za sistem sa tri nivoa, zamenom (6.59), (6.61) i (6.62) u (6.139)–(6.141), uz pretpostavku da je $\lambda_{21} = \lambda_{31} = \lambda_{41} = \gamma$ i nakon nešto duže računice, dobijamo:

$$\operatorname{Im} \rho_{0,1} = \frac{\gamma}{\Delta_p^2 + \gamma^2} \Omega_p \sin \theta, \quad \operatorname{Re} \rho_{0,1} = \frac{\Delta_p}{\Delta_p^2 + \gamma^2} \Omega_p \sin \theta, \quad (6.145)$$

za koherenciju $|1\rangle \leftrightarrow |0\rangle$, zatim

$$\operatorname{Im} \rho_{+,1} = -\frac{\gamma}{(\Delta_p + \Omega^+)^2 + \gamma^2} \Omega_p \cos \theta \sin \phi, \quad \operatorname{Re} \rho_{+,1} = -\frac{\Delta_p + \Omega^+}{(\Delta_p + \Omega^+)^2 + \gamma^2} \Omega_p \cos \theta \sin \phi, \quad (6.146)$$

za prelaz $|1\rangle \leftrightarrow |+\rangle$, i napokon

$$\operatorname{Im} \rho_{-,1} = \frac{\gamma}{(\Delta_p - \Omega^-)^2 + \gamma^2} \Omega_p \cos \theta \cos \phi, \quad \operatorname{Re} \rho_{-,1} = \frac{\Delta_p - \Omega^-}{(\Delta_p - \Omega^-)^2 + \gamma^2} \Omega_p \cos \theta \cos \phi, \quad (6.147)$$

za matrični element povezan sa prelazom $|1\rangle \leftrightarrow |- \rangle$. Veličine Ω^+ i Ω^- se, analogno sistemu sa tri nivoa, dobijaju primenom jednačina (6.109)–(6.113), u kojima je samo potrebno staviti $\Omega_c^\pm \rightarrow \Omega^\pm$ i $\Omega_c \rightarrow \Omega$.

Povratak na atomski bazis, korišćenjem relacije (6.142), kao i (6.145)–(6.147), daće nam informaciju o apsorpcionoj i disperzionoj krivoj u odnosu na sondirajuće polje. Zadržimo se ovde samo na apsorpcionoj krivoj i zapišimo imaginarni deo koherencije ρ_{21} kao rezultat goreopisanog postupka:

$$\begin{aligned} \text{Im}\rho_{21} = & \frac{\gamma}{(\Delta_p + \Omega^+)^2 + \gamma^2} \Omega_p \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \frac{\gamma}{\Delta_p^2 + \gamma^2} \Omega_p \sin^2 \theta \\ & + \frac{\gamma}{(\Delta_p - \Omega^-)^2 + \gamma^2} \Omega_p \cos^2 \theta \cos^2 \phi. \end{aligned} \quad (6.148)$$

Svaki od tri gornja sabirka predstavlja po jedan lorencijan, čije su širine jednake, budući da smo pretpostavili da su jednaki i svi koeficijenti raspada. Prvi sabirak odgovara prelazu $|1\rangle \leftrightarrow |+\rangle$ i njegov položaj Δ_p^+ se dobija kao rešenje jednačine $\Omega^+(\Delta_p) + \Delta_p = 0$ (levi apsorpcioni pik). Drugi, središnji apsorpcioni pik, ima maksimum u $\Delta_p^0 = 0$, i ova pozicija se neće menjati, zbog toga što važi $\Delta_c + \Delta_d = 0$. Dok središnji pik odgovara prelazu $|1\rangle \leftrightarrow |0\rangle$, desni apsorpcioni pik povezan je sa prelazom $|1\rangle \leftrightarrow |- \rangle$, i potrebno je rešiti jednačinu $\Omega^-(\Delta_p) - \Delta_p = 0$ kako bi se odredio položaj maksimuma apsorpcije pri ovom prelazu, Δ_p^- . Visine pikova u maksimumima apsorpcije date su analogno onima u prethodnom poglavlju:

$$h_+ = \frac{\Omega_p}{\gamma} \cos^2 \theta \sin^2 \phi, \quad h_0 = \frac{\Omega_p}{\gamma} \sin^2 \theta, \quad h_- = \frac{\Omega_p}{\gamma} \cos^2 \theta \cos^2 \phi. \quad (6.149)$$

Kao i ranije, i ovde će važiti $h_+/h_- = \text{tg}^2 \phi$, pa se analiza uticaja Δ_c na ove apsorpcione pikove može sprovesti analogno kao za sistem sa tri nivoa. Sa druge strane, u izrazu za h_0 ne figuriše kontrolna razdešenost – za odabrane vrednosti parametara, ova veličina ne utiče ni na položaj, ni na visinu središnjeg pika. Međutim, na ovom mestu će nam od centralnog interesa biti proučavanje efekta koji dodatno polje, tačnije uzajamni odnos jačina dodatnog i kontrolnog polja, ima na apsorpcionu krivu.

Ukoliko iskoristimo prvi izraz u (6.137), dobićemo da je $\sin \theta = \Omega_d/\Omega$ i $\cos \theta = \Omega_c/\Omega$. Ukoliko ove izraze ubacimo u (6.149) i neznatno preuredimo dobijeni rezultat, imaćemo

$$h_+ = \frac{1}{\gamma} \frac{\Omega_p \sin^2 \phi}{1 + \frac{\Omega_d^2}{\Omega_c^2}}, \quad h_0 = \frac{1}{\gamma} \frac{\Omega_p}{1 + \frac{\Omega_c^2}{\Omega_d^2}}, \quad h_- = \frac{1}{\gamma} \frac{\Omega_p \cos^2 \phi}{1 + \frac{\Omega_d^2}{\Omega_c^2}}. \quad (6.150)$$

Pažljivim posmatranjem gornjih izraza, zaključujemo da povećanje Ω_c dovodi do porasta visina bočnih, a smanjenja visine centralnog pika. Nasuprot tome, sa porastom Ω_d dolazi do porasta h_0 , dok se istovremeno h_+ i h_- smanjuju. Takođe, ukoliko je $\Omega_d = 0$, imaćemo $h_0 \rightarrow 0$, dakle pojava centralnog pika je isključivo posledica postojanja nenultog dodatnog polja. Istovremeno, u tom slučaju, izrazi za visine bočnih pikova će se svesti na (6.117) i imaćemo dobro poznatu situaciju kod sistema sa tri nivoa.

Kao što smo već pokazali, centralni pik nalazi se u $\Delta_p^0 = 0$, nezavisno od vrednosti druge dve razdešenosti (koje su, doduše, povezane relacijom $\Delta_c = -\Delta_d$). Položaji bočnih apsorpcionih maksimuma se, kao što smo rekli, mogu dobiti rešavanjem odgovarajućih jednačina po Δ_p , analogno sistemu sa tri nivoa. Kao i tamo, i ovde ćemo analizu pojednostaviti vraćanjem na formalizam

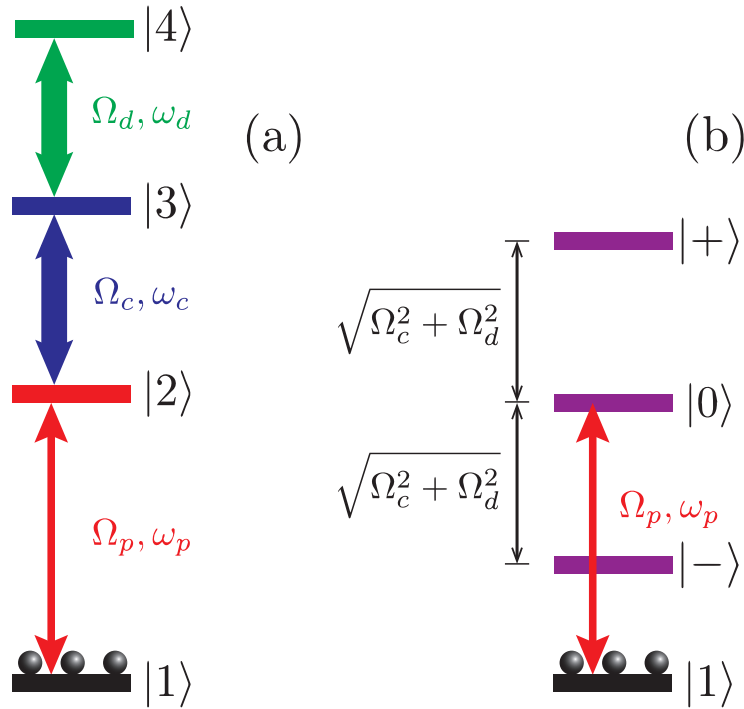
obučenih stanja, tj. posmatrajući izraz (6.132) za svojstvene energije „redukovano“ hamiltonijana (6.131). Maksimalna apsorpcija nastupa kada je $E_{\pm} = 0$, što nas dovodi do sledećih izraza:

$$\Delta_p^{\pm} = \mp \Omega \sqrt{1 + \frac{\Delta_c^2}{4\Omega^2}} - \frac{1}{2}\Delta_c, \quad (6.151)$$

odnosno, ukoliko pretpostavimo da važi $\Delta_c \ll \Omega$,

$$\Delta_p^+ = -\Omega - \frac{1}{2}\Delta_c, \quad \Delta_p^- = \Omega - \frac{1}{2}\Delta_c. \quad (6.152)$$

Analiza dobijenih izraza je u potpunosti analogna onoj za sistem sa tri nivoa. Napomenimo samo da će, u slučaju kada je $\Delta_c = \Delta_d = 0$, apsorpciona kriva biti simetrična u odnosu na $\Delta_p = 0$, sa bočnim maksimumima na pozicijama $\Delta_p^{\pm} = \mp \Omega$. Pošto sada postoje dva prozora transparentnosti, njihove širine će biti jednake i iznosiće $\Delta_{AT}^1 = \Delta_{AT}^2 = \Omega$. Dobijeni zaključci su u skladu sa diskusijom sprovedenom u odeljku 6.1.3. Ukoliko su kontrolna i dodatna razdešenost, pak, različite od nule, doći će do pojave asimetrije, u skladu sa diskusijom sprovedenom u odeljku 6.2.1.



Slika 6.2: (a) Energijski nivoi slobodnog „atomske“ hamiltonijana sistema sa četiri nivoa u lestvičastoj konfiguraciji (ogoljena stanja), u slučaju kada je $\Delta_p = \Delta_c = \Delta_d = 0$. (b) Obučena stanja kod sistema sa četiri nivoa u slučaju slabog kontrolnog polja i $\Delta_p = \Delta_c = \Delta_d = 0$.

Na slici 6.2 ilustrovana je primena formalizma obučenih stanja u situaciji kada je $\Delta_p = \Delta_c = \Delta_d = 0$. Tada ćemo za svojstvene energije imati

$$E_0 = 0, \quad E_{\pm} = \pm \hbar \Omega, \quad (6.153)$$

dok će se svojstvena stanja (6.134)–(6.136) svesti na oblik⁹

$$|0\rangle = \frac{\Omega_d}{\Omega} |2\rangle - \frac{\Omega_c}{\Omega} |4\rangle, \quad (6.154)$$

$$|+\rangle = -\frac{\Omega_c}{\sqrt{2}\Omega} |2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |3\rangle - \frac{\Omega_d}{\sqrt{2}\Omega} |4\rangle, \quad (6.155)$$

$$|-\rangle = \frac{\Omega_c}{\sqrt{2}\Omega} |2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |3\rangle + \frac{\Omega_d}{\sqrt{2}\Omega} |4\rangle, \quad (6.156)$$

što se iz polaznih jednačina dobija eksplicitnim pisanjem ugla θ i stavljanjem $\phi = \pi/4$ [196]. Slika 6.2 (a) prikazuje sistem sa četiri nivoa u originalnom bazu. Vidimo da će, ukoliko je $\Omega_c = \Omega_d = 0$, sondirajuće polje biti rezonantno sa prelazom $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$, što dovodi do njegove apsorpcije, kako je i očekivano. Kontrolno i dodatno polje, pak, „oblače” atom tako da se formira novi bazis $\{|1\rangle, |0\rangle, |+\rangle, |-\rangle\}$, prikazan na slici 6.2 (b), gde su nivoi $|0\rangle$, $|+\rangle$ i $|-\rangle$ dati jednačinama (6.154)–(6.156). U tom slučaju, postojeće sondirajuće polje će ponovo biti rezonantno, ovoga puta sa prelazom $|1\rangle \leftrightarrow |0\rangle$, ali će do apsorpcije doći i ako se njegova frekvencija smanji ili poveća za vrednost $\Omega = \sqrt{\Omega_c^2 + \Omega_d^2}$. Dakle, umesto situacija kada nema EIT u širem smislu (sistem sa dva nivoa) i kada postoji jedan prozor transparentnosti (sistem sa tri nivoa), kod sistema sa četiri nivoa dolazi do pojave *dva* prozora transparentnosti, smeštena između *tri* apsorpciona pika. Apsorpciona kriva će biti simetrična, i data jednačinom

$$\text{Im}\rho_{21} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_p}{1 + \frac{\Omega_d^2}{\Omega_c^2}} \frac{\gamma}{(\Delta_p + \Omega)^2 + \gamma^2} + \frac{\Omega_p}{1 + \frac{\Omega_c^2}{\Omega_d^2}} \frac{\gamma}{\Delta_p^2 + \gamma^2} + \frac{1}{2} \frac{\Omega_p}{1 + \frac{\Omega_d^2}{\Omega_c^2}} \frac{\gamma}{(\Delta_p - \Omega)^2 + \gamma^2}. \quad (6.157)$$

Prvi sabirak, (levi) pik sa maksimumom u $\Delta_p^+ = -\Omega$ odgovara prelazu $|+\rangle \leftrightarrow |1\rangle$, dok njegov parnjak, treći sabirak u okviru istog izraza (desni pik), odgovara prelazu $|-\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ čiji je maksimum apsorpcije u $\Delta_p^- = \Omega$. Budući da su kontrolna i dodatna razdešenost jednake nuli, imamo da je $h_+ = h_-$. Drugi sabirak odgovara centralnom piku (i prelazu $|1\rangle \leftrightarrow |0\rangle$) i, naravno, ima maksimum u $\Delta_p^0 = 0$. Kao što smo rekli, u slučaju da kontrolno i dodatno polje nisu u rezonanciji sa odgovarajućim prelazima, goreopisana simetrija će se narušiti.

U slučaju da je dodatno polje moguće tretirati kao sondirajuće, tj. za $\Omega_d \ll \Omega_c$, imaćemo da je $\Omega \approx \Omega_c$, što dalje implicira da je $\theta \approx 0$, pa će nivo $|0\rangle \approx -|4\rangle$ postati raspregnut od ostatka sistema, a preostala dva nivoa „obučenog” bazisa se svode na izraze (6.96) (koji još treba pomnožiti sa -1) i (6.97). Ovo znači da se, u odnosu na sondirajuće polje, sistem efektivno ponaša kao zatvoren sistem sa tri nivoa, budući da je uloga dodatnog polja u sprezanju nivoa mala. Isti zaključak doneli smo i u odeljku 6.1.4, zbog čega je bilo potrebno da u razmatranje uvedemo više redove teorije perturbacija. Na osnovu svega navedenog, vidimo da je priroda dodatnog polja od izuzetne važnosti za oblik apsorpcione i disperzione krive u odnosu na sondirajuće polje, zbog čega ovaj problem i jeste jedan od onih od centralnog interesa u disertaciji.

6.3 Metod Furijeove transformacije

U poglavlju 6.1, uveden je perturbacioni pristup u cilju rešavanja MB jednačina za sistem svetlost–materija, koji je potom primenjen na kontinualne (monohromatske) lasere, čije su Rabijeve

⁹ Napomenimo da se isti set obučenih stanja dobija i kada se dozvoli da važi $\Delta_p \neq 0$.

frekvencije konstantne veličine. Tada propagacione jednačine mogu da se izostave, pa se MB jednačine svode samo na OB jednačine, čije se rešenje potom traži u stacionarnom režimu. Na ovom mestu, razmatraćemo nešto komplikovaniju postavku – posmatraćemo prostiranje sondirajućeg *pulsa* kroz sredinu u kojoj je prisutan jedan (sistem sa tri nivoa), odnosno dva kontrolna lasera (sistem sa četiri nivoa u kome dodatno polje smatramo kontrolnim), koji pritom ostaju kontinualni. Tada će, u sistemu MB jednačina, pored standardnih OB jednačina figurisati i propagaciona jednačina za sondirajuće polje (5.151). Pretpostavimo da je jačina (envelopa) električnog polja sondirajućeg pulsa na ulazu u materijalnu sredinu ($z = 0$) zadata izrazom [4]:

$$E_p(0, t) = E_{p0} e^{-w^2(t-t_0)^2}, \quad (6.158)$$

što je pretpostavka koja će biti korišćena gotovo u svim situacijama u nastavku disertacije. Dakle, vremenski profil *ulaznog pulsa* opisan je Gausovom „zvonastom” krivom, što je u praksi čest slučaj. Veličina E_{p0} predstavlja maksimalnu vrednost envelope, t_0 je vremenski trenutak u kome ona dostiže taj maksimum u položaju $z = 0$, dok w predstavlja *spektralnu poluširinu* (engl. spectral half-width) ulaznog pulsa. Veza spektralne poluširine sa standardnom devijacijom σ_t , odnosno širinom na pola maksimuma (engl. full width at half maximum, FWHM) Δt_{FWHM} pulsa zadatog jednačinom (6.158), data je sledećim izrazima:

$$\sigma_t = \frac{1}{w\sqrt{2}}, \quad \Delta t_{\text{FWHM}} = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{w}. \quad (6.159)$$

Veličina w je odabrana za korišćenje u daljem radu pošto izraz za ulazni puls čini najjednostavnijim mogućim.

Ova postavka problema iziskuje uvođenje nekog sofisticiranijeg metoda za rešavanje MB jednačina. U ovoj disertaciji, opredelili smo se za *metod Furijeove transformacije* (FT, engl. Fourier transform), gde umesto jednačina za matrice elemente operatora gustine i sondirajuće Rabijeve frekvencije, rešavamo jednačine za njihove Furijeove amplitude [4, 266]. Ova transformacija znatno pojednostavljuje računice, budući da se tada OB jednačine svode na sistem algebarskih jednačina, dok propagaciona jednačina postaje diferencijalna jednačina po samo jednoj, prostornoj promenljivoj z . Suština Furijeove transformacije \mathcal{F} ogleda se u tome da pod njenim dejstvom, proizvoljna,¹⁰ ne nužno periodična funkcija $g(t)$ nezavisne promenljive koju ćemo poistovećivati sa vremenom u kontekstu postojećeg problema, prelazi u oblik

$$\tilde{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{i\omega t} dt = \mathcal{F}[g(t)], \quad (6.160)$$

gde $\tilde{g}(\omega)$ predstavlja *Furijeovu amplitudu* funkcije $g(t)$, a promenljivu ω ćemo, u skladu sa problemom koji razmatramo, zvati uobičajeno – frekvencijom [267]. Nasuprot ovome, *inverzna* Furijeova transformacija glasi:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{g}(\omega)], \quad (6.161)$$

odakle se može zaključiti da se proizvoljna funkcija vremena može prikazati kao suma beskonačno mnogo monohromatskih komponenti, pri čemu amplituda svake od komponenti odgovara Furijeovoj

¹⁰Da budemo potpuno precizni, da bi Furijeova transformacija $\tilde{g}(\omega)$ uopšte postojala, potrebno je još i da važi $g(t) \rightarrow 0$ kada $t \rightarrow \pm\infty$.

amplitudi $\tilde{g}(\omega)$. Na ovom mestu, neophodno je jedino još da navedemo kako se transformiše prvi izvod funkcije pod dejstvom Furijeove transformacije:

$$\mathcal{F}[g'(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g'(t)e^{i\omega t} dt = -i\omega \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{i\omega t} dt = -i\omega\tilde{g}(\omega), \quad (6.162)$$

pri čemu je, u gornjem integralu, izvršena parcijalna integracija ($u = g'(t) dt$, $dv = e^{i\omega t}$), vodeći računa da $g(t) \rightarrow 0$ kada $t \rightarrow \pm\infty$.

U konkretnom slučaju koji proučavamo, od interesa će nam biti poznavanje sledećih Furijeovih amplituda:

$$\tilde{\rho}_{ij}(z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{ij}(z, t)e^{i\omega t} dt, \quad \tilde{\Omega}_p(z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_p(z, t)e^{i\omega t} dt, \quad (6.163)$$

pri čemu originalne funkcije vremena koje figurišu u MB jednačinama možemo ponovo dobiti inverznom transformacijom:

$$\rho_{ij}(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}_{ij}(z, \omega)e^{-i\omega t} d\omega, \quad \Omega_p(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Omega}_p(z, \omega)e^{-i\omega t} d\omega. \quad (6.164)$$

Pored toga, na osnovu relacije (6.162) sledi da se (prvi) izvodi gorenavedenih veličina po vremenu transformišu na sledeći način:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{ij}(z, t) \rightarrow -i\omega \tilde{\rho}_{ij}(z, \omega), \quad \frac{\partial}{\partial t} \Omega_p(z, t) \rightarrow -i\omega \tilde{\Omega}_p(z, \omega). \quad (6.165)$$

Vidimo da Furijeova transformacija nema nikakav efekat na promenljivu z – ova oznaka je zadržana u gornjim izrazima kako bi se eksplicitno naglasilo da kako same funkcije, tako i njihove Furijeove amplitude zavise od prostorne koordinate. Takođe, kako je ulazni puls zadat u formi u kojoj figuriše električno polje a ne Rabijeva frekvencija sondirajućeg polja, treba naglasiti da će za $E_p(z, t)$ i $\tilde{E}_p(z, \omega)$ važiti potpuno iste transformacione relacije kao što su to (6.163) i (6.164) za $\Omega_p(z, t)$, odnosno $\tilde{\Omega}_p(z, \omega)$.¹¹

Na samom početku, biće potrebno da izvršimo Furijeovu transformaciju izraza (6.158), sa ciljem da dobijemo *spektralni* profil ulaznog pulsa, tj. profil u prostoru frekvencija. Nakon sređivanja podintegralne funkcije i svođenja na poznati Džinsov integral, dobijamo sledeći rezultat:

$$\tilde{E}_p(0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E_p(0, t)e^{i\omega t} dt = E_{p0} \frac{\sqrt{\pi}}{w} e^{i\omega t_0} e^{-\left(\frac{\omega}{2w}\right)^2}. \quad (6.166)$$

Vidimo da je spektralni profil ulaznog pulsa (tačnije, njegova apsolutna vrednost) takođe dat Gausovom funkcijom, ovoga puta centriranom oko $\omega = 0$. Treba naglasiti da ova vrednost ne predstavlja stvarnu frekvenciju talasa, već *odstupanje* frekvencije odgovarajuće spektralne komponente od centralne (noseće) frekvencije, koja u našem slučaju iznosi ω_p . Dakle, važiće

$$\omega = \omega' - \omega_p, \quad (6.167)$$

¹¹Često će veza između jačine električnog polja i Rabijeva frekvencije sondirajućeg talasa, umesto jednačinom (5.53), biti data nešto jednostavnijim izrazima:

$$\Omega_p = \frac{d_{21}E_p}{2\hbar}, \quad \tilde{\Omega}_p = \frac{d_{21}\tilde{E}_p}{2\hbar},$$

gde smo naveli i odgovarajuću relaciju za Furijeove amplitude. O ovome je već pisano u fusnoti 20 u okviru Glave 5, a detaljnije će biti razmotreno u Glavi 7. Napomenimo samo da je zaključak ovog razmatranja da zapisivanje veze ovih veličina na gorepomenuti način ne umanjuje opštost rezultata koji slede u nastavku disertacije.

gde je ω' stvarna frekvencija spektralne komponente. Takođe, treba primetiti i fazni faktor $e^{i\omega t_0}$ koji ne utiče na intenzitet pulsa, i koji nestaje ukoliko ulazni puls ima maksimum u $t_0 = 0$ – u tom slučaju, izraz (6.166) bi se zaista sveo na Gausovu krivu. Na kraju, navedimo i vezu između spektralne poluširine w i standardne devijacije, odnosno širine na pola maksimuma u prostoru frekvencija:

$$\sigma_\omega = w\sqrt{2}, \quad \Delta\omega_{\text{FWHM}} = 4w\sqrt{\ln 2}. \quad (6.168)$$

Napomenimo još i da smo veličinu w nazvali spektralnom poluširinom (a ne, recimo, samo „širinom”), zato što se iz gornje relacije vidi da je $w < \sigma_\omega$, a već je sama standardna devijacija na svojevrsan način povezana sa polovinom širine pulsa (ako pod širinom podrazumevamo rastojanje između prevojnih tačaka pulsa). U literaturi se, doduše, za istu veličinu može sresti i termin „spektralna širina”, koji mi ovde nećemo koristiti.

6.3.1 Primena metoda na sisteme sa tri nivoa

Primenimo metod Furijeove transformacije na rešavanje MB jednačina za sistem sa tri nivoa. Kako bismo ovo sprovedli u delo, iskoristimo najpre perturbacioni pristup kako bismo linearizovali OB jednačine (5.85)–(5.89) za zatvoren, odnosno (5.92)–(5.105) za otvoren sistem. Kao što je u prethodnom poglavlju već diskutovano, linearizacija oba seta jednačina daće isti par raspregnutih jednačina za matrice elemente od interesa:

$$\dot{\rho}_{21} = i\Omega_p + i\Omega_c^* \rho_{31} - \Lambda_{21} \rho_{21}, \quad (6.169)$$

$$\dot{\rho}_{31} = i\Omega_c \rho_{21} - \Lambda_{31} \rho_{31}, \quad (6.170)$$

gde su, radi jednostavnijeg pisanja, izostavljene oznake da se radi o elementima matrice gustine u prvom redu teorije perturbacija. Furijeova transformacija primenjena na ove jednačine daće nam sledeće izraze:

$$-i\omega \tilde{\rho}_{21} = i\tilde{\Omega}_p + i\tilde{\Omega}_c^* \tilde{\rho}_{31} - \Lambda_{21} \tilde{\rho}_{21}, \quad (6.171)$$

$$-i\omega \tilde{\rho}_{31} = i\tilde{\Omega}_c \tilde{\rho}_{21} - \Lambda_{31} \tilde{\rho}_{31}, \quad (6.172)$$

gde smo iskoristili činjenicu da se, pod dejstvom ove transformacije, željene funkcije transformišu kao $\rho_{ij} \rightarrow \tilde{\rho}_{ij}$, odnosno $\Omega_p \rightarrow \tilde{\Omega}_p$, a njihovi izvodi u skladu sa relacijom (6.165). Gornji sistem linearizovanih jednačina za Furijeove amplitude se rešava na analogan način kao sistem jednačina (6.30) i (6.31). Za Furijeovu amplitudu matičnog elementa ρ_{21} dobija se tada:

$$\tilde{\rho}_{21}(z, \omega) = f(\omega) \tilde{\Omega}_p(z, \omega) = f(\omega) \frac{d_{21}}{2\hbar} \tilde{E}_p(z, \omega), \quad (6.173)$$

gde je

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{\omega + i\Lambda_{31}}{|\Omega_c|^2 + (\Lambda_{21} - i\omega)(\Lambda_{31} - i\omega)} \\ &= \frac{\omega - \Delta_p - \Delta_c + i\lambda_{31}}{|\Omega_c|^2 + (\lambda_{21} - i(\omega - \Delta_p))(\lambda_{31} - i(\omega - \Delta_p - \Delta_c))}. \end{aligned} \quad (6.174)$$

Vidimo da, ukoliko poznajemo veličinu $\tilde{\Omega}_p(z, \omega)$, direktno iz nje možemo odrediti i $\tilde{\rho}_{21}(z, \omega)$, a potom se inverznom Furijeovom transformacijom vratiti na originalne funkcije.

Određivanje Furijeove amplitude $\tilde{\Omega}_p(z, \omega)$ svodi se na rešavanje propagacione jednačine (5.151) za sondirajuće polje na koju je prethodno izvršena Furijeova transformacija. Prepišimo ovu jednačinu konciznije,

$$\frac{\partial \Omega_p}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Omega_p}{\partial t} = i\mathcal{K}\rho_{21}, \quad \mathcal{K} \equiv \mathcal{K}_p = \frac{N\omega_p |\mathbf{d}_{21}|^2}{2\varepsilon_0 \hbar c}, \quad (6.175)$$

gde je \mathcal{K} veličina povezana sa optičkom dubinom supstancije. Primena Furijeove transformacije na propagacionu jednačinu daje

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}_p}{\partial z} - \frac{\omega}{c} \tilde{\Omega}_p = i\mathcal{K}\tilde{\rho}_{21}, \quad (6.176)$$

odakle se, zamenom (6.173) u ovaj izraz, uz neznatno sređivanje, dobija

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - i \left(\frac{\omega}{c} + \mathcal{K}f(\omega) \right) \right) \tilde{\Omega}_p(z, \omega) = 0. \quad (6.177)$$

Ukoliko uvedemo novu funkciju

$$\kappa(\omega) = \frac{\omega}{c} + \mathcal{K}f(\omega) \quad (6.178)$$

koja praktično ima smisao *dispersione relacije*, gornja jednačina postaje

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - i\kappa(\omega) \right) \tilde{\Omega}_p(z, \omega) = 0. \quad (6.179)$$

Dakle, propagaciona jednačina svodi se na diferencijalnu jednačinu po samo jednoj promenljivoj,¹² čije se rešenje jednostavno nalazi:

$$\tilde{\Omega}_p(z, \omega) = \tilde{\Omega}_p(0, \omega) e^{i\kappa(\omega)z}. \quad (6.180)$$

Ukoliko želimo da se prebacimo na jačinu električnog polja, to možemo uraditi množenjem gornjeg izraza sa $d_{21}/(2\hbar)$, odakle sledi

$$\tilde{E}_p(z, \omega) = \tilde{E}_p(0, \omega) e^{i\kappa(\omega)z}, \quad (6.181)$$

gde je prelaz između odgovarajućih veličina omogućen u smislu diskusije iz fusnote 11.

Konačno, profil envelope električnog polja sondirajućeg talasa na rastojanju z u sredini dobićemo primenom inverzne Furijeove transformacije (6.164) na izraz (6.181). Rezultat je:

$$E_p(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_p(z, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_p(0, \omega) e^{i(\kappa(\omega)z - \omega t)} d\omega. \quad (6.182)$$

Dobijeni integral može da se rešava kako numerički, tako i analitički, uz uvođenje nekih dodatnih aproksimacija. Oba ova pristupa biće iskorišćena u nastavku disertacije. Ukoliko još iskoristimo i

¹²Opet strogo formalno, reč je o *parcijalnoj* diferencijalnoj jednačini što pojava parcijalnog izvoda i naglašavali, ali se suštinski, pri njenom rešavanju, frekvencija ω ponaša kao običan parametar i diferencijalna jednačina krajnje jednostavno rešava.

relaciju (6.166) za Furijeovu amplitudu električnog polja na ulazu u sredinu, za gornji izraz dobijamo

$$E_p(z, t) = \frac{E_{p0}}{2w\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\omega}{2w}\right)^2} e^{i(\kappa(\omega)z - \omega(t-t_0))} d\omega, \quad (6.183)$$

što predstavlja polaznu jednačinu za dalji rad. Vidimo da nam je, za nalaženje envelope električnog polja sondirajućeg pulsa na izlazu iz sredine (a samim tim i sondirajuće Rabijeve frekvencije), tj. nalaženje vremenskog profila *izlaznog pulsa*, neophodno poznavanje disperzione relacije $\kappa(\omega)$, odnosno funkcije $f(\omega)$, koja će zavisiti od izbora konkretnog fizičkog sistema, tj. OB jednačina koje je za taj sistem potrebno rešiti.

Kao što je već napomenuto, dobijeni zaključci važe kako za zatvoren, tako i za otvoren sistem sa tri nivoa, jer relacija (6.174) ima isti oblik u oba slučaja. Međutim, iako je matematički oblik funkcije $f(\omega)$ za obe konfiguracije isti, podsetimo se da će se razlike zapravo javiti u dekoherentnim članovima. Konkretno, u slučaju dominantne spontane emisije, funkcija (6.174) se svodi na

$$f^Z(\omega) = \frac{\omega - \Delta_p - \Delta_c + i\frac{1}{2}\Gamma_{32}}{|\Omega_c|^2 + \left(\frac{1}{2}\Gamma_{21} - i(\omega - \Delta_p)\right)\left(\frac{1}{2}\Gamma_{32} - i(\omega - \Delta_p - \Delta_c)\right)}, \quad (6.184)$$

za zatvoren sistem sa tri nivoa, odnosno na

$$f^O(\omega) = \frac{\omega - \Delta_p - \Delta_c + i\frac{1}{2}(\Gamma_{32} + \Gamma_{34} + \Gamma_{35})}{|\Omega_c|^2 + \left(\frac{1}{2}\Gamma_{21} - i(\omega - \Delta_p)\right)\left(\frac{1}{2}(\Gamma_{32} + \Gamma_{34} + \Gamma_{35}) - i(\omega - \Delta_p - \Delta_c)\right)}, \quad (6.185)$$

za otvoren sistem [6]. Kao što možemo da vidimo, jedina razlika između ova dva izraza leži u različitim koeficijentima raspada, budući da kod otvorenog sistema postoje dodatni procesi raspada sa najvišeg na nivoe $|4\rangle$ i $|5\rangle$. U skladu sa diskusijom sprovedenom u odeljku 6.1.2, i ovde možemo zaključiti da je otvoren sistem moguće tretirati kao zatvoren sistem sa efektivnom vrednošću $\Gamma_3^{\text{ef}} = \Gamma_{32} + \Gamma_{34} + \Gamma_{35}$ koeficijenta raspada sa nivoa $|3\rangle$.

6.3.2 Primena metoda na sistem sa četiri nivoa

Procedura rešavanja MB jednačina za sistem za četiri nivoa je u potpunosti analogna onoj sprovedenoj u prethodnom odeljku, zbog čega ćemo na ovom mestu biti nešto koncizniji. Kao što smo već naglasili, interesuje nas slučaj kada je dodatno polje kontrolno, što implicira da je potrebno koristiti sledeći sistem linearizovanih jednačina:

$$\dot{\rho}_{21} = i\Omega_p + i\Omega_c^* \rho_{31} - \Lambda_{21} \rho_{21}, \quad (6.186)$$

$$\dot{\rho}_{31} = i\Omega_c \rho_{21} + i\Omega_d^* \rho_{41} - \Lambda_{31} \rho_{31}, \quad (6.187)$$

$$\dot{\rho}_{41} = i\Omega_d \rho_{31} - \Lambda_{41} \rho_{41}, \quad (6.188)$$

koje su dobijene linearizacijom jednačina (5.109)–(5.117) i izdvajanjem onih raspregnutih (oznake da se radi o prvom redu teorije perturbacija su ponovo namerno izostavljene). Nakon izvršene Furijeove transformacije, gornji sistem poprima oblik:

$$-i\omega \tilde{\rho}_{21} = i\tilde{\Omega}_p + i\Omega_c^* \tilde{\rho}_{31} - \Lambda_{21} \tilde{\rho}_{21}, \quad (6.189)$$

$$-i\omega \tilde{\rho}_{31} = i\Omega_c \tilde{\rho}_{21} + i\Omega_d^* \tilde{\rho}_{41} - \Lambda_{31} \tilde{\rho}_{31}, \quad (6.190)$$

$$-i\omega \tilde{\rho}_{41} = i\Omega_d \tilde{\rho}_{31} - \Lambda_{41} \tilde{\rho}_{41}. \quad (6.191)$$

Rešavanje ovog sistema analogno je onom za sistem jednačina (6.53)–(6.58), što nas dovodi do rezultata:

$$\tilde{\rho}_{21}(z, \omega) = f'(\omega) \tilde{\Omega}_p(z, \omega) = f'(\omega) \frac{d_{21}}{2\hbar} \tilde{E}_p(z, \omega), \quad (6.192)$$

pri čemu je

$$f'(\omega) = i \frac{|\Omega_d|^2 + (\Lambda_{31} - i\omega)(\Lambda_{41} - i\omega)}{|\Omega_c|^2(\Lambda_{41} - i\omega) + |\Omega_d|^2(\Lambda_{21} - i\omega) + (\Lambda_{21} - i\omega)(\Lambda_{31} - i\omega)(\Lambda_{41} - i\omega)} \quad (6.193)$$

funkcija u kojoj, radi jednostavnosti, nismo eksplicitno zamenjivali veličine Λ_{ij} .

Kao i u slučaju sistema sa tri nivoa, i ovde postoji samo propagaciona jednačina za sondirajuće polje (6.175), koja se Furijeovom transformacijom svodi na (6.176). Zamenom (6.192) u propagacionu jednačinu za Furijeove amplitude i neznatnim sređivanjem, dobijamo

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - i\kappa'(\omega) \right) \tilde{\Omega}_p(z, \omega) = 0, \quad (6.194)$$

gde je disperziona relacija sada data izrazom

$$\kappa'(\omega) = \frac{\omega}{c} + \mathcal{K}f'(\omega). \quad (6.195)$$

Vidimo da je jedina razlika u odnosu na sistem sa tri nivoa ta što funkciju $f(\omega)$ treba zameniti sa $f'(\omega)$. Rešenje (6.194) se jednostavno nalazi:

$$\tilde{\Omega}_p(z, \omega) = \tilde{\Omega}_p(0, \omega) e^{i\kappa'(\omega)z}, \quad (6.196)$$

što dovodi do

$$\tilde{E}_p(z, \omega) = \tilde{E}_p(0, \omega) e^{i\kappa'(\omega)z}. \quad (6.197)$$

Naravno, vidimo da se celokupna problematika ponovo svodi na rešavanje integrala (6.182), odnosno (6.183), sa tom razlikom što je u pomenute izraze potrebno zameniti disperzionu relaciju $\kappa'(\omega)$ za sistem sa četiri nivoa.

6.3.3 Grupna brzina, disperzija i raspad sondirajućeg pulsa

Prilikom diskusije jednačine (6.182) napomenuto je da se integral koji se u njoj javlja može rešiti bilo numerički, bilo analitički. U ovom odeljku, sprovedemo detaljnu proceduru *analitičkog* rešavanja ovog integrala, i temeljno razmotriti efekte koji utiču na oblik izlaznog sondirajućeg pulsa. Prilikom ove procedure, ograničićemo se na *sistem sa tri nivoa* – rešenja za sistem sa četiri nivoa mogu se dobiti po analogiji, ali će jednačine koje ih opisuju biti veoma glomazne i nećemo ih navoditi. Podsetimo da će dobijeni rezultati važiti za *obe* konfiguracije u okviru sistema sa tri nivoa.

Krenimo najpre od disperzione relacije (6.178). Ukoliko razvijemo ovaj izraz u Tejlrov red oko $\omega = 0$ (drugim rečima, oko centralne frekvencije $\omega' = \omega_p$), dobićemo sledeći izraz:

$$\kappa(\omega) = \frac{\omega}{c} + \mathcal{K}f(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n \kappa}{\partial \omega^n} \right)_{\omega=0}. \quad (6.198)$$

U daljem razmatranju, zadržaćemo se na članovima u razvoju zaključno sa članom u kome figuriše treći stepen po ω :

$$\kappa(\omega) = \kappa_0 + \kappa_1\omega + \kappa_2\omega^2 + \kappa_3\omega^3. \quad (6.199)$$

Koeficijenti u razvoju dati su sledećim izrazima [4]:

$$\kappa_0 = \kappa(0) = i\mathcal{K} \frac{\Lambda_{31}}{|\Omega_c|^2 + \Lambda_{21}\Lambda_{31}} = ia, \quad (6.200)$$

$$\kappa_1 = \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \omega} \right)_{\omega=0} = \frac{1}{c} + \mathcal{K} \frac{|\Omega_c|^2 - \Lambda_{31}^2}{(|\Omega_c|^2 + \Lambda_{21}\Lambda_{31})^2}, \quad (6.201)$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \kappa}{\partial \omega^2} \right)_{\omega=0} = i\mathcal{K} \frac{(2\Lambda_{31} + \Lambda_{21})|\Omega_c|^2 - \Lambda_{31}^3}{(|\Omega_c|^2 + \Lambda_{21}\Lambda_{31})^3} = ib, \quad (6.202)$$

$$\kappa_3 = \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 \kappa}{\partial \omega^3} \right)_{\omega=0} = \mathcal{K} \frac{\left(|\Omega_c|^2 - \Lambda_{31}^2 \right)^2 - (\Lambda_{31} + \Lambda_{21})^2 |\Omega_c|^2}{(|\Omega_c|^2 + \Lambda_{21}\Lambda_{31})^4}. \quad (6.203)$$

Vidimo da su u pitanju kompleksne veličine koje zavise kako od karakteristika same sredine (kroz koeficijente raspada i veličine u okviru \mathcal{K}), tako i od karakteristika laserskih polja (kontrolna Rabijska frekvencija, razdešenosti oba polja i veličine koje se pojavljuju u \mathcal{K}). Takođe, uveli smo i kompleksne veličine a i b preko relacija:

$$a = \mathcal{K} \frac{\Lambda_{31}}{|\Omega_c|^2 + \Lambda_{21}\Lambda_{31}} = -i\kappa_0, \quad (6.204)$$

$$b = \mathcal{K} \frac{(2\Lambda_{31} + \Lambda_{21})|\Omega_c|^2 - \Lambda_{31}^3}{(|\Omega_c|^2 + \Lambda_{21}\Lambda_{31})^3} = -i\kappa_2. \quad (6.205)$$

Radi jednostavnosti, a u skladu sa najvećim brojem situacija koje ćemo razmatrati u ovoj disertaciji, pretpostavićemo da je zadovoljen uslov $\Delta_p + \Delta_c = 0$ za minimum apsorpcije, kao i da je pritom $\Delta_p = 0$. Zahvaljujući ovome, jednačine (6.200)–(6.203) dobijaju oblik:

$$\kappa_0 = i\mathcal{K} \frac{\lambda_{31}}{|\Omega_c|^2 + \lambda_{21}\lambda_{31}}, \quad (6.206)$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{c} + \mathcal{K} \frac{|\Omega_c|^2 - \lambda_{31}^2}{(|\Omega_c|^2 + \lambda_{21}\lambda_{31})^2}, \quad (6.207)$$

$$\kappa_2 = i\mathcal{K} \frac{(2\lambda_{31} + \lambda_{21})|\Omega_c|^2 - \lambda_{31}^3}{(|\Omega_c|^2 + \lambda_{21}\lambda_{31})^3}, \quad (6.208)$$

$$\kappa_3 = \mathcal{K} \frac{\left(|\Omega_c|^2 - \lambda_{31}^2 \right)^2 - (\lambda_{31} + \lambda_{21})^2 |\Omega_c|^2}{(|\Omega_c|^2 + \lambda_{21}\lambda_{31})^4}. \quad (6.209)$$

Gore primenjeni uslovi dovode do toga da veličine κ_0 i κ_2 postaju čisto imaginarne, dok će κ_1 i κ_3 (kao uostalom i a i b) biti čisto realne veličine. Fizički smisao ovih veličina biće uskoro jasniji.

Zadržimo, za početak, u izrazu (6.199) samo članove zaključno sa onim u kome figuriše kvadrat frekvencije. Ukoliko takav izraz zamenimo u (6.183), dobićemo aproksimativni izraz za envelopu električnog polja u drugom redu po ω :

$$E_p^{(2)}(z, t) = \frac{E_{p0}}{2w\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\omega}{2w}\right)^2} e^{i((\kappa_0 + \kappa_1\omega + \kappa_2\omega^2)z - \omega(t-t_0))} d\omega \quad (6.210)$$

$$= E'_{p0}(z) e^{-(w'(z))^2(t-t_0-\kappa_1z)^2} = E'_{p0}(z) e^{-(w'(z))^2\left(t-t_0-\frac{z}{v_g}\right)^2}. \quad (6.211)$$

Prilikom dobijanja ovog izraza, u podintegralnoj funkciji su grupisani članovi tako da se dobije poznati Džinsov integral, nakon čega smo uveli nove veličine:

$$E'_{p0}(z) = \frac{E_{p0}e^{-az}}{\sqrt{1+4bw^2z}}, \quad w'(z) = \frac{w}{\sqrt{1+4bw^2z}}, \quad (6.212)$$

koje odgovaraju amplitudi električnog polja i spektralnoj poluširini izlaznog pulsa, respektivno. Jasno je da će ove veličine zavisiti od propagacione koordinate z , ali i od ranije uvedenih veličina a i b . Ukoliko je b mala veličina (tj. član u (6.199) koji sadrži $\kappa_2\omega^2$ je zanemarljivo mali u odnosu na ostale članove), imaćemo $E'_{p0}(z) = E_{p0}e^{-az}$ i $w'(z) = w$. Dakle, amplituda električnog polja pri prostiranju kroz sredinu *opada*, i to opadanje je veće što je veća vrednost parametra $a > 0$, koji predstavlja *karakterističnu dužinu apsorpcije* (u slučaju da je $\Delta_p, \Delta_c \neq 0$, karakteristična dužina apsorpcije data je veličinom $\text{Re}a$). Apsorpcija pulsa je, dakle, posledica efekta *nultog* reda u smislu relacije (6.199).

Primitimo, takođe, da je u izrazu (6.211) očuvan Gausov profil pulsa, sa tom razlikom da se maksimum pulsa u tački prostora sa koordinatom z javlja u trenutku $t = t_0 + \kappa_1z = t_0 + z/v_g$, gde v_g predstavlja *grupnu brzinu* pulsa. Ovo je logično, budući da puls, krećući se kroz sredinu brzinom v_g , za vreme $t - t_0$ pređe rastojanje z . Dakle, grupna brzina pulsa, a samim tim i grupni indeks, povezani su sa efektima *prvog* reda na sledeći način:

$$v_g = \frac{1}{\kappa_1} = \frac{c}{1 + \mathcal{K}c \frac{|\Omega_c|^2 - \lambda_{31}^2}{(|\Omega_c|^2 + \lambda_{21}\lambda_{31})^2}}, \quad n_g = c\kappa_1 = 1 + \mathcal{K}c \frac{|\Omega_c|^2 - \lambda_{31}^2}{(|\Omega_c|^2 + \lambda_{21}\lambda_{31})^2}, \quad (6.213)$$

odakle, eksplicitnim zapisivanjem \mathcal{K} , vidimo da formula za grupni indeks u potpunosti odgovara izrazu (6.43), pri čemu sada važi $\omega_{21} = \omega_p + \Delta_p = \omega_p$. Vidimo da će se spora svetlost ($v_g < c$, $n_g > 1$) javiti ukoliko važi $|\Omega_c| > \lambda_{31}$, što je zadovoljeno u svim slučajevima od interesa. Naglasimo da, u slučaju da je $\Delta_p, \Delta_c \neq 0$, za κ_1 bismo morali da koristimo izraz (6.201), a gornje formule bi glasile $v_g = 1/\text{Re}\kappa_1$, odnosno $n_g = c\text{Re}\kappa_1$.

U slučajevima kada su dominantni efekti nultog i prvog reda, puls očuvava svoj oblik i ne „rasplinjava” se. Ukoliko je, pak, kvadratni član u (6.199) nezanemarljiv, doći će do *disperzije pulsa* – pri prolasku kroz sredinu, spektralna širina pulsa se *smanjuje* ($w'(z) \leq w$ jer je $z \geq 0$, kao i $b \geq 0$ za sve slučajeve od interesa, pošto i dalje važi uslov $\Omega_c \gg \lambda_{21}, \lambda_{31}$), a trajanje pulsa („vremenska” širina, obrnuto proporcionalna spektralnoj) se *povećava*. Dakle, vidimo da je efekat *drugog* reda po frekvenciji povezan sa promenom širine sondirajućeg pulsa. Fizičko objašnjenje disperzije leži u tome da se različite spektralne komponente unutar talasnog paketa koji sondirajući puls zapravo predstavlja, kreću različitim *faznim* brzinama, dok se puls i dalje kao celina kreće istom, *grupnom* brzinom [4].

Dozvolimo, sada, da u izrazu (6.199) figuriše i član $\kappa_3\omega^3$. Envelopu električnog polja sondirajućeg pulsa (6.183) sada možemo zapisati na sledeći način:

$$E_p^{(3)}(z, t) = \frac{E_{p0}}{2w\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\omega}{2w}\right)^2} e^{i((\kappa_0+\kappa_1\omega+\kappa_2\omega^2+\kappa_3\omega^3)z-\omega(t-t_0))} d\omega \quad (6.214)$$

$$= \frac{E_{p0}e^{-az}}{2w\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{F(\omega)} d\omega, \quad (6.215)$$

gde smo iskoristili da je $\kappa_0 = ia$, a potom uveli novu funkciju frekvencije

$$\begin{aligned} F(\omega) &= -i(t-t_0-\kappa_1z)\omega + \left(i\kappa_2z - \frac{1}{4w^2}\right)\omega^2 + i\kappa_3z\omega^3 \\ &= -i\tau\omega - \frac{1}{(2w')^2}\omega^2 + i\kappa_3z\omega^3, \end{aligned} \quad (6.216)$$

pri čemu je iskorišćena druga jednačina u (6.212), kao i

$$\tau = t - t_0 - \kappa_1z = t - t_0 - \frac{z}{v_g}, \quad (6.217)$$

što je dobijeno uz pomoć (6.213).

Za rešavanje integrala u (6.215) koristićemo *metod prevojne tačke*, odnosno *najstrmijeg spusta* (engl. saddle-point/steepest descent method) [268, 269]. Ovo konkretno znači da pomenuti integral tražimo u jednom od dva sledeća oblika. U prvom slučaju, rešenje je dato izrazom:

$$J \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{F(\omega)} d\omega = \sqrt{2\pi} \sum_i \frac{e^{F(\omega_i)}}{\sqrt{-\left(\frac{d^2F}{d\omega^2}\right)_{\omega=\omega_i}}}, \quad (6.218)$$

i ono važi kada je $\left(\frac{d^2F}{d\omega^2}\right)_{\omega=\omega_i}$ *realna* veličina, dok u drugom slučaju rešenje glasi

$$J \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{F(\omega)} d\omega = \sqrt{2\pi} \sum_i \frac{\eta_i e^{F(\omega_i)}}{\sqrt{-\eta_i^2 \left(\frac{d^2F}{d\omega^2}\right)_{\omega=\omega_i}}}, \quad (6.219)$$

i validno je onda kada je $\left(\frac{d^2F}{d\omega^2}\right)_{\omega=\omega_i}$ *kompleksna* veličina. U gornjim izrazima ω_i je *i*-ta *prevojna tačka* funkcije $F(\omega)$, dobijena kao jedno od rešenja jednačine

$$\left(\frac{dF}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_i} = 0, \quad (6.220)$$

a sumiranje se vrši samo po onim vrednostima ω_i za koje važi da je

$$\left(\frac{d^2F}{d\omega^2}\right)_{\omega=\omega_i} < 0 \quad (6.221)$$

u prvom, odnosno

$$\operatorname{Re}\left(\eta_i^2 \frac{d^2F}{d\omega^2}\right)_{\omega=\omega_i} < 0 \quad (6.222)$$

u drugom slučaju. Parametar η_i predstavlja proizvoljni unimodularni kompleksni broj ($|\eta_i| = 1$), izabran tako da zadovoljava uslov (6.222).

Potražimo sada prevojne tačke funkcije definisane preko (6.216). Na osnovu jednačine (6.220), rešavanjem po ω nalazimo da postoje dve prevojne tačke čije su vrednosti:

$$\omega_{1,2} = -i \frac{(w'')^3}{(2w')^2} (1 \pm A), \quad (6.223)$$

pri čemu smo uveli nove veličine

$$w''(z) = \frac{1}{\sqrt[3]{3\kappa_3 z}}, \quad A(z) = \sqrt{1 - \mathcal{W}\tau}, \quad \mathcal{W} = \frac{(2w')^4}{(w'')^3}. \quad (6.224)$$

Iako to nije eksplicitno naznačeno, od propagacione koordinate zavise i veličine \mathcal{W} i τ . Rezultati koje ovde navodimo dobijeni su pod pretpostavkom da su kontrolna Rabijeva frekvencija i koeficijenti raspada zadati tako da je $\kappa_3 > 0$, odakle sledi uslov

$$|\Omega_c| > \frac{1}{2} \left(\lambda_{21} + \lambda_{31} + \sqrt{(\lambda_{21} + \lambda_{31})^2 + 4\lambda_{31}^2} \right), \quad (6.225)$$

što je konzistentno sa uslovom $|\Omega_c| > \lambda_{31}$ za usporavanje pulsa. U slučaju da ipak važi da je $\kappa_3 < 0$, u definiciji za w'' , veličinu κ_3 je potrebno zameniti sa $|\kappa_3|$.

Dakle, izraz $\mathcal{W}\tau$ zavisi od propagacione koordinate, ali i od vremena, koje figuriše u izrazu za τ . Vrednost ove veličine direktno utiče na to koje od rešenja, (6.218) ili (6.219), treba koristiti. Tako, u slučaju da je $\mathcal{W}\tau < 1$, posmatranjem drugog izraza u (6.224) vidimo da je A realna veličina, i da pored toga važi

$$\left(\frac{d^2 F}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_1} = \frac{2A}{(2w')^2} > 0, \quad \left(\frac{d^2 F}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_2} = -\frac{2A}{(2w')^2} < 0, \quad (6.226)$$

gde smo izostavili pisanje eksplicitne zavisnosti od z . Dakle, obe dobijene vrednosti su *realne*, pa je potrebno koristiti razvoj (6.218). Pored toga, uslov (6.221) je zadovoljen samo u drugom slučaju, tako da će suma u (6.218) sadržati samo jedan član, u kome figuriše ω_2 . Konačno, za envelopu električnog polja dobijamo:

$$E_p^{(3)}(z, t) = E_{p0}''(z) e^{-\frac{1}{3} \left(\frac{w''(z)}{2w'(z)} \right)^6 (2A^3(z) - 3A^2(z) + 1)}, \quad (6.227)$$

gde je

$$E_{p0}''(z) = \frac{w'(z)}{w\sqrt{A(z)}} E_{p0} e^{-az}. \quad (6.228)$$

Za male vrednosti z i t , dakle kada puls nije prešao veliko rastojanje krećući se kroz uzorak, važiće $\mathcal{W}\tau \ll 1$, što nam omogućava da iskoristimo aproksimativni izraz

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3, \quad x \ll 1, \quad (6.229)$$

što će u našem slučaju dati

$$\sqrt{A} \approx 1, \quad 2A^3 - 3A^2 + 1 \approx \frac{3}{4} \mathcal{W}^2 \tau^2. \quad (6.230)$$

Ukoliko dobijeni izraz zamenimo u (6.227), videćemo da se ovaj svodi na (6.211), koji smo dobili u drugom redu po frekvenciji. Dakle, na samom ulazu u sredinu, na samom početku propagacije, puls zadržava „gausovski” oblik, jer se u tom slučaju član $\kappa_3\omega^3$ u (6.199) još uvek može zanemariti. Kako puls nastavlja svoju propagaciju, to se ovakav oblik narušava i envelopu električnog polja je potrebno opisati relacijom (6.227).

Pređimo sada na razmatranje situacije kada je $\mathcal{W}\tau > 1$. Ovo implicira da je A je sada čisto imaginarna veličina, što nas navodi da definišemo sledeću čisto realnu veličinu

$$B = -iA = \sqrt{\mathcal{W}\tau - 1}. \quad (6.231)$$

Pod ovim uslovima, prevojne tačke će ovoga puta biti

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{(w'')^3}{(2w')^2} (B \mp i), \quad (6.232)$$

što ponovo sledi iz (6.220). U tačkama prevoja, vrednosti drugog izvoda funkcije $F(\omega)$ će sada biti

$$\left(\frac{d^2 F}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_1} = i \frac{2B}{(2w')^2}, \quad \left(\frac{d^2 F}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_2} = -i \frac{2B}{(2w')^2}, \quad (6.233)$$

što ukazuje na činjenicu da ćemo ovde morati da iskoristimo rešenje u obliku (6.219). U skladu sa tim, odaberimo sada unimodularne parametre η_i na sledeći način:

$$\eta_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \eta_1^2 = i, \quad \eta_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \eta_2^2 = -i, \quad (6.234)$$

što nam omogućava da uslov (6.222) bude zadovoljen. Konačno, zamenom dobijenih izraza u (6.219) i nakon nešto dužeg računanja, envelopa električnog polja dobija oblik:

$$E_p^{(3)}(z, t) = E_{p0}''' e^{-\frac{(w''(z))^3}{(2w'(z))^2} (t-t_0 - \frac{z}{v_g})} \cos \left(\frac{2(w''(z))^6}{3(2w'(z))^6} B^3(z) - \frac{\pi}{4} \right), \quad (6.235)$$

gde je

$$E_{p0}'''(z) = \frac{2w'(z)}{w\sqrt{B(z)}} E_{p0} e^{-az - \frac{2(w''(z))^6}{3(2w'(z))^6}}. \quad (6.236)$$

Primitimo da se ovde, nakon dovoljno dugog vremena i nakon što puls pređe dovoljno veliko rastojanje duž uzorka, u izrazu za envelopu javlja kosinusni član koji jasno sugerise da je početna „gausovska” struktura pulsa jako narušena. Ovaj efekat se u literaturi najčešće naziva *raspad* sondirajućeg pulsa (engl. pulse breakup), i može se objasniti činjenicom da se različite spektralne komponente unutar sondirajućeg pulsa kreću različitim *grupnim* brzinama [4]. Pored toga, kosinusni član u rešenju (6.235) biće odgovoran za postojanje tzv. „repa” sondirajućeg pulsa, koji se na izlazu iz sredine manifestuje kao *treperenje* pulsa u daleko dužem trajanju nego što je trajanje ulaznog pulsa.

Na kraju, spomenimo na kratko i situaciju kada je $\mathcal{W}\tau = 1$. U tom slučaju ćemo imati $A = 0$, a prevojne tačke će biti

$$\omega_1 = \omega_2 = -i \frac{(w'')^3}{(2w')^2} = \omega_0, \quad (6.237)$$

odakle dobijamo

$$\left(\frac{d^2 F}{d\omega^2}\right)_{\omega=\omega_0} = 0. \quad (6.238)$$

Ovo, nažalost, znači da metod prevojne tačke ne može da se primeni na ovaj slučaj. Da bismo našli rešenje, potrebno je da funkciju (6.216) razvijemo u Tejlorov red oko $\omega = \omega_0$ i zadržimo članove zaključno sa trećim redom po frekvenciji. Rezultat je

$$F(\omega) = -\frac{(w'')^6}{3(2w')^6} + i\frac{(\omega - \omega_0)^3}{3(w'')^3}, \quad (6.239)$$

što nas dovodi do izraza

$$E_p^{(3)}(z, t) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) w''}{2w\sqrt[6]{3\pi^3}} E_{p0} e^{-az - \frac{(w''(z))^6}{3(2w'(z))^6}}. \quad (6.240)$$

Dobijena jednačina ne zavisi od vremena, zato što se odnosi na fiksni vremenski trenutak (određen preko $\tau = 1/\mathcal{W}$). Sa druge strane, rešenja (6.227) i (6.235) zavise kako od z , tako i od t , i izrazito odstupaju od Gausovog profila kog smo dobili u drugom redu po ω . Prilikom konačnog zapisa envelope sondirajućeg pulsa, treba imati u vidu da će možda biti potrebno da se ona zapiše kao kombinacija sva tri gorenavedena izraza – gde (6.227) važi za mala vremena (i malo z), (6.235) za velika vremena, dok (6.240) predstavlja graničnu vrednost između ova dva slučaja. Vrednost ovog „graničnog” trenutka zavisi od z , i zapravo ima smisla govoriti o *graničnoj krivoj* $t_{gr}(z)$, čija je jednačina

$$t_{gr}(z) = \tau(z) + t_0 + \frac{z}{v_g} = \frac{1}{\mathcal{W}(z)} + t_0 + \frac{z}{v_g} = \frac{(w''(z))^3}{(2w'(z))^4} + t_0 + \frac{z}{v_g}, \quad (6.241)$$

pri čemu smo eksplicitno naveli zavisnost od z gde god se ona javlja. Ova granična kriva, sasvim uopšte, daje relativno složenu zavisnost između ovih promenljivih, i „deli” z - t prostor na oblasti u kojima važi po jedno od dobijenih rešenja. Tako će, pri $t < t_{gr}(z)$, biti ispunjen uslov $\mathcal{W}\tau < 1$ i rešenje će biti dato preko (6.227). Sa druge strane, za vremena $t > t_{gr}(z)$ važiće $\mathcal{W}\tau > 1$, što odgovara rešenju (6.235), dok će na samoj krivoj, $t = t_{gr}(z)$, vrednost envelope sondirajućeg pulsa biti data izrazom (6.240).

Da sumiramo, disperziona relacija (6.178) predstavlja centralnu jednačinu za ispitivanje oblika pulsa pri prolasku kroz materijalnu sredinu. Efekti nultog reda odgovorni su za apsorpciju pulsa, a grupna brzina, odnosno grupni indeks sredine posledica su efekata prvog reda. Drugi red po frekvenciji dovodi do disperzije pulsa i posledica je toga da različite spektralne komponente pulsa imaju različite fazne brzine. Dakle, svi pobrojani efekti ne narušavaju početni Gausov profil pulsa, iako eventualno utiču na njegovu širinu. Ukoliko je, pak, profil izlaznog pulsa asimetričan, bilo da dolazi do pojave „repova” ili ne, to je jasan znak da su efekti trećeg, ili čak viših redova po ω dominantni. Sa druge strane, ukoliko na izlazu detektujemo puls čiji je Gausov profil neznatno promenjen, znači da velikom pouzdanošću efekte trećeg i viših redova možemo zanemariti. U nastavku disertacije, temeljno ćemo proučiti oba navedena slučaja.

6.3.4 Efikasnost, vernost, grupni indeks i relativna širina izlaznog pulsa

U prethodnim odeljcima prikazana je detaljna procedura za određivanje vremenskog profila envelope električnog polja sondirajućeg pulsa, za različite vrednosti propagacione koordinate z . Videli

smo i da se često pri ovoj propagaciji javljaju efekti slabljenja ili deformacije pulsa. Zbog toga je, kako bi se pružila celovita slika prostiranja svetlosti kroz sredinu, potrebno nekako kvantifikovati ove efekte. U tu svrhu uvešćemo četiri parametra, od kojih su neki od njih već spomenuti [3, 4, 6, 103]. Poznavanje ovih parametara omogućiće nam da odredimo dominantne efekte koji se javljaju pri interakciji svetlost–materija, kao i da ustanovimo na koje je načine moguće uticati na razmatrani sistem kako bi se željeni efekti pojačali, a neželjeni izbegli.

Prvi od pomenutog seta parametara jeste *efikasnost* sondirajućeg pulsa. U najkraćem, efikasnost predstavlja odnos

$$\eta(z) = \frac{W(z)}{W_{\text{in}}}, \quad (6.242)$$

pri čemu je

$$W_{\text{in}} = W(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |E_p(0, t)|^2 dt \quad (6.243)$$

energija (do na multiplikativni faktor koji se skrati) ulaznog pulsa, a

$$W(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |E_p(z, t)|^2 dt \quad (6.244)$$

energija pulsa na rastojanju z od ulaza u sredinu. Ukoliko nas interesuje efikasnost na mestu izlaska pulsa iz sredine, potrebno je u gornjim izrazima zameniti z sa dužinom uzorka D . U tom slučaju ćemo efikasnost najčešće pisati u obliku $\eta = W_{\text{out}}/W_{\text{in}}$, gde je $W_{\text{out}} = W(D)$.

Drugi po redu parametar od interesa je *vernost* sondirajućeg pulsa (engl. fidelity). Ova veličina kvantifikuje koliko je izlazni puls sličan ulaznom, tj. koliko je „veran originalu”. Definiše se za proizvoljno z na sledeći način:

$$\xi(z) = \frac{|S(z)|}{W_{\text{in}}}, \quad (6.245)$$

a vernost na samom izlazu iz sredine dobija se stavljanjem $z = D$, $\xi = \xi(D)$. U gornjem izrazu, veličina $S(z)$ definiše se na sledeći način:

$$S(z) = \int_{-\infty}^{\infty} E_p^* \left(0, t - \frac{z}{v_g} \right) E_p(z, t) dt, \quad (6.246)$$

i analogna je integralu prepokrivanja u kvantnoj mehanici. U prvom članu podintegralne funkcije, argument $t - z/v_g$ podrazumeva da smo ulazni puls „pomerili unapred” tako da mu se položaj maksimuma poklopi sa položajem maksimuma izlaznog pulsa.

Za potrebe definisanja naredna dva parametra, potražimo srednju vrednost n -tog stepena vremena:

$$\langle t^n \rangle = \frac{1}{W(z)} \int_{-\infty}^{\infty} t^n |E_p(z, t)|^2 dt. \quad (6.247)$$

Na primer, ukoliko je $n = 1$, dobićemo veličinu $\langle t \rangle$ koja će nam dati informaciju oko kog vremenskog trenutka je „lociran” puls. Sada možemo da definišemo standardnu devijaciju

$$\sigma(z) = \sqrt{\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2}, \quad (6.248)$$

koju ćemo, kada je $z = D$, poistovetiti sa (vremenskom) širinom izlaznog pulsa, tj. $\sigma_{\text{out}} = \sigma(D)$. Ako je širina pulsa na ulazu $\sigma_{\text{in}} = \sigma(0)$, relativnu širinu pulsa na rastojanju z definišemo kao

$$\delta(z) = \frac{\sigma(z)}{\sigma_{\text{in}}}. \quad (6.249)$$

Napomenimo da su veličine σ_{in} , σ_{out} i uopšte $\sigma(z)$ standardne devijacije *kvadrata modula* envelope sondirajućeg pulsa, a ne same envelope. Zbog toga će se ove veličine razlikovati od onih definisanih na početku ovog poglavlja. Konkretno, veza ovih veličina sa spektralnom širinom biće [103]:

$$\sigma(z) = \frac{1}{2w(z)}, \quad \sigma_{\text{in}} = \frac{1}{2w}, \quad \sigma_{\text{out}} = \frac{1}{2w_{\text{out}}}, \quad (6.250)$$

gde je $w(z)$ spektralna širina pulsa na rastojanju z , a $w_{\text{out}} = w(D)$. Ipak, činjenica da su pomenute veličine drugačije povezane sa spektralnom širinom od onih definisanih ranije neće imati nikakav uticaj na vrednost parametra $\delta(z)$, budući da nas interesuje samo njihov odnos. Radi kompletnosti, naglasimo da ćemo, na izlazu iz sredine, relativnu širinu pulsa zapisivati kao $\delta = \delta(D) = \sigma_{\text{out}}/\sigma_{\text{in}} = w/w_{\text{out}}$.

Na kraju, navedimo i poslednji od četiri parametara, koji smo zapravo već definisali i diskutovali. *Grupni indeks* sredine definišemo kao

$$n_g = \frac{c}{v_g}, \quad (6.251)$$

dok grupnu brzinu računamo pretpostavljajući da se karakteristike sredine ne menjaju sa vremenom, što nam omogućava da stavimo

$$v_g = \frac{D}{\langle t \rangle - t_0}. \quad (6.252)$$

Upravo zbog gorenavedene pretpostavke, neće biti potrebno da računamo $v_g(z)$ – pretpostavljaćemo da je u pitanju *konstantna* veličina dokle god je puls u sredini. Neke nadogradnje ovog tvrđenja razmatraćemo u Glavi 10, kada budemo govorili o skladištenju svetlosti.

Završimo ovaj odeljak navođenjem konkretnih vrednosti za ova četiri parametra u slučaju kada se efekti trećeg reda po frekvenciji u (6.199) mogu zanemariti. Dakle, apsorpcija i disperzija pulsa će postojati, ali će on zadržati Gausov profil. Pri računanju parametara, potrebno je iskoristiti relaciju (6.158) za profil ulaznog pulsa, odnosno (6.211) za envelope sondirajućeg pulsa na izlazu iz sredine. Ponovimo, dobijeni rezultati važe kada su oba lasera u rezonanciji sa odgovarajućim prelazima. Najpre, navedimo rezultat za energiju ulaznog pulsa:

$$W_{\text{in}} = \frac{E_{p0}^2}{w} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad (6.253)$$

da bismo, nakon nešto duže računice, za efikasnost u drugom redu dobili

$$\eta^{(2)}(z) = \frac{e^{-2az}}{\sqrt{1+4bw^2z}}, \quad (6.254)$$

dok ćemo za vernost imati

$$\xi^{(2)}(z) = \frac{\sqrt{2}e^{-az}}{\sqrt{2+4bw^2z}}. \quad (6.255)$$

Vidimo da oba izraza opadaju sa rastojanjem, efikasnost doduše nešto brže od vernosti, kao i da je ovo opadanje veće što su parametri a i b veći. Pored toga, ako je $a = b = 0$, biće $\eta^{(2)}(z) = \xi^{(2)}(z) = 1$, što je logično jer puls ne trpi nikakve gubitke i zadržava svoj oblik i širinu pri prostiranju kroz čitavu sredinu. Na kraju, za relativnu širinu izlaznog pulsa imamo

$$\delta^{(2)}(z) = \sqrt{1 + 4bw^2z}, \quad (6.256)$$

dok je grupni indeks jednostavno

$$n_g^{(2)} = c\kappa_1, \quad (6.257)$$

što je izraz koji smo već ranije dobili. Vidimo da se zaista dobija da grupni indeks ima konstantnu vrednost pri prostiranju svetlosti kroz sredinu, što je u skladu sa našom ranijom pretpostavkom (nema disperzije grupne brzine pulsa, oličene u efektima trećeg reda po ω). Sa druge strane, relativna širina, tj. trajanje pulsa se u toku propagacije povećava, i za to je odgovoran parametar b koji ukazuje na to da se radi o efektu drugog reda, sve u skladu sa dosadašnjom diskusijom. U velikom broju slučajeva od interesa, gornji izrazi će biti primenljivi, i biće jako značajni pri analizi kasnije dobijenih numeričkih rešenja MB jednačina.

6.4 Polaritoni tamnog stanja

U prethodnom poglavlju, data je detaljna analiza prostiranja sondirajućeg pulsa kroz materijalnu sredinu primenom metoda FT. Između ostalog, dobijeni analitički izrazi omogućili su nam da odredimo grupnu brzinu ovog pulsa, odakle smo videli da je, manipulacijom kontrolnim poljem, moguće drastično smanjiti ovu vrednost u odnosu na brzinu svetlosti u vakuumu. U ovom poglavlju, pokazaćemo da je analizu ovakve, spore svetlosti, moguće sprovesti i primenom formalizma polaritona tamnog stanja, koji se u literaturi najčešće i sreće [21, 22, 270]. Pomenutu analizu ćemo onda proširiti na objašnjenje efekta skladištenja svetlosti, što nije sasvim jednostavno moglo biti učinjeno u okviru metoda FT, jer sada veličina $\Omega_c(t)$ postaje vremenski zavisna. Takođe, treba reći da se ovaj formalizam u literaturi pretežno pojavljuje u situacijama kada se primenjuje pun kvantni pristup pri rešavanju problema interakcije svetlost–materija. Međutim, zaključci koji se pri tome dobijaju moći će da se izvedu i ukoliko se opredelimo za poluklasični pristup, koga smo se i do sada pridržavali [16]. Iz razloga konzistentnosti i jednostavnosti zapisa dobijenih jednačina, nastavićemo sa poluklasičnim tretmanom, mada ćemo u analizi dobijenih izraza koristiti neke termine karakteristične za pun kvantni pristup.

6.4.1 Polaritoni u zatvorenom sistemu sa tri nivoa

U ovoj disertaciji ćemo se prevashodno baviti skladištenjem svetlosti u zatvorenom sistemu sa tri nivoa, pa će formalizam „klasičnih” polaritona tamnog stanja biti prikazan i analiziran samo za ovu konfiguraciju. Dakle, jednačine koje opisuju interakciju dva laserska polja i materijalne sredine su (5.85)–(5.89), kao i propagaciona jednačina za sondirajuće polje (5.151), odnosno (6.175) u konciznijem zapisu. Propagacionu jednačinu za kontrolno polje nećemo koristiti, budući da ćemo smatrati da u ma kom trenutku vremena, kontrolna Rabijeva frekvencija u svakoj tački sredine ima istu vrednost. Ipak, ovde ćemo dozvoliti da se ta vrednost menja sa vremenom, $\Omega_c = \Omega_c(t)$, pri čemu ćemo pretpostaviti da je u pitanju realna veličina, $\Omega_c^* = \Omega_c$. Sondirajući laser uzećemo u formi pulsa,

čiji je oblik ponovo dat jednačinom (6.158), dok su preostali početni uslovi takođe nepromenjeni i dati su preko (6.1).

Kao što je u ovoj Glavi već rađeno, pretpostavićemo da važi $\Omega_p \ll \Omega_c$, što će nas dovesti do linearizovanih OB jednačina (6.169) i (6.170), koje jedine ostaju relevantne od svih jednačina iz polaznog sistema. Ako pritom odaberemo da radimo sa rezonantnim laserima ($\Delta_p = \Delta_c = 0$), ove jednačine će glasiti:

$$\dot{\rho}_{21} = i\Omega_p + i\Omega_c \rho_{31} - \lambda_{21} \rho_{21}, \quad (6.258)$$

$$\dot{\rho}_{31} = i\Omega_c \rho_{21} - \lambda_{31} \rho_{31}, \quad (6.259)$$

pri čemu oznake da se radi o prvom redu teorije perturbacija, kao i do sada, na dalje nećemo navoditi. U cilju dobijanja željenih rezultata, pretpostavićemo da su koeficijenti raspada dovoljno mali, tj. $\lambda_{21}, \lambda_{31} \ll \Omega_c$, tako da možemo da zanemarimo članove u kojima se pojavljuju. S obzirom na to da je Rabijeva kontrolna frekvencija sada vremenski zavisna veličina, napravićemo još jednu važnu pretpostavku – da se veličina $\Omega_c(t)$ *sporo menja* sa vremenom. U odeljku 2.3.3 je objašnjeno da ovakva promena jačine kontrolnog polja odgovara EIT memorijskom protokolu, u okviru koga se polarizaciona koherencija ρ_{21} adijabatski eliminiše. Napišimo eksplicitno ovaj tzv. *uslov adijabatičnosti*:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{21}(z, t) = 0, \quad (6.260)$$

i zamenimo ga u (6.258), na osnovu čega imamo

$$0 = i\Omega_p + i\Omega_c \rho_{31}, \quad (6.261)$$

odakle sledi da je

$$\rho_{31}(z, t) = -\frac{\Omega_p(z, t)}{\Omega_c(z, t)}. \quad (6.262)$$

Sa druge strane, iz jednačine (6.259), gde smo stavili $\lambda_{31} \approx 0$, dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{31} = i\Omega_c \rho_{21}, \quad (6.263)$$

odnosno

$$\rho_{21}(z, t) = -\frac{i}{\Omega_c(t)} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{31}(z, t), \quad (6.264)$$

gde smo ponovo eksplicitno naznačili da se radi o funkcijama prostorne i vremenske koordinate.

Zapišimo sada propagacionu jednačinu za sondirajuće polje na pogodan način. Krenimo od (6.175) i uvedimo veličinu

$$a_0 = \frac{N\omega_p |\mathbf{d}_{21}|^2}{\varepsilon_0 \hbar c \lambda_{31}} = \frac{2\mathcal{K}}{\lambda_{31}}, \quad (6.265)$$

što nas dovodi do izraza

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Omega_p(z, t) = i \frac{1}{2} a_0 \lambda_{31} \rho_{21}(z, t). \quad (6.266)$$

Veličina a_0 je uvedena zbog toga što se preko nje može izraziti *optička dubina* sredine:

$$OD = 2a_0D > 1, \quad (6.267)$$

gde D ponovo označava dužinu uzorka. Množenjem leve i desne strane jednačine (6.266) sa c dobijamo:

$$\left(c \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \Omega_p(z, t) = i \frac{1}{2} a_0 \lambda_{31} c \rho_{21}(z, t), \quad (6.268)$$

odnosno

$$\left(c \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \Omega_p(z, t) = iM \rho_{21}(z, t), \quad (6.269)$$

pri čemu smo uveli novu konstantu

$$M = \frac{N \omega_p |\mathbf{d}_{21}|^2}{2 \varepsilon_0 \hbar} = \frac{1}{2} a_0 \lambda_{31} c = \mathcal{K}c. \quad (6.270)$$

Ukoliko sada u (6.269) ubacimo izraz (6.264), nakon kraćeg sređivanja imaćemo

$$\left(c \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \Omega_p(z, t) = \frac{M}{\Omega_c(t)} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{31}(z, t). \quad (6.271)$$

Dobijena jednačina predstavlja polazni korak pri uvođenju polaritona tamnog stanja.

Definišimo „tamno polje” $\Omega_D(z, t)$ na sledeći način:

$$\Omega_D(z, t) = \cos \theta(t) \Omega_p(z, t) - \sin \theta(t) \sqrt{M} \rho_{31}(z, t), \quad (6.272)$$

gde je ugao mešanja $\theta(t)$ zadat kao

$$\cos \theta(t) = \frac{\Omega_c(t)}{\sqrt{\Omega_c^2(t) + M}}, \quad \sin \theta(t) = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{\Omega_c^2(t) + M}}, \quad \operatorname{tg} \theta(t) = \frac{\sqrt{M}}{\Omega_c(t)}, \quad (6.273)$$

i ne treba ga mešati sa uglovima θ definisanim preko (6.90) i (6.137). U terminologiji koja se javlja kod punog kvantnog pristupa, polje $\Omega_D(z, t)$ odgovara *polaritonu tamnog stanja*, i predstavlja superpoziciju *fotonske* komponente $\Omega_p(z, t)$ i *atomske* komponente $\sqrt{M} \rho_{31}(z, t)$, koja sadrži spinsku koherenciju ρ_{31} , sa koeficijentima datim pomoću ugla mešanja. Očigledno je da će ovi koeficijenti zavisiti kako od kontrolnog polja, tako i od karakteristika same sredine preko konstante M . Napomenimo, radi kompletnosti, da se u punom kvantnom pristupu javlja i tzv. *polariton svetlog stanja*, koji je povezan sa polarizacionom koherencijom ρ_{21} , ali koji se može eliminisati adijabatskom aproksimacijom (6.260) [22]. Takođe, kao što smo već napomenuli u odeljku 2.3.1, može se pokazati da ovako definisane kvazičestice imaju *bozonsku* prirodu [21]. Povratak na originalne funkcije $\Omega_p(z, t)$ i $\rho_{31}(z, t)$ moguće je ukoliko se iskoriste sledeće relacije:

$$\cos \theta(t) \Omega_D(z, t) = \Omega_p(z, t), \quad \sin \theta(t) \Omega_D(z, t) = -\sqrt{M} \rho_{31}(z, t). \quad (6.274)$$

Ovi izrazi dobijaju se kada se polariton tamnog stanja eksplicitno zapiše pomoću (6.272), zatim iskoriste izrazi (6.273) za uglove mešanja, kao i relacija (6.262). Odavde sledi da je

$$\Omega_p(z, t) = \cos \theta(t) \Omega_D(z, t), \quad (6.275)$$

$$\sqrt{M} \rho_{31}(z, t) = -\sin \theta(t) \Omega_D(z, t), \quad (6.276)$$

što su izrazi koji nam omogućavaju da, ukoliko znamo funkciju $\Omega_D(z, t)$, u svakoj tački prostora i trenutku vremena odredimo bilo fotonsku, bilo atomsku komponentu ovog polaritona.

Zamenom (6.275) i (6.276) u (6.271) dobićemo:

$$\left(c \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}\right) \cos \theta(t) \Omega_D(z, t) = \frac{M}{\Omega_c(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{\sqrt{M}} \sin \theta(t) \Omega_D(z, t)\right). \quad (6.277)$$

Koristeći osobine izvoda proizvoda dveju funkcija, treće jednačine u izrazu (6.273), kao i osnovne trigonometrijske relacije, nakon nešto duže računice ćemo konačno imati

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \cos^2 \theta(t) \frac{\partial}{\partial z}\right) \Omega_D(z, t) = 0. \quad (6.278)$$

Ova jednačina predstavlja propagacionu jednačinu za („klasični”) polariton tamnog stanja. Ukoliko je, kao ovde, sondirajuće polje dato u formi pulsa, onda će to važiti i za polariton tamnog stanja u celini. Vremenski zavisna veličina

$$v_g(t) = c \cos^2 \theta(t) = c \frac{\Omega_c^2(t)}{\Omega_c^2(t) + M} \quad (6.279)$$

predstavlja grupnu brzinu ovakvog pulsa, dok je rešenje propagacione jednačine moguće zapisati u obliku

$$\Omega_D(z, t) = \Omega_D \left(z - \int_0^t v_g(t') dt', t = 0\right), \quad (6.280)$$

odakle vidimo da puls zadržava svoj oblik pri čitavom kretanju kroz sredinu [16].

Grupna brzina (6.279) može zgodno da posluži pri analizi efekata koji nastaju usled usporavanja ili skladištenja svetlosti. Posmatrajmo, najpre, situaciju kada se svetlost kreće kroz vakuum. Ovo znači da je $N = 0$ jer nema atoma sredine, što implicira da je i $M = 0$, odnosno $v_g = c$, kako je i očekivano. Polariton tamnog stanja (6.272) se tada sastoji samo od fotonske komponente, $\Omega_D = \Omega_p$. Nasuprot tome, ukoliko je $N > 0$ ali $\Omega_c = 0$, dolazi do apsorpcije, odnosno „zarobljavanja” sondirajućeg polja u sredini. U ovom slučaju, postoji samo atomska komponenta, $\Omega_D = -\sqrt{M} \rho_{31}$, a grupna brzina je $v_g = 0$. Konačno, ukoliko je $\Omega_c \neq 0$, polariton će sadržati i fotonsku i atomsku komponentu, sa udelom koji direktno zavisi od vrednosti kontrolne Rabijeve frekvencije. Pri kretanju kroz sredinu, deo fotona iz sondirajućeg pulsa će se apsorbovati, čime se informacija koju oni nose prenosi na spinsku koherenciju ρ_{31} . Nakon toga, dolazi do reemisije fotona, zbog koje će puls imati određeno kašnjenje – grupna brzina pulsa će se smanjiti ($v_g < c$), što se vidi iz (6.279). Takođe, zahvaljujući izrazu (6.280), vidimo da će puls kroz sredinu, iako usporen, zadržati oblik koji je imao na ulazu u sredinu, odnosno kretaće se bez ikakvih gubitaka. Možemo primetiti da se, za $\lambda_{21}, \lambda_{31} \ll \Omega_c$, izraz (6.279) za grupnu brzinu poklapa sa izrazom (6.213), dobijenim primenom metoda FT i razvoja disperzione relacije u Tejlorov red po ω .

Kombinacijom dobijenih zaključaka možemo doći do objašnjenja efekta skladištenja svetlosti. Ukoliko se obezbedi adijabatska promena kontrolne Rabijeve frekvencije sa vremenom, sve relacije iz ovog odeljka će i dalje važiti. Odaberimo vremensku zavisnost $\Omega_c(t)$ na sledeći način [225]:

$$\Omega_c(t) = \frac{\Omega_{c0}}{2} (1 - \operatorname{tgh}(\alpha_1(t - t_1)) + 1 + \operatorname{tgh}(\alpha_2(t - t_2))), \quad (6.281)$$

gde je Ω_{c0} maksimalna vrednost kontrolne Rabijeve frekvencije, koju kontrolno polje ima u periodu $0 \leq t < t_1$. U trenutku t_1 , kontrolno polje se isključuje, pri čemu veličina α_1 predstavlja stopu

promene kontrolnog polja sa vremenom. Isključivanje kontrolnog polja nije naglo, već postepeno, u skladu sa uslovom adijabatičnosti. Ovom promenom, preostala fotonska komponenta potpuno prelazi u atomsku, čime informacija biva *uskladištena* (engl. storage) u sredini u formi spinske koherencije (ili atomske ekscitacije). U trenutku t_2 , dolazi do ponovnog uključivanja kontrolnog polja, koje se stopom α_2 povećava do vrednosti Ω_{c0} koju je imalo na početku. Tom prilikom dolazi do *povraćaja* informacije u vidu elektromagnetnog pulsa (engl. retrieval), koja iz spinske koherencije ponovo (delimično) prelazi u fotonski oblik. Koeficijenti α_1 i α_2 se biraju tako da obezbede adijabatsku promenu kontrolne Rabijeve frekvencije sa vremenom – veća vrednost ovih koeficijenata znači i naglije promene Ω_c . Na ovaj način je u atomskoj sredini moguće sačuvati željenu informaciju u toku vremena

$$t_s = t_2 - t_1, \quad (6.282)$$

koje se naziva *vreme skladištenja*. Skladištenje i povraćaj svetlosti predstavlja glavni mehanizam rada kvantnih memorija, pri čemu je EIT mehanizam samo jedan od fizičkih procesa koji mogu dovesti do ovakvog efekta. Zavisnost kontrolne Rabijeve frekvencije od vremena, data jednačinom (6.281), biće korišćena kod numeričkog rešavanja MB jednačina, a odgovarajući rezultati prikazani u Glavi 10. Za potrebe analitičkog rešavanja, međutim, uvešćemo izvesna uprošćavanja, za koja se može pokazati da sasvim zadovoljavajuće opisuju razmatrane probleme za širok opseg parametara.

6.4.2 Uticaj dekoherentnih procesa

Propagaciona jednačina za polariton tamnog stanja (6.278) ne odgovara opštoj situaciji kada se u razmatranje uključe dekoherentni procesi. Naime, ona je prikladna za razmatranje Λ konfiguracije, gde se za relevantne nivoe biraju metastabilna stanja uglavnom atoma u gasovima i parama, čiji se koeficijenti raspada mogu zanemariti [21, 22]. Ovo znači da spinska koherencija može da „čuva” informaciju uskladištenu u sredini veoma dugo vremena. U lestvičastoj konfiguraciji, međutim, kako polarizaciona, tako i spinska koherencija, imaće relativno kratka vremena života, što nameće izvesna ograničenja na proces skladištenja. Ova vremena života mogu se povećati (a koeficijenti raspada smanjiti) hlađenjem sredine do niskih temperatura, ili pogodnim biranjem atomske sredine tako da se obezbedi da nivo $|3\rangle$ bude dugoživeći. Ovo je, na primer, slučaj sa Ridbergovim atomima, gde je koeficijent raspada spinske koherencije takođe zanemarljiv [44, 270]. U ovom odeljku, modifikovaćemo jednačine iz prethodnog odeljka za slučaj kada se koeficijent raspada λ_{31} ne može zanemariti. Ovakva situacija odgovaraće fizičkim sistemima kojima ćemo se baviti u Delu III.

Dakle, u slučaju da λ_{31} nije zanemarljivo malo, u jednačini (6.259) ćemo morati da zadržimo član $\lambda_{31}\rho_{31}$. Napomenimo da smo u daljem radu ponovo izostavili član $\lambda_{21}\rho_{21}$ u jednačini (6.258), jer se može pokazati da koeficijent λ_{21} neće imati veliki uticaj na propagaciju svetlosti kroz sredinu. Analogna procedura kao u prethodnom odeljku dovodi nas do modifikovane propagacione jednačine za polariton tamnog stanja:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \cos^2 \theta(t) \frac{\partial}{\partial z} \right) \Omega_D(z, t) = -\lambda_{31} \sin^2 \theta(t) \Omega_D(z, t). \quad (6.283)$$

Vidimo da će se polariton ponovo prostirati kroz sredinu grupnom brzinom $v_g(t)$, datom izrazom (6.279), ali ovoga puta sa izvesnim gubicima koje određuje član sa desne strane znaka jednakosti gornje jednačine. U skladu sa tim, možemo uvesti vremenski zavisnu funkciju

$$\lambda(t) = \lambda_{31} \sin^2 \theta(t) = \lambda_{31} \frac{\sqrt{M}}{\Omega_c^2(t) + M}, \quad (6.284)$$

koja će nam dati meru raspada spinske koherencije, odnosno informaciju o gubicima u toku vremena, koji će ponovo biti određeni preko $\Omega_c(t)$. U disertaciji ćemo se praktično uvek sretati sa situacijom $M \gg \Omega_c^2$, odakle imamo $\lambda(t) \approx \lambda_{31}$, pa gubici neće zavisiti od vremena (iako grupna brzina, na primer, hoće). Uprošćena propagaciona jednačina sada glasi

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_g(t) \frac{\partial}{\partial z} \right) \Omega_D(z, t) = -\lambda_{31} \Omega_D(z, t), \quad (6.285)$$

pri čemu smo za grupnu brzinu iskoristili izraz (6.279). Ovo je polazna jednačina koju ćemo rešavati kako bismo dali analitičko objašnjenje skladištenja svetlosti, i povezali dobijene zaključke sa onima iz poglavlja 6.3, dobijenih primenom metoda FT.

6.4.3 Rešavanje propagacione jednačine u slučaju skladištenja

Skladištenje i povratak svetlosti realizuju se, dakle, isključivanjem i ponovnim uključivanjem kontrolnog polja. Za potrebe daljeg rada, pretpostavićemo da su brzine isključivanja i uključivanja jednake, tj. da važi $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Ova veličina treba da bude dovoljno velika da omogući potpuno gašenje kontrolnog polja u toku vremena skladištenja, odnosno dovoljno mala da bi obezbedila važenje uslova adijabatičnosti. Detaljnija analiza krive $\Omega_c(t)$, koja je data formulom (6.281), biće urađena u okviru Glave 10. Na ovom mestu ćemo samo ponoviti tvrđenje iz odeljka 6.4.1 da veća vrednost α znači bržu promenu kontrolne Rabijevе frekvencije, tako da ona za $\alpha \rightarrow \infty$ doživljava nagli pad u t_1 , a potom i skok u t_2 . U ovom odeljku, pretpostavićemo da je promena Ω_c sa vremenom upravo takva. Iako u kontradikciji sa uslovom adijabatičnosti, u Glavi 10 ćemo pokazati da čak i ovakva pretpostavka daje zadovoljavajuće rezultate za širok opseg situacija od interesa u ovoj disertaciji, a rešavanje jednačine (6.285) se u tom slučaju znatno pojednostavljuje [271, 272].

Grafički prikaz zavisnosti $\Omega_c(t)$ dat je na slici 6.3, za proizvoljne vrednosti parametara, kao i za $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Tačkasta zelena kriva predstavlja kontrolnu Rabijevu frekvenciju u slučaju najmanjeg α , isprekidana crvena linija odgovara situaciji kada je brzina isključivanja/uključivanja nešto veća, dok puna plava linija predstavlja slučaj kada je α jako veliko. Upravo je poslednji slučaj onaj na kome ćemo se zadržati u daljem radu. Štaviše, on nam omogućava da jasno odvojimo tri oblasti, što se matematički može izraziti kao:

$$\Omega_c(t) = \begin{cases} \Omega_{c0}, & t < t_1, t \geq t_2, \\ 0, & t_1 \leq t < t_2. \end{cases} \quad (6.286)$$

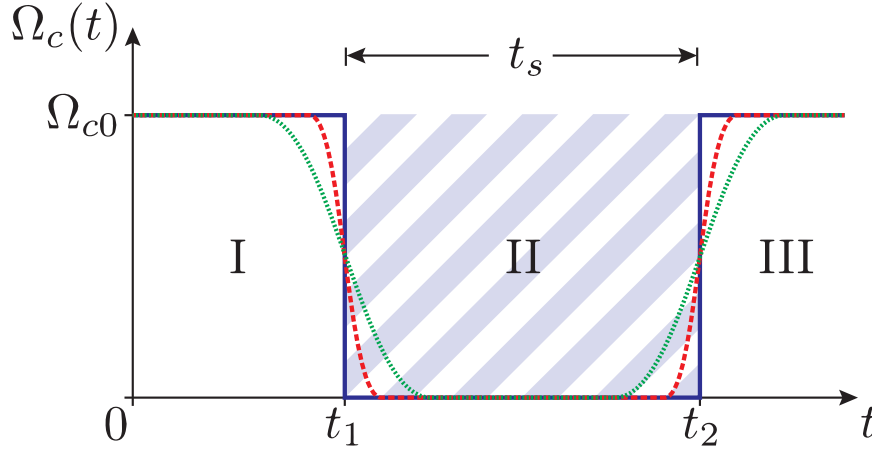
Dakle, dok je u oblastima I i III kontrolno polje uključeno i puls prolazi kroz sredinu, u oblasti II (plavo osenčeno područje) dolazi do skladištenja sondirajućeg pulsa i prevođenja informacije u spinsku koherenciju.

Sada možemo rešiti propagacionu jednačinu za polariton tamnog stanja za svaku od tri oblasti pojedinačno. Na početku, podsetimo se da za datu situaciju važe relacije

$$\Omega_p(0, t) = \Omega_{p0} e^{-w^2(t-t_0)^2}, \quad \rho_{31}(z, 0) = 0, \quad (6.287)$$

koje predstavljaju granični i početni uslov, respektivno. U oblasti I, kada je $\Omega_c(t) = \Omega_{c0}$, grupna brzina postaje konstantna veličina:

$$v_{g1} = c \frac{\Omega_{c0}^2}{\Omega_{c0}^2 + M} = v_g, \quad (6.288)$$



Slika 6.3: Vremenska zavisnost Rabijeve frekvencije kontrolnog polja u slučaju skladištenja svetlosti koje nastupa između t_1 i t_2 . Prikazana su tri slučaja u kojima je brzina isključivanja i ponovnog uključivanja kontrolnog polja različita. Za potrebe analitičkog rešavanja MB jednačina, pretpostavljamo naglu promenu Ω_c (plava linija).

pa će jednačina (6.285) dobiti oblik:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_g \frac{\partial}{\partial z} \right) \Omega_D(z, t) = -\lambda_{31} \Omega_D(z, t). \quad (6.289)$$

Upravo rešavanje ovakvog tipa propagacione jednačine prikazano je u Dodatku A.4. Međutim, kako je u našem slučaju puls na ulazu u sredinu centriran oko $t = t_0$, uvešćemo nešto drugačiju smenu promenljivih:

$$\zeta = z - v_g(t - t_0), \quad \tau = t - t_0, \quad (6.290)$$

nakon čega se, analognim postupkom kao u Dodatku A.4, za „tamno polje” u oblasti I dobija:

$$\Omega_D^I(z, t) = \Omega_D(z - v_g(t - t_0), t_0) e^{-\lambda_{31}(t - t_0)}. \quad (6.291)$$

Dobijeni rezultat se može prikazati na drugi, za našu problematiku nešto pogodniji način. Uvedimo novu promenljivu $z' = z - v_g(t - t_0)$, izrazimo veličine $t - t_0$ i t_0 preko nje, i vratimo dobijene izraze u (6.291). Pošto je grupna brzina konstantna, za $t < t_1$ važi da je $z = v_g(t - t_0)$, odakle vidimo da je zapravo $z' = 0$. Sada možemo konačno pisati:

$$\Omega_D^I(z, t) = \Omega_D\left(0, t - \frac{z}{v_g}\right) e^{-\lambda_{31} \frac{z}{v_g}}, \quad (6.292)$$

za polariton tamnog stanja u tački sa koordinatom z i trenutku vremena t u oblasti I.

U oblasti II, kada je kontrolno polje isključeno, grupna brzina postaje jednaka nuli:

$$v_{g2} = 0, \quad (6.293)$$

što znači da je informacija zarobljena u atomskoj sredini. Sada se propagaciona jednačina pojednostavljuje, i dobija oblik:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Omega_D(z, t) = -\lambda_{31} \Omega_D(z, t), \quad (6.294)$$

što se lako rešava, tako da ćemo imati

$$\Omega_D^{\text{II}}(z, t) = \Omega_D^{\text{I}}(z, t_1) e^{-\lambda_{31}(t-t_1)} = \Omega_D(z - v_g(t_1 - t_0), t_0) e^{-\lambda_{31}(t-t_0)}. \quad (6.295)$$

Prilikom dobijanja gornjeg izraza, imali smo u vidu da je za početni uslov pri nalaženju partikularnog rešenja diferencijalne jednačine (6.294) potrebno uzeti vrednost Ω_D u trenutku t_1 (z ostaje proizvoljno), tj. na granici između oblasti I i II. Nakon toga, iskorišćena je jednačina (6.291) kako bi se veličina $\Omega_D^{\text{I}}(z, t_1)$ zapisala eksplicitnije. Vidimo da se oblik envelope sa vremenom očuvava, ali postojanje eksponencijalno opadajućeg člana ukazuje na postojanje gubitaka usled efekata dekoherencije čak i u toku skladištenja. Na kraju, uvođenjem smene $z' = z - v_g(t_1 - t_0)$, gde je $v_g \equiv v_{g1}$, a potom i stavljanjem $z' = 0$ (jer je $z = z_1 = v_g(t_1 - t_0) = \text{const}$, zbog toga što u ovoj oblasti nema propagacije), možemo svesti gornju jednačinu na pogodniji oblik

$$\Omega_D^{\text{II}}(z, t) = \Omega_D \left(0, t_1 - \frac{z}{v_g} \right) e^{-\lambda_{31} \left(t - t_1 + \frac{z}{v_g} \right)}, \quad (6.296)$$

pri čemu se vrednost „tamnog polja” koja množi eksponencijalni član sa desne strane znaka jednakosti zapravo računa u oblasti I. Ovakav zapis nam omogućava da puls na izlazu iz sredine povežemo sa graničnim uslovom, tj pulsom na ulazu u sredinu, koji je dat prvom jednačinom u (6.287).

Na kraju, posvetimo pažnju i rešavanju propagacione jednačine za oblast III, tj. nakon ponovnog uključivanja kontrolnog lasera. Grupna brzina će sada biti

$$v_{g3} = c \frac{\Omega_{c0}^2}{\Omega_{c0}^2 + M} = v_g, \quad (6.297)$$

dakle imaćemo $v_{g1} = v_{g3} = v_g$. Zbog ovoga će jednačina koju treba rešiti ponovo biti (6.289), sa tom razlikom što će se promeniti početni uslov (on mora biti uzet na granici između oblasti II i III), kao i smena koju ćemo koristiti. Konkretno, sada ćemo imati

$$\zeta = z - v_g(t - t_2), \quad \tau = t - t_2, \quad (6.298)$$

što nam, pomoću procedure prikazane u Dodatku A.4, a potom i povratkom na stare promenljive, daje

$$\Omega_D^{\text{III}}(z, t) = \Omega_D^{\text{II}}(z - v_g(t - t_2), t_2) e^{-\lambda_{31}(t-t_2)} = \Omega_D(z - v_g(t - t_0 - t_s), t_0) e^{-\lambda_{31}(t-t_0)}, \quad (6.299)$$

gde smo $\Omega_D^{\text{II}}(z - v_g(t - t_2), t_2)$ izrazili pomoću (6.295), neznatno sredili izraz i iskoristili jednačinu (6.282). Pogodniji, alternativni zapis gornje jednačine dobićemo uvođenjem smene $z' = z - v_g(t - t_0 - t_s)$. Analogno kao u prethodna dva slučaja, zbog toga što je u oblasti III propagaciona koordinata data kao $z = v_g(t - t_0 - t_s)$, moći ćemo ponovo da stavimo $z' = 0$, što nam daje

$$\Omega_D^{\text{III}}(z, t) = \Omega_D \left(0, t - t_s - \frac{z}{v_g} \right) e^{-\lambda_{31} \left(\frac{z}{v_g} + t_s \right)}, \quad (6.300)$$

pri čemu se ponovo član koji množi eksponencijalnu funkciju odnosi na oblast I, što nam omogućava da ga povežemo sa postojećim graničnim uslovom. Pažljivim posmatranjem izraza (6.291), (6.295) i (6.299), vidimo da „jačina” polaritona ravnomerno opada sa vremenom, bilo da je puls uskladišten ili ne. Treba, doduše, naglasiti da u opštem slučaju opadanje neće biti ravnomerno, budući da je slabljenje u tom slučaju dato izrazom (6.284), gde ugao mešanja $\theta(t)$ nije isti u sve tri oblasti.

6.4.4 Povratak na sondirajuću Rabijevu frekvenciju i veza sa metodom FT

Sada je potrebno da se vratimo na Rabijevu frekvenciju sondirajućeg polja, za šta ćemo iskoristiti jednačinu (6.275), i to za svaku od tri oblasti. Krenimo, najpre, od prve oblasti, gde je ugao mešanja konstantna veličina, $\theta^I(t) = \theta_1 \equiv \theta$. Rezultat je

$$\Omega_p^I(z, t) = \cos \theta^I(t) \Omega_D^I(z, t) = \cos \theta \Omega_D \left(0, t - \frac{z}{v_g} \right) e^{-\lambda_{31} \frac{z}{v_g}}, \quad (6.301)$$

gde smo iskoristili jednačinu (6.292). Nađimo vezu između pulseva $\Omega_D(0, t - z/v_g)$ i $\Omega_p(0, t - z/v_g)$, koji praktično predstavljaju granične uslove. Ukoliko u gornji izraz stavimo $z = 0$, dobićemo $\Omega_p^I(0, t) = \cos \theta \Omega_D(0, t)$, što važi za svako $t < t_1$. Ovo implicira da je isti izraz validan i kada umesto t stavimo $t - z/v_g$, odnosno

$$\Omega_p^I \left(0, t - \frac{z}{v_g} \right) \equiv \Omega_p \left(0, t - \frac{z}{v_g} \right) = \cos \theta \Omega_D \left(0, t - \frac{z}{v_g} \right), \quad (6.302)$$

gde smo izostavili oznaku da se radi o sondirajućoj Rabijevoj frekvenciji u oblasti I. Zamenom ovog izraza u (6.301), konačno dobijamo

$$\Omega_p^I(z, t) = \Omega_p \left(0, t - \frac{z}{v_g} \right) e^{-\lambda_{31} \frac{z}{v_g}}, \quad (6.303)$$

za sondirajući puls u tački sa koordinatom z u trenutku $t < t_1$. Nakon toga, jasno je da će u drugoj oblasti ugao mešanja biti $\theta^{II}(t) = \theta_2 = \pi/2$, odakle lako vidimo da je

$$\Omega_p^{II}(z, t) = \cos \theta^{II}(t) \Omega_D^{II}(z, t) = 0, \quad (6.304)$$

što je potpuno u skladu sa činjenicom da se, isključenjem kontrolnog polja, puls potpuno apsorbuje u sredini. Na kraju, u oblasti III, imaćemo $\theta^{III}(t) = \theta_3 = \theta_1 \equiv \theta$, što nam daje

$$\Omega_p^{III}(z, t) = \cos \theta^{III}(t) \Omega_D^{III}(z, t) = \cos \theta \Omega_D \left(0, t - t_s - \frac{z}{v_g} \right) e^{-\lambda_{31} \left(\frac{z}{v_g} + t_s \right)}, \quad (6.305)$$

pri čemu smo iskoristili izraz (6.300). Kao i ranije, izraz koji množi eksponencijalni član sa desne strane drugog znaka jednakosti uzima se u oblasti I, što znači da za njega ponovo važi veza $\Omega_p^I(0, t) = \cos \theta \Omega_D(0, t)$ za svako t . Zamenom $t \rightarrow t - t_s - z/v_g$, dobićemo

$$\Omega_p^I \left(0, t - t_s - \frac{z}{v_g} \right) \equiv \Omega_p \left(0, t - t_s - \frac{z}{v_g} \right) = \cos \theta \Omega_D \left(0, t - t_s - \frac{z}{v_g} \right), \quad (6.306)$$

i konačno

$$\Omega_p^{III}(z, t) = \Omega_p \left(0, t - t_s - \frac{z}{v_g} \right) e^{-\lambda_{31} \left(\frac{z}{v_g} + t_s \right)}, \quad (6.307)$$

za sondirajuću Rabijevu frekvenciju u oblasti III.

Ukoliko se iskoristi granični uslov u (6.287), dobijeni rezultati se, uz neznatno sređivanje, mogu prepisati eksplicitnije:

$$\Omega_p^I(z, t) = \Omega_{p0} e^{-\lambda_{31} \frac{z}{v_g}} e^{-w^2 \left(t - t_0 - \frac{z}{v_g} \right)^2}, \quad (6.308)$$

$$\Omega_p^{II}(z, t) = 0, \quad (6.309)$$

$$\Omega_p^{III}(z, t) = \Omega_{p0} e^{-\lambda_{31} \frac{z+v_g t_s}{v_g}} e^{-w^2 \left(t - t_0 - \frac{z+v_g t_s}{v_g} \right)^2} = \Omega_p^I(z + v_g t_s, t). \quad (6.310)$$

Pored toga, ako iskoristimo relaciju $\Omega_p = d_{21}E_p/(2\hbar)$ da rezultate izrazimo preko jačine električnog polja sondirajućeg pulsa, rezultat će biti:

$$E_p^I(z, t) = E_{p0} e^{-\lambda_{31} \frac{z}{v_g}} e^{-w^2 \left(t - t_0 - \frac{z}{v_g} \right)^2}, \quad (6.311)$$

$$E_p^{II}(z, t) = 0, \quad (6.312)$$

$$E_p^{III}(z, t) = E_p^I(z + v_g t_s, t). \quad (6.313)$$

Povežimo, konačno, ove izraze za rezultatima koje smo dobili primenom metoda FT u odeljku 6.3.1. Ukoliko se ograničimo na spektralno dovoljno uske pulseve, tako da se njihova disperzija može zanemariti ($b \approx 0$), možemo u tom slučaju krenuti od izraza (6.211), koji će dobiti oblik

$$E_p^{(2)}(z, t) = E_{p0} e^{-az} e^{-w^2 \left(t - t_0 - \frac{z}{v_g} \right)^2}, \quad (6.314)$$

zbog toga što važi $E_{p0}'(z) \approx E_{p0} e^{-az}$ i $w'(z) \approx w$. Istovremeno, ako je w dovoljno malo, moći će da se zanemare i efekti trećeg i viših redova po frekvenciji, što je i razlog zbog koga smo rešenje MB jednačina zapisali u gornjem obliku. Pretpostavimo, takođe, da važi i $\lambda_{ij} \ll \Omega_{c0}$, slično onome što smo i ranije činili. Ukoliko se setimo da smo pretpostavili da su polja rezonantna i da je kontrolna Rabijeva frekvencija realna, i ako u prvu jednačinu u (6.213) zamenimo $\Omega_c \rightarrow \Omega_{c0}$, za grupnu brzinu ćemo imati

$$v_g = \frac{1}{\kappa_1} = \frac{c}{1 + \mathcal{K}c \frac{\Omega_{c0}^2 - \lambda_{31}^2}{(\Omega_{c0}^2 + \lambda_{21}\lambda_{31})^2}} \approx \frac{c}{1 + \frac{M}{\Omega_{c0}^2}} \approx \frac{c\Omega_{c0}^2}{M}, \quad (6.315)$$

gde je još iskorišćeno i da je $M = \mathcal{K}c$, kao i da je $M/\Omega_{c0} \gg 1$. Sa druge strane, ukoliko u (6.204) zamenimo $\Delta_p = \Delta_c = 0$ i iskoristimo gore uvedene pretpostavke, dobićemo

$$a = \mathcal{K} \frac{\lambda_{31}}{\Omega_{c0}^2 + \lambda_{21}\lambda_{31}} \approx \frac{M}{c} \frac{\lambda_{31}}{\Omega_{c0}^2} = \frac{\lambda_{31}}{v_g}, \quad (6.316)$$

pri čemu smo iskoristili i izraz (6.315) za grupnu brzinu pulsa. Zamenivši dobijeni izraz u (6.314), sledi da je

$$E_p^{(2)}(z, t) = E_p^I(z, t), \quad (6.317)$$

dakle imamo potpuno poklapanje dva metoda. Dobijena veza nam omogućava da nađemo vezu između formalizma polaritona tamnog stanja i metoda FT i u trećoj oblasti. Konačno, za envelopu električnog polja sondirajućeg pulsa na rastojanju z od ulaska u sredinu i u trenutku t , imaćemo

$$E_p(z, t) = \begin{cases} E_p^{(2)}(z, t), & t < t_1, \\ 0, & t_1 \leq t < t_2, \\ E_p^{(2)}(z + v_g t_s, t), & t_2 \leq t. \end{cases} \quad (6.318)$$

Dakle, dva metoda će se poklapati u slučaju jakih kontrolnih polja, rezonantnih lasera i spektralno uskih pulseva, kao i za $M \gg \Omega_c$. Kako će ovi uslovi u najvećem broju slučajeva od interesa u disertaciji biti zadovoljeni, to ćemo upravo izraz (6.318) koristiti kako bismo analitički opisali proces skladištenja [3]. Dobijena analitička rešenja ćemo porediti sa numeričkim rezultatima za poluprovodničku kvantnu tačku, prikazanim u Glavi 10. Na osnovu njih, moći ćemo da računamo relevantne parametre (efikasnost, vernost, grupni indeks i relativnu širinu) karakteristične za proces skladištenja, i donesemo neke bitne zaključke korišćenjem relativno jednostavnih analitičkih izraza.

6.5 Fazna modulacija kontrolnog polja

U svim dosadašnjim poglavljima, proučavane su situacije gde propagacija svetlosti zavisi od svojevrsnih „fiksni“ uslova. Konkretno, širine prozora transparentnosti, njihovi položaji, kao i položaji apsorpcionih maksimuma, odnosno minimuma unutar ovih prozora, dati su uslovima koji se ne menjaju sa vremenom. Na primer, u sistemu sa tri nivoa, maksimalna transparentnost se postiže kada je ispunjen uslov dvofotonske rezonancije, $\Delta_p + \Delta_c = 0$. U ovom poglavlju, pokazaćemo kako *fazno modulirano* kontrolno polje može da „relaksira“ pomenuti uslov [212, 214]. Preciznije, modulacija kontrolnog polja može da izazove periodično oscilovanje prozora transparentnosti u prostoru frekvencija, što će omogućiti da se kroz sredinu u različitim vremenskim trenucima mogu prostirati pulsevi sačinjeni od različitih spektralnih komponenti. Na ovaj način, moguće je osetno povećati efikasnost izlaznog pulsa, što je posebno izraženo u prisustvu spoljašnjeg magnetnog polja, koje narušava uslov dvofotonske rezonancije. Na ovom mestu, daćemo postavku problema i prikazaćemo postupak za dobijanje nekih elementarnih zaključaka koji važe za slučaj modulacije kontrolnog polja. Celokupnu računicu prikazaćemo, radi jednostavnosti, za zatvoren sistem sa tri nivoa.

6.5.1 Modulacija u zatvorenom sistemu sa tri nivoa

Hamiltonijan sistema svetlost–materija za sistem sa tri nivoa u slučaju kada nema degeneracije dat je jednačinom (5.54). Kao i ranije, dozvoljavamo da Rabijeva frekvencija sondirajućeg polja zavisi od prostorne i vremenske koordinate, $\Omega_p = \Omega_p(z, t)$, dok za kontrolno polje smatramo da mu je faza vremenski modulirana. Konkretno, za kontrolnu Rabijevu frekvenciju pretpostavljamo da na granici $z = 0$ ima oblik

$$\Omega_c(z = 0, t) = \Omega_{c0} e^{-i\varphi(t)}, \quad (6.319)$$

gde je Ω_{c0} realna konstanta, odakle se vidi da važi

$$|\Omega_c(t)|^2 = \Omega_{c0}^2 = \text{const.} \quad (6.320)$$

Takođe, zanemarićemo reakciju sredine na kontrolno polje, tj. pretpostavićemo da je $\Omega_c(t)$ zadata izrazom (6.319) u *svakoj* tački prostora unutar materijalne sredine. Sa druge strane, razmatraćemo situaciju u kojoj faza osciluje sa vremenom po zakonu:

$$\varphi(t) = M \sin(\Omega t), \quad (6.321)$$

gde je M modulacioni indeks, a Ω modulaciona frekvencija.¹³ Može se pokazati da važi relacija

$$e^{-i\varphi(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Omega t} J_n(-M), \quad (6.322)$$

gde su J_n Beselove funkcije. Fazna modulacija definisana na ovaj način odgovara *polihromatskom* kontrolnom polju, u kome je amplituda komponente frekvencije $n\Omega$ srazmerna veličini $J_n(-M)$.

¹³Podsetimo da su istim oznakama označene veličine date relacijama (6.270) i (6.133), respektivno. Međutim, s obzirom na to da je tematika ovog poglavlja na svojevrsan način „raspregnuta“ od računice sprovedene u prethodnim poglavljima, preplitanja ovih veličina u daljem radu ne bi trebalo da bude, i uvek će biti jasno sa kojim veličinama se u datom slučaju radi.

Međutim, za razliku od uobičajenih polihromatskih lasera, čiji intenzitet osciluje nekom karakterističnom frekvencijom, ovde nam jednačina (6.320) pokazuje da se radi o polihromatskom laseru *konstantnog* intenziteta [212].

MB jednačine koje u ovom slučaju treba rešiti su (5.85)–(5.89), dopunske relacije (5.80) i (5.81), kao i propagaciona jednačina za sondirajuće polje (5.151) (gornja pretpostavka da je kontrolno polje isto u svakoj tački prostora znači da nema potrebe rešavati propagacionu jednačinu za ovo polje). Ukoliko iskoristimo još i (6.319) i (6.321), kao i početne i granične uslove (6.1) i (6.158), respektivno, možemo ove jednačine rešiti numerički i dobiti vremenski profil sondirajućeg pulsa na izlazu iz sredine. Za potrebe teorijske analize, na ovom mestu ćemo navesti neke važne korake prilikom analitičkog računanja, koji će nam pomoći da damo precizne fizičke interpretacije procesa koji se odvijaju u sistemu svetlost–materija sa fazno moduliranim kontrolnim poljem.

Prepišimo, sada, hamiltonijan (5.54), nakon što u njega ubacimo relaciju (6.319). Rezultat je

$$H = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_p^* & 0 \\ -\Omega_p & \Delta_p & -\Omega_{c0}e^{i\varphi(t)} \\ 0 & -\Omega_{c0}e^{-i\varphi(t)} & \Delta_p + \Delta_c \end{pmatrix}. \quad (6.323)$$

Transformišimo dobijeni operator pomoću unitarne transformacije

$$U'' = I + e^{i\varphi(t)S_{33}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi(t)} \end{pmatrix}, \quad (6.324)$$

što će biti izvršeno pomoću poznate relacije

$$H' = i\hbar \frac{dU''}{dt} U''^\dagger + U'' H U''^\dagger. \quad (6.325)$$

Na osnovu (6.324) možemo dobiti preostale veličine koje se pojavljuju u gornjem izrazu:

$$\frac{dU''}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\frac{d\varphi}{dt}e^{i\varphi(t)} \end{pmatrix}, \quad U''^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\varphi(t)} \end{pmatrix}. \quad (6.326)$$

Nakon izvršenog matičnog množenja, za transformisani hamiltonijan dobijamo sledeći izraz:

$$H' = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_p^* & 0 \\ -\Omega_p & \Delta_p & -\Omega_{c0} \\ 0 & -\Omega_{c0} & \Delta_p + \Delta_c - \frac{d\varphi}{dt} \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_p^* & 0 \\ -\Omega_p & \Delta_p & -\Omega_{c0} \\ 0 & -\Omega_{c0} & \Delta_p + \delta_c(t) \end{pmatrix}, \quad (6.327)$$

gde je *vremenski zavisna* kontrolna razdešenost $\delta_c(t)$ definisana pomoću relacije

$$\delta_c(t) = \Delta_c - \frac{d\varphi}{dt} = \Delta_c - M\Omega \cos(\Omega t). \quad (6.328)$$

Vidimo da se u ovom izrazu pojavljuje prvi izvod faze kontrolnog polja po vremenu, što odgovara frekvenciji. Može se reći da se ovako zadata fazna modulacija manifestuje kao *modulacija frekvencije* kontrolnog polja ω_c sa amplitudom $M\Omega$ u „korotirajućem” bazu, na koji se prelazi transformacijom U'' . Takođe, umesto dosadašnjeg uslova $\Delta_p + \Delta_c = 0$, za minimum apsorpcije unutar prozora transparentnosti važi sledeća vremenski zavisna relacija:

$$\Delta_p + \delta_c(t) = 0, \quad (6.329)$$

odnosno

$$\Delta_p + \Delta_c = M\Omega \cos(\Omega t). \quad (6.330)$$

Dakle, u slučaju modulacije, prozor transparentnosti *osciluje* oko $\Delta_p + \Delta_c = 0$, sa frekvencijom Ω i amplitudom $M\Omega$ [212]. Ovo znači da će sondirajući puls moći da prođe kroz sredinu samo u onim trenucima kada se nađe unutar prozora transparentnosti, s obzirom na to da će se koeficijent transparentnosti periodično menjati. Sa druge strane, ukoliko se, na primer, u spoljašnjem magnetnom polju, apsorpcioni pikovi pomere tako da se jedan od njih „poklopi” sa sondirajućim pulsom, modulacija kontrolnog polja može da obezbedi prolazak ovog pulsa kroz sredinu sa znatno umanjenom apsorpcijom. Dobijeni zaključci mogu biti od velikog značaja u oblasti optičkih telekomunikacija i procesiranja signala.

6.5.2 Primena metoda Furijeove transformacije

MB jednačine za sistem od interesa mogu se zapisati i u „korotirajućem” bazisu. Transformisani hamiltonijan dat je relacijom (6.327), gde vidimo da se on poklapa sa polaznim hamiltonijanom (5.54), gde se stavi $\Omega_c \rightarrow \Omega_{c0}$ i $\Delta_c \rightarrow \delta_c(t)$. Sa druge strane, lako se može pokazati da se matrica gustine pod dejstvom unitarne transformacije (6.324) transformiše kao

$$\rho' = U'' \rho U''^\dagger = \rho, \quad (6.331)$$

dakle matrični elementi ρ_{ij} će biti isti u oba bazisa. Imajući ovo u vidu, kao i izvođenje sprovedeno u odeljku 5.3.1, za OB jednačine ćemo dobiti:

$$\dot{\rho}_{11} = i \left(\Omega_p^* \rho_{21} - \Omega_p \rho_{12} \right) + \lambda_{22}^{(1)} \rho_{22} + \lambda_{33}^{(1)} \rho_{33}, \quad (6.332)$$

$$\dot{\rho}_{21} = i \Omega_p (\rho_{11} - \rho_{22}) + i \Omega_{c0} \rho_{31} - (i \Delta_p + \lambda_{21}) \rho_{21}, \quad (6.333)$$

$$\dot{\rho}_{31} = i \Omega_{c0} \rho_{21} - i \Omega_p \rho_{32} - (i(\Delta_p + \delta_c(t)) + \lambda_{31}) \rho_{31}, \quad (6.334)$$

$$\dot{\rho}_{32} = i \Omega_{c0} (\rho_{22} - \rho_{33}) - i \Omega_p^* \rho_{31} - (i \delta_c(t) + \lambda_{32}) \rho_{32}, \quad (6.335)$$

$$\dot{\rho}_{33} = i \Omega_{c0} (\rho_{23} - \rho_{32}) - \lambda_{33} \rho_{33}. \quad (6.336)$$

Zbog toga što je intenzitet kontrolnog polja konstantan i u slučaju modulacije, moguće je uvesti pretpostavku $\Omega_p \ll \Omega_{c0}$ u svim trenucima vremena, što nam omogućava da linearizujemo gornje jednačine. Analogno već sprovedenoj proceduri, ovo dovodi do raspredanja jednačina za ρ_{21} i ρ_{31} , koje ćemo ovde jedino i navesti:

$$\dot{\rho}_{21} = i \Omega_p + i \Omega_{c0} \rho_{31} - (i \Delta_p + \lambda_{21}) \rho_{21}, \quad (6.337)$$

$$\dot{\rho}_{31} = i \Omega_{c0} \rho_{21} - \left(i \left(\Delta_p + \Delta_c - \frac{d\varphi}{dt} \right) + \lambda_{31} \right) \rho_{31}, \quad (6.338)$$

izostavljajući oznake da se radi o prvom redu teorije perturbacija i koristeći relaciju (6.328).

Metod FT se na gornje jednačine može primeniti analogno proceduri u poglavlju 6.3 [214]. Za nalaženje Furijeove transformacije ovih jednačina, koristeći relacije (6.160) i (6.162), potrebno je pomnožiti levu i desnu stranu jednačina sa $e^{i\omega t}$, a potom izvršiti integraciju po vremenu. Za sve članove osim jednog možemo iskoristiti relacije date u jednačini (6.163), i dobiti poznate izraze.

Jedini novi član za koji je potrebno naći Furijeovu transformaciju je član koji sadrži izvod faze po vremenu. Za njega ćemo imati

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi}{dt} \rho_{31}(z, t) e^{i\omega t} dt &= M\Omega \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{31}(z, t) \cos(\Omega t) e^{i\omega t} dt \\
&= M\Omega \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{31}(z, t) \frac{e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}}{2} e^{i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{2} M\Omega \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{31}(z, t) e^{i(\omega+\Omega)t} dt + \frac{1}{2} M\Omega \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{31}(z, t) e^{i(\omega-\Omega)t} dt \\
&= \frac{1}{2} M\Omega \tilde{\rho}_{31}(z, \omega + \Omega) + \frac{1}{2} M\Omega \tilde{\rho}_{31}(z, \omega - \Omega), \tag{6.339}
\end{aligned}$$

gde smo iskoristili eksplicitni izraz za $d\varphi/dt$, zatim poznati Ojlerov identitet, i na kraju (6.163). Imajući ovaj rezultat u vidu, jednačine (6.337) i (6.338) dobijaju oblik:

$$-i\omega \tilde{\rho}_{21}(\omega) = i\tilde{\Omega}_p(\omega) + i\Omega_{c0} \tilde{\rho}_{31}(\omega) - \Lambda_{21} \tilde{\rho}_{21}(\omega), \tag{6.340}$$

$$-i\omega \tilde{\rho}_{31}(\omega) = i\Omega_{c0} \tilde{\rho}_{21}(\omega) - \Lambda_{31} \tilde{\rho}_{31}(\omega) + \frac{i}{2} M\Omega \tilde{\rho}_{31}(\omega + \Omega) + \frac{i}{2} M\Omega \tilde{\rho}_{31}(\omega - \Omega), \tag{6.341}$$

gde je pisanje eksplicitne zavisnosti od z ponovo izostavljeno, ali je zadržana zavisnost od ω , i gde su ponovo uvedene veličine Λ_{21} i Λ_{31} preko (6.25) i (6.26), respektivno.

Već na prvi pogled se može uočiti da su dobijene jednačine znatno teže za rešavanje od jednačina (6.171) i (6.172), dobijenih za slučaj bez modulacije, zbog pojave članova $\tilde{\rho}_{31}(\omega \pm \Omega)$. Rešavanje ovih jednačina svešće se na rešavanje matricne jednačine za nalaženje $\tilde{\rho}_{31}(\omega)$. Da bismo ovo sproveli u delo, izrazimo najpre $\tilde{\rho}_{21}(\omega)$ preko jednačine (6.340):

$$\tilde{\rho}_{21}(\omega) = \frac{i\tilde{\Omega}_p(\omega) + i\Omega_{c0} \tilde{\rho}_{31}(\omega)}{-i\omega + \Lambda_{21}}, \tag{6.342}$$

a potom dobijeni izraz zamenimo u (6.341). Nakon nešto dužeg sređivanja izraza, dobijamo

$$\left(\Omega_{c0}^2 + (\Lambda_{31} - i\omega)(\Lambda_{21} - i\omega) \right) \tilde{\rho}_{31}(\omega) - \frac{i}{2} M\Omega (\Lambda_{21} - i\omega) (\tilde{\rho}_{31}(\omega + \Omega) + \tilde{\rho}_{31}(\omega - \Omega)) = -\Omega_{c0} \tilde{\Omega}_p(\omega). \tag{6.343}$$

Kako bismo rešili ovu jednačinu, *diskretizujemo* prostor frekvencija na sledeći način. Najpre, primećimo da je opseg frekvencija $(-\infty, \infty)$ praktično u svim slučajevima od interesa moguće svesti na interval $(-\omega_0, \omega_0)$, gde je ω_0 neka pogodno izabrana vrednost. Ovo se može opravdati činjenicom da gotovo uvek radimo sa pulsevima koji su lokalizovani u malom delu frekventnog prostora, kao i da je prozor transparentnosti uvek konačne širine, budući da su kontrolna polja koja koristimo, iako jaka, i dalje konačnog intenziteta.

Ovakav prostor frekvencija se, dakle, može predstaviti u vidu mreže sa $2N + 1$ čvorova, pa ćemo proizvoljnu frekvenciju $\omega \in (-\omega_0, \omega_0)$ sada zapisivati u diskretnoj formi:

$$\omega \rightarrow \omega_j = j\Delta\omega, \quad j = -N, -N+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N, \quad \Delta\omega = \frac{\omega_0}{N}. \tag{6.344}$$

U skladu sa tim, nepoznate funkcije frekvencije $\tilde{\rho}_{31}(\omega)$ i $\tilde{\Omega}_p(\omega)$ će biti

$$\tilde{\rho}_{21}(\omega) \rightarrow \tilde{\rho}_{21}(\omega_j) \equiv \tilde{\rho}_{21}^j, \quad \tilde{\rho}_{31}(\omega) \rightarrow \tilde{\rho}_{31}(\omega_j) \equiv \tilde{\rho}_{31}^j, \quad \tilde{\Omega}_p(\omega) \rightarrow \tilde{\Omega}_p(\omega_j) \equiv \tilde{\Omega}_p^j, \tag{6.345}$$

što će jednačinu (6.343) svesti na diskretan oblik:

$$\left(\Omega_{c0}^2 + (\Lambda_{31} - i\omega_j)(\Lambda_{21} - i\omega_j)\right) \tilde{\rho}_{31}^j - \frac{i}{2} M\Omega(\Lambda_{21} - i\omega_j) \left(\tilde{\rho}_{31}^{j+n} + \tilde{\rho}_{31}^{j-n}\right) = -\Omega_{c0} \tilde{\Omega}_p^j, \quad (6.346)$$

gde je $\Omega = n\Delta\omega$. Definišimo sada sledeće matrice kolone, dimenzija $(2N+1) \times 1$:

$$\tilde{\rho}_{21} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{21}^{-N} \\ \tilde{\rho}_{21}^{-N+1} \\ \vdots \\ \tilde{\rho}_{21}^{N-1} \\ \tilde{\rho}_{21}^N \end{pmatrix}, \quad \tilde{\rho}_{31} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{31}^{-N} \\ \tilde{\rho}_{31}^{-N+1} \\ \vdots \\ \tilde{\rho}_{31}^{N-1} \\ \tilde{\rho}_{31}^N \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Omega}_p = \begin{pmatrix} \tilde{\Omega}_p^{-N} \\ \tilde{\Omega}_p^{-N-1} \\ \vdots \\ \tilde{\Omega}_p^{N-1} \\ \tilde{\Omega}_p^N \end{pmatrix}. \quad (6.347)$$

Na osnovu ovoga, jednačina (6.346) se može zapisati u matričnom obliku:

$$\mathcal{A}(\omega) \tilde{\rho}_{31} = -\Omega_{c0} \tilde{\Omega}_p, \quad (6.348)$$

gde je $\mathcal{A}(\omega)$ nesingularna matrica dimenzija $(2N+1) \times (2N+1)$, čiji eksplicitan oblik izlazi iz okvira disertacije i ovde ga nećemo navoditi.¹⁴ Na osnovu toga, za matricu kolonu koja sadrži elemente $\tilde{\rho}_{31}^j$ imamo

$$\tilde{\rho}_{31} = -\Omega_{c0} \mathcal{A}^{-1}(\omega) \tilde{\Omega}_p. \quad (6.349)$$

Dobijeni izraz možemo zameniti u jednačinu (6.342) koja u matričnoj formi dobija oblik:

$$\tilde{\rho}_{21} = \mathcal{L}(\omega) \tilde{\Omega}_p + \Omega_{c0} \mathcal{L}(\omega) \tilde{\rho}_{31}, \quad (6.350)$$

gde je $\mathcal{L}(\omega)$ kvadratna matrica dimenzija $(2N+1) \times (2N+1)$, sa nenultim elementima $i/(\Lambda_{21} - i\omega_j)$ u j -toj vrsti i j -toj koloni. Na osnovu ovoga dobijamo

$$\tilde{\rho}_{21} = \mathcal{L}(\omega) \left(I - \Omega_{c0}^2 \mathcal{A}^{-1}(\omega) \right) \tilde{\Omega}_p, \quad (6.351)$$

gde je sa I označena jedinična matrica dimenzija $(2N+1) \times (2N+1)$.

Jedina preostala MB jednačina koja do sada nije bila navedena jeste propagaciona jednačina za sondirajuće polje. Primenom FT, za ovu jednačinu se ponovo dobija jednačina (6.176), koju ćemo ovde prepisati tako da se vidi eksplicitna zavisnost od frekvencije, ali i od propagacione koordinate:

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{\Omega}_p(z, \omega) - \frac{\omega}{c} \tilde{\Omega}_p(z, \omega) = i\mathcal{K} \tilde{\rho}_{21}(z, \omega). \quad (6.352)$$

Ukoliko ovu jednačinu diskretizujemo po frekvenciji, pri čemu dozvoljavamo da z ostane kontinualna promenljiva, imaćemo

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{\Omega}_p^j(z) - \frac{\omega_j}{c} \tilde{\Omega}_p^j(z) = i\mathcal{K} \tilde{\rho}_{21}^j(z), \quad (6.353)$$

odnosno, u matričnoj formi,

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{\Omega}_p(z) - C(\omega) \tilde{\Omega}_p(z) = i\mathcal{K} \tilde{\rho}_{21}(z), \quad (6.354)$$

¹⁴Napomenimo samo da se matrica $\mathcal{A}(\omega)$ sastoji od elemenata na glavnoj dijagonali, kao i na malim dijagonalama koje se nalaze n mesta iznad, odnosno ispod glavne dijagonale, dok su preostali elementi jednaki nuli. U ovoj, a i u kasnije definisanim matricama, osim poznatih konstanti, figurisaće i vrednosti frekvencije u čvorovima, ω_j .

gde kvadratna matrica $C(\omega)$ dimenzija $(2N+1) \times (2N+1)$ ima nenulte elemente ω_j/c , raspoređene po glavnoj dijagonali. Ubacivanjem (6.351) u gornji izraz, i neznatnim preuređivanjem, dobijamo jednačinu

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{\mathbf{\Omega}}_p(z) = \mathcal{B}(\omega) \tilde{\mathbf{\Omega}}_p(z), \quad (6.355)$$

pri čemu je

$$\mathcal{B}(\omega) = C(\omega) + i\mathcal{KL}(\omega) \left(I - \Omega_{c_0}^2 \mathcal{A}^{-1}(\omega) \right) \quad (6.356)$$

nova kvadratna matrica dimenzija $(2N+1) \times (2N+1)$. Konačno, rešavanjem (6.355) dobijamo

$$\tilde{\mathbf{\Omega}}_p(z) = \tilde{\mathbf{\Omega}}_p(0) e^{i\mathcal{B}(\omega)z}, \quad (6.357)$$

što nam daje spektralni profil sondirajućeg pulsa u tački prostora sa koordinatom z , ukoliko je poznat ovaj profil na ulasku u sredinu, tj. u $z = 0$. Vremenski profil ovog pulsa se, naravno, dobija primenom inverzne FT (6.161), s tom razlikom što ćemo umesto integrala sada koristiti sumu, budući da smo u međuvremenu prešli na diskretne promenljive.

U daljem radu, kao što smo na početku poglavlja i napomenuli, MB jednačine za sistem sa tri nivoa i fazno modulisanim kontrolnim poljem rešavali smo numerički, pomoću metoda izloženih u Dodatku C. Iako metod FT dalje nećemo primenjivati na konkretne probleme od interesa u disertaciji, smatrali smo da ovaj odeljak može da doprinese boljem razumevanju efekata koji se javljaju kao posledica modulacije kontrolnog polja, kao i da pruži smernice za dalji rad na ovom polju. Na ovom mestu prikazana je samo ilustracija pomenutog metoda, pri čemu se u literaturi mogu naći detaljniji rezultati u vezi sa diskutovanom problematikom [212–214].

7 Ispitivanje energijske strukture sferne kvantne tačke

U prethodne dve glave bavili smo se izvođenjem i rešavanjem Maksvel-Blohovih jednačina za sistem svetlost–materija, koji se sprežu tako da čine neku od tri lestvičaste konfiguracije od interesa u ovoj disertaciji. Ova procedura izvršena je bez konkretnog odabira materijalne sredine sa kojom elektromagnetno polje interaguje, pa ju je moguće primeniti kako na atomske gasove i pare, tako i na čvrsta tela. Ipak, sada ćemo pažnju posvetiti konkretnom fizičkom sistemu. Kao što je već napomenuto, predmet proučavanja ove disertacije je interakcija laserskih polja sa sredinom sačinjenom od poluprovodničkih *sfernih* kvantnih tačaka. Kvantne tačke, odnosno „veštački atomi”, odlikuju se diskretnom energijskom strukturom, za čije opisivanje ćemo koristiti oznake analogne onima za slobodan atom vodonika. Željene konfiguracije energijskih nivoa moći će da budu realizovane odabirom pogodnih energijskih nivoa kvantne tačke, odnosno polarizacije i frekvencije sondirajućeg, kontrolnog i dodatnog elektromagnetnog talasa. U ovoj glavi, biće predstavljena procedura za određivanje energija i talasnih funkcija sferne kvantne tačke u homogenom stacionarnom magnetnom polju, kao i drugih fizičkih veličina od interesa, pre svega matičnih elemenata operatora električnog dipolnog momenta.

7.1 Hamiltonijan sferne kvantne tačke

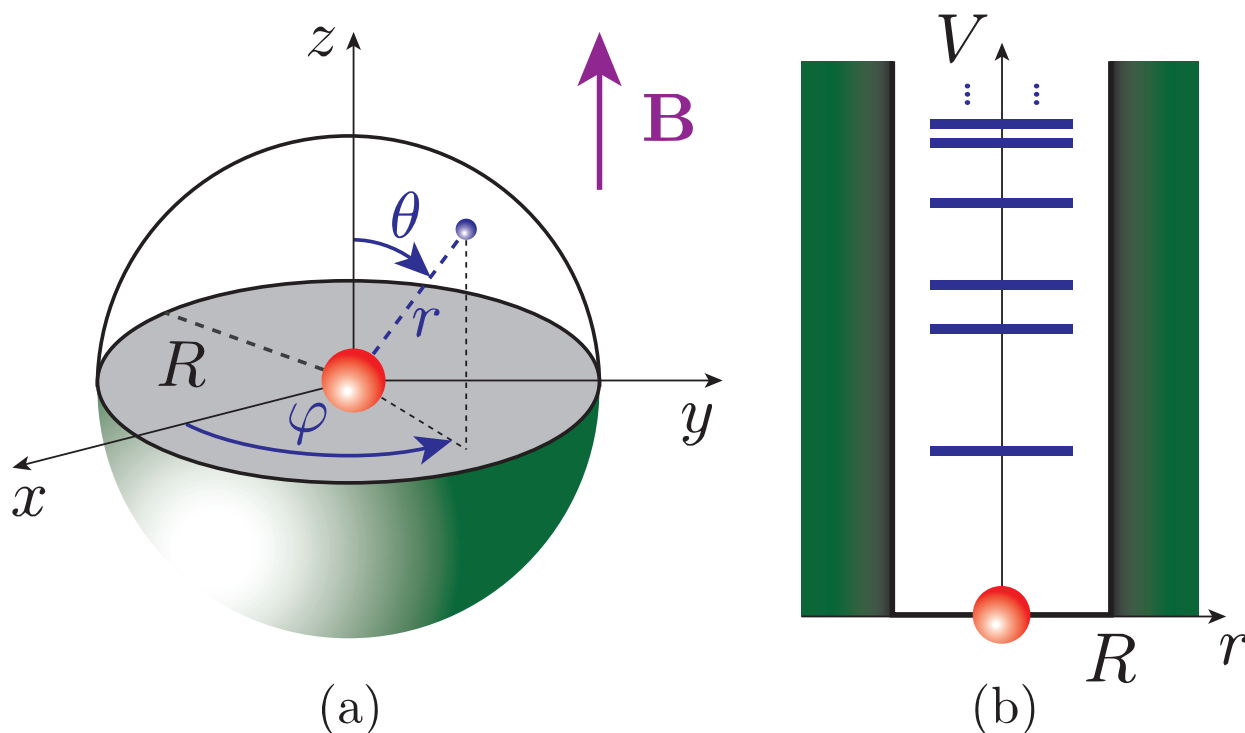
Na samom početku, uvedimo odgovarajuću notaciju i prodiskutujemo postavku problema. Kao što je ranije nagovešteno, pretpostavljamo da se materijalna sredina sastoji od velikog broja *identičnih* kvantnih tačaka.¹ U Glavi 3 objašnjen je način dobijanja kvantnih tačaka koje ovde razmatramo – jedan poluprovodnik „uronjen” je u drugi, pri čemu razlika u širinama njihovih zabranjenih zona stvara *potencijal konfiniranja* $V(\mathbf{r})$ koji ograničava kretanje nosilaca naelektrisanja unutar kvantne tačke. U našem slučaju, od interesa će biti kvantne tačke sfernog oblika, što je ekvivalentno činjenici da je potencijal konfiniranja sferno simetričan, $V(\mathbf{r}) = V(r)$. Pored toga, pretpostavićemo i da se ovaj potencijal konfiniranja može modelovati *sferom sa beskonačno visokim zidovima*. Drugim rečima, smatraćemo da se čestice unutar kvantne tačke nalaze u beskonačno dubokoj potencijalnoj jami. Matematički će ovo biti izraženo pomoću izraza

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & r < R, \\ \infty, & r \geq R, \end{cases} \quad (7.1)$$

gde je R poluprečnik kvantne tačke. U praksi se ovo može ostvariti kada je razlika između širina zabranjenih zona dva poluprovodnička materijala veoma velika, ili kada se poluprovodni materijal

¹ Uslov da su kvantne tačke identične potreban je kako bismo uveli formalizam matrice gustine za kvantni sistem koji predstavlja materijalna sredina, na sličan način kao što bismo to uradili za sredinu (gas) sačinjenu od jednog tipa atoma.

„uroni” u *dielektrik* – koji svakako poseduje daleko veću širinu zabranjene zone od ma kog poluprovodnika. Kao što je već pomenuto u poglavlju 3.2, u praksi je ovo moguće realizovati na više načina, pri čemu se sferno-simetrični potencijal konfiniranja pre svega može ostvariti u samosastavljenim kvantnim tačkama (nastalih samoorganizovanih narastanjem kristala), a posebno koloidnom sintezom, što predstavlja i najčešći način za dobijanje SKT. Naravno, celokupna procedura koja će biti sprovedena u ovom i narednom poglavlju može da se primeni na SKT nezavisno od eksperimentalne tehnike za njihovu realizaciju, pri čemu one čak ne moraju nužno biti poluprovodničke.



Slika 7.1: (a) Šematski prikaz sferne kvantne tačke sa vodoničnom nečistoćom u spoljašnjem stacionarnom magnetnom polju – crveni krug predstavlja jezgro atoma vodonika, a plavi krug njegov elektron. (b) Šema energijskog dijagrama sferne kvantne tačke – jezgro atoma vodonika (crveni krug) konfinirano je unutar potencijala beskonačno duboke sferno simetrične jame, kao i elektron, koji se može naći na nekom od *diskretnih* energijskih nivoa unutar kvantne tačke (plave linije).

Kako imamo posla sa identičnim kvantnim tačkama, biće dovoljno da se ograničimo samo na jednu od njih. Posmatraćemo SKT sa vodoničnom nečistoćom smeštenom u njenom centru (u literaturi se, ponovimo, umesto pojma *nečistoća* često sreće pojam *konfinirani atom vodonika*). U praksi se ovo ostvaruje tako što poluprovodnik odgovarajućim tehnološkim postupkom biva dopiran vodonikom, nekim od načina opisanim u odeljku 3.3.3. Pretpostavićemo da je vodonična nečistoća uneta u kristal tako da se ponaša kao *donor*, odnosno da upravo elektron koji preda kristalu može slobodno da se kreće (i koji će zbog toga biti nazivan *elektronom nečistoće*), dok se preostali elektroni nalaze u valentnoj zoni. Dakle, jezgro atoma vodonika nalazi se u centru kvantne tačke, dok njegov elektron može da se kreće bilo gde *unutar* kvantne tačke – zbog (7.1), talasna funkcija elektrona van kvantne tačke biće jednaka nuli. Šematski prikaz vodonične nečistoće unutar kvantne tačke prikazan je na slici 7.1 (a), dok je isti sistem prikazan u formi energijskog dijagrama na slici 7.1 (b). Koordinatni sistem odabrali smo tako da mu se koordinatni početak nalazi u centru SKT, tj. tački gde se već nalazi jezgro vodonikovog atoma, a položaj elektrona prikazali smo, prigodno, u sfernim koordinatama. Na posletku, napomenimo da će u daljem radu često biti razmatrana situacija kada je

materijalna sredina podvrgnuta dejstvu spoljašnjeg stacionarnog homogenog magnetnog polja, čija je jačina zadata izrazom

$$\mathbf{B} = B\vec{e}_z, \quad (7.2)$$

gde je smer z -ose u saglasnosti sa izborom koordinatnog sistema u odeljku 5.4.1.² Uvođenjem ovog magnetnog polja, narušava se polazna sferna simetrija problema, ali sistem i dalje zadržava *osnu simetriju*, što je činjenica koja će biti veoma značajna u daljem radu.

U slučaju koji je od interesa u disertaciji, određivanje energijske strukture SKT se zapravo odnosi na nalaženje energijskih nivoa konfiniranog atoma vodonika smeštenog u centru kvantne tačke. Slično kao kod slobodnog atoma vodonika, i ovde će energijski nivoi biti *diskretni*,³ što odgovara situaciji šematski prikazanoj na slici 7.1 (b). Napomenimo još i to da, kada govorimo o energijama konfiniranog atoma vodonika, odnosno vodonične nečistoće, zapravo mislimo na energije *elektrona* nečistoće. Standardni postupak prelaska na relativnu koordinatu i koordinatu centra mase nam omogućava potvrdu ovakvog tvrđenja, budući da jezgro atoma vodonika miruje u centru kvantne tačke, a jedino kretanje vrši elektron [167].

7.1.1 Aproksimacija efektivne mase

Za razliku od gasovitih sredina, sačinjenih od mnoštva atoma koji često vrlo slabo interaguju među sobom, čvrsta tela se odlikuju postojanjem *kristalne strukture* u kojoj se atomi i molekuli nalaze mnogo bliže jedni drugima. Zbog toga njihovu međusobnu interakciju nije moguće zanemariti. Pored toga, ovu interakciju je izuzetno teško zapisati eksplicitno, jer će se član u hamiltonijanu čitavog sistema koji opisuje interakciju sastojati od ogromnog broja sabiraka, pri čemu će svaki od njih biti, sasvim uopšte, funkcija prostornih koordinata svih čestica i vremena. Pri određivanju energijske strukture SKT, koja se svodi na traženje energija elektrona nečistoće, treba imati u vidu da ovaj elektron „oseća” i dejstvo kristalne rešetke u kojoj se nalazi. Zbog toga je, pri pisanju hamiltonijana nečistoće, pored privlačnog Kulonovog potencijala vodonikovog jezgra, konfinirajućeg potencijala i, eventualno, potencijala koji potiče od interakcije sa spoljašnjim poljima, potrebno uračunati i *efektivni potencijal* interakcije elektrona nečistoće sa čvorovima kristalne rešetke i ostalim elektronima u njoj. S obzirom na to da je egzaktno poznavanje ove veličine praktično nemoguće, pribegava se uvođenju *aproksimacije efektivne mase* (AEM). Ova aproksimacija se zasniva na ideji da se elektron u efektivnom potencijalu kristalne rešetke ponaša na isti način kao elektron van kristala, ali sa promenjenom masom, i već je uvedena u Glavi 3 [107, 273, 274]. Dakle, mera inercije elektrona u polju svih ostalih elektrona i čvorova rešetke se ne opisuje stvarnom, već *efektivnom* masom. Sasvim uopšte, efektivna masa je tenzorska veličina, ali će se u slučaju izotropnog kristala, o kome je ovde reč, svesti na običan skalar. U praksi, aproksimacija efektivne mase znači da se, u Šredingerovoj jednačini (tj. svojstvenom problemu hamiltonijana) za elektron nečistoće, stvarna masa elektrona m_e zamenjuje efektivnom masom m_e^* , a efektivni potencijal izostavlja.

² Na ovom mestu skrećemo pažnju da ova veličina nije isto što i jačina magnetnog polja nekog od elektromagnetnih talasa koji interaguju sa sredinom. Tako se može desiti da je oznaka \mathbf{B} upotrebljena na više mesta i da označava različita magnetna polja (na primer, slično je označena i envelope jačine magnetnog polja lasera, mada ona zavisi od prostornih koordinata i vremena). Ipak, zabune ne bi trebalo da bude, jer se pri opisivanju laserskih polja koriste odgovarajući vektori jačine *električnog* polja, a oni gde figuriše magnetno polje izostavljaju iz pisanja.

³ Ovo tvrđenje nije sasvim korektno, imajući u vidu da spektar energija slobodnog atoma vodonika sadrži kako diskretna, tako i kontinualna energijska stanja (diskretni nivoi prelaze u kontinuum – vezani elektron u atomu postaje slobodan). Konfiniranje u sva tri pravca, međutim, uslovljava diskretizaciju *svih* energijskih nivoa (barem ukoliko se držimo modela beskonačno duboke potencijalne jame), pa će u ovoj disertaciji od interesa biti isključivo diskretna stanja konfiniranog atoma vodonika.

Da bismo, konačno, odredili energijsku strukturu elektrona vodonične nečistoće, potrebno je da nađemo hamiltonijan elektrona nečistoće. Iako je ovaj naziv najkorektniji i najpotpuniji, u daljem radu ćemo često za istu veličinu koristiti izraze *hamiltonijan (vodonične) nečistoće* ili *hamiltonijan sferne kvantne tačke*. Dakle, radi jednostavnosti, a budući da ne postoji mogućnost zabune, sva tri izraza smatraćemo sinonimima.

Nađimo, sada, hamiltonijan kvantne tačke u AEM. U spoljašnjem elektromagnetnom polju koje se karakteriše skalarnim i vektorskim potencijalom $\phi(\mathbf{r})$ i $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, respektivno, i u kvantnoj tački čiji je potencijal konfiniranja $V(\mathbf{r})$, za česticu naelektrisanja q i impulsa \mathbf{p} imaćemo

$$H_{\text{SKT}}^{(\text{AEM})} = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} + q\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 + q\phi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}), \quad (7.3)$$

gde je m^* efektivna masa čestice. Kako je, u našem slučaju, $m^* = m_e^*$ i $q = -e$, a prema (7.1) sledi da je unutar kvantne tačke $V(\mathbf{r}) = 0$, važiće

$$H_{\text{SKT}}^{(\text{AEM})} = \frac{1}{2m_e^*} (-i\hbar\nabla - e\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 - e\phi(\mathbf{r}), \quad (7.4)$$

pri čemu je za impuls iskorišćen operatorski zapis $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$. Kako je talasna funkcija, a samim tim i verovatnoća nalaženja elektrona nečistoće van kvantne tačke jednaka nuli, to će gornji izraz za oblast unutar kvantne tačke biti jedini relevantan za dalji rad. Skalarni potencijal elektromagnetnog polja je zapravo Kulonov potencijal vodonikovog jezgra:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{e}{|\mathbf{r}|} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r}, \quad (7.5)$$

gde je ϵ_r relativna dielektrična konstanta kristala.⁴ Sa druge strane, za vektorski potencijal se može iskoristiti izraz

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} (\mathbf{B} \times \mathbf{r}), \quad (7.6)$$

koji odgovara minimalnom sprezanju sredine i polja [7].⁵

Oslobodimo se sada zagrada u izrazu (7.4). Rezultat će biti, uz izostavljanje eksplicitne zavisnosti po \mathbf{r} :

$$\begin{aligned} H_{\text{SKT}}^{(\text{AEM})} &= -\frac{\hbar^2}{2m_e^*} \nabla^2 - i\frac{e\hbar}{2m_e^*} (\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla) + \frac{e^2 \mathbf{A}^2}{2m_e^*} - e\phi \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m_e^*} \nabla^2 - i\frac{e\hbar}{m_e^*} \mathbf{A} \cdot \nabla + \frac{e^2 \mathbf{A}^2}{2m_e^*} - e\phi, \end{aligned} \quad (7.7)$$

⁴ Naglasimo da je reč o relativnoj dielektričnoj konstanti materijala od koga je sačinjena sama kvantna tačka, a ne materijala u koji je ona „uronjena”, čiju smo relativnu dielektričnu konstantu (jednaku jedinici) koristili pri opisivanju prostiranja elektromagnetnih talasa kroz materijalnu sredinu u poglavlju 5.4.

⁵ Ovakvim izborom vektorskog potencijala, uz podsećanje da je \mathbf{B} konstantan vektor i korišćenje poznate relacije vektorske algebre za dvostruki vektorski proizvod, dobijamo da je

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) = \frac{1}{2} (\nabla \cdot \mathbf{r}) \mathbf{B} - \frac{1}{2} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{r} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \left(B_x \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + B_y \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} + B_z \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right) \\ &= \frac{3}{2} \mathbf{B} - \frac{1}{2} (B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z) = \frac{3}{2} \mathbf{B} - \frac{1}{2} \mathbf{B} = \mathbf{B}, \end{aligned}$$

što znači da je definiciona relacija za vektorski potencijal $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ zadovoljena.

gde je uzeto u obzir da je $\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \nabla$.⁶ Ukoliko zamenimo (7.5) i (7.6) u (7.7), dobijamo

$$H_{\text{SKT}}^{(\text{AEM})} = -\frac{\hbar^2}{2m_e^*} \nabla^2 + \frac{eB}{2m_e^*} L_z + \frac{e^2 B^2}{8m_e^*} r^2 \sin^2 \theta - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r}, \quad (7.8)$$

pri čemu smo imali u vidu da važi

$$-i\hbar \mathbf{A} \cdot \nabla = -i\hbar \frac{1}{2} (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla = \frac{1}{2} (-i\hbar \mathbf{r} \times \nabla) \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} B L_z, \quad (7.9)$$

gde je iskorišćena poznata jednakost za mešoviti proizvod tri vektora, i gde je $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla$ operator momenta impulsa elektrona, a L_z njegova z -komponenta, odnosno

$$\mathbf{A}^2 = \frac{1}{4} (\mathbf{B} \times \mathbf{r})^2 = \frac{1}{4} |\mathbf{B} \times \mathbf{r}|^2 = \frac{1}{4} B^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad (7.10)$$

gde smo iskoristili formulu za intenzitet vektorskog proizvoda dva vektora.

7.1.2 Prelaz na efektivne atomske jedinice

Budući da se, u kvantnoj mehanici, po pravilu barata sa izuzetno malim vrednostima fizičkih veličina (u odnosu na vrednosti koje bi imale kada bi se radilo, recimo, o makroskopskim telima), često ih je pogodno, umesto u SI jedinicama, zapisivati u nekom drugom sistemu jedinica. Najčešće su to u pitanju *atomske jedinice*. Na ovom mestu, navešćemo izraze za atomske jedinice veličina od interesa u ovoj disertaciji – energije, rastojanja, jačine magnetnog polja i električnog dipolnog momenta, respektivno:

$$E_0 = \frac{m_e e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2}, \quad a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}, \quad B_0 = \frac{\hbar}{e a_0^2}, \quad d_0 = e a_0, \quad (7.11)$$

pri čemu je veličina $a_0 = 5.29 \cdot 10^{-11}$ m poznata i kao *prvi Borov radijus*, a $E_0 = 2 \cdot 13.6 \text{ eV} = 27.2 \text{ eV}$ predstavlja apsolutnu vrednost dvostruke energije slobodnog atoma vodonika u osnovnom stanju. Međutim, budući da se elektron nečistoće sada karakteriše efektivnom a ne stvarnom masom, i pošto se ceo sistem ne nalazi u vakuumu, potrebno je izvršiti korekciju atomskih jedinica. Tako ćemo relevantne veličine označavati u *efektivnim atomskim jedinicama*, gde su izrazima

$$E_0^* = \frac{m_e^* e^4}{(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2 \hbar^2}, \quad a_0^* = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r \hbar^2}{m_e^* e^2}, \quad B_0^* = \frac{\hbar}{e (a_0^*)^2}, \quad d_0^* = e a_0^*, \quad (7.12)$$

date efektivne atomske jedinice energije, rastojanja, jačine magnetnog polja i električnog dipolnog momenta, respektivno. Slično kao malopre, E_0^* i a_0^* predstavljaju moduo dvostruke energije i prvi Borov radijus elektrona u atomu vodonika, *ali u slučaju kada bi imao efektivnu masu* i pritom egzistirao u dielektričnoj sredini. Otuda i pridev „efektivni” koji stoji uvek uz nazive ovih veličina. Konkretno vrednosti efektivnih atomskih jedinica zavisice od izbora materijala od koga je sačinjena kvantna tačka, odnosno od vrednosti m_e^* i ϵ_r , i biće date u Glavi 8. U ovoj disertaciji će, u cilju ispitivanja energijske strukture kvantne tačke, biti uglavnom korišćene efektivne atomske jedinice, dok će u ostatku disertacije relevantne jednačine biti prikazivane u SI jedinicama, pri čemu će uvek

⁶ Kako je u pitanju identitet koji važi za operatore, potrebno je ispitati kako oba člana deluju na proizvoljnu funkciju ψ . Koristeći pravilo za prostorni izvod proizvoda, kao i jednačinu $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ koja proizlazi iz (7.6), imaćemo $\nabla \cdot \mathbf{A}\psi = (\nabla \cdot \mathbf{A})\psi + \mathbf{A} \cdot (\nabla\psi) = \mathbf{A} \cdot \nabla\psi$, čime je važenje gore navedenog izraza dokazano.

biti naglašeno u kom se sistemu jedinica radi. Pored toga, prelaz sa jednih na druge jedinice se uvek može lako izvršiti, korišćenjem relacija (7.12).

Procedura prelaska na efektivne atomske jedinice detaljno je izložena u Dodatku B.1. Na osnovu toga, hamiltonijan sferne kvantne tačke u efektivnim atomskim jedinicama biće dat sledećim izrazom:⁷

$$H_{\text{SKT}}^{(*)} = -\frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{2}BL_z + \frac{1}{8}B^2r^2\sin^2\theta - \frac{1}{r}, \quad (7.13)$$

gde je zvezdicom naglašeno da se radi o hamiltonijanu u efektivnim atomskim jedinicama, dok se, iako je to iz oznake izostavljeno, podrazumeva da AEM i dalje važi. Vidimo da se izraz (7.13) može dobiti i ako se u hamiltonijan (7.8) stavi $m_e^* = 1$, $e = 1$, $\hbar = 1$ i $4\pi\epsilon_0\epsilon_r = 1$, što se vrlo često koristi kao polazni korak pri uvođenju efektivnih atomskih jedinica.⁸ Ukoliko Laplasov operator zapišemo u sfernim koordinatama i iskoristimo poznatu relaciju koja povezuje operator momenta impulsa i deo u laplasijanu koji zavisi od uglova θ i φ , dobijamo

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \mathbf{L}^2, \quad (7.14)$$

što nas dovodi do izraza

$$H_{\text{SKT}}^{(*)} = -\frac{1}{2r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{2r^2} \mathbf{L}^2 + \frac{1}{2}BL_z + \frac{1}{8}B^2r^2\sin^2\theta - \frac{1}{r}. \quad (7.15)$$

S obzirom na to da se energije E i talasne funkcije $\Psi(\mathbf{r})$ sferne kvantne tačke dobijaju rešavanjem svojstvenog problema hamiltonijana $H_{\text{SKT}}^{(*)}\Psi = E\Psi$, primetimo da se delovanje diferencijalnog operatora oličenog u prvom sabirku sa desne strane znaka jednakosti u (7.15) može zapisati na sledeći način:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Psi). \quad (7.16)$$

Ukoliko uvedemo novu talasnu funkciju elektrona nečistoće pomoću smene

$$\psi(\mathbf{r}) = r\Psi(\mathbf{r}), \quad (7.17)$$

svojstveni problem hamiltonijana postaje

$$H_{\text{SKT}}\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad (7.18)$$

gde novi hamiltonijan, zapisan bez dodatnih oznaka ali gde se AEM i efektivne atomske jedinice podrazumevaju, ima oblik

$$H_{\text{SKT}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{2r^2} \mathbf{L}^2 + \frac{1}{2}BL_z + \frac{1}{8}B^2r^2\sin^2\theta - \frac{1}{r}. \quad (7.19)$$

⁷ Treba naglasiti da se u literaturi energija često izražava u tzv. *Ridbergovim*, odnosno *efektivnim Ridbergovim* jedinicama,

$$\text{Ry} = \frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2}, \quad \text{Ry}^* = \frac{m_e^* e^4}{2(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2 \hbar^2},$$

što je energija koja odgovara apsolutnoj vrednosti energije osnovnog stanja vodonikovog atoma, bilo da je reč o slobodnom atomu (u prvom) ili atomu unutar nekog kristala (u drugom slučaju). Ova vrednost će, dakle, biti duplo manja od odgovarajuće atomske jedinice za energiju, a hamiltonijan (7.13) zapisan u Ridbergovim jedinicama će se razlikovati utoliko što će svi članovi sa desne strane biti pomnoženi brojem 2.

⁸ Naravno, ukoliko želimo da pređemo na „obične” atomske jedinice, korišćićemo izraze $m_e = 1$, $e = 1$, $\hbar = 1$ i $4\pi\epsilon_0 = 1$.

Ovaj hamiltonijan, odnosno njegov svojstveni problem (7.18), biće polazne tačke za određivanje energija i svojstvenih funkcija elektrona nečistoće, a samim tim i energijske strukture čitave kvantne tačke. U narednom poglavlju će ovo biti detaljnije razmotreno. Naglasimo, na kraju, da ćemo pri rešavanju svojstvenog problema morati da uzmemo u obzir i *granične uslove*:

$$\psi(R, \theta, \varphi) = \psi(0, \theta, \varphi) = 0. \quad (7.20)$$

Prvi od ova dva uslova odnosi se na činjenicu da je, zbog beskonačnog potencijala konfiniranja, van kvantne tačke ($r \geq R$) talasna funkcija jednaka nuli, a u drugom slučaju ($r = 0$) je ovo zbog toga što važi relacija (7.17).

7.2 Nalaženje energija i talasnih funkcija

Energije i talasne funkcije SKT, preciznije elektrona vodonične nečistoće, nalaze se rešavanjem svojstvenog problema hamiltonijana (7.19), datog jednačinom (7.18). Kako je ovaj hamiltonijan dat u efektivnim atomskim jedinicama, to će i njegove svojstvene vrednosti i svojstveni vektori biti dobijeni u istim jedinicama. Ukoliko se ukaže potreba, povratak na SI jedinice se vrši množenjem željenih veličina sa odgovarajućim izrazom u okviru formule (7.12). Postoje razni načini na koje može da se pristupi rešavanju svojstvenog problema, a mi ćemo se ovde koncentrisati na *metod Lagranževe mreže* (MLM, engl. Lagrange mesh method, LMM), koji pripada grupi varijacionih metoda [275–278]. U ovom poglavlju, biće istaknute prednosti MLM u odnosu na druge metode, procedura za njegovu primenu, kao i najvažnije relacije koje odatle proizlaze.

7.2.1 Metod Lagranževe mreže

Svojstveni problem hamiltonijana koji se ovde pojavljuje svodi se na rešavanje parcijalne diferencijalne jednačine po prostornim koordinatama. Rešavanje diferencijalnih, a posebno parcijalnih diferencijalnih jednačina, nije uvek jednostavan zadatak. Zbog toga se često pribegava metodima koji transformišu sistem diferencijalnih u sistem algebarskih jednačina, znatno jednostavnijih za rešavanje. Takav je i metod Lagranževe mreže koji ćemo ovde koristiti. Još jedna njegova prednost, koja će uskoro biti jasnija, ogleda se u činjenici da se potencijalni članovi unutar hamiltonijana, kao i svi multiplikativni operatori koji u njemu figurišu, mogu u okviru MLM predstaviti na veoma jednostavan način.

Osnovna ideja MLM jeste da se domen nezavisnih promenljivih diskretizuje, formirajući svojevrsnu „mrežu” čiji čvorovi predstavljaju tačke sa kojima se dalje operiše. U ovoj disertaciji će, iz razloga koji će ubrzo biti jasniji, biti dovoljno da se ograničimo na *jednodimenzione* probleme, tj. rešavanje *običnih* diferencijalnih jednačina po *samo jednoj* nezavisnoj promenljivoj $x \in [a, b]$, gde su a i b proizvoljni realni brojevi. Tada će se *jednodimenziona Lagranževa mreža* moći okarakterisati sa N tačaka x_1, x_2, \dots, x_N , koje ne moraju nužno biti ekvidistantne. Ideja MLM, kao uostalom i drugih varijacionih metoda, jeste da tražene svojstvene funkcije razvijemo po nekim drugim, unapred definisanim funkcijama. U ovom slučaju, od ovih funkcija, koje ćemo označiti sa $f_i(x)$, $i = 1, N$, zahtevaćemo da zadovoljavaju sledeći uslov [277]:

$$f_i(x_j) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (7.21)$$

gde su λ_i kompleksni težinski faktori. Neprekidne i (u opštem slučaju) kompleksne funkcije $f_i(x)$ uvedene na ovaj način nazivaju se *Lagranževe funkcije*. Težinski faktori se, sa druge strane, izvorno pojavljuju kod *Gausovih kvadratura*, koje se koriste kako bi se aproksimativno zapisale vrednosti integrala:

$$\int_a^b F(x) dx \approx \sum_{i=1}^N |\lambda_i| F(x_i), \quad (7.22)$$

pri čemu je $F(x)$ proizvoljna neprekidna funkcija. Ova aproksimacija biće korišćena i prilikom primene MLM. Ukoliko iskoristimo Dirakovu bra-ket notaciju, Lagranževe funkcije možemo zapisati kao $|i\rangle = f_i(x)$, $i = \overline{1, N}$.⁹ Tada će važiti

$$\langle i|j\rangle = \int_a^b f_i^*(x) f_j(x) dx = \delta_{ij}, \quad (7.23)$$

što sledi kada se gornji integral najpre izrazi preko Gausovih kvadratura u skladu sa (7.22), a potom u dobijeni izraz zamene (7.21) i njemu kompleksno konjugovana vrednost, i na kraju iskoristi poznata osobina Kronekerove delte. Dakle, Lagranževe funkcije su *ortonormirane*. Slično se može pokazati da za matični element proizvoljnog multiplikativnog operatora $V(x)$ važi

$$\langle i|V|j\rangle = \int_a^b f_i^*(x) V(x) f_j(x) dx = V(x_i) \delta_{ij}. \quad (7.24)$$

Ovo je važna relacija koja nam dodatno pojednostavljuje rešavanje svojstvenog problema hamiltonijana, i pored toga *ne zavisi* od konkretnog izbora Lagranževih funkcija. Operator $V(x)$ je uglavnom povezan sa potencijalnim članom u hamiltonijanu, ali se može odnositi i na delove kinetičkog člana koji se mogu predstaviti multiplikativnim operatorima, tj. ne sadrže nikakve izvode po nezavisnoj promenljivoj x .

Pređimo, konačno, na rešavanje jednačine (7.18). Talasnu funkciju elektrona nečistoće tražićemo u obliku

$$\psi(\mathbf{r}) \equiv \psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{j=1}^N \sum_{l'=|m|}^L c_{jl'} f_j\left(\frac{r}{R}\right) Y_{l'm}(\theta, \varphi), \quad (7.25)$$

odnosno, u Dirakovoj notaciji,

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^N \sum_{l'=|m|}^L c_{jl'} |j\rangle |l' m\rangle = \sum_{j=1}^N \sum_{l'=|m|}^L c_{jl'} |j l' m\rangle, \quad (7.26)$$

gde $Y_{l'm}(\theta, \varphi) \equiv |l' m\rangle$ predstavljaju sferne harmonike. Primetimo da se u gornjem izrazu sumiranje ne vrši po magnetnom kvantnom broju m . Razlog je taj što kvantna tačka u spoljašnjem magnetnom polju ispoljava *osnu* simetriju, pa se magnetni kvantni broj *očuvava*, i predstavlja *dobar kvantni broj*. Sa druge strane, za orbitalni kvantni broj l' ovo *ne važi* i po njemu se sumiranje vrši. Takođe, vidimo i da je MLM iskorišćen kako bi se pomoću njega zapisao radijalni deo talasne funkcije, koji je definisan na intervalu $r \in [0, R]$, dakle unutar kvantne tačke. Uvođenjem smene

$$x = \frac{r}{R} \quad (7.27)$$

⁹ Ovu oznaku ne treba mešati sa oznakom energijskih nivoa $|i\rangle$ $i = \overline{1, k}$, $k = 3, 5, 4$, korišćenom u Glavi 5, koja je svakako opštija. Ako se za energijske nivoe odaberu nivoi sfere kvantne tačke, onda će oni u sebi, između ostalog, sadržati i kvantni broj povezan sa odgovarajućom Lagranževom funkcijom.

obezbeđujemo da Lagranževe funkcije budu definisane na domenu $x \in [0, 1]$, čije će prednosti biti uočene kasnije. Podsetimo se i da za sferne harmonike $Y_{lm}(\theta, \varphi) = |lm\rangle$ važi relacija ortonormiranosti

$$\langle lm|l'm'\rangle = \int Y_{lm}^*(\theta, \varphi)Y_{l'm'}(\theta, \varphi)\sin\theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}, \quad (7.28)$$

a da delovanje operatora kvadrata momenta impulsa i njegove z -komponente na njih daje sledeće rezultate:

$$\mathbf{L}^2|lm\rangle = l(l+1)|lm\rangle, \quad L_z|lm\rangle = m|lm\rangle, \quad (7.29)$$

pri čemu su ovi izrazi zapisani u efektivnim atomskim jedinicama ($\hbar = 1$). Zamenom (7.25) u (7.18), zatim množenjem dobijenog izraza sa $f_i^*(r/R)Y_{lm}^*(\theta, \varphi)$ i integracijom po čitavom prostoru, uz korišćenje Dirakove notacije, dobijamo:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{l'=|m|}^L c_{jl'} \langle ilm|H_{\text{SKT}}|j'l'm\rangle = E \sum_{j=1}^N \sum_{l'=|m|}^L c_{jl'} \langle ilm|j'l'm\rangle. \quad (7.30)$$

Pošto znamo da važi $\langle ilm|j'l'm\rangle = \langle i|j\rangle\langle lm|l'm\rangle = \delta_{ij}\delta_{ll'}$, gornja jednačina se pojednostavljuje, dobivši oblik

$$\sum_{j=1}^N \sum_{l'=|m|}^L c_{jl'} H_{ijl'l'} = E c_{il}, \quad (7.31)$$

gde su $H_{ijl'l'} = \langle ilm|H_{\text{SKT}}|j'l'm\rangle$ matrični elementi hamiltonijana kvantne tačke. Dakle, svojstveni problem hamiltonijana SKT (parcijalna diferencijalna jednačina) se svodi na matričnu jednačinu za nalaženje nepoznatih koeficijenata c_{il} . Tačnije, budući da se *preoznačavanjem indeksa* čitava jednačina može svesti na množenje dvodimenzionih kvadratnih matrica i matrica kolona, on se svodi na svojstveni problem dvodimenzione kvadratne matrice – drugim rečima, na sistem *algebarskih* jednačina. Procedura preoznačavanja indeksa je detaljnije objašnjena u Dodatku B.2.

7.2.2 Matrični elementi hamiltonijana SKT

Sada je potrebno odrediti matrične elemente hamiltonijana H_{SKT} . Korišćenjem (7.19), imamo da je

$$\begin{aligned} H_{ijl'l'} &= \left\langle ilm \left| -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{2r^2} \mathbf{L}^2 + \frac{1}{2} B L_z + \frac{1}{8} B^2 r^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{r} \right| j'l'm \right\rangle \\ &= -\frac{1}{2} \left\langle i \left| \frac{d^2}{dr^2} \right| j \right\rangle \delta_{ll'} + \frac{1}{2} \left\langle i \left| \frac{1}{r^2} \right| j \right\rangle \langle lm | \mathbf{L}^2 | l'm \rangle + \frac{1}{2} B \delta_{ij} \langle lm | L_z | l'm \rangle \\ &\quad + \frac{1}{8} B^2 \langle i | r^2 | j \rangle \langle lm | \sin^2 \theta | l'm \rangle - \left\langle i \left| \frac{1}{r} \right| j \right\rangle \delta_{ll'}, \end{aligned} \quad (7.32)$$

gde je izvršen prelaz sa parcijalnog na totalni izvod po r jer ovaj diferencijalni operator deluje samo na Lagranževe funkcije. Pređimo, potom, na promenljivu x uz pomoć smene (7.27), što daje

$$\begin{aligned} H_{ijl'l'} &= -\frac{1}{2R^2} \left\langle i \left| \frac{d^2}{dx^2} \right| j \right\rangle \delta_{ll'} + \frac{l'(l'+1)}{2R^2} \left\langle i \left| \frac{1}{x^2} \right| j \right\rangle \delta_{ll'} + \frac{1}{2} m B \delta_{ij} \delta_{ll'} \\ &\quad + \frac{1}{8} B^2 R^2 \langle i | x^2 | j \rangle \langle lm | \sin^2 \theta | l'm \rangle - \frac{1}{R} \left\langle i \left| \frac{1}{x} \right| j \right\rangle \delta_{ll'}, \end{aligned} \quad (7.33)$$

pri čemu je iskorišćena relacija (7.29), a potom i (7.28). Nađimo, za početak, matrični element $\langle lm | \sin^2 \theta | l' m \rangle$ koji se pojavljuje u gornjem izrazu. Ako uočimo da je

$$Y_{2,0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1), \quad (7.34)$$

onda odatle možemo dobiti sledeći izraz:

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} Y_{2,0}(\theta, \varphi), \quad (7.35)$$

što nas dovodi do

$$\langle lm | \sin^2 \theta | l' m \rangle = \frac{2}{3} \delta_{ll'} - \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \langle lm | Y_{2,0}(\theta, \varphi) | l' m \rangle, \quad (7.36)$$

gde smo iskoristili uslov normiranosti (7.28). Drugi sabirak sa desne strane gornjeg izraza možemo dobiti ako imamo u vidu da važi tzv. *Gauntova formula*:

$$\langle lm | Y_{\mathcal{L}\mathcal{M}}(\theta, \varphi) | l' m' \rangle = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(2\mathcal{L}+1)(2l'+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l & \mathcal{L} & l' \\ -m & \mathcal{M} & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & \mathcal{L} & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.37)$$

gde su izrazi u velikim zagradama sa desne strane *Vignerovi 3j simboli*, detaljno pojašnjeni u Dodatku B.3. Sada se izraz (7.33) može zapisati u konačnom obliku. Korišćenjem (7.36), (7.37), kao i relacije za matrični element multiplikativnog operatora dobijenog u okviru MLM (7.24) i uslova normiranja (7.23), dobija se

$$\begin{aligned} H_{ijll'} &= -\frac{T_{ij}}{2R^2} \delta_{ll'} - \frac{1}{Rx_i} \delta_{ij} \delta_{ll'} + \frac{l'(l'+1)}{2R^2 x_i^2} \delta_{ij} \delta_{ll'} + \frac{1}{2} m B \delta_{ij} \delta_{ll'} + \frac{1}{12} B^2 R^2 x_i^2 \delta_{ij} \delta_{ll'} \\ &- (-1)^m \frac{1}{12} B^2 R^2 x_i^2 \delta_{ij} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)} \begin{pmatrix} l & 2 & l' \\ -m & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & 2 & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.38)$$

gde je sa T_{ij} označen tzv. „kinetički” član.¹⁰ Za razliku od ostalih sabiraka koji sadrže multiplikativne operatore, za određivanje ovog člana *neophodno* je poznavanje konkretnih Lagranževih funkcija.

Konkretan izbor Lagranževih funkcija ćemo u ovoj disertaciji izvršiti na sledeći način. Odaberimo, najpre, čvorove Lagranževe mreže tako da oni budu *nule pomerenih Ležandrovih polinoma*,

$$P_N(2x_i - 1) = 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (7.39)$$

Na ovaj način obezbedili smo da nule Ležandrovih polinoma, definisane preko $P_N(z_i) = 0$ na intervalu $z \in [-1, 1]$, smenom $z = 2x - 1$ budu „preslikane” na željeni interval $x \in [0, 1]$. Na osnovu ovoga, kao i činjenice da Lagranževe funkcije moraju da zadovolje relacije (7.21)–(7.23), odnosno granične uslove

$$f_i(0) = f_i(1) = 0, \quad (7.40)$$

¹⁰Da budemo potpuno precizni, u pitanju je član povezan sa drugim izvodom po nezavisnoj promenljivoj x , koji jedini (do na konstantan multiplikativni faktor) figuriše u operatoru kinetičke energije u *jednodimenzionom* slučaju. Ovde, međutim, imamo posla sa trodimenzionim problemom, pa će, pored zavisnosti od x , pravi kinetički član sadržati u sebi i potencijal centrifugalne barijere (srazmeran L^2), što je multiplikativni operator čiji je matrični element već nađen.

koji su posledica graničnih uslova (7.20), izbor ovih funkcija je sledeći [277]:¹¹

$$f_i(x) = \frac{(-1)^{N+i}}{\sqrt{x_i(1-x_i)}} \frac{x(1-x)P_N(2x-1)}{x-x_i}. \quad (7.41)$$

Zbog toga što u njima figurišu pomereni Ležandrovi polinomi, ove funkcije se često nazivaju *Lagranž-Ležandrove funkcije*. Znajući ovo, za „kinetički” član u hamiltonijanu (7.38) se napokon dobija

$$T_{ij} = \left\langle i \left| \frac{d^2}{dx^2} \right| j \right\rangle = \begin{cases} (-1)^{i+j} \frac{1}{\sqrt{x_i(1-x_i)x_j(1-x_j)}} \frac{x_i+x_j-2x_ix_j}{(x_i-x_j)^2}, & i \neq j, \\ \frac{1}{3x_i(1-x_i)} \left(N(N+1) + \frac{1}{x_i(1-x_i)} \right), & i = j, \end{cases} \quad (7.42)$$

čije izvođenje izlazi iz okvira ove disertacije i nećemo ga navoditi [278, 279].

Ovim je zaokružena procedura nalaženja svojstvenih energija E i svojstvenih vektora (što se svodi na nalaženje nepoznatih koeficijenata c_{il}) primenom MLM. Spektar svojstvenih energija činiće (diskretne) energije $N(L - |m| + 1)$ najnižih nivoa. Ovaj broj dobija se nakon što se u jednačini (7.31) izvrši preoznačavanje indeksa, što je detaljno pokazano u Dodatku B.2. Vidimo da će tačnost MLM direktno zavisi od izbora čvorova mreže N kao i maksimalne vrednosti orbitalnog kvantnog broja L koju želimo da uključimo u razvoj. Ukoliko nam nije cilj poznavanje ogromnog broja energijskih nivoa kvantne tačke, a ovde ćemo se ograničiti upravo na nekoliko najnižih, može se pokazati da MLM daje jako dobre rezultate i brzu konvergenciju rešenja čak i za *vrlo male vrednosti* $N, L \sim 10$. Ovo je još jedan razlog zašto je baš MLM odabran za rešavanje svojstvenog problema SKT u ovoj disertaciji.

7.2.3 Matrični elementi operatora električnog dipolnog momenta

Pored svojstvenih energija i talasnih funkcija, od velikog značaja za dalji rad su i matrični elementi operatora električnog dipolnog momenta koji odgovaraju prelazu sa jednog na drugo svojstveno stanje. Ove veličine se pojavljuju kako eksplicitno, u propagacionim jednačinama za elektromagnetno polje, tako i u sklopu definicije za Rabijeve frekvencije ovih polja. Zato je važno izvesti izraze za ove matrične elemente u okviru MLM.

Opšti izraz za električni dipolni moment nekog atoma koji ima N_e elektrona je već dat u poglavlju 5.2 (jednačina (5.21)) i glasi

$$\mathbf{d} = -e \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{r}_i = - \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{r}_i, \quad (7.43)$$

pri čemu, u kontekstu kvantne mehanike u okviru koje radimo, ova veličina predstavlja *multiplikativni* operator. U našem slučaju, $N_e = 1$, pa se ovaj izraz svodi na

$$\mathbf{d} = -e\mathbf{r} = -\mathbf{r}, \quad (7.44)$$

¹¹Treba naglasiti da izbor Lagranževih funkcija *nije jednoznačan* – one se mogu izabrati i na druge načine, jedino je potrebno da svi neophodni uslovi (granični uslovi koji zavise od konkretnog problema, kao i (7.21) i (7.23) koji moraju da važe za Lagranževe funkcije u opštem slučaju) budu ispunjeni.

gde je \mathbf{r} vektor položaja elektrona. U dva prethodna izraza, iskorišćena je činjenica da se radi u efektivnim atomskim jedinicama, što nam omogućava da stavimo $e = 1$. Sa druge strane, pošto je u pitanju vektorska veličina, u Dekartovom sistemu je možemo razložiti na sledeće komponente:

$$\mathbf{d} = d_x \vec{e}_x + d_y \vec{e}_y + d_z \vec{e}_z. \quad (7.45)$$

Za potrebe daljeg rada, izrazimo jedinične vektore Dekartovog koordinatnog sistema preko sledećeg seta ortonormiranih vektora [168]:

$$\vec{e}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - i\vec{e}_y), \quad \vec{e}_0 = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + i\vec{e}_y), \quad (7.46)$$

koji predstavljaju kompleksne „rotirajuće” vektore pomoću kojih se najčešće opisuje polarizacija elektromagnetnog polja (vektori *sfernog* bazisa), i koji su detaljnije objašnjeni u Dodatku B.4. Tako, ukoliko envelopu vektora električnog polja elektromagnetnog talasa zapišemo kao $\mathbf{E} = E_0 \vec{\epsilon}$, gde je $\vec{\epsilon}$ jedinični vektor polarizacije polja, ukoliko je $\vec{\epsilon} = \vec{e}_0$ kažemo da je polje *linearno polarizovano* (duž z-ose), a ukoliko je $\vec{\epsilon} = \vec{e}_{\pm 1}$ reč je o (levoj ili desnoj) *kružnoj polarizaciji* – vektor \mathbf{E} rotira u xy ravni u nekom od dva moguća smera.¹² Napomenimo da, za razliku od standardnih, do sada korišćenih Dekartovih jediničnih vektora, „rotirajući” vektori zadovoljavaju nešto drugačiju *relaciju ortonormiranosti*:

$$\vec{e}_p^* \cdot \vec{e}_q = (-1)^p \vec{e}_{-p} \cdot \vec{e}_q = \delta_{pq}, \quad p, q = 0, \pm 1. \quad (7.47)$$

U novom bazisu, vektor električnog dipolnog momenta može se zapisati na sledeći način:

$$\mathbf{d} = -d_{+1} \vec{e}_{-1} + d_0 \vec{e}_0 - d_{-1} \vec{e}_{+1} = \sum_{s=-1}^{+1} (-1)^s d_s \vec{e}_{-s}, \quad (7.48)$$

gde je

$$d_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(d_x - id_y), \quad d_0 = d_z, \quad d_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(d_x + id_y). \quad (7.49)$$

Matrični element operatora električnog dipolnog momenta računamo na standardan način,

$$\mathbf{d}_{ij} = \langle i | \mathbf{d} | j \rangle = \sum_{s=-1}^{+1} (-1)^s d_{ij}^{(s)} \vec{e}_{-s}, \quad (7.50)$$

gde je iskorišćena relacija (7.48) i gde je

$$d_{ij}^{(s)} = \langle i | d_s | j \rangle, \quad s = 0, \pm 1. \quad (7.51)$$

Značaj prelaska na nove jedinične vektore ogleda se u činjenici da je verovatnoća prelaza $|i\rangle \leftrightarrow |j\rangle$ direktno srazmerna matričnom elementu $\langle i | \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} | j \rangle \sim \langle i | \mathbf{d} \cdot \vec{\epsilon} | j \rangle = \langle i | \mathbf{d} | j \rangle \cdot \vec{\epsilon} = \mathbf{d}_{ij} \cdot \vec{\epsilon}$ (preciznije, kvadratu modula ove veličine). U okviru problema kojima se ovde bavimo, gde vektor polarizacije može biti $\vec{\epsilon} = \vec{e}_s$, $s = 0, \pm 1$, u izrazu za matrični element operatora električnog dipolnog momenta, različit

¹²Konkretno, za vektor električnog polja talasa kažemo da je *levo* kružno polarizovan ukoliko rotira suprotno smeru kazaljke na satu u odnosu na pravac prostiranja talasa (određenog talasnim vektorom \mathbf{k}), i pridružićemo mu vektor \vec{e}_{+1} . Nasuprot ovome, ako \mathbf{E} rotira u smeru kazaljke na satu, radi se o *desno* polarizovanom talasu kome odgovara vektor \vec{e}_{-1} [168].

od nule biće samo jedan od tri elementa $d_{ij}^{(-s)}$, što vidimo iz relacije $\langle i|\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}|j\rangle \sim \mathbf{d}_{ij} \cdot \vec{e}_s = d_{ij}^{(-s)}$, koja sledi iz (7.50) i (7.47). Ovo je, između ostalog, i razlog zašto smo u Glavi 5 matrične elemente operatora električnog dipolnog momenta koji odgovaraju zabranjenim prelazima izjednačavali sa nulom, iako je zapravo matrični element $\langle i|\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}|j\rangle$ (odnosno $\langle i|\mathbf{d} \cdot \vec{E}|j\rangle$) bio taj koji je zapravo jednak nuli.

Da bismo našli $d_{ij}^{(s)}$, potrebno je da najpre preciziramo oblik početnog i krajnjeg stanja. U skladu sa MLM, zapišimo početno stanje $|p\rangle$ i krajnje stanje $|q\rangle$, koja se karakterišu dobrim kvantnim brojevima m i m' , respektivno, u formi razvoja po Lagranževim funkcijama i sfernim harmonicima:

$$|p\rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{l=|m|}^L c_{il}^{(p)} |ilm\rangle, \quad |q\rangle = \sum_{j=1}^N \sum_{l'=|m'|}^L c_{jl'}^{(q)} |jl'm'\rangle, \quad (7.52)$$

Na osnovu ovoga sledi:

$$d_{pq}^{(s)} = \langle p|d_s|q\rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{l=|m|}^L \sum_{l'=|m'|}^L \left(c_{il}^{(p)}\right)^* c_{jl'}^{(q)} \langle ilm|d_s|jl'm'\rangle, \quad (7.53)$$

gde treba odrediti matrične elemente $\langle ilm|d_s|jl'm'\rangle$ za svako s . Ukoliko iskoristimo relaciju (7.44) i ubacimo je u (7.49), dobijamo

$$d_{-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x-iy) = -\frac{1}{\sqrt{2}}r(\sin\theta\cos\varphi - i\sin\theta\sin\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{2}}r\sin\theta e^{-i\varphi}, \quad (7.54)$$

$$d_0 = -z = -r\cos\theta, \quad (7.55)$$

$$d_{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+iy) = \frac{1}{\sqrt{2}}r(\sin\theta\cos\varphi + i\sin\theta\sin\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}r\sin\theta e^{i\varphi}, \quad (7.56)$$

pri čemu smo prešli na sferne koordinate i iskoristili poznati Ojlerov identitet. Podsetimo se da za sferne harmonike sa $l=1$ važi

$$Y_{1,-1}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi}, \quad Y_{1,0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_{1,1}(\theta, \varphi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta e^{i\varphi}, \quad (7.57)$$

što daje

$$\sin\theta e^{-i\varphi} = 2\sqrt{\frac{2\pi}{3}}Y_{1,-1}(\theta, \varphi), \quad \cos\theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{1,0}(\theta, \varphi), \quad \sin\theta e^{i\varphi} = -2\sqrt{\frac{2\pi}{3}}Y_{1,1}(\theta, \varphi). \quad (7.58)$$

Zahvaljujući ovome, za komponente vektora električnog dipolnog momenta imamo

$$d_{-1} = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}}rY_{1,-1}(\theta, \varphi), \quad d_0 = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}}rY_{1,0}(\theta, \varphi), \quad d_{+1} = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}}rY_{1,1}(\theta, \varphi). \quad (7.59)$$

Sva tri gornja izraza se mogu zapisati preko jedne zajedničke jednačine:

$$d_s = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}}rY_{1,s}(\theta, \varphi), \quad (7.60)$$

na osnovu čega dobijamo

$$\begin{aligned}
\langle i l m | d_s | j l' m' \rangle &= -\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \langle i | r | j \rangle \langle l m | Y_{1,s}(\theta, \varphi) | l' m' \rangle \\
&= -\sqrt{\frac{4\pi}{3}} R \langle i | x | j \rangle \langle l m | Y_{1,s}(\theta, \varphi) | l' m' \rangle \\
&= -(-1)^m \sqrt{\frac{4\pi}{3}} R x_i \delta_{ij} \sqrt{\frac{3(2l+1)(2l'+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l & 1 & l' \\ -m & s & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & 1 & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{m+1} R x_i \delta_{ij} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)} \begin{pmatrix} l & 1 & l' \\ -m & s & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & 1 & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.61)
\end{aligned}$$

gde je iskorišćena smena (7.27), zatim jednačina (7.24), kao i (7.37). Zamenom u (7.53), konačno sledi da je

$$\begin{aligned}
d_{pq}^{(s)} &= (-1)^{m+1} R \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{l=|m|}^L \sum_{l'=|m'|}^L \left(c_{il}^{(p)} \right)^* c_{j'l'}^{(q)} x_i \delta_{ij} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} l & 1 & l' \\ -m & s & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & 1 & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.62)
\end{aligned}$$

čime je dobijena željena jednačina. Primitimo da faktor $(-1)^{m+1}$ koji se pojavljuje u gornjem izrazu implicira da veličina $d_{pq}^{(s)}$ može biti i pozitivna i negativna (ukoliko je kompleksna, ovo važi i za njen realni i za imaginarni deo). Međutim, kako će se u relevantnim izrazima (definicije Rabijevih frekvencija i propagacione jednačine) pojavljivati isključivo *apsolutne vrednosti* ili *stepeni modula* odgovarajućeg matričnog elementa \mathbf{d}_{pq} , a koji je direktno povezan sa $d_{pq}^{(s)}$, odnosno d_s , to ćemo u nastavku disertacije praktično uvek računati jedino veličinu $|d_{pq}^{(s)}|$.

U Dodatku B.3 diskutovane su osobine Vignerovog $3j$ simbola. Zadržimo se ovde na relaciji koju moraju da zadovoljavaju veličine u donjem redu $3j$ simbola. Na ovom mestu će se ona svesti na $-m + s + m' = 0$, odnosno

$$\Delta m = m - m' = s, \quad (7.63)$$

što predstavlja izraz za *selekciona pravila* u okviru ovog problema. U skladu sa njima, vidimo da ćemo, ako je električno polje linearno polarizovano ($\vec{\epsilon} = \vec{e}_0$), dobiti $\Delta m = 0$, što znači da su električno dipolno dozvoljeni jedino prelazi sa nivoa sa *istim* magnetnim kvantnim brojem m . Sa druge strane, u slučaju kružne polarizacije ($\vec{\epsilon} = \vec{e}_{\pm 1}$) sledi da je $\Delta m = \pm 1$, i kružno polarizovan talas može da pobudi samo one prelaze čiji se magnetni kvantni brojevi *razlikuju za jedinicu*. Ovo su ujedno i jedini mogući prelazi u okviru EDA.¹³ Dakle, izbor nivoa sa kojima ćemo raditi diktira izbor polarizacije laserskih polja i obrnuto. Detaljnije će ovome biti reči kada se bude diskutovao konkretan izbor energijskih nivoa sferne kvantne tačke sa kojima ćemo raditi.

¹³Električni dipolni član je dominantan član u razvoju koji opisuje elektromagnetnu interakciju polja i sredine. Ukoliko se u tom razvoju zadrže i naredni članovi, onda možemo govoriti o magnetnoj dipolnoj, električnoj kvadrupolnoj, kao i aproksimacijama viših redova. Za ove aproksimacije mogu važiti sasvim druga selekciona pravila, pa će tako biti mogući i prelazi kod kojih je $|\Delta m| > 1$. Razlog zbog koga se mi držimo EDA je taj što su verovatnoće prelaza u svim drugim slučajevima zanemarljivo male.

Deo III

Rezultati i analiza

8 Energijska struktura sferne kvantne tačke

Pre nego što pređemo na proučavanje efekata spore i uskladištene svetlosti u poluprovodničkim sfernim kvantnim tačkama, potrebno je da se pozabavimo dobijanjem i analizom energijske strukture kvantne tačke, kao i uticajem spoljašnjeg stacionarnog magnetnog polja na nju. Kao što je već napomenuto, efekti proučavani u Glavama 5 i 6 važe univerzalno, bez obzira na konkretan odabir materijalne sredine. Kako je za potrebe ove disertacije kao materijalna sredina odabrana sredina sačinjena od identičnih poluprovodničkih SKT, to je potrebno izračunati brojne vrednosti parametara sredine koji se javljaju u MB jednačinama. Konkretno, nama je od interesa GaAs kvantna tačka sa vodoničnom nečistoćom u svom centru, „uronjena” u drugi poluprovodnik ili dielektrik tako da se potencijal konfiniranja može smatrati (sferno-simetričnim) potencijalom beskonačno duboke potencijalne jame. Zbog toga će u izrazima (7.12) figurisati efektivna masa elektrona i relativna dielektrična konstanta za GaAs, čije su vrednosti prikazane u tabeli 8.1 [280, 281]. U istoj tabeli prikazane su i brojne vrednosti efektivnih atomskih jedinica od interesa izražene u SI jedinicama,¹ što predstavlja svojevrsne konverzije relacije koje će nam biti od interesa u daljem radu, a posebno u ovoj Glavi.

Tabela 8.1: Lista parametara za GaAs, kao i brojnih vrednosti za relevantne efektivne atomske jedinice koje iz njih proizlaze.

Simbol	Opis	Vrednost	Jedinica
m_e^*	efektivna masa elektrona za GaAs	0.067	m_e
ϵ_r	relativna dielektrična konstanta za GaAs	12.9	-
E_0^*	efektivna atomska jedinica energije	10.92	meV
a_0^*	efektivna atomska jedinica dužine	10.22	nm
B_0^*	ef. at. jedinica jačine magnetnog polja	6.31	T
d_0^*	ef. at. jedinica električnog dipolnog momenta	$1.63 \cdot 10^{-27}$	Cm

U MB jednačinama koje treba rešiti, javljaju se veličine u kojima figurišu kako energije, tako i matricni elementi operatora električnog dipolnog momenta materijalne sredine. Zbog toga je potrebno izračunati vrednosti ovih veličina za konkretan sistem koji proučavamo – SKT, detaljno proučenu u Glavi 7, gde je u obzir uzet i uticaj spoljašnjeg stacionarnog magnetnog polja definisanog relacijom (7.2). Zbog toga ćemo ovde staviti poseban akcenat na proučavanje uticaja spoljašnjeg magnetnog polja na energijsku strukturu kvantne tačke. Da bismo dobili energije i talasne funkcije, iskoristićemo metod Lagranževe mreže opisan u Glavi 7, gde ćemo za broj čvorova mreže i maksimalnu vrednost orbitalnog kvantnog broja u razvoju talasne funkcije staviti $N = 40$ i $L = 20$, respektivno.

¹ Može se primetiti da jedinica za energiju nije data u džulima kao što se podrazumeva kad je reč o pisanju SI jedinica, ali smo smatrali da je prelaz sa J na eV nešto što se u atomskoj i kvantnoj fizici vrši često i gotovo automatski, što znači da pojam „SI jedinice” ovde treba shvatiti uz pomenutu ogradu.

Rešavanjem svojstvenog problema (7.31), uz pomoć (7.38) i (7.42), za konkretne vrednosti poluprečnika kvantne tačke R i jačine magnetnog polja B , dobijamo željene svojstvene energije E i koeficijente u razvoju talasne funkcije c_{il} , $i = 1, N$, $l = |m|, L$ (a samim tim i svojstvene funkcije). Na osnovu ovih rezultata, korišćenjem izraza (7.62) mogu se (u EDA) izračunati odgovarajući matični elementi električnog dipolnog operatora koji indukuju željene prelaze. Na ovom mestu, daćemo najpre zavisnost energije najnižih nivoa od poluprečnika SKT, a potom i zavisnost energija nivoa, energija prelaza i matičnih elemenata $d_{pq}^{(s)}$ od jačine spoljašnjeg magnetnog polja.

8.1 Efekti konfiniranja

Uticao potencijala konfiniranja ogleda se jedino u veličini kvantne tačke, što je jasno iz jednačine (7.1). Zato ćemo na ovom mestu prikazati zavisnost energija deset najnižih nivoa SKT od njenog poluprečnika, izraženo u efektivnim atomskim jedinicama (slika 8.1). Odabrali smo da ove energije prikažemo za slučaj kada je $B = 0B_0^*$. Kao i u slučaju slobodnog atoma vodonika, i ovde će energijski nivoi biti okarakterisani kvantnim brojevima n , l i m , čije su moguće vrednosti prikazane u tabeli 8.2. U skladu sa tim, zaključujemo da će energijski nivoi sa $l > 0$ u odsustvu spoljašnjeg magnetnog polja biti *degenerisani*. Konkretno, stepen degeneracije nivoa nl biće $2l + 1$, jer postoji toliko nivoa (ili podnivoa) sa različitim vrednostima magnetnog kvantnog broja m koji imaju istu vrednost energije. Ove podnivoce ćemo, zbog njihove analogije sa podnivoima kod slobodnog atoma vodonika, označavati sa nl_m , pri čemu će nivoi sa $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ biti redom označavani na standardan način, latinskim oznakama s, p, d, f, g, h, \dots i tako redom.

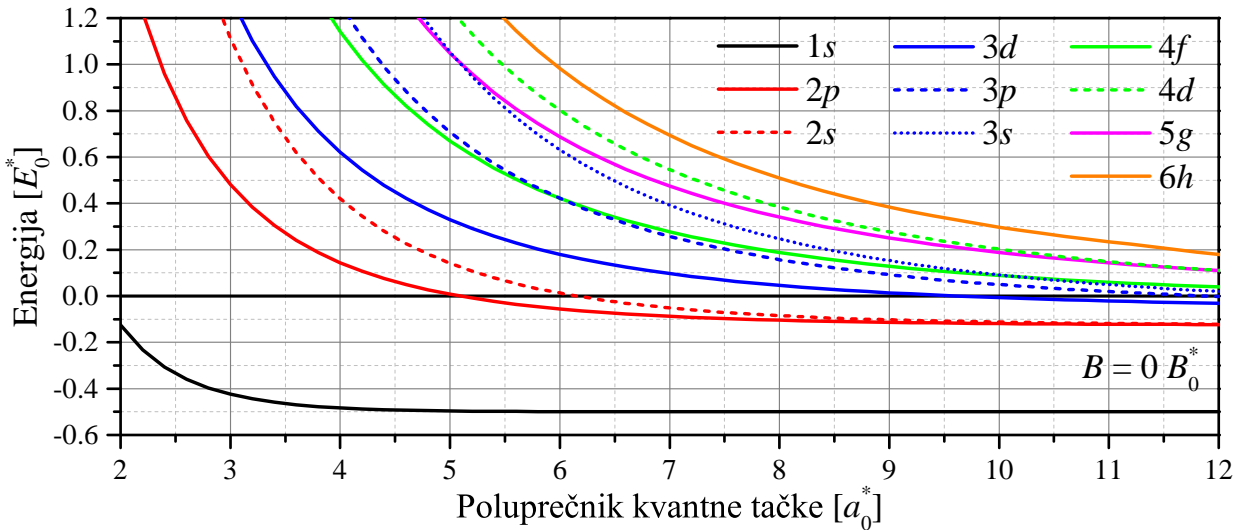
Tabela 8.2: Kvantni brojevi koji opisuju energijske nivoe SKT, sa vrednostima koje mogu da uzimaju.

Simbol	Opis	Opseg vrednosti
n	glavni kvantni broj	1, 2, 3, ...
l	orbitalni kvantni broj	0, 1, 2, ..., $n - 1$
m	magnetni kvantni broj	0, $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$

Na slici 8.1 je, dakle, prikazano deset najnižih nivoa SKT u zavisnosti od poluprečnika R . Već na prvi pogled se može uočiti da su razmaci između nivoa za manje kvantne tačke veći. Razlog za ovo je taj što je elektron nečistoće tada lokalizovan u daleko manjoj oblasti prostora (neodređenost koordinate je mala), pa je neophodno da, u skladu sa Hajzenbergovim relacijama neodređenosti, neodređenost impulsa elektrona, a samim tim i razlika između energija susednih nivoa bude mnogo veća [260]. Tako je, na primer, ova razlika (energija prelaza) između dva najniža nivoa $1s$ i $2p$ za $R = 2a_0^* \approx 20.44$ nm jednaka $E_{21} = E_{2p} - E_{1s} \approx 1.70 E_0^* \approx 18.58$ meV, dok za $R = 12a_0^* \approx 122.64$ nm ova vrednost iznosi $E_{21} \approx 0.38 E_0^* \approx 4.11$ meV. Pored toga, vidimo da krive na grafiku mogu da se presecaju, što znači da redosled nivoa (od najniže ka najvišoj energiji) može da se razlikuje za SKT različitih poluprečnika. Sa porastom R , primećujemo da se energije nivoa približavaju svojim *asimptotskim* vrednostima – vrednostima koje bi imao „slobodan” atom vodonika u GaAs.² Pored toga, nastupa i degeneracija u smislu da svi nivoi sa istim kvantnim brojem n (linije označene istom

² Termin „slobodan” se u ovom kontekstu odnosi na atom vodonika koji može da oseća dejstvo spoljašnjeg magnetnog polja, kao i efektivnog potencijala kristalne rešetke, ali koji *nije* konfiniran u sva tri pravca, u smislu da se *ne* nalazi u kvantnoj tački. Jasno je da je elektron u ovakvom atomu i dalje opisan efektivnom masom m_e^* – ukoliko bi se umesto ove koristila stvarna masa elektrona, za asimptotske vrednosti bismo dobili poznate vrednosti energijskih nivoa atoma vodonika, koje proizlaze već iz Borove teorije.

bojom na grafiku) teže istoj vrednosti sa porastom poluprečnika SKT, bez obzira na vrednost l . Ovo je ponovo u saglasju sa zaključcima dobijenim iz teorije vodonikovog atoma, što je i logično, s obzirom na to da u limesu $R \rightarrow \infty$ atom vodonika više nije konfiniran, tj. kvantna tačka obuhvata čitav raspoloživi prostor, pa praktično nema smisla o njoj ni govoriti.



Slika 8.1: Zavisnost energije deset najnižih nivoa od poluprečnika SKT za $B = 0 B_0^*$.

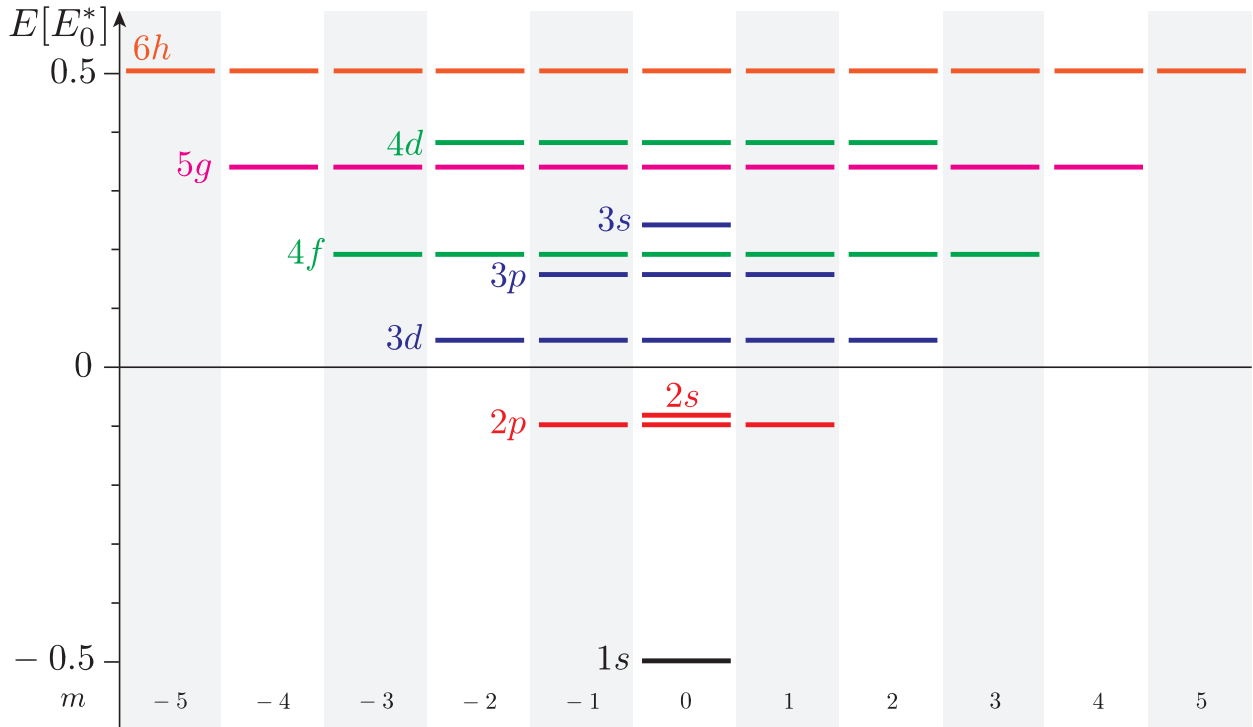
Prilikom dobijanja rezultata od značaja za ovu disertaciju, ograničićemo se isključivo na SKT čiji je poluprečnik

$$R = 8 a_0^* \approx 81.76 \text{ nm}, \quad (8.1)$$

Ova vrednost odabrana je zbog činjenice da su tada energijski nivoi raspoređeni tako da je moguće jasno izdvojiti željenu lestvičastu konfiguraciju, kao i zbog toga što će relevantne veličine, poput matricnih elemenata operatora električnog dipolnog momenta i koeficijenata spontane emisije imati pogodne (uglavnom približno jednake) vrednosti. Šema energijskih nivoa kvantne tačke će u tom slučaju biti prikazana na slici 8.2, ponovo za deset najnižih nivoa. Kao što je već rečeno, ns nivoi neće biti degenerisani, dok će stepen degeneracije nivoa np , nd , nf , ng , nh biti 3, 5, 7, 9 i 11, respektivno. Opšti zaključak je da će, iako će za različito R nivoi sa različitim n biti drugačije „isprepleteni“, energijski nivoi sa istim n biti raspoređeni tako da oni sa najvećom vrednošću orbitalnog kvantnog broja imaju najnižu energiju (mada će energijske razlike između ovih nivoa da se smanjuju kako poluprečnik kvantne tačke raste). Podsetimo se da će, prema selekcionim pravilima koja važe za EDA, dozvoljeni prelazi biti oni kod kojih je zadovoljena relacija $\Delta m = s$, gde je $s = 0, \pm 1$ broj koji daje informaciju o polarizaciji lasera koji sprežu odgovarajuće nivoe. Ova šema će nam biti od koristi u odabiru konfiguracije nastale sprežanjem svetlost–materija, kao i načina na koji će ona biti realizovana u praksi.

8.2 Efekti magnetnog polja

Kao što je objašnjeno u prethodnom poglavlju, slika 8.2 šematski prikazuje raspored najnižih energijskih nivoa SKT poluprečnika $R = 8 a_0^*$ u odsustvu spoljašnjeg magnetnog polja. Ukoliko se, pak, sistem podvrgne dejstvu magnetnog polja, doći će do Zemanovog cepanja energijskih nivoa



Slika 8.2: Šema deset najnižih energijskih nivoa SKT za $R = 8a_0^* \approx 81.76 \text{ nm}$ i $B = 0B_0^*$.

(preciznije, podnivoa) koji se karakterišu istom vrednošću l , a samim tim i do narušavanja degeneracije [167]. Ovo cepanje je izraženije što je primenjeno magnetno polje jače, pri čemu se ono može proceniti izdvajanjem članova u matricnom elementu hamiltonijana (7.38) koji zavise od B :

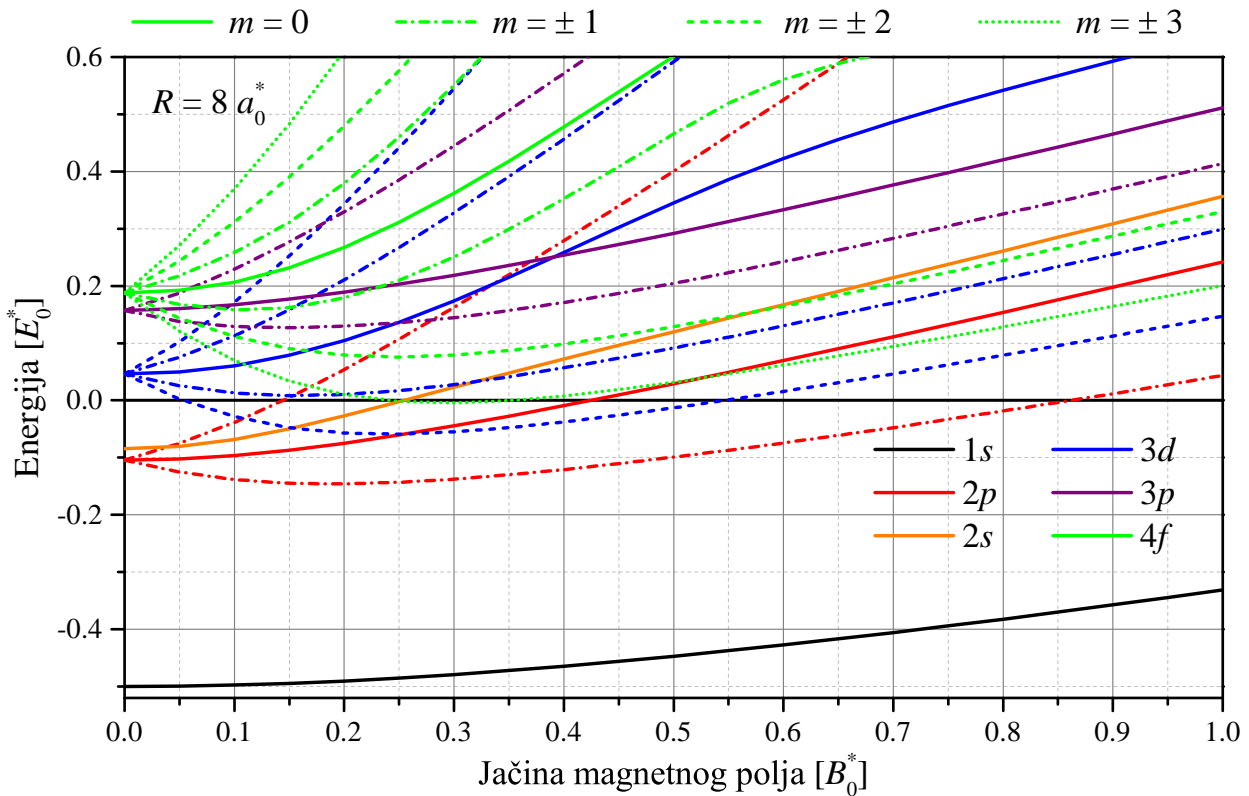
$$H_{ijl'l'}^{(\text{Zeman})} = \frac{1}{2}mB\delta_{ll'} + \frac{1}{12}B^2R^2x_i^2\delta_{ij}\delta_{ll'} - (-1)^m \frac{1}{12}B^2R^2x_i^2\delta_{ij} \times \sqrt{(2l+1)(2l'+1)} \begin{pmatrix} l & 2 & l' \\ -m & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & 2 & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

Posmatranjem ovog izraza, vidimo da će prvi sabirak sa desne strane dominirati za slaba magnetna polja, pošto je tada $B^2 \approx 0$, što za posledicu ima *linearni Zemanov efekat*, gde je cepanje nivoa okarakterisanog magnetnim kvantnim brojem m dato izrazom

$$\Delta E_m = \frac{1}{2}mB, \quad (8.3)$$

pri čemu podsećamo da je ovaj izraz zapisan u efektivnim atomskim jedinicama. Sa druge strane, u slučaju jakih magnetnih polja situacija je obrnuta, jer je tada prvi sabirak zanemarljiv u odnosu na druga dva, pa je reč o *kvadratnom Zemanovom efektu*. Za magnetna polja koja nisu ni suviše slaba ni suviše jaka, energija cepanja nivoa će, naravno, imati složeniju zavisnost od B .

Primenom MLM na GaAs SKT, sa parametrima prikazanim u tabeli 8.1, za $R = 8a_0^*$ i različite vrednosti jačine spoljašnjeg magnetnog polja, dobijaju se rezultati prikazani na slici 8.3. Na grafiku je, radi preglednosti, prikazano samo nekoliko nivoa, zaključno sa nivoom $4f$, koji je (u slučaju nultog magnetnog polja) najviši nivo koji će nam biti od interesa u ovoj disertaciji. Jasno se može primetiti da cepanje energijskih nivoa nastupa sa uključivanjem magnetnog polja, čime se energijski dijagram znatno komplikuje, odnosno energijski (pod)nivoi međusobno prepliću. Situacija je



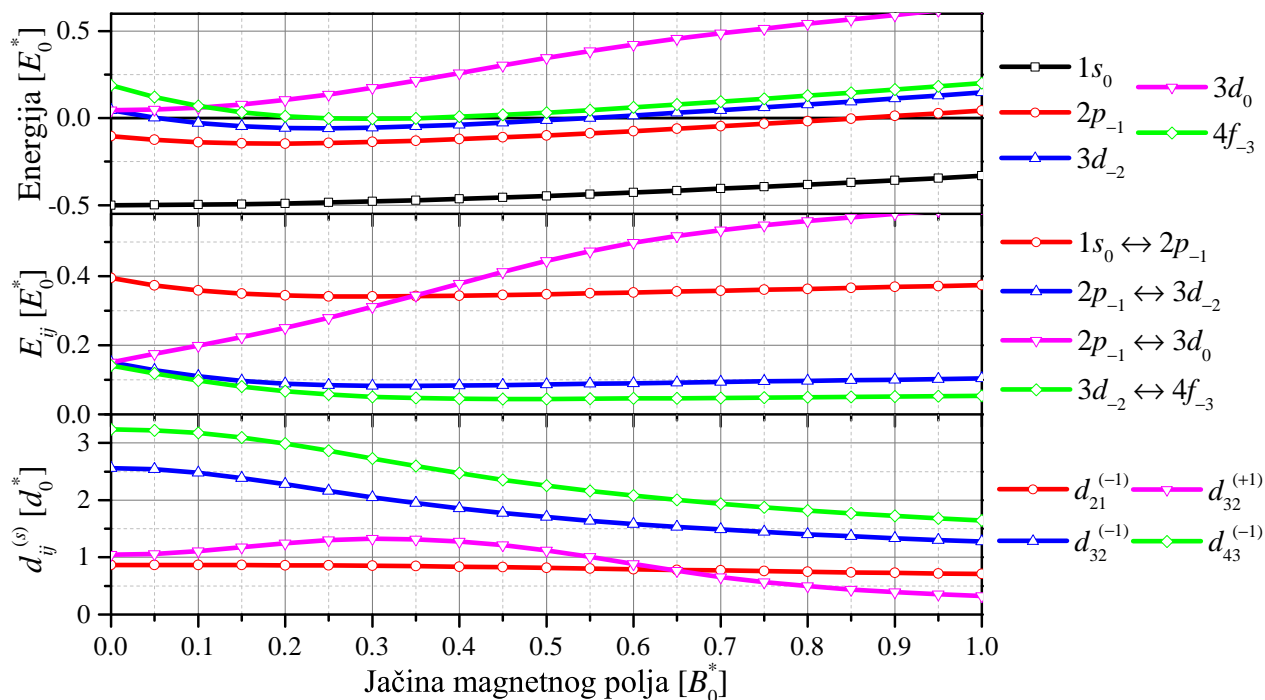
Slika 8.3: Zavisnost energije pet najnižih nivoa od jačine spoljašnjeg magnetnog polja za SKT poluprečnika $R = 8 a_0^*$.

zapravo još složenija, budući da na slici nisu prikazani viši nivoi $3s$, $5g$, $4d$, $6h$ i ostali, od kojih se svaki od njih cepa na $2l + 1$ podnivoa. Na grafiku su istim tipom linija prikazani podnivoi sa istom vrednošću $|m|$ (npr. isprekidana plava linija predstavlja kako nivo $3d_2$, tako i $3d_{-2}$), pri čemu donja od ovog para linija predstavlja podnivo sa $m < 0$, a gornja sa $m > 0$. Kod nivoa sa $m = 0$ ne postoji linearni član u (8.2), pa je Zemanov efekat čisto kvadratni, zbog čega energije ovih nivoa monotonno rastu sa porastom B . Sličan, mada izraženiji, monoton rast postoji i kod nivoa sa $m > 0$, jer ovde postoji i linearni član koji je pozitivan pa dodatno doprinosi cepanju. Na kraju, vidimo da nivoi sa $m < 0$ najpre trpe smanjenje energije, a potom i njeno povećanje sa porastom jačine magnetnog polja. Razlog za ovo je očigledan – u slučaju slabijih magnetnih polja, dominantan je prvi sabirak u (8.2) koji je negativan, pa se energija nivoa smanjuje, da bi se povećanjem B povećao i uticaj kvadratnih članova, koji doprinose rastu energije. Ipak, zbog toga što je jedan od ta dva člana uvek pozitivan a drugi može da bude i negativan, može doći do pojave prevoja (kao što je to slučaj kod nivoa $3d_0$), odnosno do toga da energije nivoa za jaka magnetna polja rastu praktično linearno. Uticaj magnetnog polja na konfiniran sistem koji ovde proučavamo može da se shvati ukoliko u razmatranje uvedemo *magnetnu dužinu*, definisanu u odeljku 3.3.2 preko jednačine (3.12). Ova jednačina u efektivnim atomskim jedinicama dobija oblik:

$$l_B = \frac{1}{\sqrt{B}}, \quad (8.4)$$

i, podsetimo se, predstavlja *karakterističnu dužinu* sistema koji se nalazi u spoljašnjem magnetnom polju jačine B [99]. Drugim rečima, u magnetnom polju, konfinirani atom vodonika je lokalizovan u delu prostora okarakterisanim dužinom l_B , i sa povećanjem B ova oblast postaje sve manja. To znači da, u slučaju vrlo jakih magnetnih polja, elektron nečistoće biva lokalizovan u delu prostora

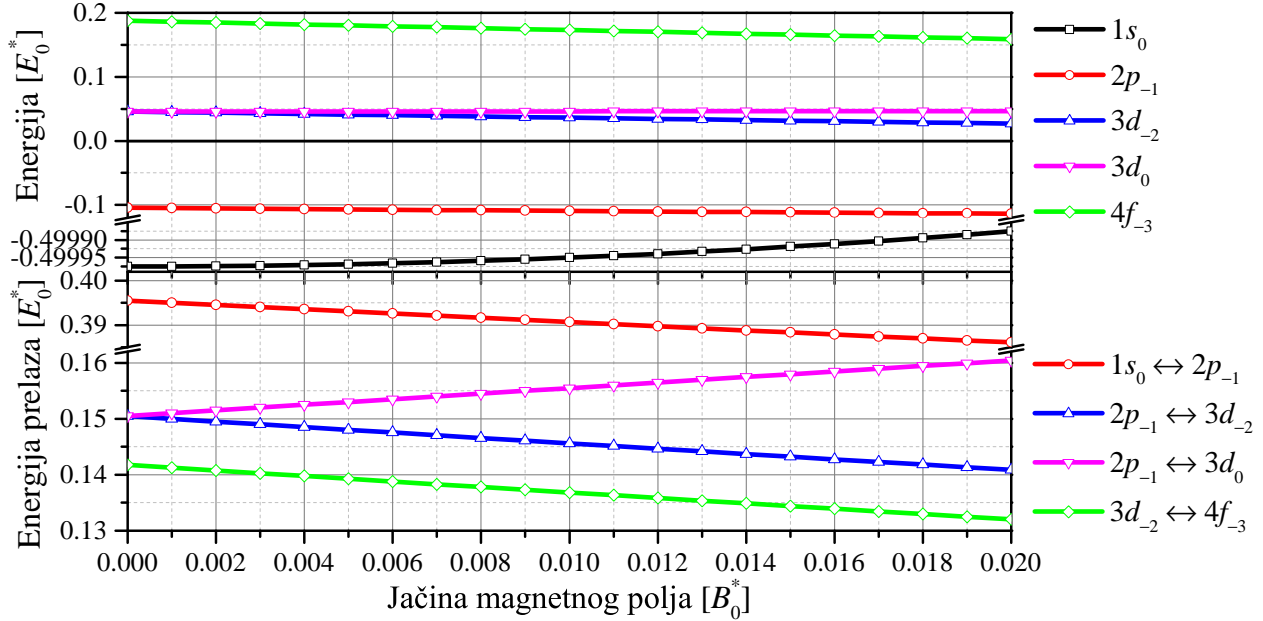
dimenzija mnogo manjim od dimenzija kvantne tačke, čime se efekat konfiniranja praktično potpuno gubi, i konfinirani atom vodonika postaje nalik slobodnom atomu koji se nalazi u spoljašnjem magnetnom polju.



Slika 8.4: Zavisnost energije (gore), energije prelaza (u sredini) i matričnog elementa operatora električnog dipolnog momenta (dole) od jačine spoljašnjeg magnetnog polja, za odabrane nivoe i SKT poluprečnika $R = 8a_0^*$.

Sada možemo da se fokusiramo na samo nekoliko od mnoštva (pod)nivoa koje smo prikazali, budući da će samo pojedini biti od interesa u ovoj disertaciji. Ovi nivoi su, konkretno, $1s_0$, $2p_{-1}$, $3d_{-2}$, $3d_0$ i $4f_{-3}$, a opravdanje za ovaj specifičan odabir biće dato u narednoj Glavi. Na slici 8.4 su, pored energija ovih nivoo, prikazane i energije prelaza sa pojedine parove, $E_{ij} = E_i - E_j$, kao i odgovarajući matrični elementi operatora električnog dipolnog momenta u zavisnosti od jačine magnetnog polja. Analizu gornjeg grafika sprovedli smo već prilikom analize grafika na slici 8.3 – primetan je blagi porast energija nivoo $1s_0$ (i nešto strmiji za $3d_0$) sa B usled kvadratnog Zemanovog efekta, dok energija preostalih nivoo najpre opada (jer je reč o nivooima sa $m < 0$), a potom raste sa porastom B . Posmatrajući srednji grafik, primećujemo da energije svih prelaza od interesa trpe izvesnu saturaciju za dovoljno veliko B , pri čemu jedino energija prelaza $2p_{-1} \leftrightarrow 3d_0$ ima monoton rast sa jačinom magnetnog polja, dok ostale energije prelaza imaju minimum. Na kraju, donji grafik prikazuje zavisnost matričnih elemenata električnog dipolnog operatora, i to onih koji će biti nenulti, tj. povezani sa laserima polarizovanim tako da indukuju željene prelaze. Tako će, za prelaz $2p_{-1} \leftrightarrow 3d_0$, nenulti matrični element $d_{pq}^{(s)}$ biti onaj sa $s = +1$, a u preostala tri slučaja sa $s = -1$. Pored toga, primećujemo da sa porastom magnetnog polja vrednosti $d_{21}^{(-1)}$ i $d_{32}^{(+1)}$ najpre rastu a potom opadaju, iako je ova promena skoro neprimetna u slučaju $d_{21}^{(-1)}$ [197], dok se za veličine $d_{32}^{(-1)}$ i $d_{43}^{(-1)}$ može uočiti njihovo monotono opadanje.

Iako je pomoću prethodnih grafika data šira slika zavisnosti energija nivoo, energija prelaza i matričnih elemenata operatora električnog dipolnog momenta od jačine spoljašnjeg magnetnog polja, fokus ove disertacije biće na uticaju vrlo slabih magnetnih polja (otprilike do vrednosti



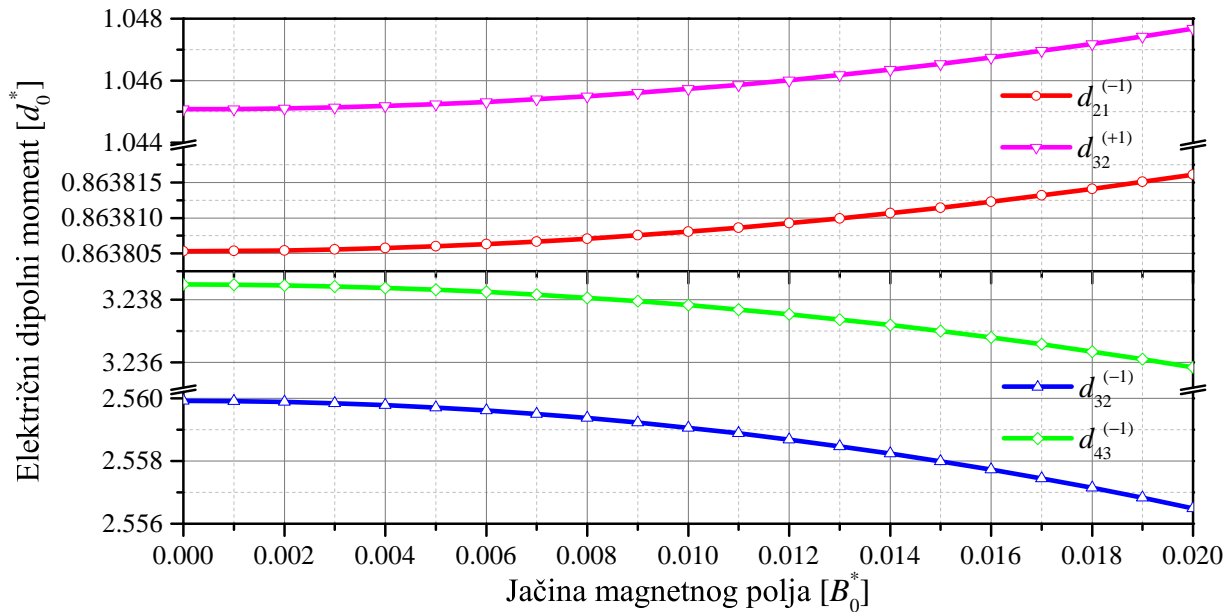
Slika 8.5: Zavisnost energije (gore) i energije prelaza (dole) od jačine spoljašnjeg magnetnog polja, za odabrane nivoe, vrlo slaba magnetna polja i SKT poluprečnika $R = 8a_0^*$.

$B = 0.02 B_0^* \approx 126.2 \text{ mT}$), gde je dominantan *linearni* Zemanov efekat. Zbog toga smo se opredelili da zavisnost veličina prikazanih na slici 8.4 od B prikažemo ponovo, ali u drugačijem, znatno manjem opsegu jačina spoljašnjeg magnetnog polja [3]. Tako su energija, odnosno energija prelaza između odabranih nivoea, prikazane i na slici 8.5. Posmatranjem gornjeg grafika, vidimo da energije podnivoa sa $m < 0$ linearno opadaju sa porastom B , što je u skladu sa ranijim zaključcima da je tada dominantan linearni Zemanov efekat. Sa druge strane, energije oba nivoea sa $m = 0$ su praktično konstantne – istini za volju, obe energije trpe blagi, ali neznatan porast sa povećanjem jačine magnetnog polja, što je posledica kvadratnog Zemanovog efekta usled činjenice da je linearni član u (8.2) jednak nuli jer je $m = 0$. Ovo povećanje se najbolje vidi za nivo $1s_0$, jer je u ovom slučaju skala znatno uvećana. Što se tiče donjeg grafika na kome su prikazane energije prelaza, vidimo da se jedino energija prelaza $2p_{-1} \leftrightarrow 3d_0$ povećava sa povećanjem B , budući da $E_{2p_{-1}}$ opada, a E_{3d_0} gotovo da ne zavisi od B . Nasuprot ovome, energije preostalih prelaza opadaju kako magnetno polje raste, i to istom brzinom – sve tri krive imaju isti (negativan) koeficijent pravca. Objasnjenje ovakvog ponašanja leži u tome da se magnetni kvantni brojevi nivoea za koje računamo ove energije razlikuju uvek za jedinicu. Ukoliko u izrazu (8.2) zanemarimo kvadratne članove, za energiju prelaza u sva tri slučaja u efektivnim atomskim jedinicama imaćemo

$$E_{ij} = E_i - E_j = E_i^{(0)} + \Delta E_{m_i} - (E_j^{(0)} + \Delta E_{m_j}) = E_{ij}^{(0)} + \frac{1}{2}(m_i - m_j)B = E_{ij}^{(0)} - \frac{1}{2}B, \quad (8.5)$$

gde je $E_i^{(0)}$ energija, $E_{ij}^{(0)} = E_i^{(0)} - E_j^{(0)}$ energija prelaza u slučaju kada je $B = 0 B_0^*$, a $\Delta m = m_i - m_j = -1$ jer se prelaz vrši na viši nivo sa manjom vrednošću magnetnog kvantnog broja. Dakle, koeficijent pravca sve tri krive bi trebalo da bude -0.5 , što se sa grafika i vidi, pošto vrednost energija prelaza opadne za oko $0.01 E_0^*$ dok jačina magnetnog polja poraste za $B = 0.02 B_0^*$. Slično, za koeficijent pravca krive koja opisuje prelaz $2p_{-1} \leftrightarrow 3d_0$ dobijamo vrednost 0.5 , jer je reč o prelazu na nivo sa većom vrednošću magnetnog kvantnog broja.

Na kraju, razmotrimo i zavisnost matričnog elementa operatora električnog dipolnog momenta od jačine magnetnog polja za iste prelaze koji su nam do sada bili interesantni (slika 8.6). Vidimo



Slika 8.6: Zavisnost matricnog elementa operatora električnog dipolnog momenta od jačine spoljašnjeg magnetnog polja, za odabrane nivoe, vrlo slaba magnetna polja i SKT poluprečnika $R = 8a_0^*$.

da matricni elementi $d_{21}^{(-1)}$ i $d_{32}^{(+1)}$ rastu sa B , što ide u prilog diskusiji donjeg grafika na slici 8.4. Kako je deo grafika skaliran, vidimo da se $d_{21}^{(-1)}$ menja izuzetno sporo – tek do na šestu decimalu, pa je ovu veličinu praktično moguće smatrati konstantnom za opseg jačine spoljašnjeg magnetnog polja od interesa. Sa druge strane, kao i u slučaju većeg opsega za B , vidimo da $d_{32}^{(-1)}$ i $d_{43}^{(-1)}$ opadaju sa porastom jačine magnetnog polja. Može se primetiti da je brzina opadanja ovih veličina skoro potpuno ista, a istovremeno jednaka brzini porasta matricnog elementa $d_{32}^{(+1)}$. Naravno, i ove promene nisu velike – u datom opsegu B , ove veličine se promene tek do na treću decimalu. Ukupno govoreći, može se smatrati da su, za izuzetno slaba magnetna polja, matricni elementi operatora električnog dipolnog momenta praktično nepromenljivi, i da dominantan efekat magnetno polje ima zapravo na energije prelaza.

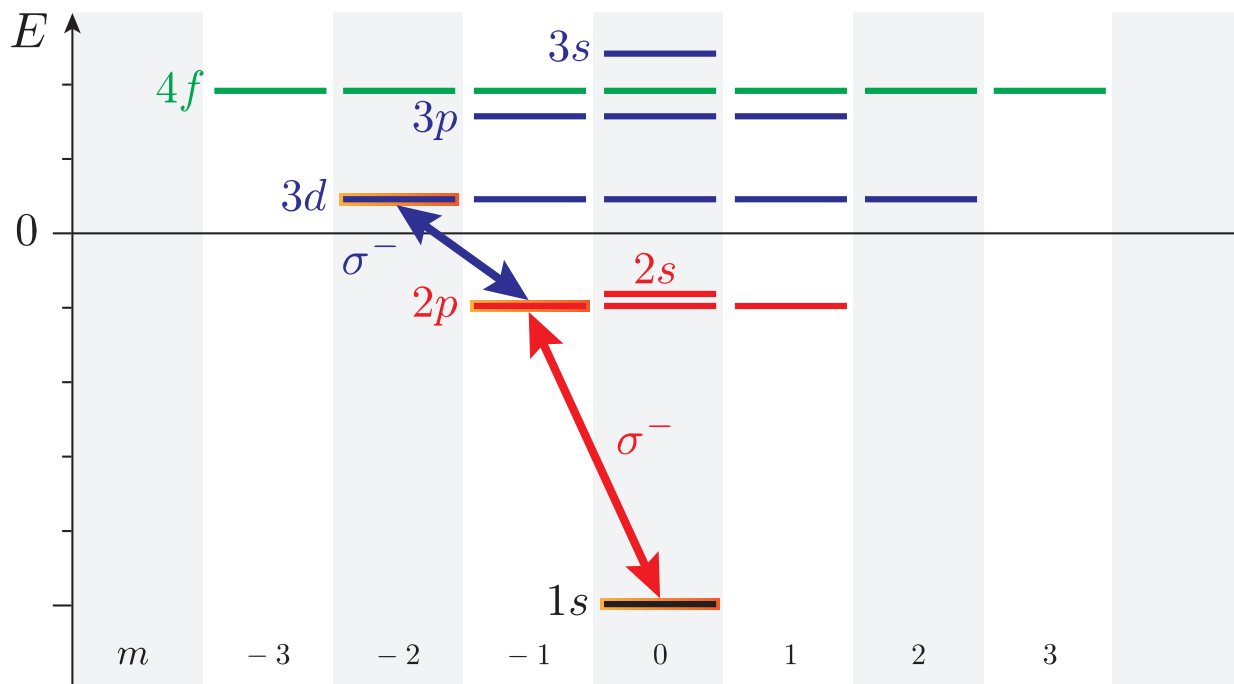
9 Spora svetlost u sfernim kvantnim tačkama

Nakon što smo postali upoznati sa energijskom strukturom GaAs sferne kvantne tačke uronjene u dielektrik ili poluprovodnik sa znatno većom širinom zabranjene zone od GaAs, možemo da se posvetimo proučavanju interakcije svetlosti sa sredinom sačinjenom od pomenutih kvantnih tačaka. Da bismo ovo izveli, iskoristićemo parametre prikazane u tabeli 8.1, kao i dodatne parametre koji će zavisiti od izbora konfiguracije. Konkretno, u ovoj Glavi će biti reči o prostiranju sondirajućeg polja u prisustvu drugog, kontrolnog lasera, koji sprežanjem sa energijskim nivoima kvantne tačke formiraju konfiguraciju sa tri nivoa. Proučavaće se situacija kada je srednji nivo nedegenerisan (zatvoren sistem), odnosno trostruko degenerisan (otvoren sistem). Uvođenjem dodatnog laserskog polja omogućićemo razmatranje (zatvorenog) sistema sa četiri nivoa, pri čemu ćemo se zadržati na dva nezavisna slučaja: kada dodatno polje tretiramo kao kontrolno, odnosno kada ga smatramo sondirajućim. U drugom slučaju, kada de fakto postoje dva sondirajuća polja, posmatraćemo kako intenzitet (tj. Rabijeva frekvencija) jednog lasera utiče na promenu grupne brzine drugog, što pruža dodatni mehanizam za kontrolu prostiranja laserskih polja. Na posletku, razmotrićemo uticaj spoljašnjeg stacionarnog magnetnog polja na prostiranje sondirajućeg pulsa u konfiguracijama kako sa tri, tako i sa četiri nivoa, i prikazati kako se, barem u principu, dobijeni efekti mogu iskoristiti za primenu u magnetometriji.

9.1 Spora svetlost u zatvorenom sistemu sa tri nivoa

Krenimo od konfiguracije sa tri nivoa i dva elektromagnetna polja koja ove nivoe sprežu. U slučaju SKT koju razmatramo, čiji poluprečnik ima fiksiranu vrednost $R = 8a_0^* \approx 81.76 \text{ nm}$, kao i u odsustvu magnetnog polja, šema najnižih nivoa data je na slici 8.2, koja je ovoga puta prikazana konciznije na slici 9.1. Sondirajuće elektromagnetno polje (crvena linija sa strelicama na oba kraja) biramo tako da pobuđuje prelaz sa najnižeg nivoa $1s_0$ na nivo $2p_{-1}$, koji je dozvoljen u EDA ukoliko je zadovoljeno selekciono pravilo (7.63). Pošto je ovde $\Delta m = s = -1$, tj. dozvoljen je σ^- prelaz, sondirajući laser mora biti *desno kružno polarizovan* ($\vec{\epsilon} = \vec{e}_{-1}$). Na sličan način, kontrolno polje (plava linija) pobuđuje prelaze sa nivoa $2p_{-1}$ na $3d_{-2}$, što ponovo odgovara σ^- prelazu i nameće isti odabir polarizacije. Izbor ovih nivoa izvršen je tako da se obezbedi raspad sa višeg nivoa isključivo na jedan niži i ni na jedan drugi – $3d_{-2}$ se raspada samo na $2p_{-1}$, a ovaj pak samo na $1s_0$, sve u skladu sa selekcionim pravilima. Na ovaj način, nije potrebno uvođenje dodatnih nivoa i efekata u razmatranje. Poređenjem sa slikom 5.1 (a), vidimo da odabrane nivoe možemo zapisati u notaciji korišćenoj za najopštiji slučaj, preciznije $|1\rangle \equiv 1s_0$, $|2\rangle \equiv 2p_{-1}$ i $|3\rangle \equiv 3d_{-2}$.

Na početku, pretpostavićemo da je envelope sondirajućeg lasera na ulazu u materijalnu sredinu data u obliku Gausovog pulsa čiji je profil dat jednačinom (6.158). Sa druge strane, kontrolni laser tretiraćemo kao kontinualni (monohromatski), tj. sa envelopom koja ima istu vrednost u svim tačkama prostora i svim trenucima vremena. Relevantni parametri koji se odnose kako na karakteristike same sredine, tako i na svojstva sondirajućeg lasera, prikazani su u tabeli 9.1. Dodatni



Slika 9.1: Šema sedam najnižih energijskih nivoa sferne kvantne tačke za $R = 8a_0^*$ i $B = 0B_0^*$, zajedno sa laserskim poljima koja ih sprežu (sondirajuće – crvena i kontrolno – plava linija sa strelicama na oba kraja) i njihovim polarizacijama, čineći zatvoren sistem sa tri nivoa. Nivoi koji čine datu konfiguraciju uokvireni su narandžastom bojom.

parametri biće dati naknadno, a bilo koje korišćenje drugačijih vrednosti od onih prikazanih u tabeli biće eksplicitno naznačeno. MB jednačine biće rešavane primenom metoda FT, gde će se envelope sondirajućeg pulsa u proizvoljnoj tački prostora unutar materijalne sredine dobiti numeričkim računanjem integrala (6.182), pomoću nekog od dostupnih programskih paketa.

Tabela 9.1: Vrednosti nekih od parametara koji karakterišu materijalnu sredinu i sondirajući laserski puls, osim ako nije drugačije naznačeno.

Simbol	Opis	Vrednost	Jedinica
R	poluprečnik kvantne tačke	8	a_0^*
\mathcal{N}	gustina broja kvantnih tačaka u sredini	$5 \cdot 10^{20}$	m^{-3}
γ_0	„jedinični” koeficijent raspada	10^9	Hz
D	dužina uzorka	200	μm
E_{p0}	amplituda sondirajućeg polja	250	V/m
t_0	trenutak pojave maksimuma sondirajućeg pulsa	100	ps
$\Delta_p^{(0)}$	razdešenost sondirajućeg polja za $B = 0B_0^*$	0	Hz
$\Delta_c^{(0)}$	razdešenost kontrolnog polja za $B = 0B_0^*$	0	Hz

Profil sondirajućeg pulsa na izlazu iz materijalne sredine ($z = D$) za $B = 0B_0^*$ prikazan je na slici (9.2) za različite vrednosti spektralne poluširine w i odnosa E_c/E_{p0} između amplituda jačina električnog polja kontrolnog i sondirajućeg lasera, koji de fakto određuje Rabijevu frekvenciju, odnosno intenzitet kontrolnog polja. Pretpostavljamo da je dekoherencija mahom posledica elektron-fononske interakcije, pa ćemo imati $\lambda_{ij} = \gamma_{ij}$, a pritom uzimamo da je $\gamma_{31} = \gamma_{21} = 10\gamma_0 = 10\text{GHz}$.

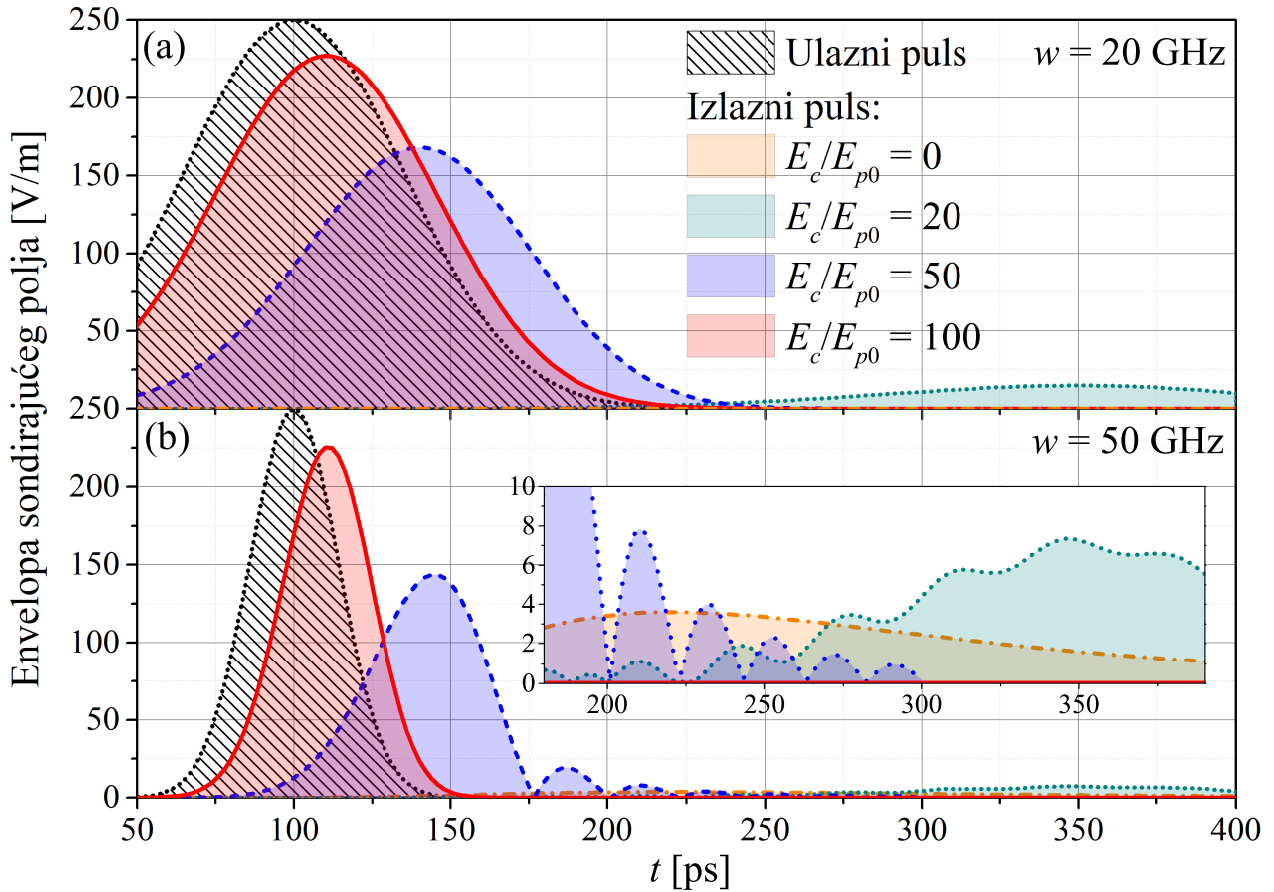
Ovde je konkretno $\Omega_{p0} = 1.67 \text{ GHz}$ a vrednosti Ω_c za nekoliko najinteresantnijih odnosa E_c/E_{p0} prikazane su u tabeli 9.2. Vidimo je u svim ovim situacijama (naravno, osim u slučaju odsustva kontrolnog polja, što se jednostavno svodi na sistem sa dva nivoa) zadovoljen uslov $\Omega_{p0} \ll \Omega_c$, što opravdava linearizaciju OB jednačina i korišćenje metoda FT.

Tabela 9.2: Veza između jačina električnog polja i Rabijevih frekvencija kontrolnog lasera, za zatvoren sistem sa tri nivoa, nekoliko vrednosti od interesa i za $B = 0 B_0^*$. Poređenje je dato i u odnosu na odgovarajuće vrednosti za sondirajuće polje, što je u ovom slučaju $E_{p0} = 250 \text{ V/m}$ i $\Omega_{p0} = 1.67 \text{ GHz}$.

E_c/E_{p0}	E_c [kV/m]	Ω_c [GHz]	Ω_c/Ω_{p0}
0	0	0	0
20	5	99.06	59.27
50	12.5	247.66	148.18
100	25	495.32	296.35

Na slici 9.2 (a), koja odgovara slučaju $w = 20 \text{ GHz}$, jasno se vidi da, u svim navedenim slučajevima, izlazni puls zadržava Gausov profil ulaznog pulsa. Ipak, razlike u visinama i širinama ovih pulseva sugerišu da puls trpi izvesne gubitke sa jedne, odnosno disperziju sa druge strane. Za vrednosti jačine kontrolnog polja bliske nuli, puls je ili potpuno apsorbovan (narandžasta linija koja odgovara situaciji $E_c = 0$ na ovom grafiku leži potpuno na x -osi) ili drastično smanjenog intenziteta, sa приметnim kašnjenjem u odnosu na pulseve u prisustvu jačeg kontrolnog polja. Sa porastom jačine kontrolnog polja, konkretno, dolazi do manjih gubitaka, ali i do povećanja grupne brzine sondirajućeg pulsa. Sa druge strane, propagacija pulsa, čija je spektralna poluširina na ulazu $w = 50 \text{ GHz}$, prikazana je na slici 9.2 (b). Jasno je da je, u odnosu na slučaj pod (a), trajanje pulsa kraće, što je u skladu sa relacijama neodređenosti koje povezuju vremensku i spektralnu širinu pulsa. Pored toga, vidimo da je efekat kontrolnog polja sličan onom na gornjem grafiku – sa povećanjem E_c , dolazi do smanjenja gubitaka kod izlaznog pulsa ali i do povećanja njegove grupne brzine. Međutim, приметna je razlika u profilu izlaznog pulsa, posebno za slučaj $E_c/E_{p0} = 50$ (plava isprekidana linija), gde vidimo da se, prvobitno Gausov puls „raspao” na nekoliko delova. Pri tome je vodeći, asimetrični deo, praćen većim brojem manjih pulseva, koji formiraju svojevrsan „rep” sondirajućeg pulsa, i koji sa vremenom slabe. Na umetnutom grafiku se takođe može videti kako za $E_c/E_{p0} = 20$ (zeleno tačkasta linija) postoji jasno odstupanje od Gausovog profila izlaznog pulsa, pri čemu, sa jedne strane, ovu strukturu ne karakteriše pojava „repa” kao u prethodnom slučaju, dok je, sa druge strane, puls toliko apsorbovan da se ne može upotrebiti u praktične svrhe. Vidimo i da se u slučaju odsustva kontrolnog polja (narandžasta crta-tačka linija) ovde javlja puls na izlazu, mada ponovo sa ogromnom apsorpcijom (i disperzijom), iako se može reći da približno zadržava „gausovski” karakter.

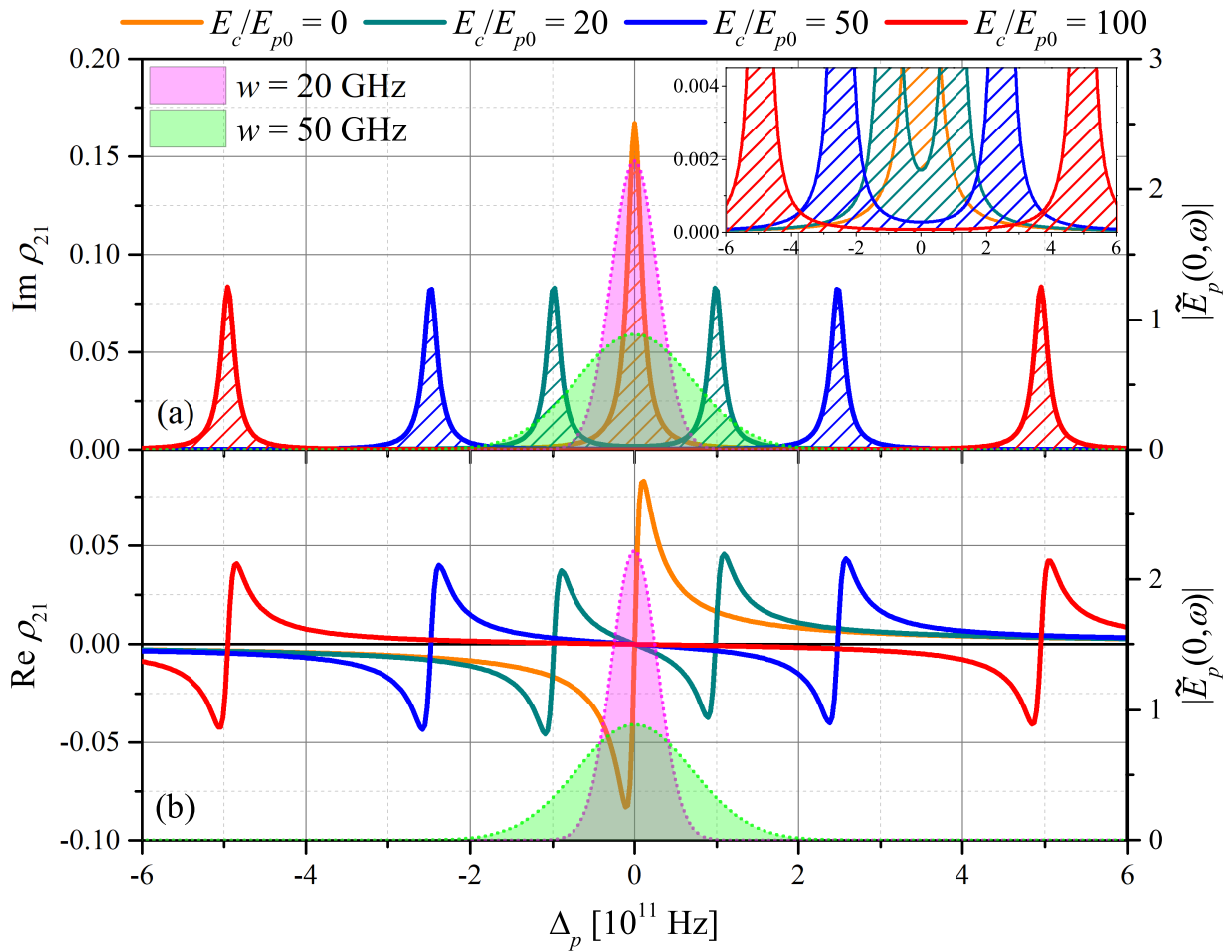
Ponašanje pulsa na izlazu iz sredine može se objasniti pomoću apsorpcione i disperzione krive u stacionarnom režimu, prikazanih na slici 9.3 (a) i (b), respektivno, za slučaj nultog spoljašnjeg magnetnog polja (očigledno, dozvoljeno je da razdešenost sondirajućeg polja uzima različite vrednosti, ali je i dalje $\Delta_c = 0$). Imaginarni i realni deo koherencije ρ_{21} računati su u prvom redu teorije perturbacija, korišćenjem izraza (6.34) i (6.35). Na graficima je, radi poređenja, prikazan i spektralni profil ulaznog pulsa za dve razmatrane vrednosti w , kao apsolutna vrednost izraza (6.166). Kao što je očekivano, u odsustvu kontrolnog polja postoji samo jedan apsorpcioni pik centriran oko $\Delta_p = 0$, koji dovodi do apsorpcije sondirajućeg pulsa. Uključivanjem kontrolnog polja, dolazi do cepanja ovog pika na dva manja apsorpciona maksimuma, simetrično raspoređena oko koordinatnog početka i jednakih visina. Ovi maksimumi predstavljaju AT pikove, čiji je profil običan lorencijan, dok je



Slika 9.2: Vremenska zavisnost envelope električnog polja sondirajućeg pulsa na izlazu iz sredine za različite jačine kontrolnog polja, kao i za (a) $w = 20$ GHz i (b) $w = 50$ GHz. Ulazni puls prikazan je tačkastom linijom i šrafiranom površinom ispod nje.

ukupna apsorpciona kriva data kao zbir ova dva lorencijana, u skladu sa jednačinom (6.128). Kako za minimum apsorpcije važi $\Delta_p + \Delta_c = 0$, to je u našem slučaju $\Delta_p^{\min} = 0$, a vrednost apsorpcije u minimumu određena je izrazom (6.36). Primetimo da se kontrolna Rabijeva frekvencija, koeficijenti raspada i sondirajuća Rabijeva frekvencija razlikuju za po red veličine, što nam omogućava da iskoristimo vezu $\Omega_p \ll \gamma_{ij} \ll \Omega_c$, odakle dobijamo da je $\left(\text{Im}\rho_{21}^{(1)}\right)_{\min} = \gamma_{31}\Omega_p/\Omega_c^2$. Ovo znači da će povećanjem Ω_c doći do smanjenja vrednosti minimuma apsorpcije, što se sa umetnutog grafika na slici 9.3 (a) i vidi. Ovaj zaključak direktno objašnjava povećanje gubitaka izlaznog pulsa sa smanjenjem kontrolne Rabijeve frekvencije.

U slučaju spektralno užeg pulsa ($w = 20$ GHz, obojen ružičasto na slici 9.3), vidimo da se on praktično potpuno apsorbuje u sredini u slučaju $E_c = 0$, s obzirom na to da se sve spektralne komponente pulsa nalaze u oblasti drastično povećane apsorpcije. Drugim rečima, pošto je širina pikova određena koeficijentom raspada γ_{21} , zbog činjenice da je $w \sim \gamma_{21}$ sledi da puls trpi kompletnu apsorpciju. Ovo bi se, naravno, desilo i u slučaju da je spektralna poluširina ulaznog pulsa manja. Nasuprot tome, kada je $E_c > 0$, dolazi do primetnog povećanja transparentnosti sredine i prolaska pulsa kroz nju, sa manjim ili većim gubicima, kao posledica nenulte apsorpcije na dnu prozora transparentnosti. Razlika u grupnim brzinama pulseva za različito E_c posledica je različitih nagiba disperzione krive u tim situacijama. Konkretno, sa porastom E_c (odnosno Ω_c) smanjuje se apsolutna vrednost ovog nagiba (što je direktno povezano sa povećanjem grupe brzine pulsa), što je u skladu sa jednačinom

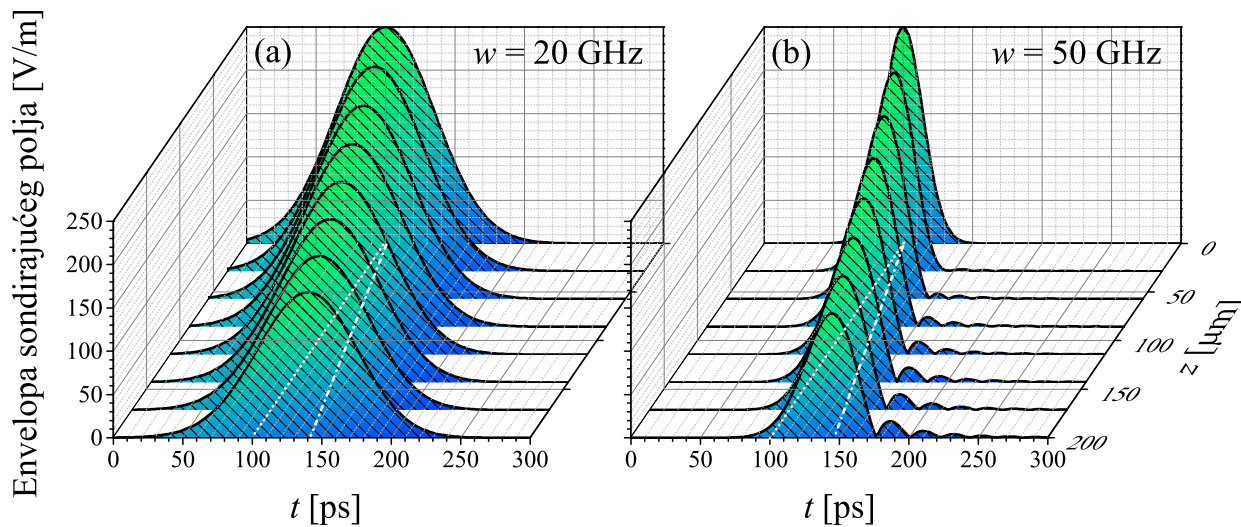


Slika 9.3: (a) Apsorpciona i (b) disperziona kriva za sistem sa tri nivoa u lestvičastoj konfiguraciji, za nekoliko različitih vrednosti jačine električnog polja kontrolnog lasera, za $B = 0B_0^*$ i $\Delta_c = 0$. Na oba grafika prikazan je i spektralni profil ulaznog pulsa (tačkaste linije sa obojenom površi ispod njih) za dve različite vrednosti spektralne širine, $w = 20$ GHz i 50 GHz.

(6.42) za vrednost ovog nagiba u minimumu apsorpcije. Kako je puls dovoljno uzak, vrednost ovog nagiba se vrlo malo menja u oblasti frekvencija koja odgovara spektralnim komponentama pulsa, pa će se svaka od ovih komponenti kretati istom grupnom brzinom, koja je utoliko veća što je jačina kontrolnog polja manja. Sa druge strane, kako je *fazna* brzina određena direktno vrednošću $\text{Re}\rho_{21}$, to će različite spektralne komponente imati različite fazne brzine, što dovodi do disperzije, odnosno vremenskog širenja pulsa. Tako vidimo da se, u slučaju $E_c/E_{p0} = 100$, disperziona kriva u oblasti frekvencija gde „leže” i spektralne komponente pulsa vrlo malo menja, pa će i fazne brzine komponenti imati bliske vrednosti – drugim rečima, disperzija će biti zanemarljivo mala. Ovo, međutim, prestaje da važi kako se jačina kontrolnog polja smanjuje, te će u tom slučaju nastupati sve veća disperzija, odnosno vremensko širenje pulsa na izlazu iz sredine.

Situacija je nešto drugačija kod pulsa sa $w = 50$ GHz (obojen zelenom bojom na slici 9.3). Iako je objašnjenje gubitaka i disperzije istovetno onom u prethodnom slučaju, ovde se pojavljuje još jedan faktor zbog koga se izlazni puls znatno razlikuje od onog u slučaju manje spektralne poluširine. Primitimo, najpre, da i ovde, kao u slučaju spektralno užeg pulsa, za $E_c/E_{p0} = 100$ izlazni profil pulsa zadržava „gausovski” karakter, kao i da se disperzija može zanemariti. Ipak, sa smanjenjem jačine kontrolnog polja, promene u nagibu disperzione krive su izraženije, pri čemu puls sada sa-

drži i spektralne komponente većih frekvencija (u odnosu na prvi razmatrani slučaj), koje mogu da „zahvate” i oblasti gde disperziona kriva drastično menja nagib. To znači da će postojati spektralne komponente u okviru istog pulsa koje će se kretati različitim *grupnim* brzinama, što vidimo na grafiku kao „rep” izlaznog pulsa za $E_c/E_{p0} = 50$, koji prati vodeći asimetrični deo. Ovu pojavu ćemo često nazivati i *raspadom* sondirajućeg pulsa, aludirajući da inicijalni Gausov profil pulsa pri prostiranju kroz sredinu biva primetno modifikovan. Još složenije ponašanje vidimo u slučaju kada je $E_c/E_{p0} = 20$ – iako je apsorpcija velika, vidi se da je izlazni puls modifikovan tako da više ne može da se uoči ni vodeći deo koji barem malo podseća na Gausov puls. Razlog za ovo ćemo kratko pomenuti kasnije, ali se na ovom rezultatu nećemo previše zadržavati, budući da nam nije od daljeg interesa, i prikazan je samo radi ilustracije željenih efekata.



Slika 9.4: Prostorna i vremenska zavisnost envelope električnog polja sondirajućeg pulsa pri prostiranju kroz sredinu, za $E_c/E_{p0} = 50$, kao i za (a) $w = 20$ GHz i (b) $w = 50$ GHz. Bele isprekidane linije služe kako bi se vizuelno lakše ispratila propagacija pulsa.

Na kraju ovog odeljka, prikažimo i vremenski profil sondirajućeg pulsa pri prostiranju kroz sredinu, tj. u zavisnosti od propagacione koordinate z (slika 9.4) [4]. Pri dobijanju ovih rezultata, odabrali smo kontrolno polje za koje važi $E_c/E_{p0} = 50$, dok su vrednosti ostalih parametara nepromenjene (naravno, ponovo je $\Delta_p = 0$). Prostorno-vremenski profil pulsa prikazan je ponovo za dve vrednosti spektralne širine, odakle jasnije vidimo kako se visina envelope pulsa smanjuje sa propagacijom, a u slučaju na slici (b) i kako postepeno dolazi do pojave „repa” pulsa. Bele isprekidane linije su povučene kako bi se lakše uočio položaj maksimuma izlaznog pulsa, a sve u cilju procene grupne brzine pulsa. Tako, vidimo da na slici 9.4 (a) maksimum izlaznog pulsa (čija je poluširina $w = 20$ GHz) nastupa u trenutku $t_m = 140$ ps, odakle možemo da procenimo grupnu brzinu pulsa pomoću izraza $v_g = D/(t_m - t_0)$ i dobijemo vrednost $v_g = 5 \cdot 10^6$ m/s. Slično, posmatranjem slike 9.4 (b), dobijamo da je, za puls sa $w = 50$ GHz, vreme pojave maksimuma $t_m = 144$ ps, što za grupnu brzinu daje $v_g = 4.55 \cdot 10^6$ m/s. Dakle, spektralno širi sondirajući puls je nešto sporiji, pri čemu su obe vrednosti oko 60 puta manje od brzine svetlosti u vakuumu. Preciznije računanje ovih parametara biće sprovedeno kasnije, uz pomoć izraza dobijenih u poglavlju 6.3.4.

U cilju nešto detaljnijeg objašnjenja gornjih grafika, podsetimo se da je širina prozora transparentnosti, odnosno rastojanje između apsorpcionih maksimuma dato izrazom (6.37), koji se u našem slučaju ($\Omega_p \ll \gamma_{ij} \ll \Omega_c$) svodi na (6.41). Definišimo sada poluširinu prozora kao $w_{AT} = \Delta_{AT}/2$, odakle sledi da je $w_{AT} = \Omega_c$. Dakle, u slučaju jakog kontrolnog polja, širinu prozora u potpunosti

određuje vrednost kontrolne Rabijske frekvencije. Ukoliko uporedimo ovu vrednost sa spektralnom poluširinom, dobićemo sledeće brojne vrednosti:

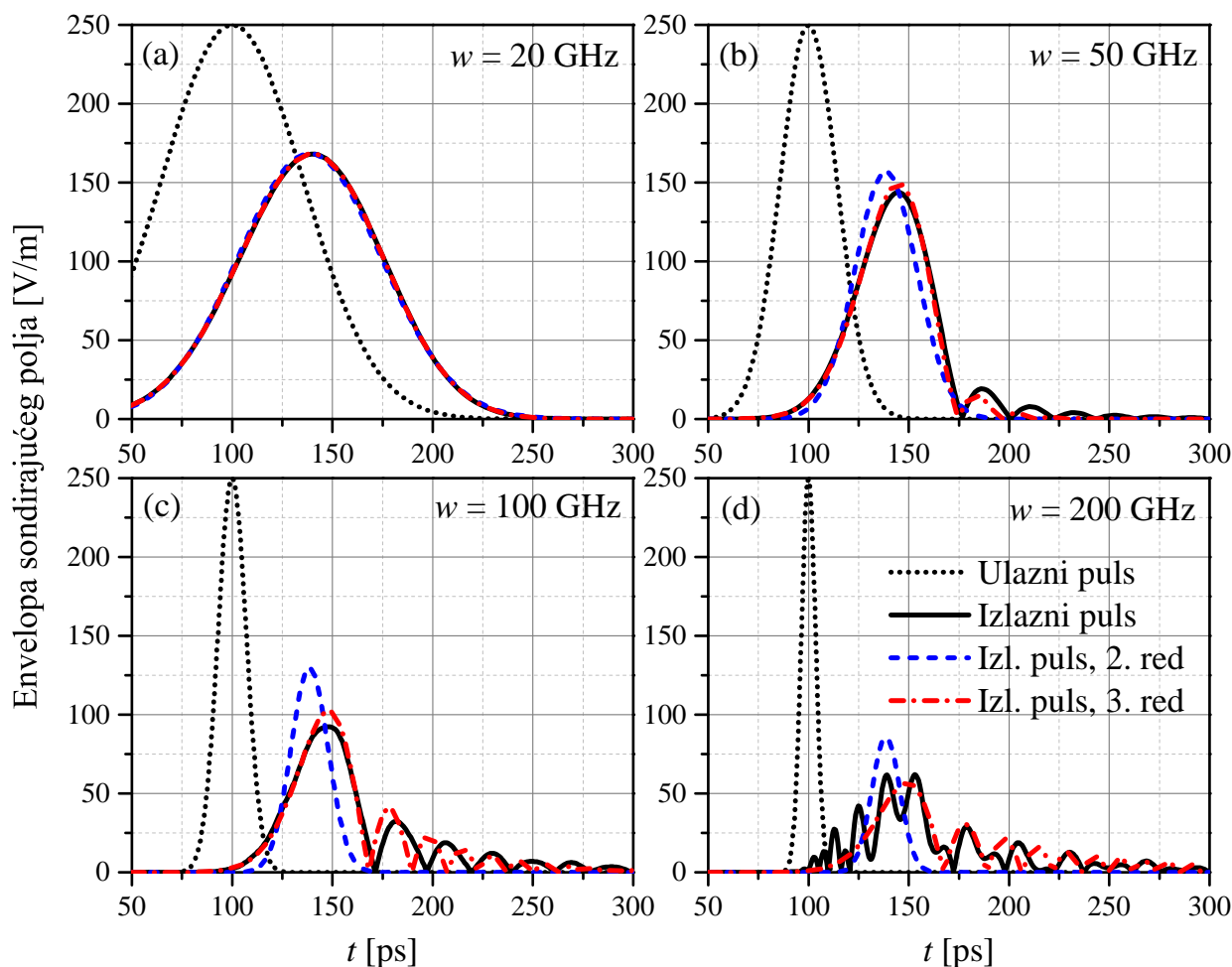
$$\frac{w_{AT}}{w} = \begin{cases} 12.37, & w = 20 \text{ GHz}, \\ 4.95, & w = 50 \text{ GHz}, \end{cases} \quad (9.1)$$

za slučaj $E_c/E_{p0} = 50$ na koji smo se fokusirali na slici 9.4. Kada je $w = 20$ GHz, možemo praktično da kažemo da je $w \ll w_{AT}$, te će puls propagirati bez narušavanja „ulaznog” Gausovog profila, sa gubicima koji su posledica isključivo nenulte vrednosti apsorpcije na dnu prozora transparentnosti. Vidimo, takođe, da se, zbog nezanemarljive disperzije, trajanje pulsa povećava. Svi pobrojani efekti posledica su činjenice da je u disperzionoj relaciji (6.178), koja figuriše u krajnjem izrazu za envelopu pulsa na izlazu iz sredine, moguće zanemariti sve članove trećeg i viših redova, što nas dovodi do izraza $\kappa(\omega) = \kappa_0 + \kappa_1\omega + \kappa_2\omega^2$. Detaljnije objašnjenje ovih veličina dato je u poglavlju 6.3.3. Na ovom mestu, podsetimo se samo da je koeficijent κ_0 povezan sa apsorpcijom, κ_1 sa grupnom brzinom, a κ_2 sa disperzijom sondirajućeg pulsa. Nasuprot ovome, kada je $w = 50$ GHz, vidimo da su poluširine pulsa i prozora transparentnosti uporedive. Tada će izvestan deo spektralnih komponenti, čije su frekvencije znatno udaljene od centralne frekvencije, trpeti pojačanu apsorpciju, pošto će se nalaziti bliže maksimumima apsorpcije. Ovo „odsecanje” frekvencija najudaljenijih od centralne iz sondirajućeg pulsa dovodi do gubitka „gausovskog” karaktera kod njegovog spektralnog, a samim tim i kod vremenskog profila [4]. U ovom slučaju, kubni član $\kappa_3\omega^3$ u disperzionoj relaciji nije moguće zanemariti, pa se ona svodi na već dobijeni izraz (6.199). Koeficijent κ_3 je, stoga, povezan sa *disperzijom grupne brzine*, tj. činjenicom da će se različite spektralne komponente pulsa prostirati kroz sredinu različitim grupnim brzinama. U situaciji kao što je ona prikazana na umetnutom grafiku na slici 9.2 (b) za $E_c/E_{p0} = 20$, za kompletno opisivanje propagacije pulsa potrebno je uzeti u obzir i članove viših redova po frekvenciji.

9.1.1 Poređenje numeričkog i aproksimativnog analitičkog rešenja

Dosadašnji rezultati iz ove glave dobijeni su numeričkim rešavanjem integrala (6.183), gde je već uzet u obzir Gausov karakter ulaznog pulsa. U ovom izrazu, veličina $\kappa(\omega)$ data je pomoću relacije (6.178), odakle vidimo njenu direktnu vezu sa složenom funkcijom $f(\omega)$. Ipak, u svim slučajevima od interesa u ovoj disertaciji, veličinu $\kappa(\omega)$ je moguće razviti u Tejlorov red oko centralne frekvencije, što je učinjeno u odeljku 6.3.3, gde je zadržano samo prvih nekoliko sabiraka, zaključno sa kubnim članom po ω . U ovom slučaju, integral (6.183) je moguće rešiti analitički, što je detaljno učinjeno za sistem sa tri nivoa. Na ovom mestu ćemo uporediti ova rešenja, i diskutovati granice primene aproksimativnih analitičkih rešenja na realne sisteme.

Na slici 9.5 prikazan je vremenski profil sondirajućeg pulsa na izlazu iz sredine za $B = 0 B_0^*$, $E_c/E_{p0} = 50$ i četiri različite vrednosti spektralne poluširine. Preostali parametri imaju iste vrednosti kao i u čitavoj Glavi. Crnom linijom na slici 9.5 (a) i (b) prikazana je zavisnost envelope sondirajućeg polja od vremena za spektralne poluširine koje su već razmatrane, i prikazane na slici 9.2 (tačkastom linijom je prikazan ulazni, a punom izlazni puls) [4]. U cilju bogatije diskusije, na ovom mestu prikazali smo i rezultate za pulseve čije su poluširine $w = 100$ GHz i $w = 200$ GHz, koji se nalaze na slikama (c) i (d), respektivno, iako oni u daljem radu neće biti od preteranog značaja. Na svim graficima, plavom isprekidanom linijom prikazana je envelope izlaznog pulsa u slučaju kada se u razvoju $\kappa(\omega)$ odbace članovi trećeg i viših redova po ω , i za nju je moguće dobiti analitički izraz, koji je dat jednačinom (6.211). Ovako dobijena envelope sondirajućeg pulsa zadržava Gausov



Slika 9.5: Vremenska zavisnost envelope električnog polja sondirajućeg pulsa na izlazu iz sredine za $E_c/E_{p0} = 50$ i (a) $w = 20$ GHz, (b) $w = 50$ GHz, (c) $w = 100$ GHz i (d) $w = 200$ GHz. Na graficima je prikazan ulazni puls (crna tačkasta linija), izlazni puls dobijen numeričkim rešavanjem integrala (6.183) (crna puna linija), kao i izlazni puls dobijen aproksimativnim analitičkim rešavanjem pomenutog integrala, sa tačnošću do drugog reda (plava isprekidana linija), odnosno trećeg reda po frekvenciji (crvena crta-tačka linija).

profil, ali dozvoljava disperziju pulsa, koju određuje član κ_2 . Sa druge strane, crvenom crta-tačka linijom prikazana je envelope u slučaju kada u disperzionoj relaciji ostanu članovi zaključno sa trećim redom po frekvenciji. Slika 9.5 (a) jasno pokazuje da se sva tri prikazana rešenja poklapaju – dakle, propagacija pulsa se u slučaju poluširine $w = 20$ GHz može potpuno opisati preko efekata nultog, prvog i drugog reda. Ovo se lepo vidi u tabeli 9.3, u kojoj su prikazane apsolutne vrednosti sedam najnižih koeficijenata κ_i , $i = 0, 6$. Kada je, kao ovde, $\Delta_p = \Delta_c = 0$, na osnovu diskusije iz odeljka 6.3.3 vidimo da se ovi koeficijenti pojednostavljaju, preciznije, svi parni koeficijenti postaju čisto imaginarne, a neparni čisto realne veličine (u tabeli, imaćemo $\kappa_j = i|\kappa_j|$ za $j = 0, 2, 4, \dots$, odnosno $\kappa_j = |\kappa_j|$ za $j = 1, 3, 5, \dots$). Preostale kolone u tabeli prikazuju apsolutne vrednosti pojedinačnih sabiraka u razvoju $\kappa(\omega) = \kappa_0 + \kappa_1\omega + \kappa_2\omega^2 + \kappa_3\omega^3 + \dots$, gde je za vrednost frekvencije uzeto $\omega = w$, pošto je to red veličine najvećih frekvencija koje ulaze u sastav pulsa. Za $w = 20$ GHz, vidimo da su član nultog i prvog reda dominantni, a članovi četvrtog i viših redova zanemarljivo mali. Sa druge strane, sabirci $|\kappa_2\omega^2|$ i $|\kappa_3\omega^3|$ su istog reda veličine, pa iako se može postaviti pitanje validnosti zanemarivanja kubnog člana a ostavljanja kvadratnog člana po ω , izraz (6.211) prosto i dalje važi

jer se u ovom slučaju oba ova sabirka realno mogu zanemariti. Ukoliko u izraz (6.212) zamenimo dobijene brojne vrednosti za $a = -i\kappa_0 = 1902.89 \text{ m}^{-1}$ i $b = -i\kappa_2 = 9.27195 \cdot 10^{-20} \text{ s}^2/\text{m}$, dobićemo

$$w'(D) = \frac{w}{\sqrt{1+4bw^2D}} = 0.985487w \approx w = 20 \text{ GHz}, \quad (9.2)$$

za širinu na izlazu iz sredine, odnosno

$$E'_{p0}(D) = \frac{E_{p0}e^{-aD}}{\sqrt{1+4bw^2D}} \approx E_{p0}e^{-aD} = 0.683467E_{p0} = 170.867 \frac{\text{V}}{\text{m}}, \quad (9.3)$$

za amplitudu njegovog električnog polja. S obzirom na to da se spektralna širina vrlo malo menja, zaključujemo da je opravdano zanemarivanje i drugog, a ne samo trećeg člana po ω . Nasuprot disperziji za koju smo pokazali da je zanemarljiva, za apsorpciju (efekat nultog reda) se to ne može reći – maksimalna visina pulsa se prilikom propagacije smanjila skoro za trećinu. Za karakterističnu dužinu apsorpcije (rastojanje z na kome envelope opadne e puta) dobijamo $1/a = 525.517 \mu\text{m}$, što premašuje dužinu korišćenog uzorka. Napomenimo još i to da se za grupnu brzinu pulsa dobija vrednost $v_g = 1/\kappa_1 = 5.18121 \cdot 10^6 \text{ m/s}$, odnosno $n_g = c/v_g = 57.8614$, što je u skladu sa zaključcima dobijenim prilikom analize slike 9.4.

Na slici 9.5 (b) prikazan je izlazni puls za $w = 50 \text{ GHz}$, i već sada je jasno da rešenje u drugom redu neće biti dovoljno da u potpunosti opiše profil pulsa na izlazu iz sredine. Iako grubo poklapanje postoji, bolji opis ćemo dobiti ako uzmemo u obzir i efekte trećeg reda po frekvenciji. U ovom slučaju, raspad pulsa je moguće analitički prikazati izrazima (6.227), (6.235) i (6.240), pri čemu pojava oscilujućeg člana u izrazu (6.235) jasno ukazuje na pojavu „repa” pulsa koji se vidi na gornjem grafiku. Osvrtom na tabelu 9.3, vidimo da, iako su kvadratni i kubni član i dalje mnogo manji od linearnog, ta razlika nije više toliko velika kao u slučaju spektralno užeg pulsa diskutovanog u prethodnom pasusu (za $w = 20 \text{ GHz}$, kvadratni i kubni član su oko 100 puta manji, a za $w = 50 \text{ GHz}$ samo oko 30 puta manji od linearnog). Zbog toga je neophodno uračunati i efekte trećeg reda u disperzionoj relaciji. Daljim posmatranjem tabele, vidimo da se efekti četvrtog i viših redova zaista mogu zanemariti i u ovom slučaju.

Tabela 9.3: Tabela sa vrednostima prvih sedam koeficijenata u razvoju disperzione relacije $\kappa(\omega)$, za $E_c/E_{p0} = 50$, $\Delta_p = \Delta_c = 0$ i $\gamma_{21} = \gamma_{31} = 10\gamma_0$, kao i vrednosti celokupnih sabiraka u ovom razvoju za spektralnu komponentu pulsa čija je frekvencija $\omega = w$. Sve navedene vrednosti dobijene su za četiri različite vrednosti spektralne poluširine ulaznog pulsa.

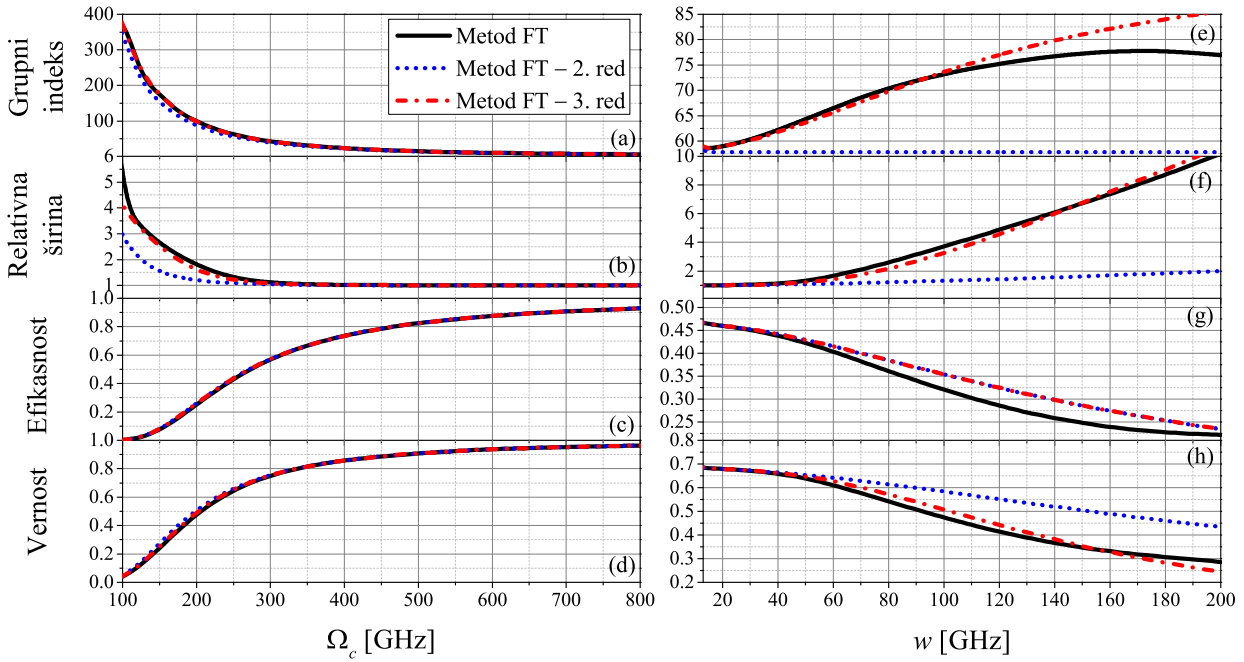
	w [GHz]	20	50	100	200
i	$ \kappa_i $ [s^i/m]	$ \kappa_i \omega^i $ [1/m]			
0	$1.90289 \cdot 10^3$	1902.89	1902.89	1902.89	1902.89
1	$1.93005 \cdot 10^{-7}$	3860.10	9650.25	19300.5	38601.0
2	$9.27195 \cdot 10^{-20}$	37.0878	231.799	927.195	3708.78
3	$3.05710 \cdot 10^{-30}$	24.4568	382.138	3057.10	24456.8
4	$2.50444 \cdot 10^{-42}$	0.40071	15.6527	250.444	4007.10
5	$4.89458 \cdot 10^{-53}$	0.15663	15.2956	489.458	15662.7
6	$5.66993 \cdot 10^{-65}$	0.00363	0.88593	56.6993	3628.75

Uticaj efekata viših redova po ω postaje primetan na slikama 9.5 (c) i (d). Sa povećanjem spektralne poluširine pulsa, rastu i frekvencije spektralnih komponenti koje ulaze u sastav pulsa, pa će i članovi $|\kappa_i \omega^i|$ bivati sve veći kako se i povećava. Konkretno, za slučaj poluširine $w = 100 \text{ GHz}$

(slika 9.5 (c)), grafici kvalitativno izgledaju slično onima na slici 9.5 (b), ali se efekti apsorpcije i disperzije povećavaju, dok „rep” postaje sve izraženiji. Ovo je posledica činjenice da spektralne komponente sa većom frekvencijom bivaju apsorbovane od strane apsorpcionih pikova na krajevima prozora transparentnosti sa jedne, odnosno različitih grupnih brzina koje ove komponente dostižu, sa druge strane. Peta kolona u tabeli 9.3 na ovo jasno ukazuje, budući da je kubni član dostigao vrednost koji se u disperzionoj relaciji više ne može zanemariti. Takođe, primetan je blagi porast efekata četvrtog i viših redova, zbog čega je poklapanje numeričkog rešenja i rešenja u trećem redu sve lošije. Ovo nepoklapanje je još izraženije na slici 9.5 (d), gde je puls toliko spektralno širok da neke njegove komponente kompletno leže u oblasti postojanja apsorpcionih maksimuma, na taj način trpeći veliku apsorpciju i gubeći svoju originalnu strukturu. U ovom slučaju, aproksimativno rešenje u trećem redu samo kvalitativno prati liniju numeričkog rešenja, ali je jasno da je za precizniji opis potrebno uračunati ne samo jedan, već i nekoliko narednih članova u Tejlorovom razvoju $\kappa(\omega)$. U poslednjoj koloni u tabeli 9.3 vidimo da je, uz linearni član, najznačajniji sabirak $|\kappa_5\omega^5|$, te ovde „odsecanje” članova iznad kubnog postaje potpuno neprimereno. Ni preostali članovi navedeni u tabeli ovoga puta neće moći da se zanemare. Međutim, kako su nama od interesa situacije kada se prostiranje pulsa odvija uz što manje gubitaka, kako po pitanju energije, tako i po pitanju inicijalnog oblika pulsa, to ćemo se na dalje fokusirati isključivo na spektralno uske pulseve, poput onih prikazanih na slici 9.5 (a) i (b).

Još jedan način za analizu numeričkog i aproksimativnih analitičkih rešenja u drugom i trećem redu jeste poređenjem parametara – grupnog indeksa n_g , relativne širine δ , efikasnosti η i vernosti ξ izlaznog pulsa (dakle, računatih u $z = D$), veličina definisanih u odeljku 6.3.4. Na slici 9.6 data je zavisnost ovih parametara od kontrolne Rabijeve frekvencije (grafici (a–d)) pri fiksnoj $w = 50$ GHz, odnosno spektralne poluširine ulaznog pulsa (grafici (e–h)) pri konstantnoj vrednosti $E_c/E_{p0} = 50$ ($\Omega_c = 247.66$ GHz). Izuzev veličina za koje je dozvoljeno da se menjaju (Ω_c u prvom i w u drugom slučaju), svi ostali parametri uzimaju ranije dodeljene vrednosti. Na svakom od grafika, prikazano je numeričko rešenje (puna crna linija), kao i aproksimativna rešenja u drugom (plava tačkasta linija) i trećem redu (crvena crta-tačka linija) po ω . Posmatranjem zavisnosti parametara od kontrolne Rabijeve frekvencije, zaključujemo da, sa porastom Ω_c , grupni indeks i relativna širina opadaju, dok efikasnost i vernost rastu. Ovo je u skladu sa ranijim zaključcima da sa povećanjem Ω_c dolazi do povećanja širine prozora transparentnosti, što smanjuje gubitke, a samim tim vrši vrlo male izmene u profilu pulsa, što se manifestuje visokim vrednostima η i ξ . Nasuprot tome, velika kontrolna Rabijeva frekvencija implicira da je nagib disperzione krive u minimumu apsorpcije mali, pa je usporenje svetlosti malo ili nepostojeće, tj. grupni indeks sredine teži jedinici ($v_g \rightarrow c$). U isto vreme, pored nagiba, malu vrednost ima i sama veličina $\text{Re}\rho_{21}$ (pa je indeks prelamanja sredine blizak jedinici), što znači da je i disperzija, a samim tim i relativna širina pulsa zanemarljiva. Vidimo, takođe, da za jaka kontrolna polja imamo odlično slaganje numeričkog i aproksimativnih rešenja, pa tako za grupni indeks možemo sa velikom pouzdanošću koristiti izraz (6.257), koji, za jaka kontrolna polja, zaista dovodi do $v_g = c$, dok za relativnu širinu možemo koristiti izraz (6.256). Pošto, na osnovu (6.205), za veliko Ω_c važi $b \sim 1/\Omega_c^4$, zaključujemo da će u tom slučaju izraz $4bw^2D$ biti zanemarljivo mali, a relativna širina bliska jedinici. Efikasnost i vernost sada možemo prikazati izrazima (6.254) i (6.255), što za veliko Ω_c ponovo daje $\sqrt{1+4bw^2D} \approx 1$ i $\sqrt{2+4bw^2D} \approx \sqrt{2}$, odakle sledi da je $\eta = e^{-2aD}$, odnosno $\xi = e^{-aD}$. Pošto iz (6.204) vidimo da, u slučaju velikih kontrolnih Rabijevih frekvencija imamo $a \sim 1/\Omega_c^2$, oba navedena eksponenta biće bliska nuli, a efikasnost i vernost bliske jedinici, s tim što će η sporije težiti jedinici od ξ .

U slučaju manjih vrednosti Ω_c , odstupanje između numeričkih i analitičkih rešenja raste, i to se najbolje vidi kod relativne širine izlaznog pulsa. Vidimo da se, praktično za sve prikazane vrednosti Ω_c , sve tri linije na slici 9.6 (c) poklapaju – sa stanovišta efikasnosti, sasvim je prihvatljivo opisivati



Slika 9.6: Grupni indeks, relativna širina, efikasnost i vernost pulsa na izlazu iz sredine ($z = D$) u zavisnosti od (a–d) Rabijeve frekvencije kontrolnog polja za fiksno $w = 50$ GHz i (e–h) spektralne poluširine ulaznog pulsa za fiksno $E_c/E_{p0} = 50$. Na graficima su prikazani rezultati dobijeni numerički, kao i aproksimativno analitički, u drugom i trećem redu po frekvenciji.

propagaciju pulsa isključivo pomoću efekata nultog, prvog i drugog reda. Podsetimo se ovde da je izlazni puls za $E_c/E_{p0} = 50$ i $w = 50$ GHz prikazan na slici 9.5 (b), na kojoj se jasno vidi raspad sondirajućeg pulsa. Zbog toga se, iako je poklapanje po pitanju vernosti za ove vrednosti parametara (slika 9.6 (d)) relativno dobro, ipak je ono manje izraženo od poklapanja po pitanju efikasnosti pulsa. Naravno, kod slabih kontrolnih polja dolazi do značajnog porasta disperzije, a samim tim i relativne širine pulsa (izlazni puls je spektralno uži ali vremenski širi), kao i povećanja grupnog indeksa sredine, što je povezano sa povećanjem nagiba disperzione krive sa smanjenjem kontrolne Rabijeve frekvencije. Ipak, zbog toga što je prozor transparentnosti uži, a dno više, rastu gubici i efikasnost i vernost se smanjuju. Na graficima nisu prikazane izuzetno male vrednosti Ω_c , jer u tom slučaju više ne važi pretpostavka $\Omega_{p0} \ll \Omega_c$ koju smo koristili u postavci metoda FT, čime bismo otišli izvan granica primenljivosti metoda.

Ukoliko se fokusiramo na grafike zavisnosti parametara od spektralne poluširine ulaznog pulsa (slika 9.6 (e–h)), videćemo ponašanje o kome smo ranije već delimično diskutovali. Sa jedne strane, spektralno uski pulsevi mogu da prođu kroz prozor transparentnosti tako da im struktura Gausove krive ostane nenarušena, dajući visoke vrednosti za efikasnost i vernost – gubici su u ovom slučaju isključivo posledica nenulte apsorpcije na dnu prozora transparentnosti, što je povezano sa konačnim vremenom života najvišeg nivoa preko koeficijenta raspada γ_{31} . Za malo w , ova dva parametra, ali i preostala dva mogu da se opišu pomoću aproksimativnih rešenja trećeg, ali i drugog reda – jedino odstupanje je u slučaju grupnog indeksa, gde je on jednak $1/\kappa_1$ samo u jednom vrlo uskom intervalu jako malih poluširina. Ovo je naravno zato što se za grupni indeks u drugom redu dobija konstantna vrednost, nezavisna od w , što se na slici 9.6 (e) i uočava. U slučaju spektralno širih pulseva, događa se ono što smo već pominjali pri diskusiji grafika na slici 9.5 (c) i (d) – pojačana apsorpcija i dalji raspad pulsa pod dejstvom efekata viših redova po frekvenciji. Sa jedne strane, grupni indeks i relativna širina rastu (ogroman broj spektralnih komponenti biva apsorbovan, puls

spektralno postaje uži ali zato drastično vremenski širi), dok sa druge strane, efikasnost i vernost padaju na nulu, kako zbog velikih gubitaka usled pojačane apsorpcije, tako i zbog narušavanja originalne strukture ulaznog pulsa. Kao što je već napomenuto, u ovoj oblasti dominiraju efekti viših redova po ω , što se i vidi s obzirom na odstupanje aproksimativnog rešenja trećeg reda od numeričkog rešenja. Nama će, dakle, od interesa u daljem radu isključivo biti pulsevi čije se spektralne širine nalaze uz ordinatu ova četiri grafika.

9.1.2 Uticaj spoljašnjeg magnetnog polja

Ukoliko prethodno razmatrani sistem izložimo dejstvu spoljašnjeg stacionarnog magnetnog polja, sondirajući puls na izlazu iz sredine može istrpeti značajne promene. Uticaj magnetnog polja na energijske nivoe SKT je detaljno diskutovan u poglavlju 8.2, a na ovom mestu ćemo se konkretno pozabaviti njegovim uticajem na izlazni sondirajući puls. Pretpostavimo da su, u odsustvu magnetnog polja, i sondirajući i kontrolni laser u rezonanciji sa odgovarajućim prelazima između nivoe (dakle, za $B = 0$ B_0^* je $\Delta_p^{(0)} = \Delta_c^{(0)} = 0$, što je i do sada uzimano da važi). Usled Zemanovog efekta, dolazi do modifikacije energija nivoe od interesa, kao što je prikazano na slikama 8.4 i 8.5, tako da će sondirajuća i kontrolna razdešenost postati različite od nule. U opsegu jačina magnetnog polja od interesa u ovoj disertaciji dominiraće linearni Zemanov efekat, pa ćemo za ove razdešenosti imati približno

$$\Delta_p = \omega_{21} - \omega_p = \omega_{21}^{(0)} - \frac{1}{2}B - \omega_p = \Delta_p^{(0)} - \frac{1}{2}B = -\frac{1}{2}B, \quad (9.4)$$

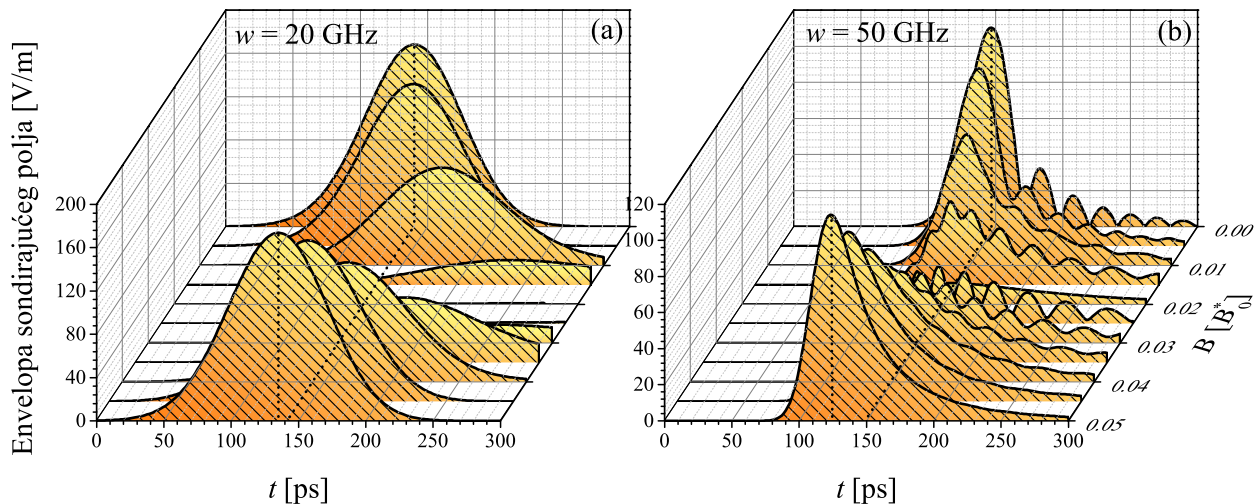
odnosno

$$\Delta_c = \omega_{32} - \omega_c = \omega_{32}^{(0)} - \frac{1}{2}B - \omega_c = \Delta_c^{(0)} - \frac{1}{2}B = -\frac{1}{2}B, \quad (9.5)$$

pri čemu su oba izraza zapisana u efektivnim atomskim jedinicama, i gde je iskorišćena relacija (8.5), kao i činjenica da je, takođe u efektivnim atomskim jedinicama, $E_{ij} = \omega_{ij}$. Zaključujemo da će, u slabom magnetnom polju, važiti $\Delta_p = \Delta_c < 0$. U realnosti, ove dve razdešenosti neće biti sasvim jednake, zbog neznatnog doprinosa kvadratnog Štarkovog efekta, ali će i dalje biti negativne. Tek za jaka magnetna polja ova jednakost može biti narušena.

Na slici 9.7 prikazan je vremenski profil envelope sondirajućeg pulsa na izlazu iz materijalne sredine, za različite vrednosti primenjenog magnetnog polja, za pulseve čije su spektralne poluširine na ulazu $w = 20$ GHz i $w = 50$ GHz. Dobijeni rezultati računati su pod pretpostavkom da su oba lasera rezonantna kada nema magnetnog polja, i da u prisustvu magnetnog polja obe razdešenosti postaju različite (manje) od nule. Svi ostali parametri korišćeni u ovoj Glavi ostali su nepromenjeni i prilikom primene na ovu fizičku situaciju ($E_c/E_{p0} = 50$ i $\gamma_{31} = \gamma_{21} = 10\gamma_0 = 10$ GHz). Rezultati su ponovo dobijeni primenom metoda FT, pri čemu smo ovde integral (6.183) rešavali numerički, koristeći egzaktan oblik (6.178) za disperzionu relaciju $\kappa(\omega)$.¹ U slučaju spektralno uskog pulsa (slika 9.7 (a)), vidimo da puls zadržava Gausov profil za sve vrednosti magnetnog polja od interesa,

¹ Kao i u prethodnom odeljku, i ovde je moguće disperzionu relaciju zapisati u formi reda i izdvojiti samo prvih nekoliko članova. Međutim, kako su ovde razdešenosti laserskih polja različite od nule, to će koeficijenti u razvoju κ_i biti kompleksne veličine, zbog čega je moguće da, pri odgovarajućim uslovima, neka od rešenja $E_p^{(n)}(z, t)$ divergiraju. Kako detaljna analiza ovog postupka izlazi iz okvira disertacije, to smo se mi opredelili da aproksimativna analitička rešenja u drugom i trećem redu po frekvenciji koristimo samo u slučaju $\Delta_p = \Delta_c = 0$. Ipak, u daljem tekstu ćemo, kada se takva terminologija učini pogodnom, govoriti o efektima trećeg i višeg reda po frekvenciji čak i u slučaju nenultog magnetnog polja – njih je tada potrebno shvatiti uslovno, uz pomenutu ogradu.

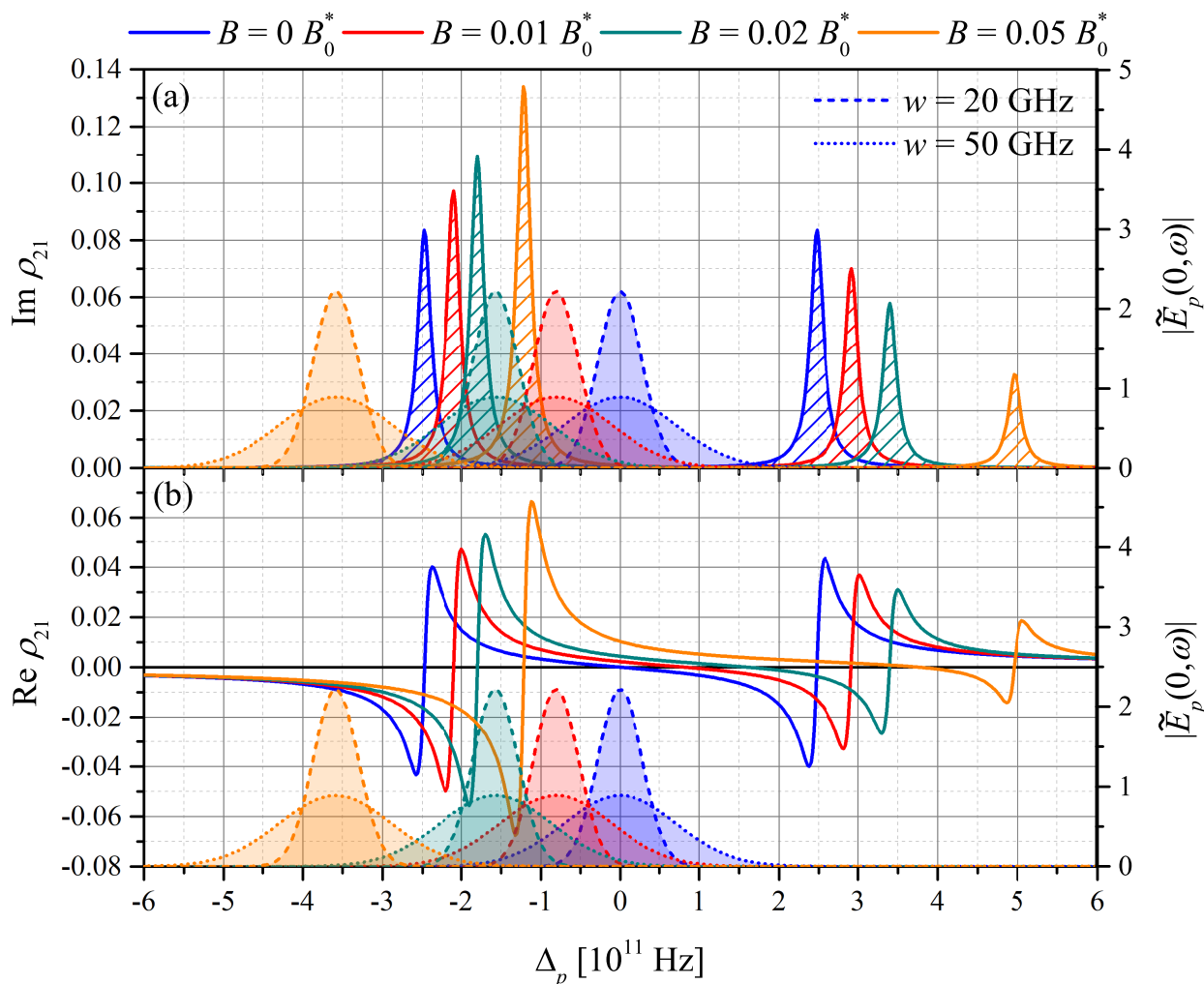


Slika 9.7: Profil envelope električnog polja izlaznog sondirajućeg pulsa u zavisnosti od jačine spoljašnjeg magnetnog polja, za puls sa spektralnom poluširinom (a) $w = 20\text{ GHz}$ i (b) $w = 50\text{ GHz}$. Crne tačkaste linije su stavljene na grafike kako bi se lakše uočile razlike između grupnih brzina pulseva za različite vrednosti jačine magnetnog polja.

ali da su mu druge karakteristike – širina, grupna brzina i stepen gubitaka znatno izmenjeni. Vidimo da se, povećanjem B , grupna brzina pulsa najpre smanjuje a širina povećava, dok u isto vreme gubici postaju sve veći. Pri „kritičnoj” vrednosti $B_c \approx 0.02 B_0^* \approx 126.2\text{ mT}$ dolazi praktično do potpune apsorpcije pulsa, da bi se, daljim povećavanjem jačine magnetnog polja, opisani proces ponovio „unazad” – širina pulsa i gubici se smanjuju, a grupna brzina povećava. Radi ilustracije, crnim tačkastim linijama je prikazan položaj maksimuma pulsa za $B = 0 B_0^*$ i $B = 0.05 B_0^*$, i vidimo da je u drugom slučaju grupna brzina za nijansu veća. Situacija sa spektralno širim pulsem, prikazanim na slici 9.7 (b), slična je u pogledu postojanja „kritične” vrednosti jačine magnetnog polja za koju nastupa maksimalna apsorpcija pulsa. Međutim, kao što je to u odeljku 9.1.1 detaljno diskutovano, povećanje spektralne poluširine prouzrokuje veći uticaj efekata trećeg reda po frekvenciji, zbog kojih se narušava Gausov profil ulaznog pulsa. Pored toga, vidimo da je, u blizini B_c , raspad pulsa još izraženiji, što se može povezati sa efektima četvrtog i viših redova po ω . Treba napomenuti da je, u ovoj analizi, potrebno umesto jednačina (6.206)–(6.209) za koeficijente u razvoju disperzione relacije (6.198), potrebno koristiti (6.200)–(6.203), pošto razdešenosti više nisu jednake nuli.² Na kraju, vidimo da, povećanjem B , puls polako vraća svoju strukturu, ali i dalje ispoljava primetnu asimetriju, tako da se ne može opisati čisto Gausovim profilom. Takođe, vidimo da je i grupna brzina ovog pulsa nešto veća, a vrednost maksimuma pulsa niža od one koju ima spektralno užu puls za istu vrednost magnetnog polja.

Uticaj spoljašnjeg magnetnog polja na prostiranje pulsa se može objasniti pomoću analize apsorpcione i disperzione krive, prikazanih na slici 9.8 za nekoliko različitih vrednosti jačine magnetnog polja [3]. U tom cilju, na istoj slici prikazani su i spektralni profili ulaznog pulsa za iste te vrednosti

² Naglasimo da, iako je metod FT primenljiv na sistem od interesa i za slučaj nenulih razdešenosti, treba biti pažljiv prilikom primene razvoja disperzione relacije u Tejlorov red. Naime, za jaka magnetna polja, koja dovode do velikih vrednosti za Δ_p i Δ_c , može se desiti da koeficijenti κ_i za *neparno* i budu takvi da integrali koji se javljaju u izrazima za $E_p^{(i)}(z, t)$ divergiraju. Zbog toga se ovde govori o efektima viših redova samo uslovno, tj. u formi koja pretpostavlja da radimo sa konvergentnim veličinama. Detaljno ispitivanje razvoja disperzione relacije u red izlazi iz okvira disertacije, te ćemo ovaj postupak na dalje primenjivati isključivo kod rezonantnih polja.



Slika 9.8: (a) Apsorpciona i (b) disperziona kriva za sistem sa tri nivoa i četiri različite vrednosti jačine spoljašnjeg magnetnog polja. Spektralni profili ulaznih pulseva sa poluširinama $w = 20$ GHz i $w = 50$ GHz, a za iste vrednosti jačine magnetnog polja su takođe prikazani na graficima. Krive označene istom bojom odgovaraju jednoj vrednosti jačine spoljašnjeg magnetnog polja.

jačine magnetnog polja, kao i za dve vrednosti spektralne poluširine, $w = 20$ GHz i $w = 50$ GHz. Kao što se može odmah primetiti, magnetno polje izaziva pomeranje maksimuma apsorpcije, promenu visine ovih maksimuma, kao i promenu širine prozora transparentnosti. Postojanje ove očigledne asimetrije detaljno je diskutovano u odeljku 6.2.1 pomoću formalizma obučenih stanja. Tamo je pokazano da se, za $\Delta_c < 0$, što je kod nas upravo i slučaj, levi apsorpcioni pik (koji odgovara prelazu $|0\rangle \leftrightarrow |+\rangle$) pomera bliže koordinatnom početku sa povećanjem $|\Delta_c|$, dok se istovremeno desni pik (koji odgovara prelazu $|0\rangle \leftrightarrow |-\rangle$) udaljava od koordinatnog početka, što se vidi iz jednačina (6.119), odnosno (6.120). Pored toga, povećanje apsolutne vrednosti kontrolne razdešenosti izaziva i povećanje visine levog, a smanjenje visine desnog apsorpcionog maksimuma, u skladu sa jednačinama (6.117) i (6.118). Upravo ovo ponašanje vidimo na slici 9.8 (a). Pored pomeranja prozora transparentnosti „na desno”, i njegovog očiglednog širenja, što je posledica promene Δ_c , promena sondirajuće razdešenosti utiče i na poziciju maksimuma sondirajućeg pulsa u prostoru frekvencija.³ Zbirno gledano, magnetno polje izaziva pomeranje kako apsorpcione krive, tako i sondirajućeg

³ Podsetimo da se ovde pod razdešenošću sondirajućeg polja podrazumeva razlika između frekvencije prelaza i central-

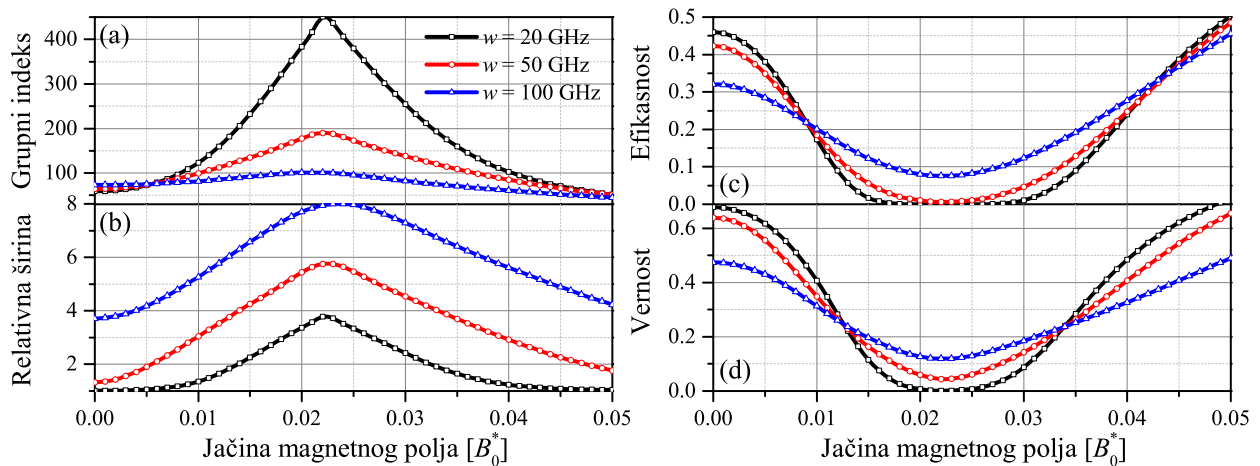
pulsa. Tako, na primer, u odsustvu magnetnog polja (linije označene plavom bojom), prozor transparentnosti ostaje simetričan, a sam puls „leži” u njegovom centru, gde je apsorpcija najmanja. Porast magnetnog polja izaziva sve veće približavanje pulsa levom apsorpcionom piku, što povećava kako apsorpciju i gubitke, tako i odstupanje izlaznog pulsa od Gausovog profila ($B = 0.01 B_0^*$, crvene linije). Kada je $B = 0.02 B_0^*$ (zelene linije), pozicija pulsa se praktično poklapa sa pozicijom maksimuma apsorpcije, zbog čega puls u ovom slučaju trpi velike gubitke pri prolasku kroz sredinu. Razlika između pulseva različitih spektralnih poluširina leži u tome što se spektralno uži puls skoro potpuno apsorbuje, što nije slučaj sa spektralno širim pulsem. Razlog za ovo je taj što se, u slučaju $w = 50$ GHz, neke spektralne komponente ulaznog pulsa nalaze dovoljno daleko od maksimuma apsorpcije, što im omogućava da prođu kroz sredinu. Naravno, spektralno vrlo uzak puls implicira vremenski izuzetno širok puls, što se i uočava na slici 9.7 (b) za razmatranu vrednost jačine magnetnog polja. Na kraju, vidimo da za jaka magnetna polja (narandžaste linije), puls potpuno izlazi iz prozora transparentnosti, udaljava se od maksimuma apsorpcije sa povećanjem B , na taj način smanjujući gubitke i vraćajući polako originalnu strukturu. Ovo vraćanje je, naravno, izraženije kod spektralno užeg pulsa, jer puls sa većom spektralnom poluširinom mora više da se „odmakne” od apsorpcionog pika da bi se izbegla apsorpcija spektralnih komponenti na krajevima profila, što se može postići jedino daljim povećanjem jačine magnetnog polja. Kako je u ovoj disertaciji od prevashodnog interesa prostiranje pulsa *unutar* prozora transparentnosti, to ćemo se u daljem radu ograničiti samo na slaba magnetna polja, u granici kojih je pomenuti uslov zadovoljen.

Diskusija vezana za uticaj magnetnog polja na brzinu prostiranja pulsa može se sprovesti analizom disperzione krive, prikazane na slici 9.8 (b). Vidimo da je položaj ulaznog pulsa u prostoru frekvencija takav da „leži” u oblasti sa relativno malim nagibom disperzione krive u slučaju $B = 0 B_0^*$, i da se taj nagib polako povećava sa povećanjem jačine magnetnog polja. To konkretno znači da se, porastom B , najpre smanjuje grupna brzina sondirajućeg pulsa, da bi se oko vrednosti $B = 0.02 B_0^*$ taj trend smanjio, jer se puls našao u oblasti sa izrazitim varijacijama u nagibu disperzione krive. Ovo znači da je disperzija grupne brzine velika, pa će i raspad pulsa biti intenzivniji, i to prevashodno za spektralno široke pulseve, koji se „protežu” duž čitave oblasti izrazite promene nagiba disperzione krive. Dalje povećanje B nas vraća na početnu situaciju, gde se grupna brzina polako smanjuje sa povećanjem jačine magnetnog polja. Naravno, ovo odgovara situaciji kada se puls nalazi izvan prozora transparentnosti, čime se na dalje nećemo baviti.

Sve gore navedene zaključke dobili smo prećutno pretpostavljajući da je Zemanov pomak energijskih nivoa jedini efekat koji magnetno polje ima na SKT. Međutim, ovaj pomak utiče i na druge parametre materijalne sredine, poput matričnih elemenata operatora električnog dipolnog momenta. U sistemu sa tri nivoa, od interesa nam je poznavanje matričnih elemenata $d_{21}^{(-1)}$, odnosno $d_{32}^{(-1)}$, koji figurišu kako u izrazima za sondirajuću i kontrolnu Rabijevu frekvenciju, respektivno, tako i u odgovarajućim propagacionim jednačinama (pošto smo pretpostavili da je kontrolno polje dato u formi kontinualnog lasera, jedino ćemo razmatrati propagacionu jednačinu za sondirajući talas u kojoj figuriše $d_{21}^{(-1)}$). U opsegu B koji je nama od prevashodnog interesa (u okviru kojih puls ostaje unutar prozora transparentnosti), zavisnost ovih veličina je data na slici 8.6. Iako je jasno da matrični element $d_{21}^{(-1)}$ (crvena linija na gornjem grafiku) raste, a $d_{32}^{(-1)}$ (plava linija na donjem grafiku) opada sa porastom jačine magnetnog polja, možemo uočiti da je ova promena vrlo mala. U prvom slučaju, matrični element koji odgovara prelazu $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ se menja tek do na petu decimalu, dok se u drugom slučaju odgovarajući matrični element menja brže, ali opet tek do na drugu decimalu. Sve ovo ukazuje na činjenicu da je promenu matričnih elemenata operatora električnog dipolnog momenta sa jačinom magnetnog polja moguće *zanemariti* u svim relevantnim slučajevima.⁴

ne, tj. noseće frekvencije sondirajućeg pulsa.

⁴ Naravno, efekat koji magnetno polje ima na energijsku strukturu kvantne tačke ne treba kompletno ignorisati. Ukoliko



Slika 9.9: (a) Grupni indeks, (b) relativna širina, (c) efikasnost i (d) vernost izlaznog sondirajućeg pulsa u zavisnosti od jačine spoljašnjeg magnetnog polja za tri različite vrednosti spektralne poluširine ulaznog pulsa.

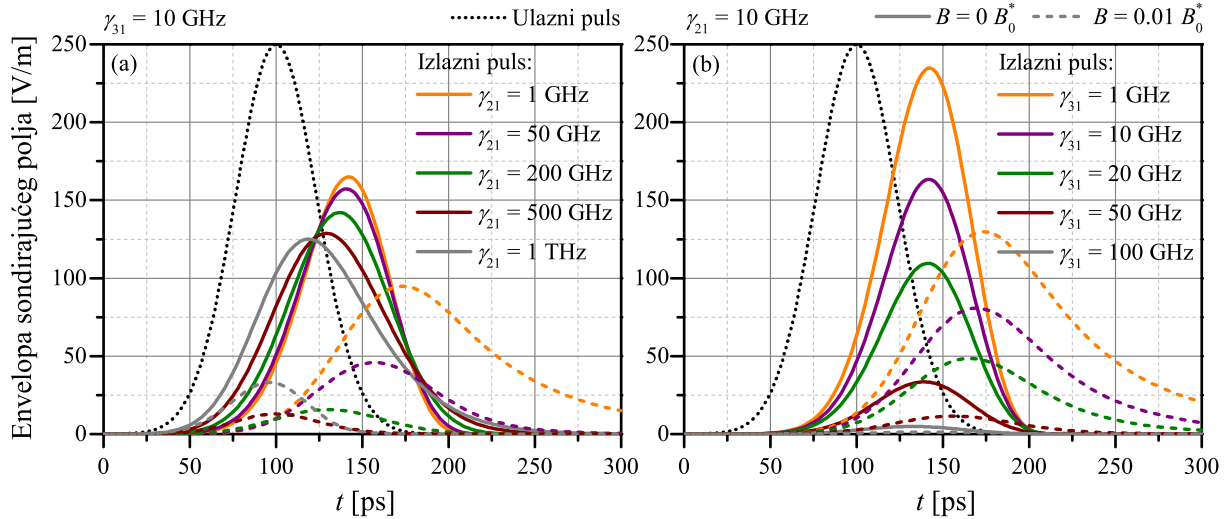
Zaključci iz ovog odeljka se dodatno mogu učvrstiti i sumirati analizom ponašanja relevantnih parametara u zavisnosti od jačine spoljašnjeg magnetnog polja. Ova zavisnost prikazana je na slici 9.9 za tri različite vrednosti spektralne poluširine ulaznog pulsa. Možemo primetiti da, kako magnetno polje raste, grupni indeks i relativna širina najpre rastu, a potom opadaju, dok je trend promene efikasnosti i vernosti suprotan [3]. Ovo je u skladu sa diskusijom iz prethodnih nekoliko pasusa, gde vidimo da je kritična vrednost jačine magnetnog polja za koju nastupa pojačana ili potpuna apsorpcija negde između vrednosti $0.015 B_0^* \lesssim B_c \lesssim 0.03 B_0^*$. Gledajući grafike zavisnosti n_g i δ od B na slici 9.9 (a) i (b), jasno primećujemo postojanje maksimuma, koji nastupaju za vrednost jačine magnetnog polja koja se može poistovetiti sa već pomenutom „kritičnom” jačinom, i praktično za sve tri krive iznosi $B_c \approx 0.022 B_0^* \approx 138.82$ mT. Pored toga, spektralna poluširina pulsa takođe ima veliki uticaj na parametre – spektralno užii pulsevi trpe izraženije promene grupnog indeksa (koji raste i do $n_g \approx 450$, slika 9.9 (a)), kao i efikasnosti i vernosti (slika 9.9 (c) i (d)), gde ove vrednosti brže padaju na nulu nego u slučaju većih poluširina. To automatski znači da velika vrednost grupnog indeksa koja se dobija u ovom slučaju nije od prevelikog značaja, pošto su gubici ogromni. Zbog toga je, u odabiru korišćenih vrednosti magnetnog polja, spektralne poluširine i drugih relevantnih veličina, potrebno napraviti svojevrstan kompromis između dobijanja što većeg grupnog indeksa sa jedne, i što veće efikasnosti izlaznog pulsa sa druge strane. Nasuprot tome, značajan raspad spektralno širih pulseva praćen je većim smanjenjem spektralne, a povećanjem vremenske širine, što objašnjava ponašanje sa slike 9.9 (b). Ovakvo ponašanje sistema svetlost–materija u spoljašnjem magnetnom polju može da ima razne potencijalne primene, kako u magnetometriji, tako i prilikom izrade optičkih prekidača, gde se pomoću magnetnog polja može kontrolisati prostiranje sondirajućeg pulsa.

9.1.3 Uticaj koeficijenata raspada

Na kraju ovog poglavlja, prodiskutujemo i uticaj koeficijenata raspada na prostiranje pulsa [4]. Već smo napomenuli da u čvrstim telima koeficijenti raspada mogu da uzimaju vrednosti iz jako velikog

buduće istraživanje proširimo na jaka magnetna polja, ovaj efekat će biti od centralnog značaja, kao što se to uostalom vidi na slikama 8.3 i 8.4.

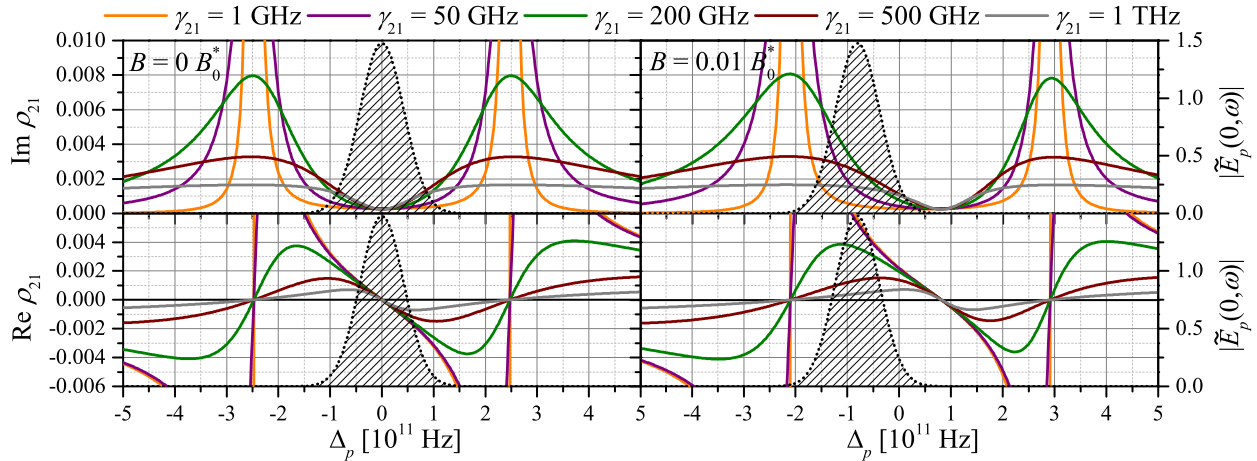
opsega, sa razlikama i do nekoliko redova veličine. Sve ovo je posledica mnoštva fizičkih procesa, usled kojih u čvrstim telima dolazi do dekoherencije, pri čemu su najvažniji među njima detaljnije diskutovani u Glavi 5. Zbog svega navedenog ćemo na ovom mestu dozvoliti da se koeficijenti γ_{21} i γ_{31} menjaju, i posmatrati na koji način njihova promena utiče na vremenski profil izlaznog pulsa. Kao i do sada, MB jednačine rešavane su primenom metoda FT, vrednosti parametara su, izuzev za γ_{ij} , iste kao ranije, a za sondirajući puls je odabran ponovo Gausov puls, ovoga puta sa spektralnom poluširinom $w = 30\text{GHz}$. Jačinu električnog polja kontrolnog lasera smo još jednom odabrali tako da važi $E_c/E_{p0} = 50$. Takođe, razmatrane su dve konkretne situacije – prva, kada je spoljašnje magnetno polje isključeno i druga, kada je ono uključeno i ima jačinu $B = 0.01 B_0^* \approx 63.1\text{mT}$.



Slika 9.10: Vremenska zavisnost envelope izlaznog sondirajućeg pulsa za (a) različito γ_{21} i $\gamma_{31} = 10\text{GHz}$, odnosno (b) različito γ_{31} i $\gamma_{21} = 10\text{GHz}$. Spektralna poluširina ulaznog pulsa (crna tačkasta linija) je $w = 30\text{GHz}$, a na graficima su prikazani slučajevi kada je magnetno polje isključeno (pune linije), odnosno jednako $B = 0.01 B_0^*$ (isprekidane linije).

Na slici 9.10 (a) data je zavisnost profila izlaznog pulsa od koeficijenta γ_{21} , za fiksiranu vrednost $\gamma_{31} = 10\text{GHz}$. Posmatrajući rešenja u odsustvu magnetnog polja (pune linije), vidimo da, čak i promene γ_{21} za nekoliko redova veličine, ne utiču previše na oblik pulsa na izlazu. Blagi porast apsorpcije, pojačana disperzija i povećana grupna brzina primetne su sa porastom posmatranog koeficijenta raspada, ali se Gausov profil ulaznog pulsa pri prostiranju vrlo dobro očuvava. Situacija je primetno drugačija u slučaju nenultog magnetnog polja (isprekidane linije) – osim što uključivanje magnetnog polja dovodi do asimetrije izlaznog pulsa, porast γ_{21} , kao i u prethodnom slučaju, izaziva povećanje grupne brzine i apsorpcije, ali je ova promena drastičnija nego za $B = 0 B_0^*$. Takođe, nema povećanja širine pulsa sa povećanjem γ_{21} – magnetno polje u ovom slučaju ima pozitivan efekat na očuvanje disperzije pulsa. Slika 9.10 (b) prikazuje sasvim drugačije ponašanje vremenske zavisnosti envelope izlaznog sondirajućeg pulsa ukoliko se fiksira vrednost $\gamma_{21} = 10\text{GHz}$, a dozvoli promena γ_{31} za više redova veličine. Ovde se jasno vidi da povećanje γ_{31} presudno utiče na apsorpciju pulsa, tako da je već za $\gamma_{31} = 100\text{GHz}$ puls praktično kompletno apsorbovan. Nasuprot tome, grupna brzina gotovo da ne zavisi od ovog koeficijenta, kao ni disperzija pulsa. Slično ponašanje, izuzev primetne asimetrije i povećane apsorpcije, opažamo i u slučaju $B = 0.01 B_0^*$, gde se puls vrlo brzo apsorbuje sa povećanjem γ_{31} , ali mu se grupna brzina praktično ne menja.

Kao i do sada, radi objašnjenja propagacije sondirajućeg pulsa poslužićemo se crtanjem apsorpcione i disperzione krive za situaciju od interesa. Na slici 9.11, prikazane su ove dve krive za različite

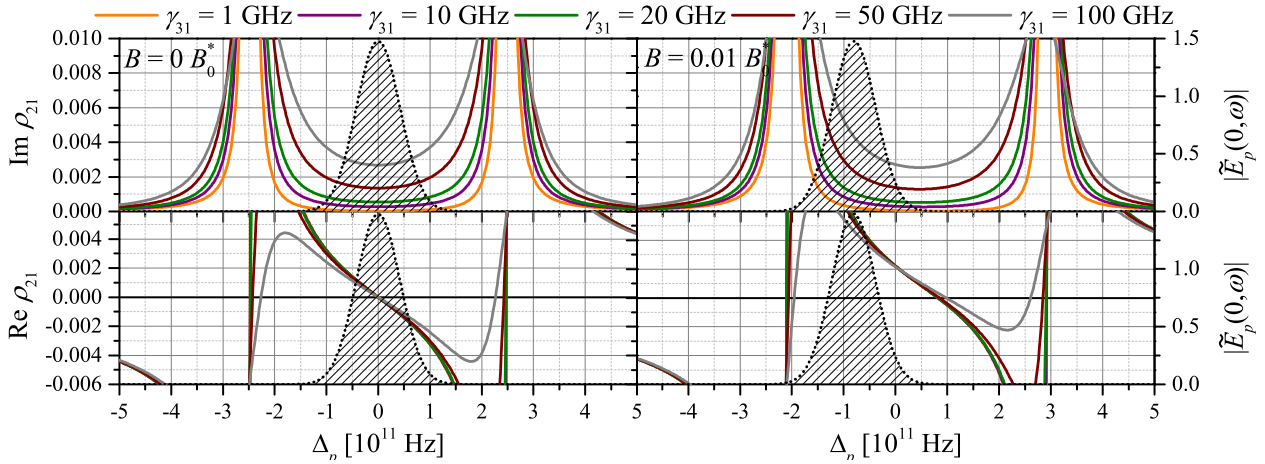


Slika 9.11: Apsorpciona kriva (gornji grafici) i disperziona kriva (donji grafici) za sistem svetlost–materija za fiksno $\gamma_{31} = 10\text{GHz}$ i nekoliko različitih vrednosti γ_{21} . Dobijeni rezultati prikazani su za slučaj $B = 0 B_0^*$ (levi grafici) i $B = 0.01 B_0^*$ (desni grafici), i pridodat im je spektralni profil ulaznog sondirajućeg pulsa (crna tačkasta linija sa šrafiranom površi ispod nje).

vrednosti γ_{21} i fiksno $\gamma_{31} = 10\text{GHz}$, kao i za dve vrednosti jačine magnetnog polja, $B = 0 B_0^*$ i $B = 0.01 B_0^*$ – dakle, iste vrednosti kao na slici 9.10 (a). Radi bolje vizuelizacije predstojeće diskusije, na graficima je prikazan i spektralni profil ulaznog sondirajućeg pulsa (tačkasta linija sa šrafiranom površi ispod nje). U odsustvu magnetnog polja (gornji levi grafik), spektralni profil pulsa ima maksimum u $\Delta_p = 0$, dakle u minimumu apsorpcije. Ipak, povećanje γ_{21} uzrokuje povećanje širine apsorpcionih pikova (diskusija u okviru odeljka 6.1.1), pa će apsorpcija spektralnih komponenti sa frekvencijama najudaljenijim od centralne bivati sve veća. Pošto, i dalje, veliki deo ulaznog pulsa prolazi kroz sredinu, puls ipak ne trpi prevelike modifikacije. Posmatrajući disperzionu krivu za ovaj slučaj, vidimo da su praktično sve komponente pulsa u oblasti normalne disperzije, gde je nagib krive praktično konstantan, blago se smanjujući sa povećanjem γ_{21} . Ovo znači da grupna brzina raste sa povećanjem ovog koeficijenta raspada, u skladu sa ranijim zaključcima. Zbirno gledano, blage promene apsorpcionih i disperzionih karakteristika sredine sa promenom γ_{21} uzrok su jednako blagim promenama u obliku izlaznog pulsa sa promenom iste veličine. Nasuprot ovome, u slučaju kada je $B = 0.01 B_0^*$, dolazi do uzajamnog pomeranja apsorpcione i disperzione krive sa jedne i spektralnog profila pulsa sa druge strane, zbog čega će maksimum pulsa u prostoru frekvencija sada biti bliži jednom od apsorpcionih maksimuma. Ovaj efekat ima za posledicu nezanemarljivo povećanje apsorpcije, vidljivo na slici 9.10 (a). Istovremeno, disperzione karakteristike se primetno menjaju – umesto u oblasti normalne disperzije, krive za $\gamma_{21} = 500\text{GHz}$ i $\gamma_{21} = 1\text{THz}$ sada leže u oblasti anomalne disperzije. Iako su gubici u ovim slučajevima veliki, jasno se može videti da se položaj maksimuma izlaznog pulsa skoro poklapa sa maksimumom ulaznog pulsa – nikakva spora svetlost se ne javlja u ovoj situaciji (pre se može govoriti o *brzoj* svetlosti, u smislu definicije iz poglavlja 2.1).

U cilju analize grafika 9.10 (b) poslužićemo se slikom 9.12, gde su prikazane apsorpciona i disperziona kriva za fiksno $\gamma_{21} = 10\text{GHz}$ i γ_{31} koje može da se menja. Prikazan je i spektralni profil ulaznog pulsa, i sve ovo je učinjeno u situaciji kada je spoljašnje magnetno polje jednako, odnosno različito od nule. Kako smo u odeljku 6.1.1 već pokazali, vrednost minimuma apsorpcije (u $\Delta_p = 0$) je za jaka kontrolna polja prevashodno određena koeficijentom γ_{31} :

$$\left(\text{Im}\rho_{21}^{(1)}\right)_{\min} = \text{Im}\rho_{21}^{(1)}(\Delta_p = 0) = \frac{\gamma_{31}}{\Omega_c^2 + \gamma_{21}\gamma_{31}}\Omega_p \approx \frac{\gamma_{31}}{\Omega_c^2}\Omega_p. \quad (9.6)$$



Slika 9.12: Apsorpciona kriva (gornji grafici) i disperziona kriva (donji grafici) za sistem svetlost–materija za fiksno $\gamma_{21} = 10\text{ GHz}$ i nekoliko različitih vrednosti γ_{31} . Dobijeni rezultati prikazani su za slučaj $B = 0 B_0^*$ (levi grafici) i $B = 0.01 B_0^*$ (desni grafici), i pridodat im je spektralni profil ulaznog sondirajućeg pulsa (crna tačkasta linija sa šrafranom površi ispod nje).

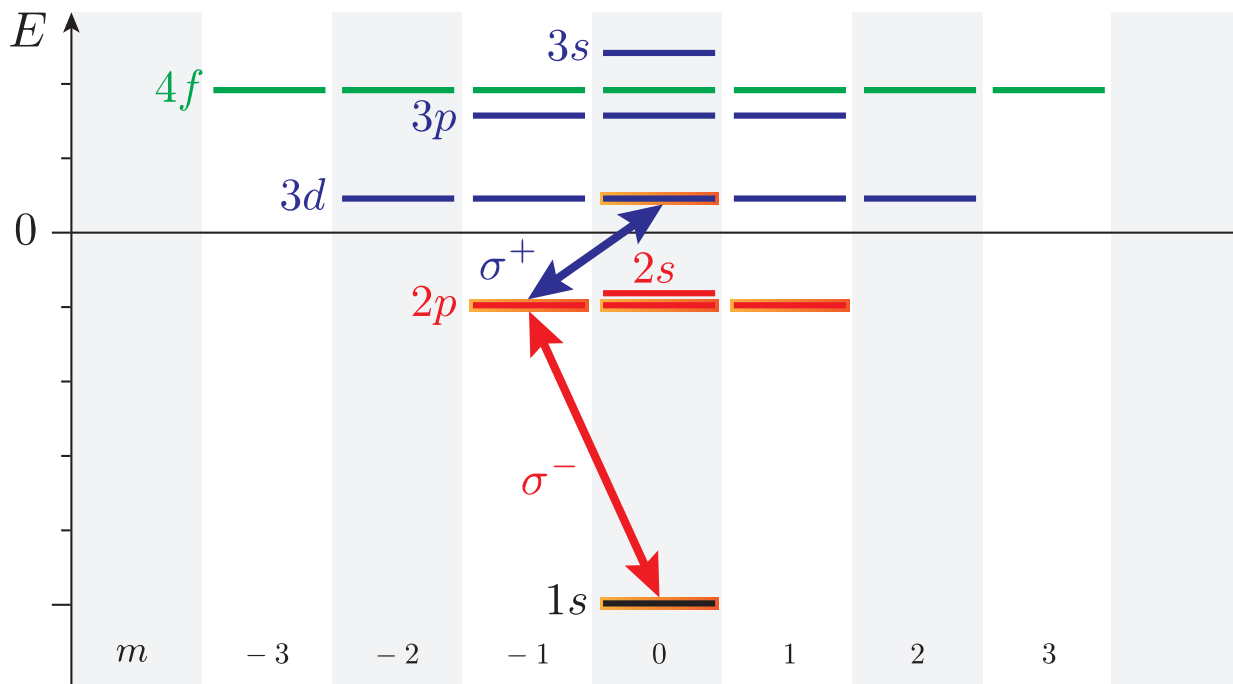
Dakle, povećanjem γ_{31} povećava se i apsorpcija na dnu prozora transparentnosti, dok je uticaj γ_{21} na ovo ponašanje neznan. Ovo se na gornjim graficima upravo i vidi – širina svih pikova je konstantna (jer je i γ_{21} konstantno), a vrednost apsorpcije u minimumu se menja. Na osnovu ovoga, jasno je zašto koeficijent raspada γ_{31} drastično utiče na apsorpciju sondirajućeg pulsa. Sa druge strane, disperziona kriva trpi skoro zanemarljive promene u oblasti gde „leže” spektralne komponente pulsa, što se ogleda na činjenicu da je promena grupe brzine, odnosno širine izlaznog pulsa na slici 9.10 (b) zanemarljivo mala. Uključivanjem magnetnog polja, puls se ponovo „pomera” ka jednom od apsorpcionih pikova – otuda veća apsorpcija i pojava asimetrije izlaznog pulsa. Međutim, i u ovom opsegu frekvencija, disperziona kriva trpi izuzetno male promene (istini za volju, nešto veće nego u odsustvu magnetnog polja), pa će i disperzija i promena brzine pulsa biti vrlo male.

U konačnom, vidimo da je, u cilju dobijanja što efikasnijeg procesa usporavanja svetlosti, potrebno voditi računa i o koeficijentima raspada koji su relevantni za odgovarajući sistem. Konkretno, koeficijent raspada γ_{21} utiče na širinu apsorpcionih pikova, i njegov uticaj je moguće potpuno eliminisati odabirom spektralno uskih sondirajućih pulseva. Ovo je zadovoljeno za većinu slučajeva od interesa u ovoj disertaciji. Nasuprot tome, koeficijent γ_{31} ima presudan uticaj na efikasnost pulsa, te je potrebno smanjiti ovu vrednost što je više moguće, bilo hlađenjem do izuzetno niskih temperatura, bilo takvim odabirom materijalne sredine i energijskih nivoa da nivo $|3\rangle$ bude dugoživeći (poput Ridbergovih atoma) [3,4]. Poznavanje i kontrolisanje ovih veličina je, prema tome, od velike važnosti za proučavanje poluprovodničkih nanostrukture uopšte, kao i njihovih potencijalnih praktičnih primena.

9.2 Uticaj degeneracije srednjeg nivoa na prostiranje pulsa

Sledeća konfiguracija od interesa jeste sistem sa tri nivoa, pri čemu je srednji nivo trostruko degenerisan (otvoren sistem). Ovakva konfiguracija moguća je u SKT koju proučavamo, ukoliko umesto njenih nivoa $1s_0$, $2p_{-1}$ i $3d_{-2}$ odaberemo nivoe $|1\rangle \equiv 1s_0$, $|2\rangle \equiv 2p_{-1}$ i $|3\rangle \equiv 3d_0$. Dakle,

razlika u odnosu na dosadašnji odabir je u najvišem nivou $|3\rangle$, koji sada pak može da se raspada (prema selekcionim pravilima u EDA, $\Delta l = \pm 1$ i $\Delta m = 0, \pm 1$) na *tri* niža nivoa: $2p_{-1}$, $2p_0$ i $2p_{+1}$. U odsustvu magnetnog polja, što je slučaj koji će nam ovde biti od centralnog značaja, nivo $2p$ je trostruko degenerisan, što upravo odgovara situaciji koju želimo da postignemo. Odavde sledi da je, u notaciji Glave 5, $|4\rangle \equiv 2p_0$ i $|5\rangle \equiv 2p_{+1}$. Promena u odabiru najvišeg nivoa prouzrokuje promenu u odabiru polarizacije kontrolnog lasera – dok sondirajuće polje ponovo pobuđuje prelaz $1s_0 \leftrightarrow 2p_{-1}$ (σ^- prelaz, polje je desno kružno polarizovano), kontrolno polje pobuđuje prelaz $2p_{-1} \leftrightarrow 3d_0$, pa ono mora biti (jer je sada $\Delta m = s = +1$ i u pitanju je σ^+ prelaz) *levo kružno polarizovano* ($\vec{\epsilon} = \vec{e}_{+1}$). Šema nivoa i odgovarajućih lasera za otvoren sistem sa tri nivoa prikazana je na slici 9.13.



Slika 9.13: Šema sedam najnižih energijskih nivoa sferne kvantne tačke za $R = 8a_0^*$ i $B = 0B_0^*$, zajedno sa laserskim poljima koja ih sprežu (sondirajuće – crvena i kontrolno – plava linija sa strelicama na oba kraja) i njihovim polarizacijama, čineći otvoren sistem sa tri nivoa. Nivoi koji čine datu konfiguraciju uokvireni su narandžastom bojom.

U ovom poglavlju, proučavaćemo uticaj degeneracije srednjeg nivoa na propagaciju sondirajućeg pulsa kroz sredinu. Materijalna sredina je, dakle, ista kao i do sada, sa tom razlikom što će drugačiji izbor nivoa i lasera usloviti i različite vrednosti prevashodno matričnih elemenata operatora električnog dipolnog momenta (sasvim uopšte, postojaće razlike i u energijama prelaza, ali se one u našem slučaju neće pojaviti jer ćemo se zadržati isključivo na slučaju $B = 0B_0^*$, kada su energije nivoa $3d_0$ i $3d_{-2}$ jednake). Uticaj degeneracije ispitivaćemo poređenjem otvorenog sistema, čiji je odabir nivoa izvršen u prethodnom pasusu, i zatvorenog sistema, čiji su nivoi $|1\rangle \equiv 1s_0$, $|2\rangle \equiv 2p_{-1}$ i $|3\rangle \equiv 3d_0$. Primetimo da izbor nivoa nije izvršen kao u poglavlju 9.1. Razlog za ovo je taj što će, ovakvim „fiktivnim” izborom energijskih nivoa, biti moguće direktno poređenje rezultata za slučaj sa i bez degeneracije, a sve u cilju ispitivanja uslova pri kojima je otvoren sistem, bez obzira što se nivoi $|4\rangle$ i $|5\rangle$ ne mogu tek tako izbaciti iz razmatranja, može zameniti odgovarajućim, zatvorenim sistemom, što bi olakšalo dalju računicu i pojednostavilo manipulaciju ovim sistemima. Još jedan razlog leži u tome što će, na ovaj način, rezultati dobijeni u ovom poglavlju moći da se generalizuju na druge, ne nužno poluprovodničke sisteme, kao što su atomski gasovi i pare [5, 6]. Takođe, kako bismo obez-

bedili što jasnije poređenje i objašnjenje efekata koji će se javiti, opredelili smo se da posmatramo sistem svetlost–materija u slučaju dominantne spontane emisije. To znači da ćemo u ovom poglavlju rešavati OB jednačine (5.206)–(5.219), dopunjene propagacionom jednačinom (5.151) za sondirajuće polje. Kao i u prethodnom poglavlju, posmatraćemo sondirajuće polje u pulsnom obliku, čiji je ulazni profil dat izrazom (6.158), dok će kontrolno polje biti kontinualni laser, pa odgovarajuću propagacionu jednačinu nije potrebno rešavati. Prilikom rešavanja ovih jednačina, koristićemo ponovo vrednosti parametara navedenih u tabeli 9.1, pri čemu ćemo i ovde varirati spektralnu poluširinu ulaznog pulsa, jačinu električnog polja envelope kontrolnog lasera, kao i koeficijente raspada.

Tabela 9.4: Frekvencije prelaza, matrični elementi operatora električnog dipolnog momenta i koeficijenti spontane emisije za četiri prelaza od interesa u ovoj disertaciji, u odsustvu spoljašnjeg magnetnog polja za SKT poluprečnika $R = 8a_0^*$. Kod razmatranja otvorenog sistema iz ovog poglavlja, fokusiraćemo se na prelaze $1s_0 \leftrightarrow 2p_{-1}$ i $2p_{-1} \leftrightarrow 3d_0$. Veličina s koja se pojavljuje u $d_{ij}^{(s)}$ povezana je sa polarizacijom lasera, odnosno selekcionim pravilima, i iznosi +1 za prelaz $2p_{-1} \leftrightarrow 3d_0$ i -1 za preostale prelaze.

	$1s_0 \leftrightarrow 2p_{-1}$	$2p_{-1} \leftrightarrow 3d_{-2}$	$2p_{-1} \leftrightarrow 3d_0$	$3d_{-2} \leftrightarrow 4f_{-3}$
ω_{ij} [THz]	6.58346	2.50519	2.50519	2.35968
$d_{ij}^{(s)}$ [10^{-27} Cm]	1.41008	4.17881	1.70599	5.28649
Γ_{ij} [GHz]	20.38561	9.86502	1.64416	13.19424

Koeficijenti raspada, koji u ovom poglavlju odgovaraju koeficijentima spontane emisije, predstavljaju veličine za koje postoje analitički izrazi, dati jednačinama (5.191). Vrednosti ovih koeficijenata za kvantnu tačku poluprečnika $R = 8a_0^*$ i $B = 0B_0^*$ dati su u tabeli 9.4 za sve elektromagnetne prelaze od interesa. Takođe, u tabeli su, radi preglednosti, prikazane i energije prelaza i matrični elementi operatora električnog dipolnog momenta istih prelaza u SI jedinicama. Iako, dakle, postoje egzaktno vrednosti koeficijenata Γ_{ij} , mi smo se opredelili da koristimo unapred zadate vrednosti, koje približno odgovaraju redu veličine izračunatih vrednosti, a sve u cilju detaljnijeg proučavanja uticaja koeficijenata raspada na apsorpcionu i disperzionu krivu, kao i samo prostiranje pulsa. Zbog toga ćemo, na samom početku, za koeficijente spontane emisije uzeti vrednosti $\Gamma_{k1} = \Gamma_{3k} = \gamma_0 = 1$ GHz, $k = 2, 4, 5$. Može se pokazati da se, u magnetnom polju, sa porastom njegove jačine, vrednosti ovih koeficijenata smanjuju i za po nekoliko redova veličine, pa je moguće odabrati takvu vrednost za B da se gubici pri propagaciji svetlosti smanje (što bi eventualno odgovaralo vrednostima Γ_{ij} odabranih ovde). Međutim, pošto bi se u tom slučaju narušila degeneracija srednjeg nivoa, sto bi izvođenja iz Glave 5 učinilo neprimenljivim, mi se na ovoj situaciji u daljem radu nećemo zadržavati.

9.2.1 Poređenje rezultata za otvoren i zatvoren sistem

MB jednačine za otvoren sistem sa tri nivoa rešavaćemo kao i do sada, primenom metoda FT, služeći se zaključcima dobijenim u odeljku 6.1.2.⁵ Kao i do sada, proučavaćemo uticaj spektralne

⁵ Da budemo sasvim precizni, pored uslova $\Omega_p \ll \Omega_c$ koji nam omogućava da primenimo metod FT, potrebno je da i uslov $\Omega_p \ll \Gamma_{ij}$ bude zadovoljen. U uslovima koje smo postavili za sistem koji trenutno razmatramo, dešava se da je $\Omega_p \sim \Gamma_{ij}$, zbog čega je primena ovog metoda i ovakvih jednačina diskutabilna. Ipak, može se pokazati da rešenje MB jednačina dobijeno pomenutim metodom, za vrednosti parametara koje ovde koristimo, sasvim dobro opisuje realan fizički sistem koji nam je od interesa u disertaciji. Razlog za ovo je taj što radimo sa pulsevima koji su dovoljno uski da se kompletno nađu unutar prozora transparentnosti, a daleko od apsorpcionih maksimuma, gde će se najveća odstupanja od stvarnih rešenja i javiti.

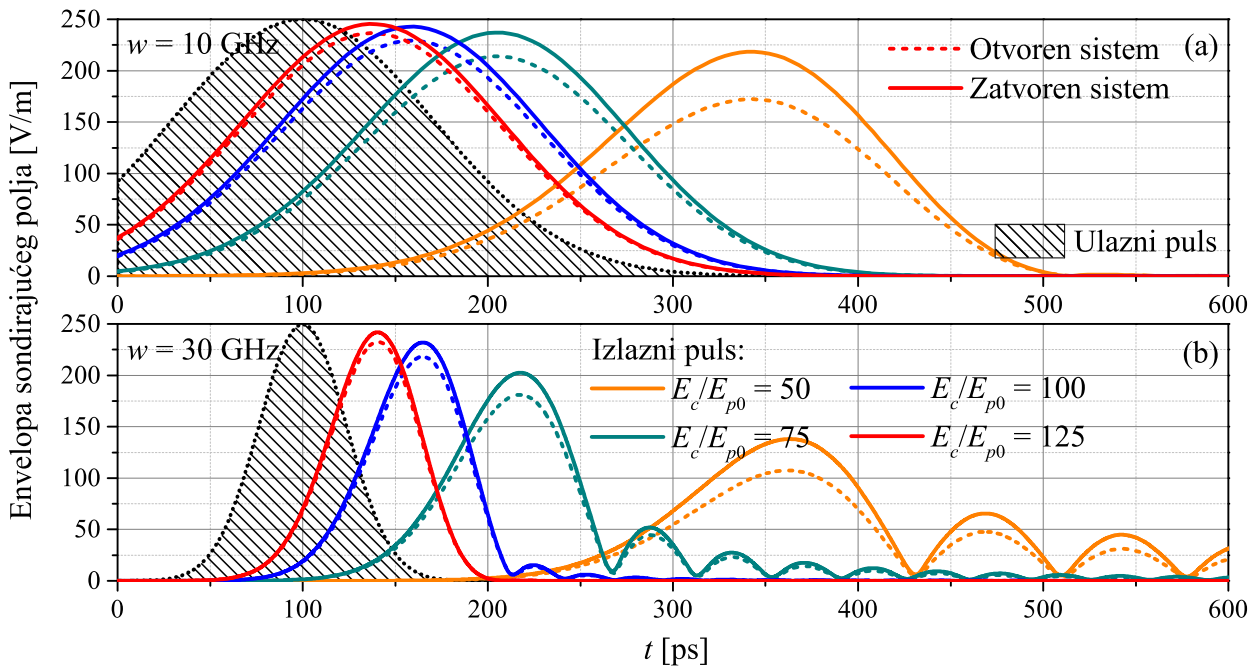
poluširine, jačine električnog polja kontrolnog lasera i koeficijenta spontane emisije na prostiranje sondirajućeg pulsa. Važnu dopunu ovom proučavanju činiće poređenje prostiranja pulsa kroz otvoren, odnosno zatvoren sistem, pri čemu je odabir energijskih nivoa za obe konfiguracije izvršen na početku poglavlja. Vrednosti jačine električnog polja kontrolnog lasera, kao i odgovarajuće Rabijeve frekvencije koje se odatle dobijaju, prikazane su u tabeli 9.5. Primetimo da je, u poglavlju 9.1, vrednosti $E_c/E_{p0} = 50$ odgovarala Rabijeva frekvencija $\Omega_c \approx 250$ GHz, dok se ista ova vrednost Rabijeve frekvencije kontrolnog polja za otvoren sistem razmatran u ovom poglavlju (a samim tim i „fiktivni” zatvoren sistem iz koga smo „izbacili” nivoe $|4\rangle$ i $|5\rangle$) dostiže pri približnom odnosu $E_c/E_{p0} \approx 125$. Naravno, razlog za ovo leži u činjenici da u izrazima za Ω_c sada ne figuriše vrednost $d_{32}^{(-1)}$ već $d_{32}^{(+1)}$, koja je od $d_{32}^{(-1)}$ manja oko 2.5 puta, kako tabela i pokazuje. Budući da u izrazu za sondirajuću Rabijevu frekvenciju figuriše ponovo $d_{21}^{(-1)}$, to se ova vrednost neće razlikovati od one dobijene u prethodnom poglavlju.

Tabela 9.5: Veza između jačina električnog polja i Rabijevih frekvencija kontrolnog lasera, za otvoren sistem sa tri nivoa, nekoliko vrednosti od interesa i za $B = 0 B_0^*$. Poređenje je dato i u odnosu na odgovarajuće vrednosti za sondirajuće polje, što je u ovom slučaju $E_{p0} = 250$ V/m i $\Omega_{p0} = 1.67$ GHz.

E_c/E_{p0}	E_c [kV/m]	Ω_c [GHz]	Ω_c/Ω_{p0}
0	0	0	0
50	12.5	101.11	60.49
75	18.75	151.66	90.74
100	25	202.21	120.99
125	31.25	252.77	151.23

Na slici 9.14, prikazan je vremenski profil izlaznog pulsa za nekoliko različitih jačina kontrolnog polja, kao i za dve vrednosti spektralne poluširine ulaznog pulsa, $w = 10$ GHz i $w = 30$ GHz. Naravno, dobijeni rezultati prikazani su kako za otvoren, tako i za zatvoren sistem u kome postoji samo jedan središnji (pod)nivo. Kao i u poglavlju 9.1, objašnjenje uticaja E_c (odnosno Ω_c) i w svodi se na diskusiju položaja pulsa (u prostoru frekvencija) u odnosu na prozor transparentnosti i disperzionu krivu. Na oba grafika, grupna brzina, ali i visina pulsa, smanjuju se sa smanjenjem Rabijeve frekvencije kontrolnog polja, što je naravno povezano sa činjenicom da uži prozor transparentnosti, određen preko Ω_c , implicira veći nagib disperzione krive, a samim tim i manju grupnu brzinu pulsa. Sa druge strane, uži prozor izaziva i veću apsorpciju pulsa, sve u skladu sa ranijom diskusijom. Takođe, jasno je da će spektralno uži puls, prikazan na slici 9.14 (a), proći kroz prozor transparentnosti sa vrlo malom modifikacijom originalnog Gausovog profila (primetna je jedino blaga asimetrija izlaznog pulsa, i to u slučaju $E_c/E_{p0} = 50$ i pojačane apsorpcije). Nasuprot tome, puls sa većom spektralnom širinom trpi „odsecanje” većeg broja spektralnih komponenti, najudaljenijih od centralne frekvencije, što dovodi do pojačanja efekata trećeg reda po ω i raspada pulsa.

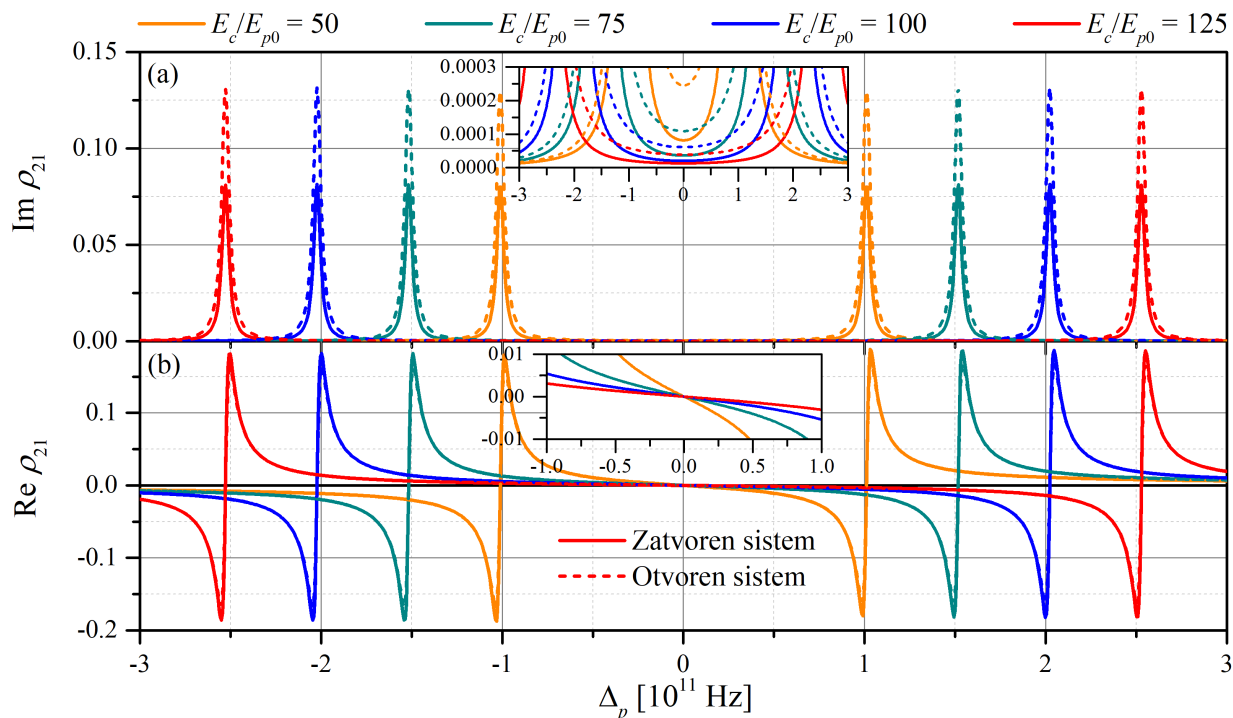
Deo na koji ćemo se posebno orijentisati u ovom poglavlju vezan je za poređenje rezultata za otvoren i zatvoren sistem [6]. Sa oba grafika na slici 9.14, vidimo da su gubici veći kod otvorenog sistema, dok degeneracija srednjeg nivoa ne utiče na grupnu brzinu pulsa. Razlog za ovakvo ponašanje se najbolje vidi na slici 9.15, gde su prikazane apsorpciona i disperziona kriva za obe konfiguracije. Ove dve krive dobijene su *egzaktnim* numeričkim rešavanjem OB jednačina u stacionarnom režimu, i to jednačina (5.206)–(5.219) za otvoren, odnosno (5.200)–(5.204) za zatvoren sistem. Egzaktnim rešavanjem OB jednačina izbegnuta je neophodnost važenja problematičnog uslova $\Omega_p \ll \Gamma_{ij}$. Napomenimo na ovom mestu da bi perturbativni pristup dao apsorpcionu krivu sa



Slika 9.14: Vremenska zavisnost envelope električnog polja sondirajućeg pulsa na izlazu iz sredine za različite jačine kontrolnog polja, za otvoren (isprekidane) i zatvoren sistem (pune linije), kao i za (a) $w = 10$ GHz i (b) $w = 30$ GHz. Ulazni puls prikazan je tačkastom linijom i šrafiranom površinom ispod nje.

znatno višim apsorpcionim pikovima, ali da bi ovo rešenje unutar prozora transparentnosti bilo sasvim korektno. Slika 9.15 (a) jasno pokazuje da su visine apsorpcionih pikova u slučaju zatvorenog sistema izrazito veće nego one za otvoren sistem. Ipak, glavna razlika je vidljiva na umetnutom grafiku – dno prozora transparentnosti je znatno niže kod zatvorenog sistema, i ova razlika izraženija je kod slabijih kontrolnih lasera. Na primer, razlika između dve krive kad je $E_c/E_{p0} = 50$ u minimumu apsorpcije (puna i isprekidana narandžasta linija) znatno je veća od razlike u slučaju $E_c/E_{p0} = 125$ (puna i isprekidana crvena linija). Upravo je ovo razlog zašto se takva izraženija razlika između dva sistema javlja kod slabijih kontrolnih polja na slici 9.14. Paralelno sa time, uži prozor transparentnosti i visoka vrednost apsorpcije u njegovom centru (podsetimo da se, usled $\Delta_p + \Delta_c = 0$, centralna frekvencija poklapa sa koordinatnim početkom na slici 9.15 (a) u kome apsorpciona kriva ima minimum) dovodi do značajne modifikacije izlaznog pulsa – on gubi svoju originalnu strukturu, tako da već u slučaju kada je $E_c/E_{p0} = 50$ na slici 9.14 (a) vidimo odstupanje od Gausovog profila kod izlaznog pulsa. Činjenicu da je grupna brzina pulsa praktično nezavisna od izbora konfiguracije nije teško opravdati – posmatranjem disperzione krive za otvoren (isprekidane linije) i zatvoren sistem (pune linije) na slici 9.15 (b), vidimo da se one praktično poklapaju u svim tačkama, a ne samo u minimumu apsorpcije. Jedva primetno odstupanje, doduše, postoji u oblastima oko *maksimuma* apsorpcije, ali ono nije od prevelikog interesa, pošto, podsećamo, radimo prevashodno sa spektralno uskim pulsevima.

Uprkos tome što je rešavanje OB jednačina izvršeno numerički, aproksimativna rešenja dobijena perturbacionim pristupom i dalje mogu biti od velikog značaja za objašnjenje efekata koji se ovde javljaju. Zadržimo se na analizi apsorpcije na dnu prozora transparentnosti. Na osnovu jednačina (6.51) i (6.52), zaključujemo da će apsorpcija u slučaju zatvorenog sistema biti srazmerna koeficijentu spontane emisije Γ_{32} , a u slučaju otvorenog sistema *zbiru* koeficijenata $\Gamma_{32} + \Gamma_{34} + \Gamma_{35} = \Gamma_3^{\text{ef}}$, koga još zovemo i efektivni koeficijent raspada [5, 6]. Očigledno je da, zbog ovoga, puls koji se



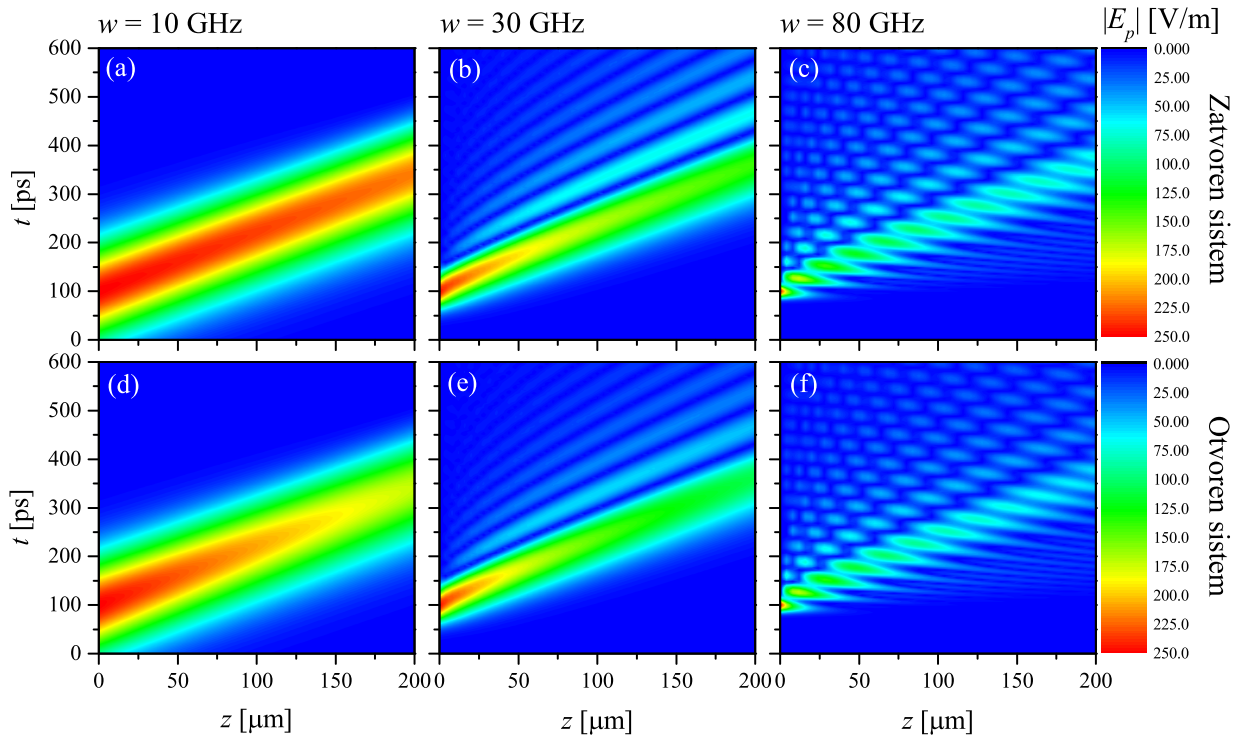
Slika 9.15: (a) Apsorpciona i (b) disperziona kriva za sistem sa tri nivoa u lestvičastoj konfiguraciji, za nekoliko različitih vrednosti jačine električnog polja kontrolnog lasera, za $B = 0 B_0^*$ i $\Delta_c = 0$. Prikazani su rezultati za otvoren (isprekidane), kao i za zatvoren sistem sa tri nivoa (pune linije).

prostire kroz sredinu sa kojom se spreže u otvoren sistem trpi veću apsorpciju, i vidimo da je to zbog činjenice da se najviši nivo umesto na jedan, sada raspada na tri nivoa, smanjujući sopstveno vreme života i doprinoseći pojačanoj dekoherenciji. Veličina Γ_3^{ef} biće nam od centralnog značaja u narednom odeljku.

Radi kompletnosti, prikažimo i prostorno-vremensku zavisnost envelope sondirajućeg pulsa pri propagaciji kroz materijalnu sredinu [6]. Ovo je učinjeno za slučaj $E_c/E_{p0} = 50$, kao i za tri različite vrednosti spektralne poluširine pulsa. Sve ostale vrednosti parametara su nepromenjene. Dok smo slučajeve kada je $w = 10 \text{ GHz}$ i $w = 30 \text{ GHz}$ već detaljno razmatrali, ovde smo, radi ilustracije, prikazali i puls čija je poluširina $w = 80 \text{ GHz}$. Ukoliko, kao i ranije, uporedimo vrednosti poluširine prozora transparentnosti ($w_{\text{AT}} \approx \Omega_c$ za $\Omega_c \gg \Gamma_{ij}$, što je ovde ponovo zadovoljeno) i spektralne poluširine pulsa, dobićemo

$$\frac{w_{\text{AT}}}{w} = \begin{cases} 10.11, & w = 10 \text{ GHz}, \\ 5.06, & w = 20 \text{ GHz}, \\ 1.26, & w = 80 \text{ GHz}. \end{cases} \quad (9.7)$$

Vidimo da je, u prva dva slučaja, odnos w_{AT}/w vrlo sličan odnosu prikazanom u jednačini (9.1). Za $w = 10 \text{ GHz}$, vidimo da puls ne trpi praktično nikakve modifikacije svog profila, i da je različit stepen apsorpcije jedino što razlikuje slučaj otvorenog i zatvorenog sistema. Kada je $w = 30 \text{ GHz}$, puls je i dalje dovoljno uzak da prođe kroz sredinu sa relativno malim gubicima, ali takođe dolazi i do narušavanja „gausovske” strukture i pojave „repa” pulsa. Konačno, za $w = 80 \text{ GHz}$, poluširina pulsa je uporediva sa poluširinom prozora transparentnosti, i gubici su veliki – pored velike apsorpcije, dolazi do dominacije efekata trećeg i viših redova po frekvenciji, zbog čega se puls praktično

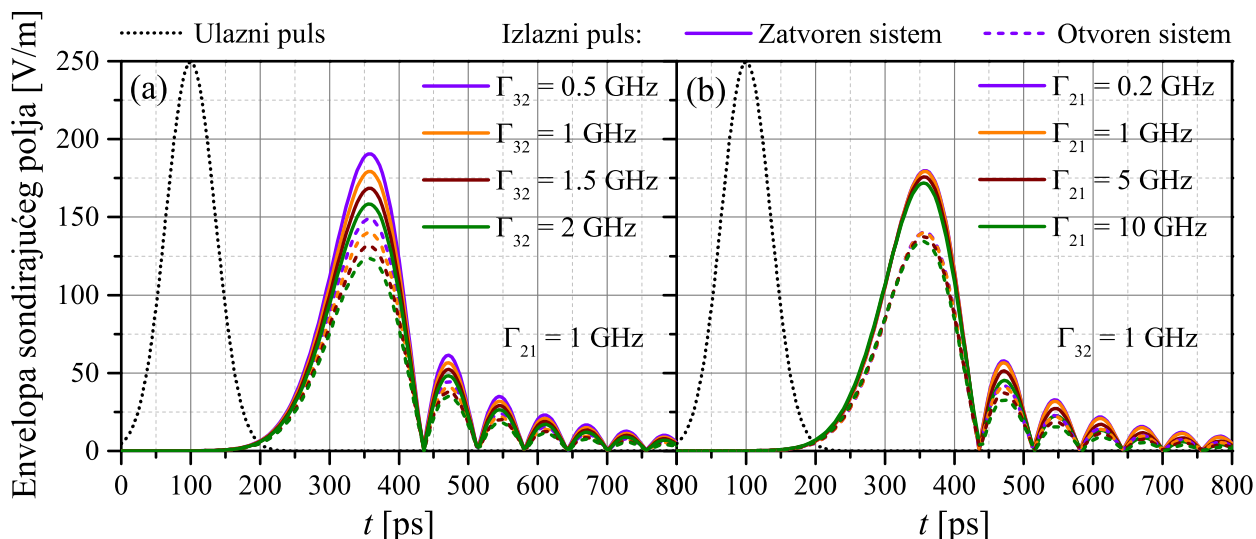


Slika 9.16: Prostorna i vremenska zavisnost envelope električnog polja sondirajućeg pulsa pri prostiranju kroz sredinu, za $E_c/E_{p0} = 50$, vrednosti spektralne poluširine (a,d) $w = 10$ GHz, (b,e) $w = 30$ GHz i (c,f) $w = 80$ GHz, u slučaju (a–c) zatvorenog i (d–f) otvorenog sistema sa tri nivoa.

potpuno raspada. Ovaj poslednji slučaj nećemo proučavati u nastavku disertacije, jedino ćemo napomenuti da su, kao i u prethodna dva slučaja, gubici koji se javljaju kod otvorenog sistema, iz već poznatih razloga, veći nego oni za zatvoren sistem.

Uticaj koeficijenata spontane emisije na oblik pulsa na izlazu iz sredine prikazan je na slici 9.17, gde je ponovo vršeno poređenje između otvorenog i zatvorenog sistema [6]. Jačina električnog polja kontrolnog lasera je $E_c/E_{p0} = 50$, a spektralna poluširina ulaznog pulsa iznosi $w = 20$ GHz. Za koeficijente spontane emisije smo dozvolili da se menjaju, i to tako da je na slici 9.17 (a) vrednost Γ_{21} fiksirana a Γ_{32} može da se menja, dok je na slici 9.17 (b) situacija obrnuta. Primetimo da smo koeficijent spontane emisije za prelaz $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ varirali za red veličine, delom zbog toga što smo želeli da obuhvatimo red veličine ovog koeficijenta za realniji slučaj $\Gamma_{21} \sim 10^{10}$ Hz, kako stoji u tabeli 9.4, a delom jer velike promene ovog koeficijenta ne utiču previše na oblik izlaznog pulsa. Sa druge strane, koeficijent Γ_{32} ima veći uticaj na prostiranje pulsa, pa ćemo se ovde zadržati samo na situaciji kada je $\Gamma_{32} \sim 10^9$ Hz, što ponovo odgovara, po redu veličine, realnoj vrednosti iz tabele 9.4.

Kao što smo već diskutovali, na slici 9.17 (a) vidimo da povećanje Γ_{32} izaziva uočljive promene u profilu izlaznog pulsa – povećava se apsorpcija, ali grupna brzina i disperzija ostaju nepromenjeni. Ovo je u skladu sa činjenicom da je visina dna prozora transparentnosti u minimumu apsorpcije proporcionalna Γ_{32} u slučaju zatvorenog, odnosno Γ_3^{ef} u slučaju otvorenog sistema sa tri nivoa, kako je to prikazano na slici 9.18 (levi grafik). Disperzione krive, za sve slučajeve sa grafika, ovde nisu prikazane, jer se njihovi nagibi u $\Delta_p = 0$ praktično poklapaju. Ovo je istovremeno i uzrok ponašanja da se praktično svi pulsevi na slici 9.17 (a) prostiru istom grupnom brzinom i bez promene disperzije. Na osnovu pojave „repa” pulsa, vidimo da je puls dovoljno spektralno širok da efekti trećeg reda po ω u disperzionoj relaciji $\kappa(\omega)$ neće moći da budu zanemareni. Efekti četvrtog i viših

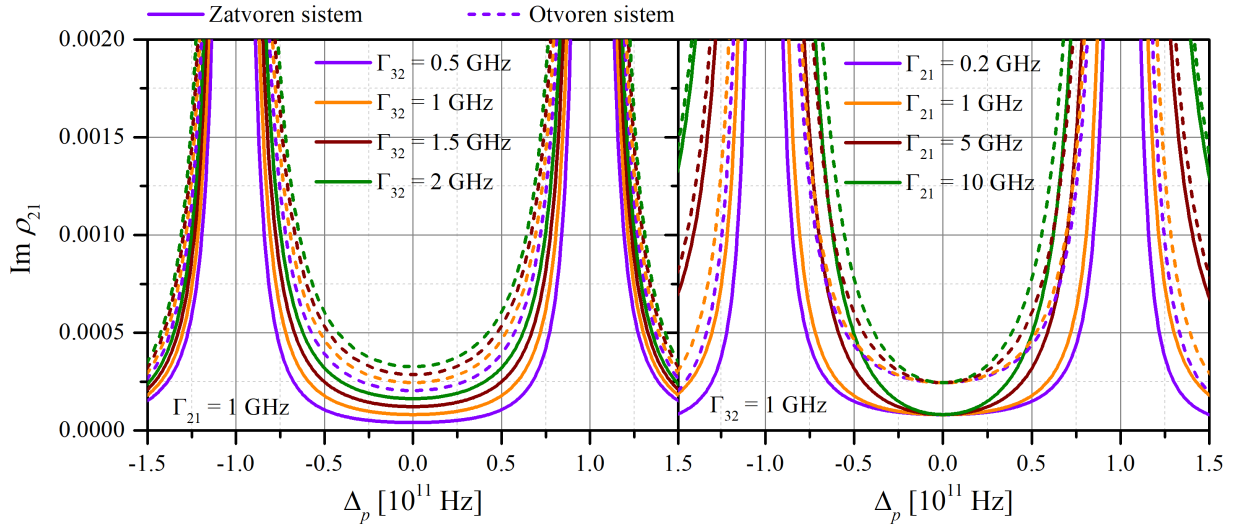


Slika 9.17: Vremenska zavisnost envelope izlaznog sondirajućeg pulsa za (a) različito Γ_{32} i $\Gamma_{21} = 1$ GHz, odnosno (b) različito Γ_{21} i $\Gamma_{32} = 1$ GHz. Spektralna poluširina ulaznog pulsa (crna tačkasta linija) je $w = 20$ GHz, a na graficima su prikazani slučajevi sistema sa tri nivoa sa nedegenerisanim (pune linije) i trostruko degenerisanim srednjim nivoom (isprekidane linije).

redova, ipak, neće igrati preveliku ulogu u prostiranju sondirajućeg pulsa.

Slika 9.17 (b) jasno ukazuje na to da je promena oblika pulsa na izlazu sa povećanjem koeficijenta Γ_{21} , dok se Γ_{32} drži konstantnim, praktično zanemarljiva. Postoje, naravno, uočljive razlike između otvorenog i zatvorenog sistema (jer je i ovde visina dna prozora određena koeficijentom raspada sa najvišeg na niže nivoe, a imamo da je $\Gamma_{32} < \Gamma_3^{\text{ef}}$), ali u okviru svake od ovih konfiguracija pojedinačno, razlika gotovo i da nema. Posmatranjem apsorpcione krive na slici 9.18 (desni grafik), jasno je zašto je to tako. Povećanje Γ_{21} utiče samo na povećanje širine apsorpcionih pikova, što će dovesti do povećanja apsorpcije, ali samo onih spektralnih komponenti pulsa najudaljenijih od centralne. Naravno, odavde je jasno da bi povećanje gubitaka sa povećanjem Γ_{21} , koje se jedva uočava na slici 9.17 (b), bilo primetnije za spektralno šire pulseve, čiji bi krajevi u prostoru frekvencija dosežali do pikova apsorpcije. Kao i u prethodnom slučaju, može se pokazati da razlika u disperzionim krivama (barem u okolini minimuma apsorpcije) u svim ovim slučajevima gotovo i da nema, što objašnjava nepromenjenu grupnu brzinu, kao i konstantnu disperziju sondirajućeg pulsa.

Ispitajmo, sada, ponašanje grupnog indeksa, relativne širine, efikasnosti i vernosti izlaznog pulsa za otvoren i zatvoren sistem, u zavisnosti od kontrolne Rabijeve frekvencije, odnosno spektralne poluširine ulaznog pulsa (slika 9.19) [6]. Na slici 9.19 (a–d) prikazani su pomenuti parametri u zavisnosti od Ω_c , za $w = 20$ GHz. Kao kod slike 9.6, i ovde je „odsečen” deo grafika za malo Ω_c , pošto je u tom slučaju perturbacioni metod, a samim tim i metod FT, neprimenljiv. Opadanje n_g i δ , a porast η i ξ sa porastom kontrolne Rabijeve frekvencije, već su objašnjeni u odeljku 9.1.1. Razlike između otvorenog i zatvorenog sistema su takođe očekivane – dok je apsorpcija veća a efikasnost manja u slučaju otvorenog sistema (slika 9.19 (c)), zbog veće vrednosti visine dna prozora transparentnosti u odnosu na zatvoren sistem, grupna brzina, a samim tim i grupni indeks praktično ne zavise od izbora konfiguracije (slika 9.19 (a)). Vidljivo, ali malo odstupanje između dva sistema postoji i kod relativne širine i vernosti (slika 9.19 (b) i (d), respektivno), što je u skladu sa činjenicom da ni disperzija pulsa ne zavisi od konfiguracije, a samim tim ni oblik pulsa na izlazu iz sredine. Razlika između ovih parametara u slučaju otvorenog, odnosno zatvorenog sistema najveća je za male vrednosti Ω_c , ali se povećanjem ove veličine, što dovodi do povećanja širine prozora transparentnosti,



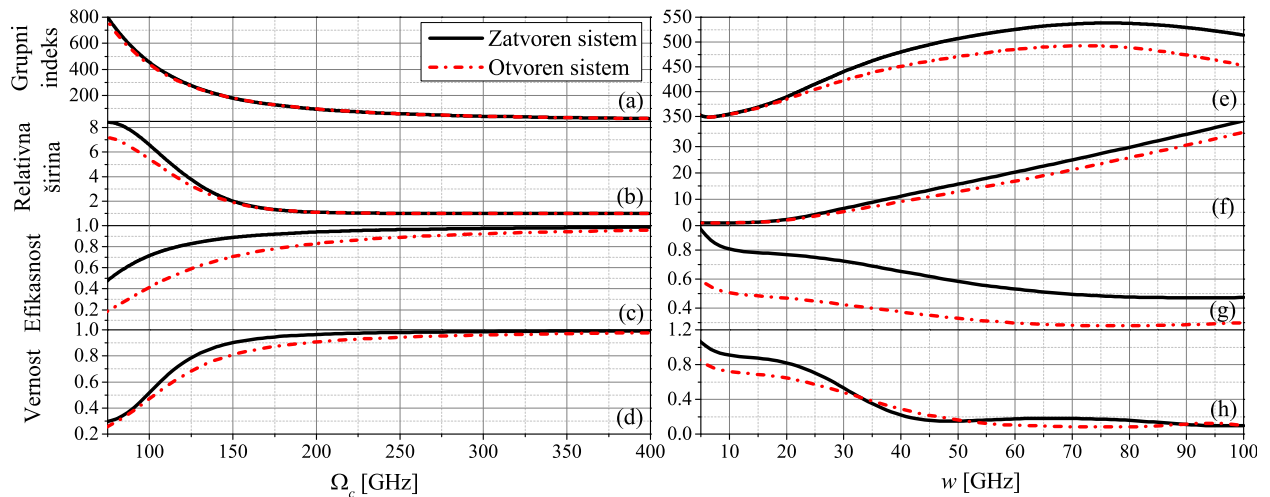
Slika 9.18: Apsorpciona kriva za zatvoren (pune) i otvoren sistem (isprekidane linije), za $\Gamma_{21} = 1$ GHz i nekoliko različitih vrednosti Γ_{32} (levi grafik), kao i za fiksnu vrednost $\Gamma_{32} = 1$ GHz i promenljivo Γ_{21} (desni grafik).

ova odstupanja sve više smanjuju.

Slika 9.19 (e–h) daje zavisnost četiri parametra od spektralne poluširine ulaznog pulsa, za slučaj $E_c/E_{p0} = 50$ ($\Omega_c = 101.11$ GHz). Kao i u diskusiji uticaja poluširine na parametre kod zatvorenog sistema sa tri nivoa iz poglavlja 9.1, jasno je da će efikasnost i vernost biti veći što je w manje. U tom slučaju, puls prolazi kroz prozor transparentnosti sa malim gubicima, disperzijom i promenama oblika. Povećanje spektralne širine usloviće povećanje efekata trećeg i viših redova po ω , kao posledica disperzije grupe brzine i veće apsorpcije spektralnih komponenti na krajevima pulsa. Naravno, razlika između otvorenog i zatvorenog sistema je očigledna na slici 9.19 (g), jer su gubici u slučaju otvorenog sistema veći. Ovakvo ponašanje se primećuje i u slučaju grupnog indeksa i relativne širine, pri čemu razlike kod spektralno uskih pulseva gotovo da i ne postoje. One će se javiti tek kod spektralno širokih pulseva, što je i pomenuto u ranijem tekstu. Napomenimo još i da se za vernost, prikazanu na slici 9.19 (h), vidi da odstupanje između dva sistema praktično „osciluje”, i ne dostiže velike vrednosti čak ni za veliko w . Dakle, može se reći da parametar ξ trpi najmanje promene po pitanju razlike između dve konfiguracije na najvećem opsegu spektralnih poluširina, i da se ta razlika čak smanjuje sa povećanjem w .

9.2.2 Efektivni koeficijent raspada

Jedna od ideja za poređenje otvorenog i zatvorenog sistema sa tri nivoa leži u nameri da se ispita pri kojim uslovima je otvoren, degenerisani sistem sa tri nivoa, moguće tretirati kao zatvoren, odnosno nedegenerisan. Ovo je važno jer je, kao što smo videli, sistem sa tri nivoa opisan znatno manjim brojem jednačina, pa bi ova „zamena” otvorenog sistema zatvorenim značajno uprostila problem koji rešavamo. Takođe, svođenje složenijeg na jednostavniji slučaj, koji se češće pojavljuje u literaturi i čija svojstva su detaljnije ispitana, omogućava da neke zaključke koji važe za sisteme sa tri nivoa bez degeneracije prenesemo i na degenerisane sisteme. U odeljku 6.1.2 pokazano je da se rešenja MB jednačina za otvoren sistem *potpuno poklapaju* sa onima za zatvoren sistem sa *efektivnim* koeficijentom raspada najvišeg nivoa, $\Gamma_3^{\text{ef}} = \Gamma_{32} + \Gamma_{34} + \Gamma_{35}$. Ovaj zaključak izveden je uz

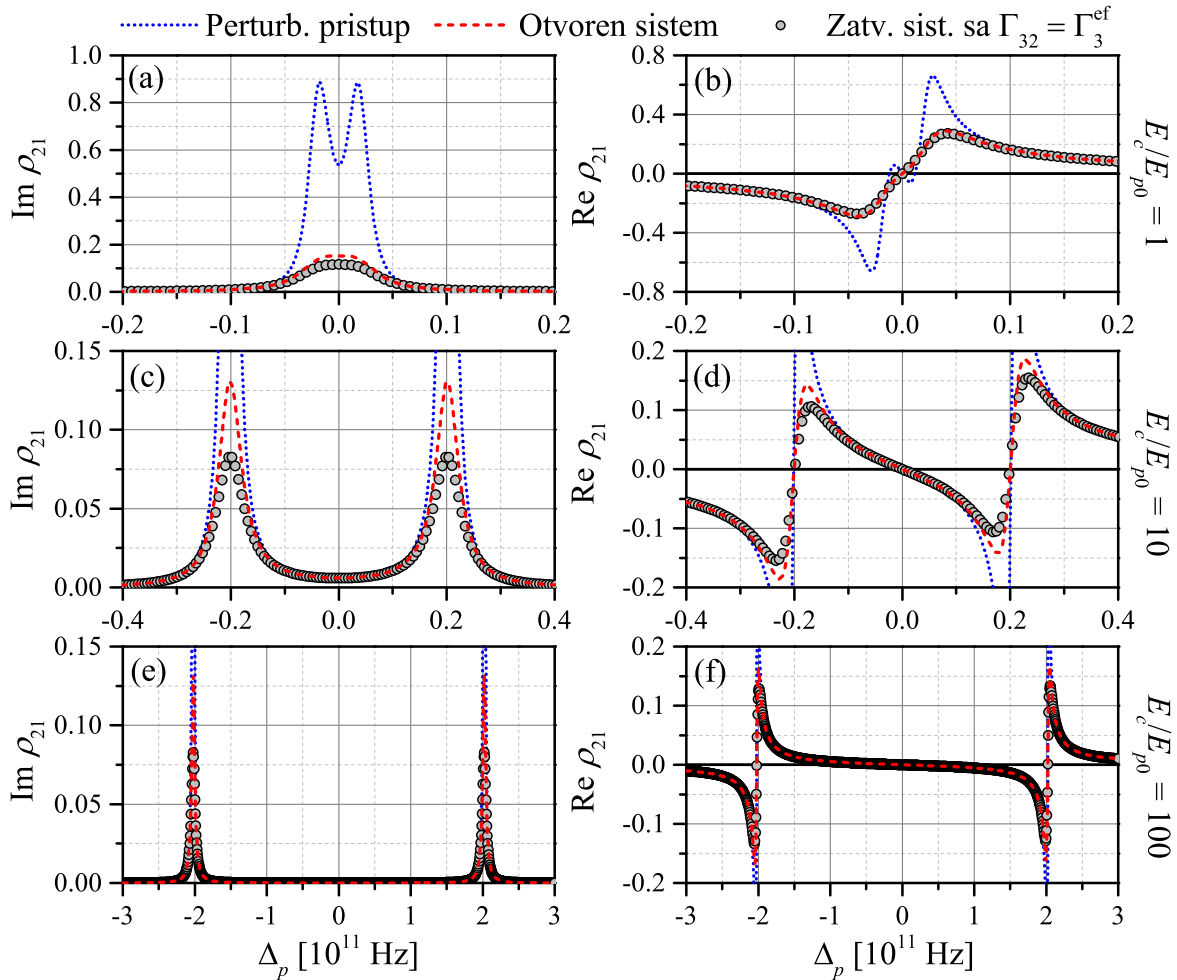


Slika 9.19: Grupni indeks, relativna širina, efikasnost i vernost pulsa na izlazu iz sredine ($z = D$) u zavisnosti od (a–d) Rabijeve frekvencije kontrolnog polja za fiksno $w = 20$ GHz i (e–h) spektralne poluširine ulaznog pulsa za fiksno $E_c/E_{p0} = 50$. Na graficima su prikazani rezultati dobijeni za otvoren (crvena crta-tačka) i zatvoren sistem sa tri nivoa u lestvičastoj konfiguraciji (crna puna linija).

pretpostavku slabog sondirajućeg polja ($\Omega_p \ll \Omega_c$, ali i $\Omega_p \ll \Gamma_{ij}$), što nam je dozvolilo da iskoristimo perturbacioni pristup i linearizujemo OB jednačine. Postavlja se pitanje da li ovo tvrđenje važi univerzalnije, kada su uslovi slabog polja narušeni, i da li pri tome postoje neki dodatni uslovi. U ovom odeljku ćemo pokušati da odgovorimo na ovo pitanje.

Koncentrisaćemo se na rešenje OB jednačina za (otvoren i zatvoren) sistem svetlost–materija u stacionarnom slučaju, dakle na analizu apsorpcione i disperzione krive, prikazanih na slici 9.20. Preciznije, to će za otvoren sistem značiti rešavanje sistema jednačina (5.206)–(5.219), a za zatvoren (5.200)–(5.204), kako numerički, tako i analitički, primenom perturbacionog metoda. Pomenute jednačine rešavane su za slučaj rezonantnog kontrolnog polja ($\Delta_c = 0$), za nekoliko različitih vrednosti jačine kontrolnog polja, kao i za slučaj dominantne spontane emisije. U slučaju otvorenog sistema, svi nenulti koeficijenti spontane emisije imaju jednaku vrednost, $\Gamma_{k1} = \Gamma_{3k} = \gamma_0 = 1$ GHz, $k = 2, 4, 5$. Prilikom razmatranja zatvorenog sistema, za koeficijent Γ_{21} iskoristili smo istu vrednost kao u slučaju otvorenog sistema, dok smo umesto koeficijenta Γ_{32} stavili $\Gamma_3^{\text{ef}} = 3$ GHz. Ostale vrednosti parametara iste su kao i do sada. Plavom tačkastom linijom prikazana su rešenja OB jednačina dobijena perturbacionim metodom, i ova linija predstavlja rešenja za obe konfiguracije. Nasuprot tome, egzaktna numerička rešenja data su crvenom isprekidanom linijom za otvoren sistem, odnosno sivim kružićima za zatvoren sistem sa efektivnim koeficijentom raspada. Uporedo sa diskusijom (ne)poklapanja numeričkih rešenja za obe konfiguracije, moći ćemo da ispitamo i uslove primene perturbacionog rešenja na konkretnu problematiku.

Na slici 9.20 (a) i (b), prikazane su apsorpciona i disperziona kriva za slučaj $E_c/E_{p0} = 1$, respektivno. Rabijeva frekvencija kontrolnog lasera je tada $\Omega_c = 2.02$ GHz, što je jedva 1.2 puta veće od Ω_{p0} , pa linearizacija OB jednačina nije opravdana. Sa slike 9.20 (a) se vidi veliko odstupanje između perturbacionog i egzaktnih rešenja, gde više ne postoje dva apsorpciona pika, već jedna apsorpciona „zaravan” koja zamenjuje prozor transparentnosti. Međutim, poklapanje između egzaktnih rešenja za otvoren i „efektivni” zatvoren sistem je i dalje zadovoljavajuće – blago odstupanje javlja se u oblasti $\Delta_p = 0$ gde je apsorpcija najveća. Slično ponašanje vidljivo je i na slici 9.20 (b), sa tom razlikom što je poklapanje numeričkih rešenja čak i bolje nego u slučaju apsorpcione krive – grupna



Slika 9.20: (a,c,e) Apsorpciona i (b,d,f) disperziona kriva za otvoren i „efektivni” zatvoren sistem sa tri nivoa u lestvičastoj konfiguraciji, za kontrolni laser sa razdešenošću $\Delta_c = 0$ i jačinom električnog polja (a–b) $E_c/E_{p0} = 1$, (c–d) $E_c/E_{p0} = 10$ i (e–f) $E_c/E_{p0} = 100$. Na graficima su prikazane krive dobijene analitički, perturbacionim pristupom (plave tačkaste linije, odgovaraju istovremeno obema konfiguracijama), kao i numerički, rešavanjem OB jednačina za otvoren sistem (crvene isprekidane linije), odnosno zatvoren sistem sa koeficijentom raspada najvišeg nivoa Γ_3^{ef} umesto Γ_{32} (sivi kružići).

brzina i disperzija pulsa neće zavisiti od toga da li se radi o otvorenom ili „efektivnom” zatvorenom sistemu.

Sa povećanjem kontrolnog polja (slika 9.20 (c) i (d)), očigledno da je i poklapanje između perturbacionog i egzaktnih rešenja bolje, pošto je perturbacioni metod u ovom slučaju primenljiviji. Najveća odstupanja, kako između ova dva tipa rešenja, tako i između samih numeričkih rešenja za dve konfiguracije, uočljiva su u oblasti pojačane apsorpcije, dok je jako dobro poklapanje primetno praktično svuda unutar prozora transparentnosti, kao i u istoj oblasti kod disperzione krive. Ukoliko radimo sa spektralno uskim pulsevima, već za $E_c/E_{p0} = 10$ ćemo moći da izvršimo željenu zamenu otvorenog sistema zatvorenim – profil izlaznog pulsa, njegova apsorpcija, disperzija i grupna brzina, neće praktično trpeti nikakve promene pri prelasku iz jedne konfiguracije u drugu.

Konačno, ukoliko je $E_c/E_{p0} = 100$ kao na slici 9.20 (e) i (f), primena perturbacionog metoda je više nego opravdana, pa će poklapanja između dve konfiguracije biti još bolja. Ipak, primetimo da

u oblasti oko apsorpcionih maksimuma i dalje postoje jasna odstupanja između perturbacionog i egzaktnih rešenja – prema perturbacionom rešenju, visina ovih maksimuma bi trebalo da bude veća nego što realno jeste. Razlog za ovo ponašanje leži u činjenici da su, pri rešavanju OB jednačina, odabrani takvi parametri da je $\Omega_p \sim \Gamma_{ij}$. Kao što smo već ranije diskutovali, da bi perturbacioni metod dao najbolje rezultate, potrebno je da važi i $\Omega_p \ll \Gamma_{ij}$. U tom slučaju, poklapanje između rešenja za otvoren i „efektivni” zatvoren sistem bi bilo gotovo perfektno [5]. Ipak, s obzirom na to da ovo podrazumeva povećane gubitke zbog povećanih koeficijena raspada,⁶ vrednosti parametara odabranih ovde biće sasvim dovoljne da obezbede dobro poklapanje *u slučaju spektralno uskih pulseva*, koji su nam u ovoj disertaciji upravo od prevashodnog značaja. Dakle, praktično za sve pulseve od interesa, pa čak i za slučaj slabog kontrolnog polja, otvoren sistem je sa sasvim dobrom pouzdanošću moguće tretirati kao zatvoren, čiji je koeficijent raspada najvišeg nivoa Γ_3^{ef} .

9.3 Spora svetlost u sistemu sa četiri nivoa

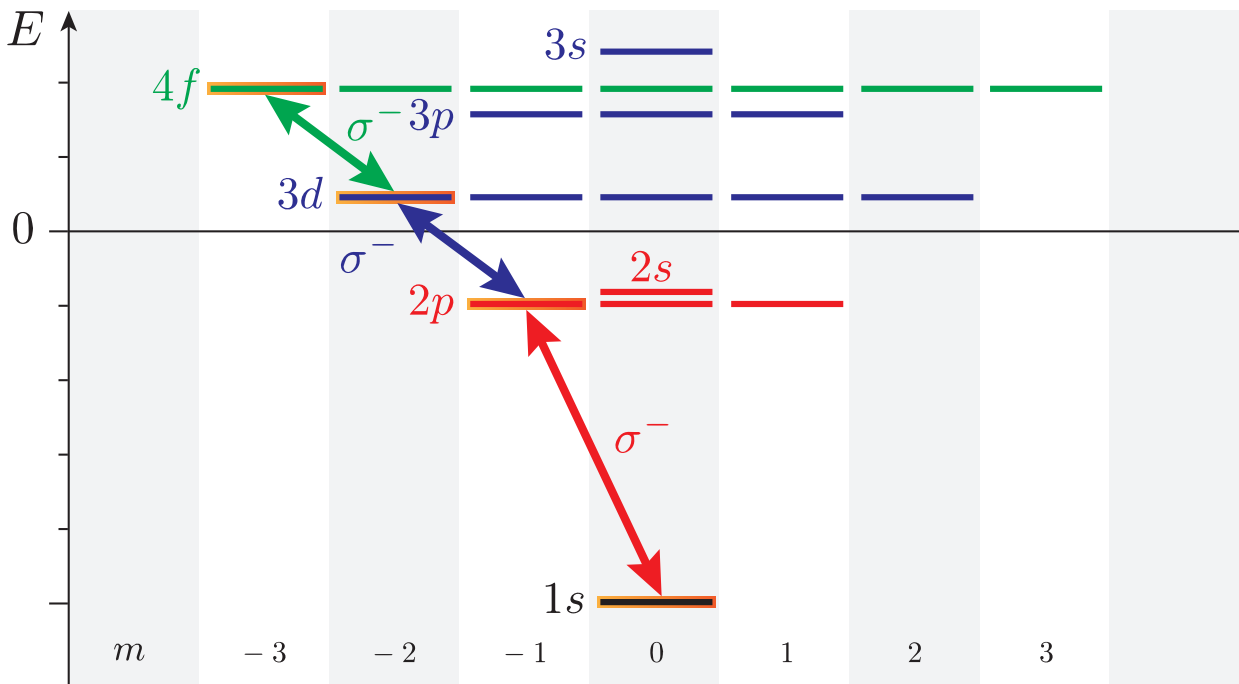
Poslednja od tri lestvičaste konfiguracije od interesa u ovoj disertaciji jeste konfiguracija sa četiri nivoa, međusobno spregnutih preko tri laserska polja. Na slici 9.21 šematski su prikazani odabrani nivoi SKT u odsustvu magnetnog polja i za $R = 8a_0^*$, zajedno sa laserskim poljima koja pobuđuju željene prelaze. Odabir najniža tri energijska nivoa isti je kao za zatvoren sistem sa tri nivoa (poglavljje 9.1), dakle $|1\rangle \equiv 1s_0$, $|2\rangle \equiv 2p_{-1}$, odnosno $|3\rangle \equiv 3d_{-2}$, dok za najviši nivo biramo $|4\rangle \equiv 4f_{-3}$. Ovim odabirom ponovo „izolujemo” ovakvu konfiguraciju od dejstva ostalih nivoa, i obezbeđujemo da za „susedne” nivoe ponovo važi $\Delta m = s = -1$, čime su dozvoljeni σ^- prelazi koji se pobuđuju *desno* polarizovanim laserima. U ovom poglavlju, biće navedeni rezultati dobijeni za slučaj kada se dodatno polje tretira kao kontrolno, a potom i kao sondirajuće. Metod rešavanja MB jednačina u slučaju sistema sa četiri nivoa, profil ulaznog pulsa, kao i vrednosti preostalih parametara, ne razlikuju se u odnosu na zatvoren sistem sa tri nivoa, detaljno diskutovan u poglavlju 9.1. Dakle, za koeficijente raspada ćemo ponovo izabrati vrednosti $\gamma_{ij} = 10\gamma = 10\text{GHz}$ (pretpostavljamo da dominira elektron-fononska interakcija), dok će spektralna poluširina biti fiksirana na vrednost $w = 20\text{GHz}$.

9.3.1 Uloga dodatnog kontrolnog polja na prostiranje pulsa

Ispitajmo, na početku, prostiranje sondirajućeg pulsa kroz sredinu u prisustvu *dva* kontrolna polja, za koja pretpostavljamo da su u rezonanciji sa odgovarajućim prelazima, $\Delta_c = \Delta_d = 0$. U odeljku 6.2.1 smo videli da, u tom slučaju, apsorpciona kriva ima tri maksimuma, od kojih je jedan u $\Delta_p = 0$ (jednačina (6.157)). Ovo znači da će rezonantni sondirajući puls, koji je u prisustvu samo jednog kontrolnog polja prolazio kroz materijalnu sredinu, u prisustvu dva kontrolna polja ponovo biti apsorbovan (kao što je to slučaj bio u odsustvu kontrolnih polja). Kako je nama od interesa postizanje što veće transparentnosti, to ćemo za razdešenost sondirajućeg polja odabrati nenultu vrednost, konkretno $\Delta_p = 10^{11}\text{Hz}$.

Slika 9.22 prikazuje vremenski profil izlaznog pulsa za različite vrednosti odnosa E_c/E_{p0} , odnosno E_d/E_{p0} . Veza između ovih vrednosti i odgovarajućih Rabijevih frekvencija data je u tabelama 9.2 i 9.6. Efekat kontrolnog polja na oblik i poziciju izlaznog pulsa isti je kao kod prethodne dve konfiguracije, pa se na ovoj analizi nećemo zadržavati. Slično kao kod kontrolnog polja, vidimo da

⁶ Naravno, isti efekat bi mogao da se postigne i smanjenjem sondirajuće Rabijeve frekvencije, ali bi se u tom slučaju izgubio željeni efekat usporavanja svetlosti. Da bi se ovaj efekat „povratio”, to bi iziskivalo promenu drugih parametara, što nismo radili, budući da smo želeli da održimo konzistentnost u vrednostima parametara u čitavoj Glavi.



Slika 9.21: Šema sedam najnižih energijskih nivoa sferne kvantne tačke za $R = 8a_0^*$ i $B = 0B_0^*$, zajedno sa laserskim poljima koja ih sprežu (sondirajuće – crvena, kontrolno – plava, dodatno – zelena linija sa strelicama na oba kraja) i njihovim polarizacijama, čineći zatvoren sistem sa četiri nivoa. Nivoi koji čine datu konfiguraciju uokvireni su narandžastom bojom.

se, porastom Ω_d , smanjuje grupna brzina izlaznog pulsa, a povećava njegova apsorpcija. Ovi efekti su utoliko izraženiji što je jačina kontrolnog polja manja – vidimo da je, na slici 9.22 (a), apsorpcija toliko velika da nam praktično nije od interesa da se bavimo ovoliko malim vrednostima E_c/E_{p0} . Nešto „umereniji“ gubici vidljivi su na slici 9.22 (b), što može da predstavlja opseg vrednosti jačina polja sa kojima želimo da radimo, dok se sa slike 9.22 (c) vidi da su gubici znatno smanjeni, ali da ni efekat usporavanja svetlosti nije veliki. Jedino u slučaju $E_d/E_{p0} = 100$ vidimo da je puls značajnije usporen, ali je to, kao i ranije, praćeno pojačanom apsorpcijom.

Kao u prethodnim poglavljima, i ovde je prostiranje pulsa najjednostavnije moguće objasniti analizom apsorpcione i disperzione krive, koja je za sistem sa četiri nivoa i dva kontrolna polja prikazana na slici 9.23. Veličine $\text{Im}\rho_{21}$ i $\text{Re}\rho_{21}$ računane su za nekoliko vrednosti jačine dodatnog polja, kao i za $E_c/E_{p0} = 50$, odnosno $E_c/E_{p0} = 100$. Potpuno u saglasnosti sa zaključcima iz odeljka 6.2.2, zapažamo da je apsorpciona kriva simetrična u odnosu na ordinatu. Štaviše, vidimo i da se za $E_d/E_{p0} = 0$, dakle u odsustvu dodatnog polja, sistem sa četiri nivoa svodi na (zatvoren) sistem sa tri nivoa, prethodno detaljno razmotren u poglavlju 9.1. Tada će apsorpciona kriva imati dva pika i jedan prozor transparentnosti između njih. Uključivanjem dodatnog polja, dolazi do pojave novog, središnjeg pika, koji se, u slučaju $\Delta_c = \Delta_d = 0$, uvek nalazi u $\Delta_p = 0$.⁷ To znači da u sistemu sa četiri nivoa postoje *dva* prozora transparentnosti, čija širina raste sa porastom jačina kontrolnog (što je već objašnjeno u prethodnim poglavljima) i dodatnog polja. U zavisnosti od odnosa Ω_c i Ω_d , razlikovaće se i visine pikova. U našem, simetričnom slučaju, visine bočnih maksimuma biće iste ($h_+ = h_-$), i smanjivaće se sa porastom Ω_d . U isto vreme, visina središnjeg pika h_0 će se povećavati, sve u skladu sa jednačinama (6.150) kada se u njih za ugao mešanja stavi $\phi = \pi/4$ (što sledi iz

⁷ Preciznije, ovo tvrđenje će važiti opštije, tj. sve dok je $\Delta_c = -\Delta_d$, kako je i pokazano u odeljku 6.2.2.

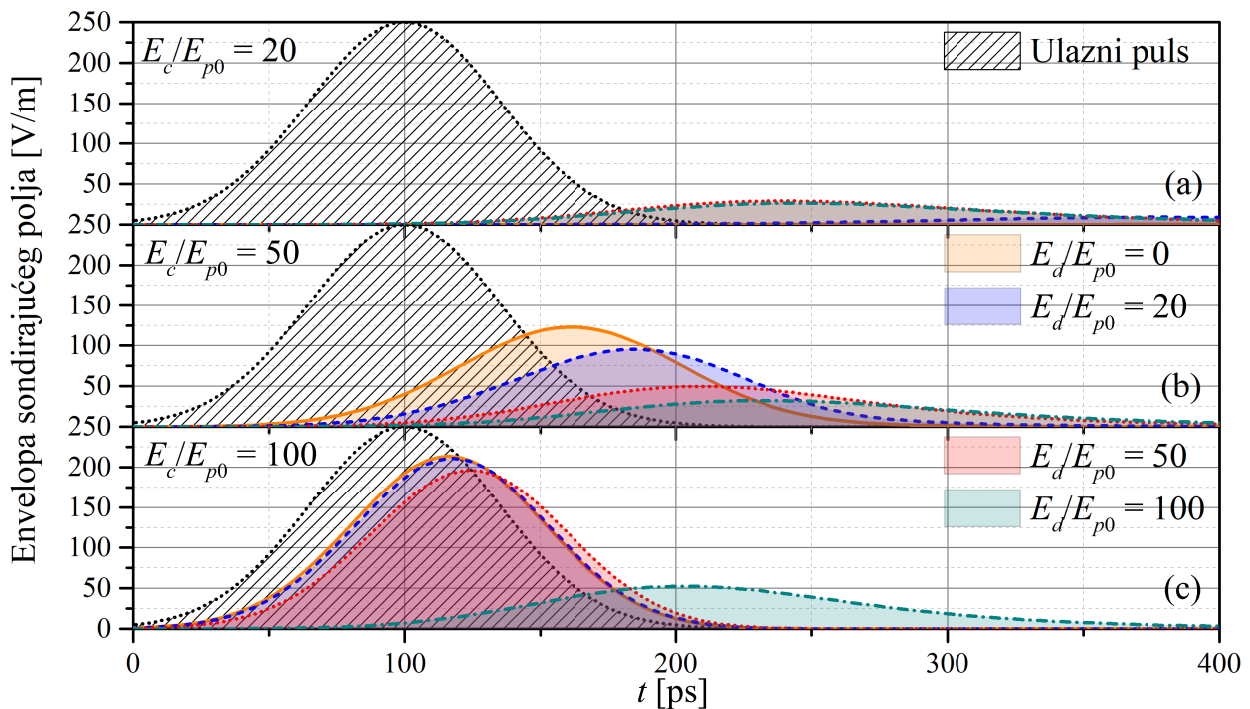
Tabela 9.6: Veza između jačina električnog polja i Rabijevih frekvencija dodatnog lasera, za sistem sa četiri nivoa, nekoliko vrednosti od interesa i za $B = 0 B_0^*$. Poređenje je dato i u odnosu na odgovarajuće vrednosti za sondirajuće polje, što je u ovom slučaju $E_{p0} = 250 \text{ V/m}$ i $\Omega_{p0} = 1.67 \text{ GHz}$.

E_d/E_{p0}	E_d [kV/m]	Ω_d [GHz]	Ω_d/Ω_{p0}
0	0	0	0
20	5	125.32	74.98
50	12.5	313.31	187.45
100	25	626.62	374.91

$\Delta_c = 0$).

Objašnjenje grafika sa slike 9.22 leži u činjenici da, za fiksno Ω_c , sa porastom Ω_d dolazi do sve većeg porasta apsorpcije u okolini centralnog maksimuma, što se vidi na slici 9.23 (a). Na taj način, ovaj lorencijan postaje dovoljno širok da „obuhvati” puls centriran oko $\Delta_p = 10^{11} \text{ Hz}$, povećavajući gubitke pulsa na izlazu iz sredine. Takođe, središnji apsorpcioni pik je praktično jedini odgovoran za povećane gubitke sa porastom jačine dodatnog polja, budući da će se bočni maksimumi sa ovim porastom samo udaljavati od frekventnog opsega u kome se nalazi sondirajući puls. Istovremeno, posmatranjem slike 9.23 (b) vidimo da je nagib disperzione krive veći što je veći odnos E_d/E_{p0} , što prouzrokuje dalje smanjenje grupne brzine pulsa. Efekti disipacije bi se mogli smanjiti ukoliko se odabere veća vrednost Δ_p od one koju smo ovde koristili, ali to znači da će, za manje jačine dodatnog polja, postojati rizik da se puls apsorbira tako što se nađe u oblasti bočnog apsorpcionog maksimuma. Promena nagiba sa Ω_d je posebno primetna za $E_c/E_{p0} = 100$, i to kod krive za $E_d/E_{p0} = 100$ (puna zelena linija) u odnosu na preostale krive za manje vrednosti E_c/E_{p0} (puna narandžasta, plava i crvena linija). Ovo je razlog zbog koga profil izlaznog pulsa za $E_d/E_{p0} = 100$, prikazan na slici 9.23 (c), drastično odstupa od rešenja dobijenih za manje vrednosti jačine dodatnog polja.

Na kraju, navedimo i rezultate dobijene računanjem relevantnih parametara u zavisnosti od Rabijeve frekvencije kontrolnog i dodatnog polja (slika 9.24). Na slici 9.24 (a–d) prikazana je zavisnost parametara od Ω_c za tri različite vrednosti Ω_d . Kao i u slučaju sistema sa tri nivoa, vidi se da sa povećanjem kontrolne Rabijeve frekvencije dolazi do smanjenja grupnog indeksa i relativne širine, a povećanja efikasnosti i vernosti. Ovo je, naravno, u skladu sa činjenicom da je širina prozora transparentnosti proporcionalna veličini $\Omega = \sqrt{\Omega_c^2 + \Omega_d^2}$. Iako će i povećanjem Ω_d dolaziti do povećanja širine prozora, efekat dodatnog lasera na parametre biće *suprotan* – zbog toga što će, istovremeno, dolaziti do povećanja visine centralnog pika, koeficijent apsorpcije u oblasti pulsa će se takođe povećavati, što implicira opadanje efikasnosti i vernosti. Ovo ponašanje povlači, sa druge strane, veći grupni indeks (manju brzinu), kao i veću relativnu širinu (veću disperziju). Zaključujemo, dakle, da uključivanje i dalje povećavanje dodatnog polja doprinosi *pojačanom efektu* usporavanja svetlosti, čak i kada se puls ne nalazi u minimumu apsorpcije, što je slučaj koji smo teorijski proučavali u odeljku 6.1.3. Može se, međutim, primetiti odstupanje od ovog zaključka za slučaj slabih polja (crne linije na graficima za male vrednosti Ω_c), što je posledica toga da bočni pikovi u startu nisu dovoljno daleko kako bi se obezbedio prolaz pulsa kroz sredinu bez većih gubitaka. Preciznije, pozicija jednog od ovih pikova će biti takva da će se skoro poklapati sa pozicijom pulsa u prostoru frekvencija, koji je, podsećamo, centriran oko $\Delta_p = 10^{11} \text{ Hz}$. Zbog toga što će za slaba polja biti $\Omega \sim \Delta_p$, apsorpcija i disperzija pulsa biće neobično velike. Ovo ponašanje nije u skladu sa diskusijom sprovedenom u odeljku 6.1.3 iz prostog razloga što se jednačine (6.43) i (6.64), kao i odgovarajuće analogne jednačine koje bi obuhvatale i slučaj kada se puls nalazi van minimuma apsorpcije, ovde

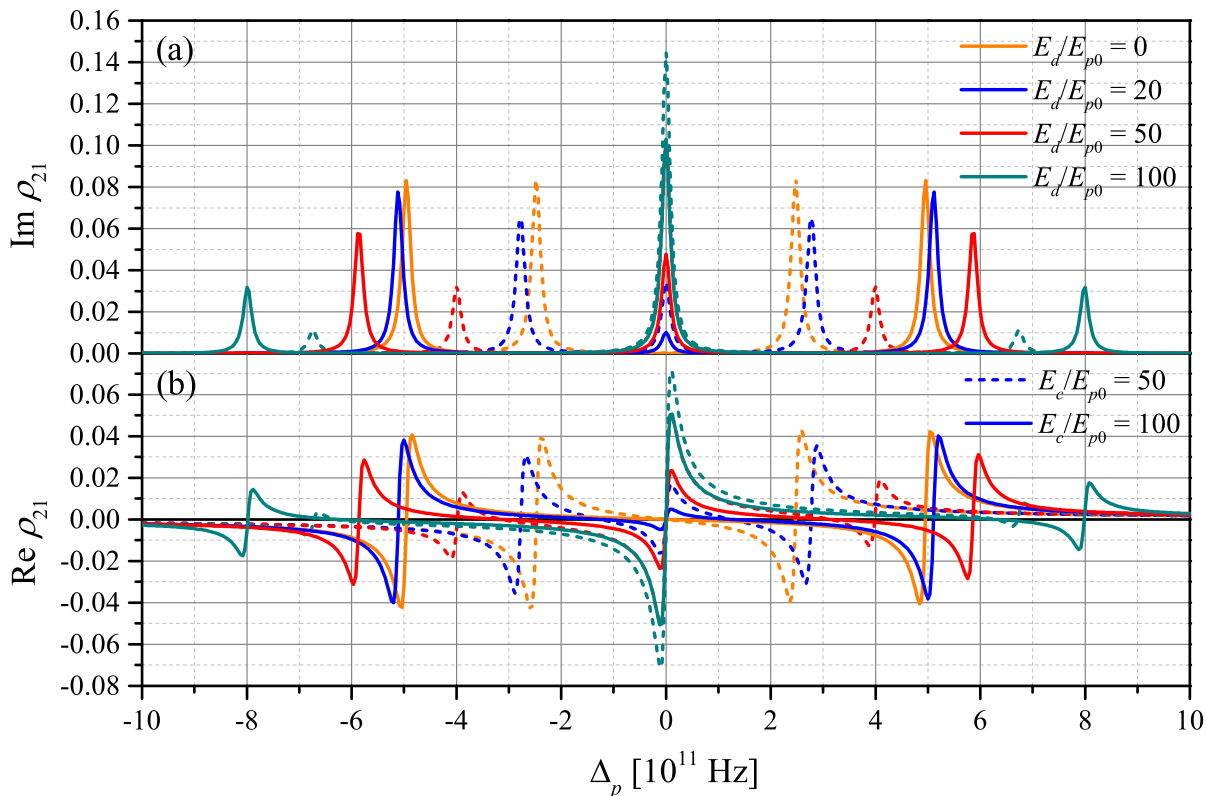


Slika 9.22: Vremenska zavisnost envelope električnog polja sondirajućeg pulsa na izlazu iz sredine za (a) $E_c/E_{p0} = 20$, (b) $E_c/E_{p0} = 50$ i (c) $E_c/E_{p0} = 100$, kao i za nekoliko različitih jačina dodatnog polja. Ulazni puls prikazan je tačkastom linijom i šrafiranom površinom ispod nje i ima spektralnu poluširinu $w = 20$ GHz. Pri dobijanju grafika, uzeto je i $\Delta_p = 10^{11}$ Hz, kao i $\Delta_c = \Delta_d = 0$.

ne mogu primeniti, pošto su dobijene uz pretpostavku jakih kontrolnih polja. Na kraju, napomenimo i to da se slični zaključci dobijaju i na osnovu ispitivanja zavisnosti parametara od dodatne Rabi-jeve frekvencije prikazane na slici 9.24 (b). Pri tome, za slaba polja se ponovo primećuje brzi pad efikasnosti i vernosti na nulu, a veliki skok u grupnom indeksu, odnosno relativnoj širini izlaznog sondirajućeg pulsa.

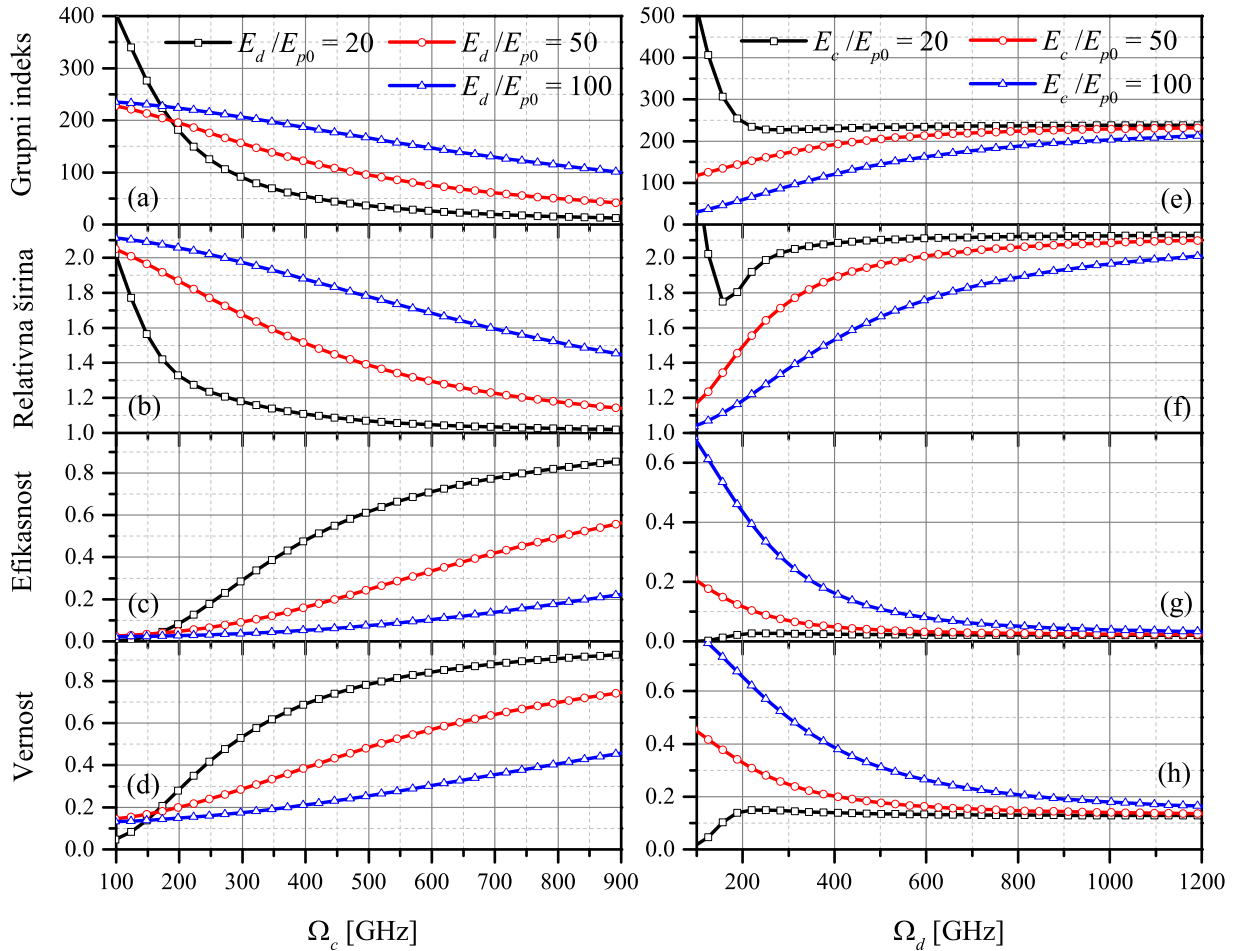
9.3.2 Spora svetlost u sistemu sa dva sondirajuća polja

U slučaju kada se dodatno polje može smatrati sondirajućim, Rabi-jeve frekvencije Ω_p i Ω_d se mogu tretirati kao perturbacije, pa će jednačine kojima se opisuje interakcija svetlost–materija biti (6.66)–(6.74). Ovo su ujedno i jedine relevantne jednačine za razmatrani problem, pošto pretpostavljamo da su sva tri elektromagnetna polja data u formi *kontinualnih* lasera ($\Omega_p(z, t) = \Omega_p$, $\Omega_c(z, t) = \Omega_c$, $\Omega_d(z, t) = \Omega_d$), što nam omogućava da iz originalnog sistema MB jednačina isključimo propagacione jednačine. Vrednosti Rabi-jevih frekvencija biraćemo, dakle, tako da važi $\Omega_p, \Omega_d \ll \Omega_c$, što nam omogućava da koristimo analitička rešenja za stacionarni režim, dobijena u odeljku 6.1.4. U odnosu na sondirajuće polje, apsorpciona i disperziona kriva dobiće se pomoću prve jednačine u (6.77) za prvi red teorije perturbacija. Može se primetiti da je ova jednačina identična jednačini (6.32) dobijenoj u slučaju zatvorenog sistema sa tri nivoa. Stoga će svi zaključci koji važe u odeljku 6.1.1, kao i apsorpcione i disperzione krive dobijene u poglavlju 9.1, ostati na snazi i na ovom mestu. Dakle, sistem sa četiri nivoa i dva sondirajuća polja se u prvom redu teorije perturbacija efektivno svodi na sistem sa tri nivoa i jednim sondirajućim poljem – efekat dodatnog polja je zanemarljiv.



Slika 9.23: (a) Apsorpciona i (b) disperziona kriva za sistem sa četiri nivoa u lestvičastoj konfiguraciji, za nekoliko različitih vrednosti jačine električnog polja kontrolnog i dodatnog lasera, u odsustvu spoljašnjeg magnetnog polja i za $\Delta_c = \Delta_d = 0$.

Uticaj dodatnog polja na sistem sa četiri nivoa vidljiv je tek ako se u perturbacionom razvoju zadrže članovi viših redova. Konkretno, kako bismo dobili apsorpcionu i disperzionu krivu u odnosu na dodatno polje, neophodno je odrediti susceptibilnost u odnosu na ovo polje, korišćenjem jednačine (5.239). Kao što se ispostavlja nakon računice sprovedene u odeljku 6.1.4, veličina ρ_{43} , koja se u ovom izrazu pojavljuje, u prvom i drugom redu daje nulu, a prvi nenulti član u perturbacionom razvoju je $\rho_{43}^{(3)}$, koji se dobija pomoću formule (6.81). Na slici 9.25 je data zavisnost $\text{Im}\rho_{43}^{(3)}$ i $\text{Re}\rho_{43}^{(3)}$ od Δ_d (radi jednostavnosti su izostavljene oznake da se radi o trećem redu teorije perturbacija) za različite vrednosti jačina sondirajućeg, kontrolnog i dodatnog polja, pri čemu je uzeto da važi $\Delta_p = \Delta_c = 0$. Vidimo da disperziona kriva ima tri apsorpciona pika, simetrično postavljena u odnosu na ordinatu, između kojih postoje dva prozora transparentnosti. Kako je reč o trećem redu teorije perturbacija, visine ovih pikova će biti utoliko manje u odnosu na odgovarajuće visine koje, na primer, imaju pikovi $\text{Im}\rho_{21}^{(1)}$. Ponašanje sa slike 9.25 (a) je očekivano – kako je $\rho_{43}^{(3)} \sim \Omega_p$, to će jačina sondirajućeg polja jedino imati uticaja na visinu apsorpcionih maksimuma – sa porastom sondirajuće Rabijeve frekvencije, dolaziće i do porasta apsorpcije. Efekat kontrolnog polja, vidljiv na slici 9.25 (b), takođe predstavlja pojavu koja je već viđena, a odnosi se na povećanje širine prozora transparentnosti sa povećanjem Ω_c . Istovremeno, ovo povećanje kontrolne Rabijeve frekvencije dovodi do smanjenja visine pikova, koje u graničnom slučaju teže nuli. Ovo je u skladu sa činjenicom da se tada odnos Ω_d/Ω_c sve više smanjuje, do te mere da je potrebno uvesti u igru i članove viših perturbacionih redova. Na kraju, posmatranjem slike 9.25 (c) opažamo slično ponašanje kao pri promeni Ω_p – jače dodatno polje dovodi do jače apsorpcije, odnosno povećanja visine apsorpcionih maksimuma, što je posledica toga da je $\rho_{43}^{(3)} \sim \Omega_d$. Može se zaključiti da, iako tek u trećem redu te-

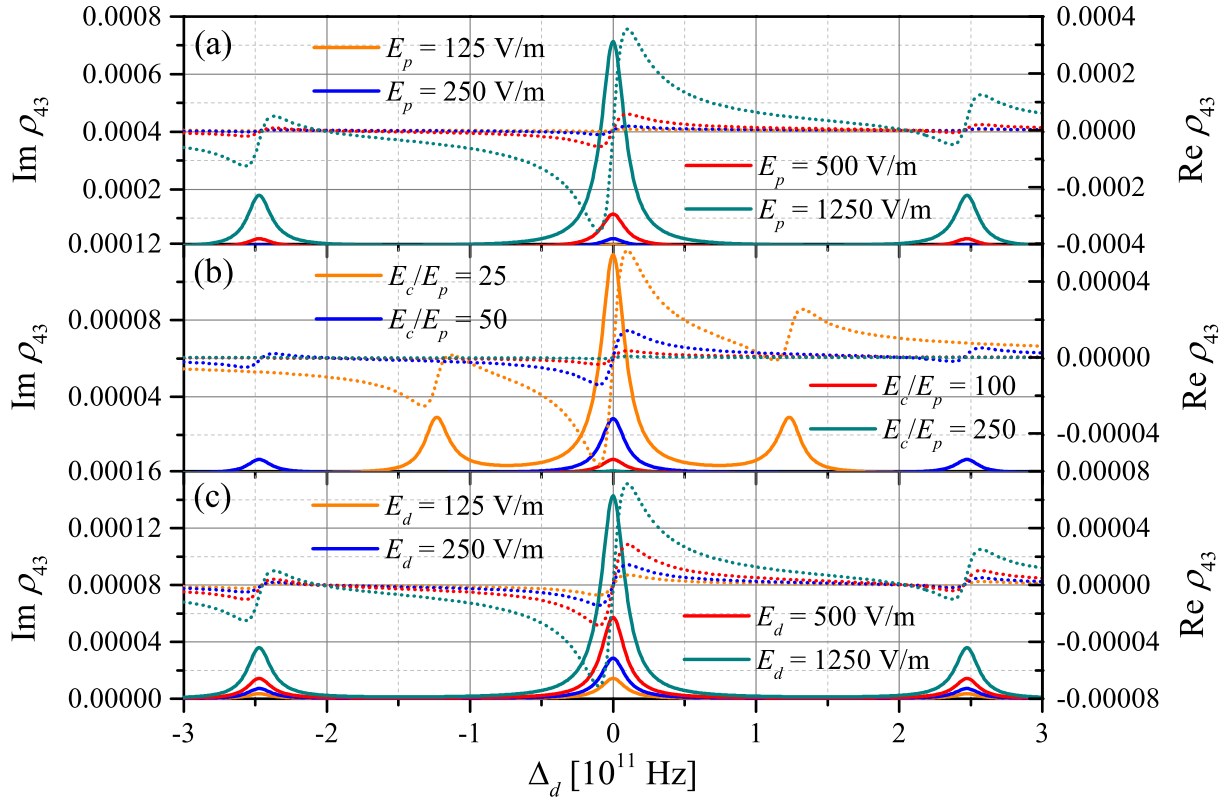


Slika 9.24: Grupni indeks, relativna širina, efikasnost i vernost pulsa na izlazu iz sredine ($z = D$) u zavisnosti od (a–d) Rabijeve frekvencije kontrolnog polja za tri različite vrednosti E_d/E_{p0} i (e–h) Rabijeve frekvencije dodatnog polja za tri različite vrednosti E_c/E_{p0} . Na graficima su prikazani rezultati dobijeni za puls spektralne poluširine $w = 20$ GHz, kao i za $\Delta_p = 10^{11}$ Hz, odnosno $\Delta_c = \Delta_d = 0$.

orije perturbacija, dolazi do pojave prozora transparentnosti i u odnosu na dodatno polje, slično kao u slučaju sondirajućeg polja. Činjenica da se radi o trećem redu omogućava da vrednosti apsorpcije dodatnog polja, čak i u oblasti oko apsorpcionih pikova, budu relativno male. Napomenimo još i to da, zbog toga što su računane u različitim redovima teorije perturbacija, između susceptibilnosti u odnosu na sondirajuće i dodatno polje *ne* postoji simetrija. Naime, dok dodatna Rabijeva frekvencija *ne* utiče na apsorpciju i disperziju sondirajućeg lasera (jer u izrazu za $\rho_{21}^{(1)}$ ne figuriše Ω_d), Rabijeva frekvencija sondirajućeg polja ima nezanemarljiv uticaj na dodatno lasersko polje.⁸

Od svih veličina koje karakterišu propagaciju lasera kroz sredinu, u ovom odeljku ćemo se koncentrisati na grupni indeks sondirajućeg i dodatnog polja, n_g i n_g^d , respektivno. Zavisnost ove dve veličine od odgovarajuće frekvencije dobija se primenom izraza (5.254) i stavljanjem $\omega \rightarrow \omega_p$ za

⁸ Tvrdjenje da dodatna Rabijeva frekvencija ne utiče na apsorpciju i disperziju sondirajućeg polja nije sasvim korektno, jer će se, u članovima viših redova teorije perturbacija za ρ_{21} , pojaviti i veličina Ω_d , slično kao što je to slučaj kod obrnutog tvrdjenja. Ipak, zbog toga što ovde postoji dominantan član $\rho_{21}^{(1)}$, članovi viših redova biće zanemarljivi a time i uticaj dodatnog polja na sondirajuće.



Slika 9.25: Apsorpciona (puna) i disperziona kriva (isprekidana linija) za sistem sa četiri nivoa u lestvičastoj konfiguraciji gde se dodatno polje tretira kao sondirajuće, za (a) $E_d = 250$ V/m, $E_c/E_d = 50$ i različito E_p , (b) $E_p = E_d = 250$ V/m i različito E_c i (c) $E_p = 250$ V/m, $E_c/E_p = 50$ i različito E_d . Preostali parametri su $B = 0 B_0^*$ i $\Delta_p = \Delta_c = 0$.

sondirajuće, odnosno $n_g \rightarrow n_g^d$, $n \rightarrow n^d$ i $\omega \rightarrow \omega_d$ za dodatno polje. U slučaju kada je atomska gustina mala veličina, za oba polja važiće $|\chi(\omega)| \ll 1$, pa je za indeks prelamanja moguće primeniti aproksimativnu relaciju (5.248). Ukoliko se još izvrši prelaz sa frekvencije na odgovarajuću razdešenost, za željene grupne indekse dobiće se relacije (5.258) za sondirajuće, odnosno (5.259) za dodatno lasersko polje. Kako je nama od interesa prostiranje svetlosti u oblasti minimalne apsorpcije, to ćemo grupni indeks tražiti upravo u tim tačkama, i pritom ćemo pretpostaviti da je kontrolno polje rezonantno, tj. $\Delta_c = 0$. Tada je apsorpcija sondirajućeg polja minimalna u $\Delta_p = 0$, te će grupni indeks u odnosu na ovo polje biti dat jednačinom (6.43). Prepišimo krajnji rezultat koji je dobijen uz pretpostavku da je $\gamma_{ij} \ll \Omega_c$:

$$n_g = n_g(0) = 1 + \frac{N\omega_{21}|d_{21}|^2}{2\varepsilon_0\hbar\Omega_c^2}. \quad (9.8)$$

Što se tiče dodatnog polja, minimum apsorpcije nastupa u $\Delta_d = \pm\sqrt{2/3}\Omega_c$ (po jedan minimum u svakom od prozora), pa će relevantna jednačina za grupni indeks u odnosu na dodatno polje biti (6.83), gde je takođe izvršena pretpostavka da su koeficijenti raspada mnogo manji od kontrolne Rabijeve frekvencije. Rezultat glasi

$$n_g^d \equiv n_g^d\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\Omega_c\right) = 1 + \frac{9N\omega_{43}|d_{43}|^2\Omega_p^2}{2\varepsilon_0\hbar\Omega_c^4}, \quad (9.9)$$

pri čemu ćemo se u daljem radu opredeliti da dodatno polje ima pozitivnu razdešenost, $\Delta_d = \sqrt{2/3}\Omega_c$.

Gore dobijeni analitički izrazi nam nedvosmisleno ukazuju na međusobnu spregu između propagacionih karakteristika različitih lasera i njihovih jačina. Ipak, treba imati na umu da su ovi izrazi dobijeni uz izvesne aproksimacije. Da bismo ispitali validnost ovih izraza za širok opseg parametara, izračunajmo grupne indekse n_g i n_g^d *egzaktno*.⁹ Ovo znači da, umesto izraza (5.245) i (5.247), za disperzionu relaciju $k(\omega)$ koristimo izraz

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \chi(\omega)} = \text{Re}k(\omega) + i \text{Im}k(\omega) = \frac{n(\omega)\omega}{c} + i \frac{\alpha(\omega)}{2}, \quad (9.10)$$

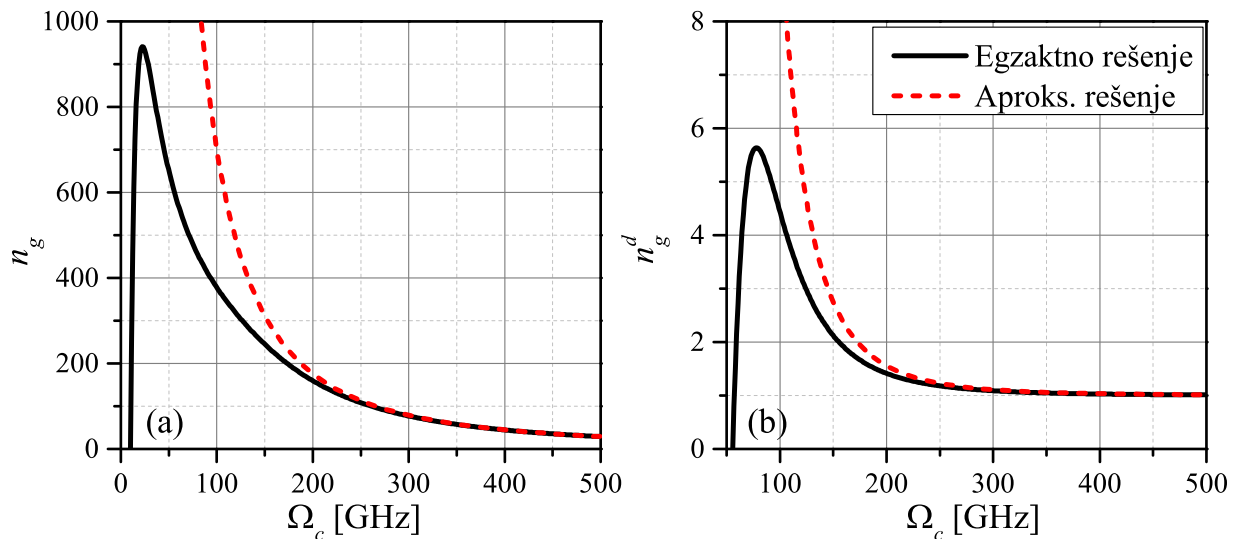
u kome *nismo* pretpostavili da je susceptibilnost mala veličina. Indeks prelamanja i koeficijent apsorpcije sredine (u odnosu na oba polja od interesa) će sada biti dati nešto komplikovanim jednačinama:

$$n(\omega) = \text{Re}\sqrt{1 + \chi(\omega)}, \quad \alpha(\omega) = 2\frac{\omega}{c} \text{Im}\sqrt{1 + \chi(\omega)}, \quad (9.11)$$

ali čije će izračunavanje u principu i dalje biti moguće. Da bismo ovo uradili, potrebno je da u gornje jednačine zamenimo (5.237) i (6.77) (uz činjenicu da je $\rho_{21} \approx \rho_{21}^{(1)}$) ukoliko se radi o sondirajućem, odnosno (5.239) i (6.81) (uz $\rho_{43} \approx \rho_{43}^{(3)}$) ako je reč o dodatnom polju. Napomenimo na ovom mestu još i to da će odstupanje između jednačina (9.10) i (5.247) biti drastično u slučaju grupnog indeksa u odnosu na sondirajuće polje, jer će se u tom slučaju dobiti susceptibilnost koja u pojedinim tačkama (oko maksimuma apsorpcije) uzima vrednosti $\chi \sim 100$. Sa druge strane, kod računanja n_g^d ćemo praktično za sve frekvencije imati $|\chi_d| \ll 1$ (jer se radi o trećem perturbacionom redu), čime razvoj korene funkcije u Tejlorov red postaje validan a rešenja jednostavnija.

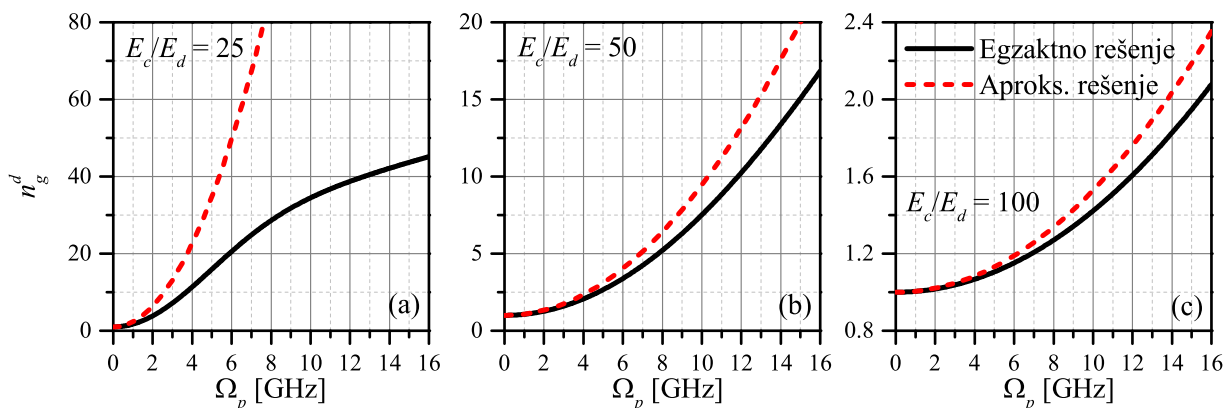
Na slici 9.26 prikazana je zavisnost n_g , odnosno n_g^d od Ω_c , i to u minimumu apsorpcije za oba polja. Za sondirajuće, to znači da je $\Delta_p = \Delta_c = 0$ (podsetimo, u opštem slučaju bismo za minimum apsorpcije imali $\Delta_p = -\Delta_c$), dok za dodatno polje, pored $\Delta_p = \Delta_c = 0$, stavljamo još i $\Delta_d = \sqrt{2/3}\Omega_c$. Jačine električnog polja sondirajućeg i dodatnog lasera su $E_p = E_d = 250 \text{ V/m}$, dok za E_c (odnosno Ω_c) dozvoljavamo da varira. Ukoliko iskoristimo parametre za SKT navedene na početku ove Glave da pređemo na Rabijeve frekvencije, za dva sondirajuća polja dobićemo vrednosti $\Omega_p = 1.67 \text{ GHz}$ i $\Omega_d = 6.27 \text{ GHz}$. Na graficima su prikazana egzaktna rešenja, dobijena tako što je umesto aproksimativnog izraza za indeks prelamanja (5.248) iskorišćen (9.11) (puna crna linija), kao i aproksimativna rešenja, korišćenjem izraza (9.8) i (9.9) (isprekidana crvena linija). Posmatranjem slike 9.26 (a) primećujemo očekivano smanjenje grupnog indeksa sa porastom Ω_c . Povećanje grupnog indeksa, odnosno smanjenje grupne brzine, nastupiće smanjenjem kontrolne Rabijeve frekvencije, čime se sužava prozor transparentnosti a disperziona kriva u minimumu apsorpcije postaje strmija. Ipak, ovaj efekat istovremeno povlači i podizanje dna prozora transparentnosti i povećanje apsorpcije. Štaviše, primetno je izuzetno veliko odstupanje između egzaktnog i aproksimativnog rešenja u oblasti slabog kontrolnog polja – razlog za ovo je taj što tada aproksimacija $\gamma_{ij} \ll \Omega_c$ neće moći da se izvrši. Ipak, za znatan opseg kontrolnih Rabijevih frekvencija, koji je praktično od vodećeg interesa u ovoj disertaciji, poklapanje egzaktnog i aproksimativnog rešenja je jako dobro. Do sličnih zaključaka možemo doći analizom slike 9.26 (b), gde se rešenja izuzetno dobro poklapaju u oblasti jakih kontrolnih polja. Sa druge strane, smanjenje Ω_c dovodi do dodatnog usporavanja svetlosti, ali

⁹ Pojam „egzaktno rešenje” na ovom mestu treba shvatiti kao rešenje dobijeno bez vršenja aproksimacija $|\chi(\omega)| \ll 1$ (malog N) i $\gamma_{ij} \ll \Omega_c$. Naravno, ne treba zaboraviti da smo već na početku razmatranja, prelazeći na perturbacioni pristup, izvršili aproksimaciju koja nam sugeriše da, u širem smislu, nijedno od ovih rešenja nije egzaktno.



Slika 9.26: Grupni indeks u odnosu na (a) sondirajuće i (b) dodatno polje u zavisnosti od kontrolne Rabijeve frekvencije. Obe vrednosti računane su u minimumu apsorpcije, što znači da je $\Delta_p = \Delta_c = 0$, odnosno $\Delta_d = \sqrt{2/3}\Omega_c$, i to egzaktno (puna crna linija) i aproksimativno (isprekidana crvena linija).

je taj efekat praćen povećanom apsorpcijom dodatnog polja. Dakle, pri odabiru Ω_c i ostalih parametara, potrebno je voditi računa o balansu između smanjenja grupne brzine i smanjenja apsorpcije kako sondirajućeg, tako i dodatnog lasera. Pored toga, poređenjem vrednosti na ordinatama ovih grafika, vidimo da je sondirajući laser moguće usporiti i nekoliko stotina puta, dok je u isto vreme efekat usporavanja dodatnog lasera drastično manji – za dva reda veličine u odnosu na n_g . Razlog za ovo je činjenica da je grupni indeks za oba polja srazmeran odgovarajućoj susceptibilnosti, pri čemu je susceptibilnost u odnosu na sondirajuće polje za nekoliko redova veličine veća od susceptibilnosti dodatnog polja, kao posledica toga da je prva veličina dobijena u prvom, a druga u trećem redu teorije perturbacija.



Slika 9.27: Grupni indeks u odnosu na dodatno polje u zavisnosti od Rabijeve frekvencije sondirajućeg polja, za $E_d = 250$ V/m, kao i (a) $E_c/E_d = 25$, (b) $E_c/E_d = 50$ i (c) $E_c/E_d = 100$. Prikazana su rešenja sa i bez aproksimacije (crvena isprekidana i crna puna linija, respektivno).

Na slici 9.27 prikazana je zavisnost grupnog indeksa u odnosu na dodatno polje od sondirajuće Rabijeve frekvencije, za tri različite vrednosti jačine kontrolnog polja. Kao i na prethodnoj slici, i

ovde je punom crnom linijom označeno egzaktno, a isprekidanom crvenom linijom aproksimativno rešenje. Jačina dodatnog polja fiksirana je i iznosi $E_d = 250 \text{ V/m}$ ($\Omega_d = 6.27 \text{ GHz}$), a razdešenosti su iste kao u prethodnom slučaju. Za slaba kontrolna polja ($E_c/E_d = 25$, $\Omega_c = 123.83 \text{ GHz}$, slika 9.27 (a)), kao što je već diskutovano, odstupanje između egzaktnog i aproksimativnog rešenja je veliko, tako da se aproksimativne formule (9.8) i (9.9) ovde ne mogu primeniti. Bez obzira na to, vidimo da n_g^d i dalje raste sa porastom Ω_p , iako je taj porast znatno sporiji nego u slučaju aproksimativnog rešenja. Vrednosti grupnog indeksa koje se mogu dostići u ovom slučaju su $n_g^d \sim 40$, što je solidno veliko budući da se one dobijaju uz pomoć odgovarajućih veličina u trećem perturbacionom redu. Na slici 9.27 (b) ($E_c/E_d = 50$, $\Omega_c = 247.66 \text{ GHz}$) i (c) ($E_c/E_d = 100$, $\Omega_c = 495.32 \text{ GHz}$) već je vidljivo bolje poklapanje između egzaktnog i aproksimativnog rešenja, i to posebno za vrlo slaba sondirajuća polja. Ipak, vrednosti grupnog indeksa koje se pritom dobijaju su manje što je kontrolno polje jače – vrednosti n_g^d se na ova dva grafika razlikuju za oko red veličine. U sva tri razmatrana slučaja je, dakle, moguće povećati grupni indeks u odnosu na *dodatno* polje povećanjem Rabijeve frekvencije *sondirajućeg* polja, čime smo pokazali da propagacija jednog sondirajućeg lasera može značajno uticati na propagaciju drugog. Treba, doduše, za uspostavljanje što većeg efekta usporavanja svetlosti, koristiti kontrolne lasere sa što manjom Rabijevom frekvencijom, ali u isto vreme imati u vidu da preveliko smanjenje Ω_c može drastično povećati apsorpciju kako sondirajućeg, tako i dodatnog lasera.

9.4 Primena dobijenih rezultata u magnetometriji

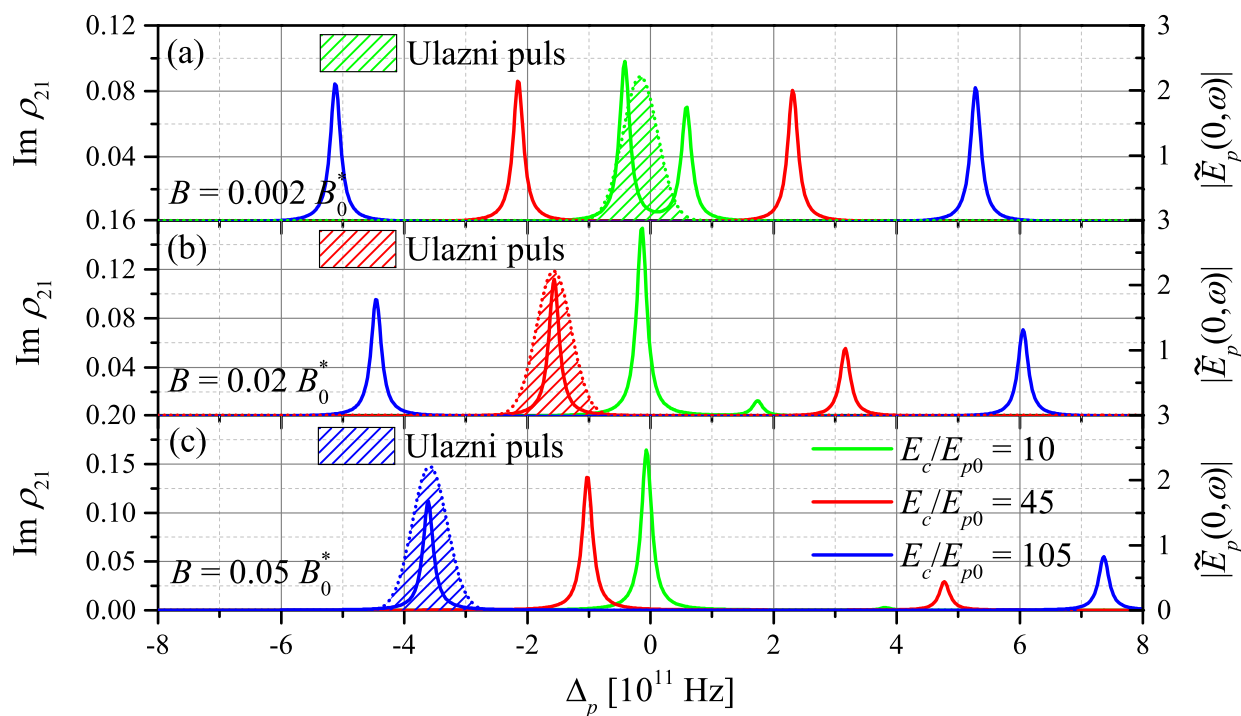
U odeljku 9.1.2 detaljno je proučen uticaj spoljašnjeg stacionarnog magnetnog polja na prostiranje sondirajućeg pulsa kroz SKT u lestvičastoj konfiguraciji sa tri nivoa bez degeneracije. Pokazali smo da Zemanov efekat, kao posledica postojanja magnetnog polja, „pomera” lasere iz odgovarajućih rezonancija, čime presudno utiče na apsorpciju i disperziju izlaznog pulsa [167, 168]. Fenomeni proučeni u pomenutom poglavlju bi mogli da imaju široku primenu u magnetometriji, a poluprovodničke kvantne tačke sa kojima radimo se mogu, između ostalog, koristiti u izradi magnetometara, ili pojedinih njihovih komponenti [236, 237]. U ovom poglavlju, u okvirnim crtama ćemo objasniti princip na kome bi jedan takav magnetometar mogao da funkcioniše.

Ideja funkcionisanja magnetometra na bazi poluprovodničke SKT i efekta spore svetlosti se može pojasniti na sledeći način. U odsustvu magnetnog polja, pretpostavimo da se materijalna sredina podvrgne dejstvu slabog sondirajućeg i jakog kontrolnog polja. Ukoliko su oba lasera (sondirajući puls i kontinualni kontrolni laser) u rezonanciji sa odgovarajućim atomskim prelazima ($\Delta_p = \Delta_c = 0$), sondirajući puls će prolaziti kroz minimum apsorpcije i sredina će za ovaj laser biti transparentna. Ako se kompletna aparatura sada smesti u spoljašnje stacionarno magnetno polje, doći će do pomeranja kako položaja pulsa u prostoru frekvencija (Δ_p i Δ_c će biti različiti od nule), tako i položaja apsorpcionih maksimuma (apsorpciona kriva više neće biti simetrična, u skladu sa diskusijom u poglavlju 6.2.2, s tim što će ovde doći i do pomeranja centralnog pika). Ova pomeranja biće izraženija što je magnetno polje jače, i prikazana su na slici 9.28 za tri različite vrednosti jačine magnetnog polja, odnosno tri vrednosti jačine električnog polja kontrolnog lasera. Pri dobijanju rezultata sa slike, korišćene su vrednosti iz tabele 9.1, koeficijenti raspada su $\gamma_{21} = \gamma_{31} = 10\gamma_0 = 10 \text{ GHz}$, a spektralna poluširina ulaznog pulsa je odabrana tako da iznosi $w = 20 \text{ GHz}$. Sledeći korak jeste podešavanje Ω_c (što se svodi na variranje intenziteta kontrolnog lasera) tako da se puls na izlazu potpuno izgubi, tj. neki od pikova apsorpcije, promenom Ω_c , „dovede” na poziciju pulsa u frekventnom prostoru. Tako je, na primer, u slučaju slabog magnetnog polja $B = 0.002 B_0^*$ (slika 9.28 (a)), razdešenost sondirajućeg polja različita od nule ali i dalje relativno mala (ova vrednost odgovara položaju

maksimuma spektralnog profila pulsa prikazanog tačkastom zelenom linijom sa šrafiranom površinom ispod nje), pa će se maksimalna apsorpcija postići za relativno malu vrednost kontrolnog polja $E_c = 10E_{p0}$ (puna zelena linija). Za jača magnetna polja, $B = 0.02 B_0^*$ i $B = 0.05 B_0^*$ (slika 9.28 (b) i (c), respektivno), maksimalna apsorpcija izlaznog pulsa biće postignuta dovođenjem kontrolnog polja na jačine $E_c = 45E_{p0}$ (crvena) i $E_c = 105E_{p0}$ (plava linija), respektivno. Vrednost kontrolne Rabijeve frekvencije Ω_c^{\min} pri kojoj je apsorpcija maksimalna (a efikasnost minimalna) možemo jednostavno „očitati” poznavanjem bilo intenziteta, bilo jačine električnog polja kontrolnog lasera (korišćenjem druge jednačine u 5.53).¹⁰ Kao što se vidi na slici 9.28, sa porastom B , doći će i do porasta vrednosti Ω_c^{\min} . Da bi se minimum apsorpcije jasno uočio (tj. da bi se na izlazu iz sredine uočilo jasno zatamnjenje), potrebno je da se kompletan profil pulsa „poklapa” sa Lorencovim profilom apsorpcionog pika. Drugim rečima, potrebno je da spektralna širina pulsa i širina maksimuma apsorpcije budu istog reda veličine,

$$w \sim \gamma_{21}, \tag{9.12}$$

što je u našem slučaju zadovoljeno. Ukoliko to, pak, nije slučaj, može se desiti da se, sa jedne strane, zatamnjenje na izlazu dobijeno u jednom trenutku ne gubi čak ni variranjem Ω_c za veliki opseg vrednosti, što znači da je puls suviše spektralno uzak ($w \ll \gamma_{21}$). Sa druge strane, ukoliko je $w \gg \gamma_{21}$, zatamnjenje neće biti potpuno čak ni kada se dva pika potpuno preklape, zato što krajevi pulsa neće biti apsorbovani, što otežava detekciju maksimuma apsorpcije.



Slika 9.28: Apsorpciona kriva (pune linije) i spektralni profil ulaznog pulsa širine $w = 20$ GHz (tačkaste linije sa šrafiranom površinom ispod njih) za zatvoren sistem sa tri nivoa i (a) $B = 0.002 B_0^*$, (b) $B = 0.02 B_0^*$ i (c) $B = 0.05 B_0^*$. Apsorpciona kriva prikazana je za tri različite vrednosti jačine kontrolnog lasera.

Radi jednostavnosti, ograničimo se na razmatranje slabih polja, gde je dominantan linearan Zeemanov efekat. U tom slučaju, pomeranje nivoa je u efektivnim atomskim jedinicama dato izrazom

¹⁰Podsetimo, veza između intenziteta i jačine električnog polja, a samim tim i Rabijeve frekvencije odgovarajućeg lasera, diskutovana je u okviru fusnote 21 u Glavi 5.

(8.3), što će u SI jedinicama biti:

$$\Delta E = \hbar\Delta\omega = \frac{1}{2}mBE_0^*, \quad (9.13)$$

pri čemu je B i dalje dato u efektivnim atomskim jedinicama. U skladu sa tim, za razmatranu konfiguraciju i odabir nivoa od interesa, sondirajuća i kontrolna razdešenost biće date jednačinama (9.4) i (9.5), respektivno. Dakle, u aproksimaciji slabih polja, ovde dve razdešenosti su međusobno jednake. Zapišimo ih, na kraju, i u SI jedinicama:

$$\Delta_p = \Delta_c = \Delta = -\frac{1}{2\hbar}BE_0^*, \quad (9.14)$$

pri čemu smo B ponovo ostavili u efektivnim atomskim jedinicama. Dobijeni rezultat ($\Delta_p = \Delta_c = \Delta$) implicira da u ovoj situaciji možemo primeniti izraz (6.123) za energije svojstvenih stanja hamiltonijana (6.94). Štaviše, možemo iskoristiti dobijene zaključke u okviru formalizma obučenih stanja da nađemo Ω_c^{\min} – maksimalna apsorpcija postiže se za $E_{\pm} = 0$, što nas dovodi do $\Delta = \pm\Omega_c^{\min}/\sqrt{2}$. Ubacivanjem ovog izraza (sa predznakom minus) u (9.14) i neznatnim sređivanjem, dobijamo

$$B_{\text{exp}} = \frac{\sqrt{2}\hbar\Omega_c^{\min}}{E_0^*} [\text{eff. a.u.}]. \quad (9.15)$$

Dakle, ukoliko poznajemo vrednost $\Omega_c = \Omega_c^{\min}$ za koju je apsorpcija pulsa maksimalna a efikasnost minimalna (poželjno jednaka nuli), možemo odrediti i jačinu magnetnog polja u kome se aparatura nalazi.

Gore opisan način određivanja jačine magnetnog polja poseduje određene limite. Sa jedne strane, u slučaju slabih polja, dolazi do neznatnog pomeranja pulsa iz položaja $\Delta_p = 0$, pa će se maksimalna apsorpcija postići za izuzetno malu vrednost Ω_c . Međutim, rekli smo da je, u slučaju slabih kontrolnih polja, apsorpcija na dnu prozora transparentnosti toliko velika da je teško ustanoviti da li se minimum apsorpcije postiže zbog preklapanja pulsa i apsorpcionog pika, ili možda pulsa i oblasti pojačane apsorpcije na dnu prozora transparentnosti. Ovo je upravo situacija koja se javlja na slici 9.28 (a), gde se minimum apsorpcije ne može odrediti tako precizno kao na preostala dva grafika sa slike 9.28. Grubo rečeno, da bi se B moglo efikasno meriti, potrebno je da važi

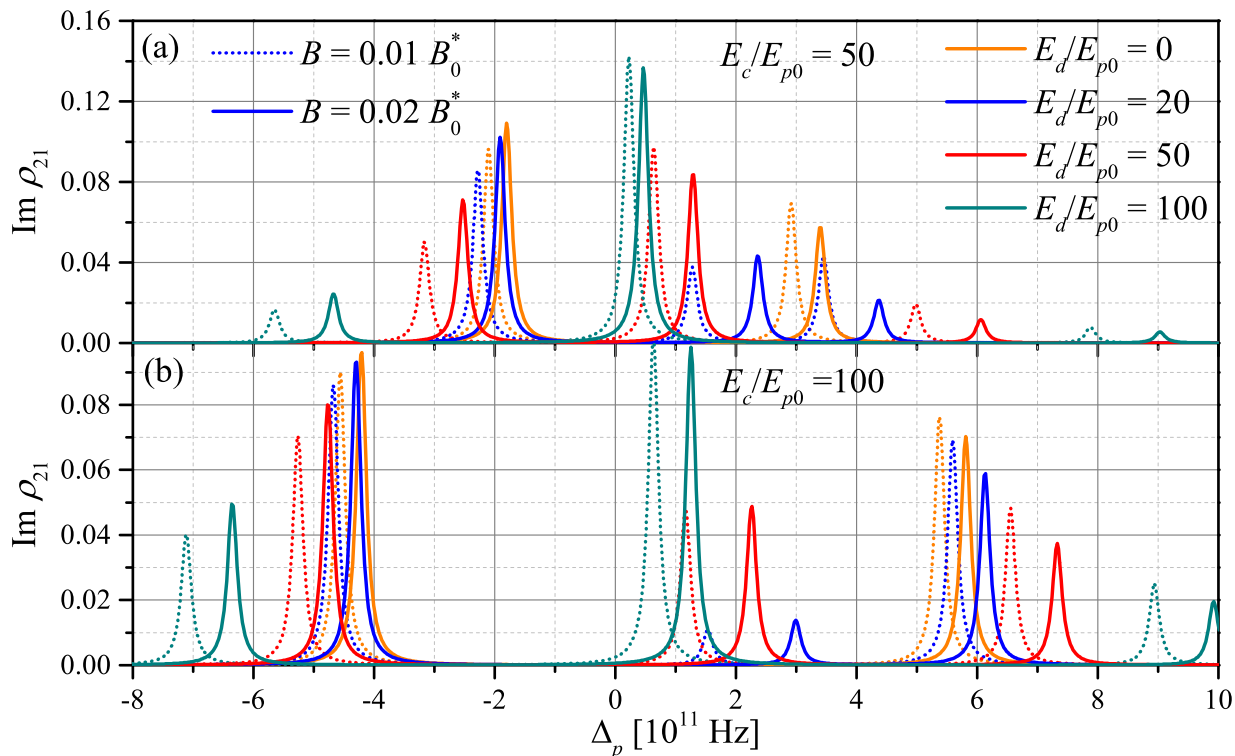
$$|\Delta| = \frac{1}{2\hbar}BE_0^* \gg \gamma_{21}, \quad (9.16)$$

što u našem slučaju nameće donju granicu na jačinu magnetnog polja koje se može meriti korišćenjem SKT sa navedenim parametrima, $B \gg 0.001 B_0^*$. Da bi se ovaj problem rešio i donja granica za B smanjila, moguće je, na primer, ohladiti aparaturu do kriogenih temperatura, čime se koeficijenti raspada mogu smanjiti čak i za nekoliko redova veličine. Sa druge strane, zbog (9.12), potrebno je koristiti spektralno uže pulseve.

Gornja granica za B posledica je činjenice da, kod jakih polja, dolazi do postepene dominacije kvadratnog Zemanovog efekta, pa izraz (9.15) više nije validan. U cilju poboljšanja preciznosti magnetometra, pri računanju Zemanovog cepanja potrebno je uračunati i kvadratne članove po B u (8.2), ali se mi time nećemo dalje baviti. Navedimo samo grubu procenu vrednosti jačine magnetnog polja za koje je opravdano pretpostaviti dominaciju linearnog Zemanovog efekta. Ovo će biti moguće kada je kvadratni član u (8.2) mnogo manji od linearnog,

$$\frac{1}{2}|m|B \gg \frac{1}{12}B^2R^2, \quad (9.17)$$

gde smo još iskoristili da je $l \sim 1$. Dakle, metod je primenljiv ukoliko je $B \ll 6|m|/R^2$, što se za $R = 8a_0^*$ i $|m| \sim 1$ svodi na $B \ll 0.1 B_0^*$. Vidimo da će najbolje rezultate magnetometar davati za magnetna polja jačine $B \sim 0.01 B_0^*$, barem za vrednosti parametara koje smo koristili u ovom delu disertacije. Ovaj, istini za volju ne tako veliki opseg, moguće je povećati bilo smanjenjem koeficijenata raspada hlađenjem aparature, bilo uključivanjem kvadratnog Zemanovog efekta u razmatranje. Na ovom mestu, smatrali smo da je za ilustraciju principa rada ovakvog uređaja, zadržavanje na linearnom Zemanovom efektu bilo dovoljno.



Slika 9.29: Apsorpciona kriva za sistem sa četiri nivoa pri čemu se dodatno polje tretira kao kontrolno, dve vrednosti $B = 0.01 B_0^*$ (tačkaste) i $B = 0.02 B_0^*$ (pune linije), nekoliko različitih vrednosti jačine dodatnog polja, kao i za (a) $E_c/E_{p0} = 50$, odnosno (b) $E_c/E_{p0} = 100$.

Navedimo, radi kompletnosti, i diskusiju uticaja spoljašnjeg magnetnog polja na apsorpcionu krivu za sistem sa četiri nivoa, gde dodatno polje tretiramo kao kontrolno (slika 9.29). Dobijeni rezultati prikazani su za dve različite vrednosti jačine kontrolnog, odnosno četiri vrednosti jačine dodatnog polja. I ovde, kao i u sistemu sa tri nivoa, izvršićemo pretpostavku slabih polja i staviti $\Delta_p = \Delta_c = \Delta_d = \Delta = -BE_0^*/(2\hbar)$ (dodatna razdešenost se može izračunati na analogan način kao Δ_p i Δ_c). Svi parametri korišćeni pri dobijanju rezultata u ovom poglavlju ostaju na snazi, pri čemu za koeficijent raspada najvišeg nivoa još imamo $\gamma_{41} = 10\gamma_0 = 10\text{GHz}$. Uticaj Ω_c i Ω_d na apsorpcionu krivu je delimično ispitan u odeljku 9.3.2 za slučaj $\Delta_c = \Delta_d = 0$, i neki od zaključaka se mogu primeniti i na ovaj slučaj. Međutim, jasno je da nenulte razdešenosti dovode do asimetrije u apsorpcionoj krivoj – kako je $\Delta < 0$, maksimumi apsorpcije se pomeraju ka većim razdešenostima sondirajućeg polja, dok se visina levih bočnih pikova povećava, a desnih smanjuje. Situacija bi bila obrnuta ako bi razdešenost Δ bila pozitivna. Celokupno ponašanje sa grafika u skladu je sa analizom sprovedenom u okviru odeljka 6.2.2, sa tom razlikom što, budući da u razmatranom slučaju nije zadovoljena relacija $\Delta_c + \Delta_d = 0$, centralni apsorpcioni maksimum nije više „fiksiran” na poziciji $\Delta_p = 0$, već se može reći da „prati kretanje” preostala dva pika sa promenom magnetnog polja.

Sistem sa četiri nivoa se takođe može iskoristiti za određivanje jačine spoljašnjeg magnetnog polja. Ipak, za razliku od sistema sa tri nivoa koji se svodi na određivanje maksimuma apsorpcije i detektovanja zatamnjenja na izlazu iz sredine, ovaj sistem bi morao da se bazira na određivanju *minimuma* apsorpcije. Ovo je znatno komplikovanije ukoliko, kao ovde, radimo sa sistemom sa vrlo širokim prozorom transparentnosti, što čini nalaženje tačnog položaja minimuma apsorpcije (i maksimuma efikasnosti) nesumnjivo težim. Ipak, sistem sa četiri nivoa može da igra ulogu „finog podešavanja” pri traženju kombinacije Ω_c^{\min} i Ω_d^{\min} za koje nastupa maksimalna apsorpcija izlaznog pulsa. Tada će uslov za apsorpciju morati da se modifikuje (dobija se iz svojstvenog problema hamiltonijana za sistem sa četiri nivoa), i glasi

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\Omega_d^2 + 3\Omega_c^2}, \quad (9.18)$$

što nam, kombinovanjem sa već korišćenim izrazom za linearni Zemanov pomak, daje sledeći izraz za jačinu magnetnog polja:

$$B_{\text{exp}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\hbar \sqrt{(\Omega_d^{\min})^2 + 3(\Omega_c^{\min})^2}}{E_0^*} [\text{eff. a.u.}], \quad (9.19)$$

koji se, naravno, svodi na (9.15) za slučaj $\Omega_d = 0$. Naravno, gorepomenuto nalaženje minimuma apsorpcije i dalje može da se sprovede, ali je u tom slučaju najbolje raditi sa sistemima sa jako uskim prozorom transparentnosti, tačnije sa sistemima u EIT umesto u AT režimu.

10 Skladištenje svetlosti u sfernim kvantnim tačkama

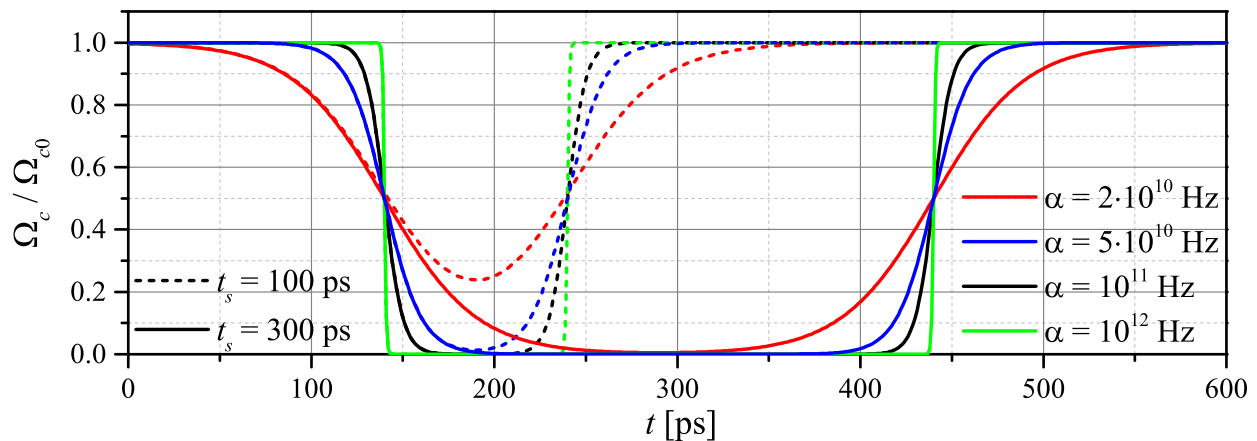
Detaljna analiza prostiranja spore svetlosti kroz sredinu sačinjenu od poluprovodničkih SKT, sprovedena u prethodnoj Glavi, omogućila nam je da prilično temeljno teorijski opišemo fizičke pojave i procese koji se odvijaju pri interakciji svetlosti i materije, u slučaju kada su laserska polja bilo pulsna (sondirajuće), bilo kontinualna (sondirajuće, kontrolno, dodatno). U drugom navedenom slučaju, pod pojmom „kontinualni laser” podrazumevali smo laser čiji intenzitet (a samim tim i Rabijska frekvencija) ima konstantnu vrednost u svim tačkama prostora i svim trenucima vremena. U ovoj Glavi, dozvolićemo da se intenzitet kontrolnog lasera menja sa vremenom, pri čemu će ova promena biti ista (i istovremena) u svim tačkama materijalne sredine. Drugim rečima, iz MB jednačina ćemo izbaciti propagacionu jednačinu za to lasersko polje i koristiti unapred zadatu funkciju zavisnosti intenziteta lasera od vremena. U poglavlju 6.4 smo pokazali da, u zatvorenom sistemu sa tri nivoa, ovakva promena kontrolnog polja može dovesti do skladištenja sondirajuće svetlosti u atomskoj sredini, a potom i povraćaja svetlosti iz nje, pri čemu su mehanizmi skladištenja detaljno diskutovani. Na ovom mestu, takođe ćemo se zadržati na konfiguraciji sa tri nivoa bez degeneracije (u odeljku 9.2.2 smo pokazali kako u razmatranje možemo uključiti i degeneraciju srednjeg nivoa, uvođenjem efektivnog koeficijenta raspada). Proučavaćemo uticaj isključivanja i ponovnog uključivanja kontrolnog lasera na propagaciju sondirajućeg pulsa, uticaj vremena skladištenja, kao i ulogu spoljašnjeg magnetnog polja. Dobijene rezultate iskoristićemo da izložimo potencijalne vidove primene u kvantnoj informatici, optičkim telekomunikacijama i procesiranju signala.

Tabela 10.1: Vrednosti nekih od parametara koji karakterišu materijalnu sredinu, sondirajući laserski puls i kontrolni laser u slučaju skladištenja svetlosti, osim ako nije drugačije naznačeno.

Simbol	Opis	Vrednost	Jedinica
γ_{ij}	koeficijent raspada koherencije $ i\rangle \leftrightarrow j\rangle$	1	GHz
D	dužina uzorka	2	mm
E_{p0}	amplituda sondirajućeg polja	250	V/m
w	spektralna poluširina sondirajućeg pulsa	50	GHz
t_0	trenutak pojave maksimuma sondirajućeg pulsa	100	ps
E_{c0}	amplituda kontrolnog polja	100	E_{p0}
t_1	vreme isključivanja kontrolnog polja	140	ps
α	brzina uključivanja/isključivanja kontrolnog polja	100	GHz
$\Delta_p^{(0)}$	razdešenost sondirajućeg polja za $B = 0 B_0^*$	0	Hz
$\Delta_c^{(0)}$	razdešenost kontrolnog polja za $B = 0 B_0^*$	0	Hz

Kao u poglavlju 9.1, i ovde je razmatran sistem sa tri nivoa i dva laserska polja, pri čemu su za nivoe izabrani odgovarajuća svojstvena stanja SKT poluprečnika $R = 8a_0^*$, kao što je prikazano na slici 9.1. Sondirajuće polje dato je u formi Gausovog pulsa čiji je profil zadat jednačinom (6.158)

(odnosno, prvom jednačinom u (6.287)),¹ dok se Rabijeva frekvencija kontrolnog polja u svakoj tački prostora menja po formuli (6.281), pri čemu je $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Početni uslovi su, kao i ranije, dati jednačinom (6.1). U cilju dobijanja relevantnih rezultata, rešavane su OB jednačine (5.162)–(5.166), dopunske jednačine (5.80) i (5.81), kao i propagaciona jednačina za sondirajuće polje (5.151). Rešavanje ovih jednačina sprovedeno je numerički, bez uvođenja dodatnih aproksimacija, kombinovanom primenom Runge-Kuta metoda četvrtog reda (Dodatak C.1) i Laks-Vendrofovog metoda (Dodatak C.2). Prilikom rešavanja, korišćeni su parametri prikazani u tabeli 10.1, dok su parametri koji nisu navedeni u tabeli, isti kao u prethodnim glavama.²



Slika 10.1: „Relativna” vrednost Rabijeve frekvencije kontrolnog polja u zavisnosti od vremena, računata za dve vrednosti vremena skladištenja, $t_s = 100$ ps (isprekidane) i $t_s = 300$ ps (pune linije), kao i za četiri vrednosti koeficijenta isključivanja/uključivanja kontrolnog polja. Koeficijenti isključivanja i uključivanja su međusobno jednaki ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$).

Zavisnost kontrolne Rabijeve frekvencije od vremena, za različite vrednosti brzine isključivanja i uključivanja, kao i za dve vrednosti vremena skladištenja, prikazana je na slici 10.1. Na ordinati je prikazan *odnos* trenutne i maksimalne kontrolne Rabijeve frekvencije, gde je $\Omega_{c0} = d_{32}E_{c0}/(2\hbar)$, što za ovde odabrane vrednosti parametara iznosi $\Omega_{c0} = 495.32$ GHz. Isprekidanim linijama prikazane su vrednosti $\Omega_c(t)$ za $t_s = 100$ ps, dok se pune linije odnose na slučaj kada je $t_s = 300$ ps. Kao što je već rečeno, odabrali smo situaciju kada su koeficijenti isključivanja i uključivanja kontrolnog polja međusobno jednaki, čime smo obezbedili svojevrsnu simetriju između ova dva procesa. Relativno male vrednosti za α ($\alpha = 2 \cdot 10^{10}$ Hz, crvene linije), znače i relativno sporu promenu kontrolne Rabijeve frekvencije, koja u slučaju manjih vremena skladištenja uopšte ne dostiže nultu vrednost. Treba napomenuti da, mada se na ovaj slučaj nismo fokusirali u daljem radu i dobijene rezultate nismo prikazali, čak i ovakva vrednost koeficijenta α može da omogući relativno efikasno skladištenje sondirajućeg pulsa. Daljim povećanjem α , isključivanje i uključivanje postaju sve nagliji procesi, tako da se za $\alpha = 10^{12}$ Hz (zelene linije) funkcija $\Omega_c(t)$ praktično može opisati „skokovitim” krivom. Iako je u ovom slučaju uslov adijabatičnosti narušen, ovakvu zavisnost kontrolne Rabijeve

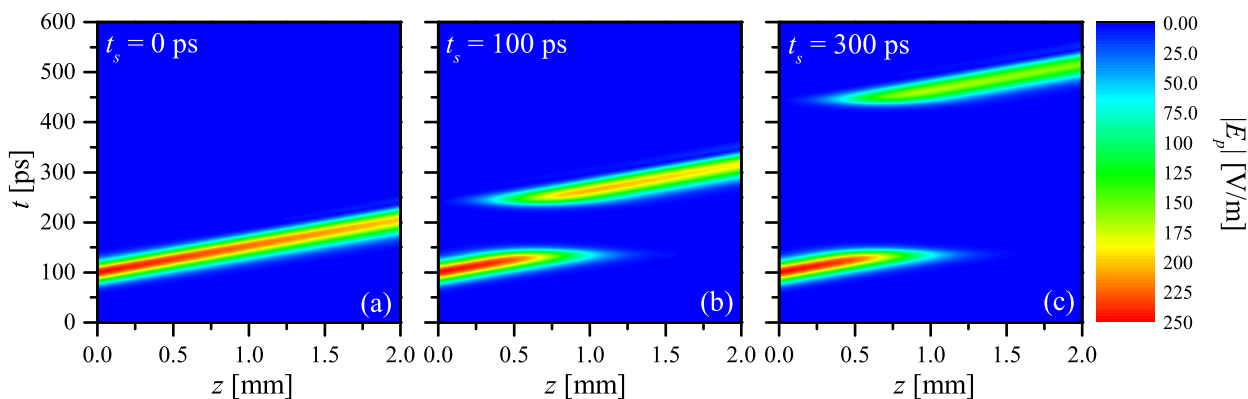
¹ Podsetimo se da je veza između Rabijeve frekvencije i jačine električnog polja sondirajućeg lasera data izrazom $\Omega_p = d_{21}E_p/(2\hbar)$, a ukoliko ove vrednosti mogu da se menjaju, kao što je to ovde slučaj, onda analogna relacija važi i za njihove maksimalne vrednosti, $\Omega_{p0} = d_{21}E_{p0}/(2\hbar)$.

² Jedna od glavnih promena u ovoj Glavi u odnosu na prethodne jeste dužina uzorka D . Naime, parametri su ovde tako odabrani da se, u trenutku isključivanja kontrolnog polja t_1 , čitav puls nađe unutar uzorka, pošto tada može kompletno i da se uskladišti. Ukoliko bi dužina uzorka bila manja, „raniji” deo pulsa bi već izašao iz sredine a da skladištenje još nije nastupilo, dok bi se u uzorku apsorbovao njegov „kasniji” deo. Time bi se, dakle, puls „razbio” i ne bi se kretao kroz uzorak kao celina, što je nama jedan od osnovnih ciljeva.

frekvencije od vremena koristili smo u odeljku 6.4.3 pri dobijanju aproksimativnih analitičkih izraza za puls na izlazu iz sredine. U narednom poglavlju ćemo pokazati da čak i ova, na prvi pogled upitna pretpostavka, može dati zadovoljavajuće rezultate za niz slučajeva od interesa [271, 272]. Za potrebe numeričkog rešavanja ćemo, ipak, koristiti vrednost $\alpha = 10^{11}$ Hz, što odgovara crnim linijama na slici 10.1. Na ovaj način je ispunjen uslov adijabatičnosti sa jedne, i omogućeno potpuno isključivanje kontrolnog polja sa druge strane [23, 88]. Sprovedena diskusija u potpunosti odgovara teorijskim zaključcima dobijenim u poglavlju 6.4, a konkretan odabir koeficijenta α znači da, pri skladištenju svetlosti, koristimo EIT memorijski protokol, detaljno objašnjen u poglavlju 2.3.3.

10.1 Uticaj vremena skladištenja i objašnjenje efekta

Zavisnost modula envelope električnog polja sondirajućeg pulsa od propagacione koordinate i vremena prikazana je na slici 10.2, za tri različite vrednosti vremena skladištenja i u odsustvu magnetnog polja (dakle, $\Delta_p = \Delta_c = 0$) [3]. Na slici 10.2 (a), prikazana je situacija kada je $t_s = 0$ ps, kako smo, radi jednostavnijeg pisanja, označili slučaj kada nema skladištenja svetlosti (nema promene jačine kontrolnog polja). U odsustvu skladištenja, imamo jedino pojavu spore svetlosti, koja se kroz sredinu prostire brzinom manjom od c . Konkretno, ovu brzinu možemo proceniti ukoliko primetimo da je pulsu potrebno oko 100 ps da napusti uzorak, što nas dovodi do vrednosti $v_g \approx 2 \cdot 10^7$ m/s, dok za grupni indeks dobijamo $n_g \approx 15$. Takođe, primećujemo i smanjenje maksimalne vrednosti envelope pulsa, kao posledicu dekoherentnih efekata pri interakciji svetlosti i materije. Dobijeno zadržavanje svetlosti u sredini (u odnosu na vakuum) nije veliko, ali se može dodatno povećati ukoliko se svetlost *uskladišti* u sredini, kao što se to vidi na slici 10.2 (b) i (c). U oba ova slučaja, puls je u toku vremena skladištenja „zarobljen” u sredini (za razliku od spore svetlosti, ovde nema nikakvog kretanja), što se sa grafika i vidi. Tek nakon ponovnog uključivanja kontrolnog polja, dolazi do regeneracije pulsa, koji ima slabiji intenzitet što je vreme skladištenja veće, opet kao posledica nezanemarljivih koeficijenata raspada. Dakle, čak i u toku vremena skladištenja, dolazi do gubitka informacije. Zbog toga je od izuzetnog značaja smanjiti uticaj dekoherentnih procesa što je više moguće.



Slika 10.2: Prostorno-vremenska zavisnost envelope električnog polja sondirajućeg pulsa za slučaj (a) bez skladištenja, kao i skladištenja sa (b) $t_s = 100$ ps i (c) $t_s = 300$ ps. Grafici su dobijeni u odsustvu magnetnog polja, kao i za $\Delta_p = \Delta_c = 0$.

Proces skladištenja se najbolje može objasniti uz pomoć grafika sa slike 10.3, na kojoj je prikazana prostorno-vremenska zavisnost $\text{Re}\rho_{31}$, ponovo za tri različite vrednosti t_s . Veličina $\text{Im}\rho_{31}$ nije

prikazana jer je, u slučaju $\Delta_p = \Delta_c = 0$, jednaka nuli za svako z i t . Da bismo ovo pokazali, krenimo od OB jednačina (5.163)–(5.165) koje važe za poluprovodničku sredinu, iskoristimo da je $\Omega_c^* = \Omega_c$, kao i da su razdešenosti jednake nuli. Ako još uvedemo pretpostavku stacionarnog režima i zapišemo koherencije u obliku $\rho_{ij} = \text{Re}\rho_{ij} + i\text{Im}\rho_{ij}$, a potom odvojeno zapišemo jednačine za realne i imaginarne delove, dobićemo:

$$0 = -\Omega_c \text{Im}\rho_{31} - \gamma_{21} \text{Re}\rho_{21}, \quad (10.1)$$

$$0 = \Omega_p (\rho_{11} - \rho_{22}) + i\Omega_c \text{Re}\rho_{31} - \gamma_{21} \text{Im}\rho_{21}, \quad (10.2)$$

$$0 = -\Omega_c \text{Im}\rho_{21} + \Omega_p \text{Im}\rho_{32} - \gamma_{31} \text{Re}\rho_{31}, \quad (10.3)$$

$$0 = \Omega_c \text{Re}\rho_{21} - \Omega_p \text{Re}\rho_{32} - \gamma_{31} \text{Im}\rho_{31}, \quad (10.4)$$

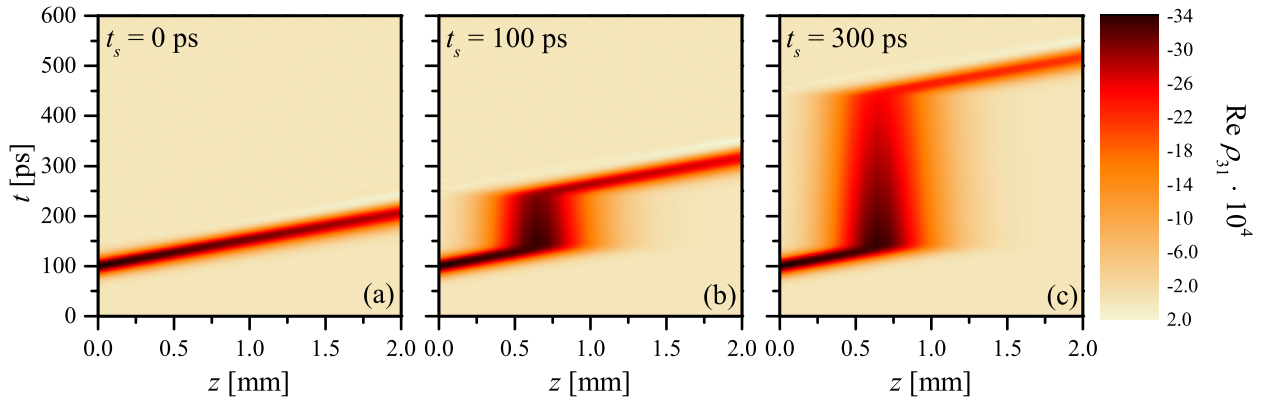
$$0 = \Omega_p \text{Im}\rho_{31} - \gamma_{32} \text{Re}\rho_{32}, \quad (10.5)$$

$$0 = \Omega_c (\rho_{22} - \rho_{33}) - \Omega_p \text{Re}\rho_{31} - \gamma_{32} \text{Im}\rho_{32}, \quad (10.6)$$

pri čemu su, naravno, naseljenosti ρ_{ii} realne veličine. Mogu se uočiti dva seta međusobno spregnutih jednačina – jednačine (10.2), (10.3) i (10.6) će ostati „netrivijalne” i rešavaće se zajedno sa preostalim OB jednačinama koje ovde nismo naveli. Međutim, mi ćemo se zadržati na jednačinama (10.1), (10.4) i (10.5). Ove jednačine čine homogen sistem linearnih jednačina, sa trivijalnim rešenjem

$$\text{Re}\rho_{21} = \text{Im}\rho_{31} = \text{Re}\rho_{32} = 0. \quad (10.7)$$

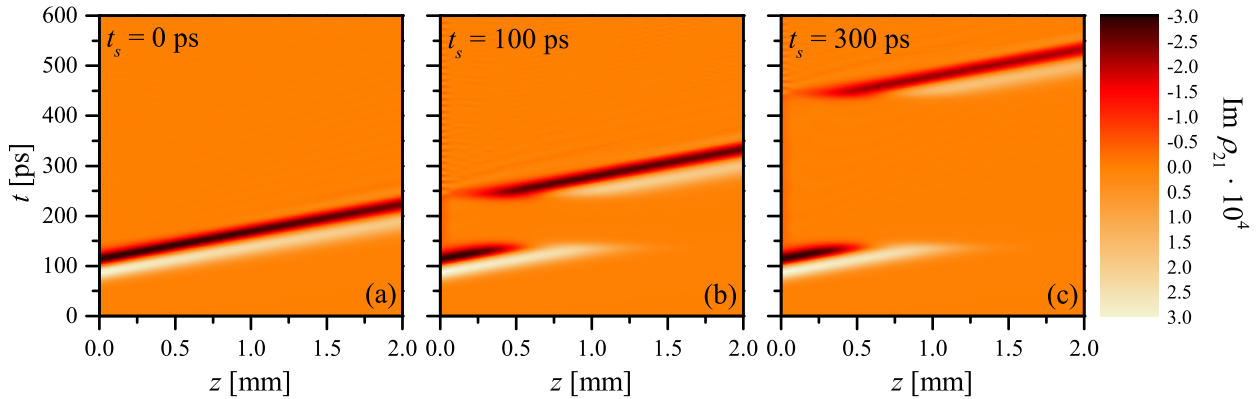
Kako je determinanta ovog sistema različita od nule, što se lako može proveriti, to je trivijalno rešenje ujedno i jedino rešenje, na osnovu čega zaključujemo da su gorenavedene veličine *uvek* jednake nuli u slučaju rezonantnih polja. Univerzalnost ovog zaključka vidi se i iz činjenice da se do njega došlo polazeći od originalnih OB jednačina, pre same primene perturbativnog metoda.



Slika 10.3: Prostorno-vremenska zavisnost realnog dela spinske koherencije za slučaj (a) bez skladištenja, kao i skladištenja sa (b) $t_s = 100$ ps i (c) $t_s = 300$ ps. Grafici su dobijeni u odsustvu magnetnog polja, kao i za $\Delta_p = \Delta_c = 0$.

U odsustvu skladištenja (slika 10.3 (a)), grafik zavisnosti $\text{Re}\rho_{31}$ od z i t izgleda vrlo slično grafiku prikazanom na slici 10.2 (a) – koherencija ima nenultu vrednost samo u onim tačkama u kojima i envelope pulsa ima nenultu vrednost. Vidimo da je red veličine ove koherencije oko 10^{-3} – vrednost $\text{Re}\rho_{31}$ nije velika, ali to samo znači da je primena perturbacionog pristupa u ovoj situaciji opravdana. Dakle, prilikom prostiranja svetlosti kroz sredinu, pored „fotonske” komponente, opisane preko E_p , odnosno Ω_p , postoji i „atomska” komponenta polaritona tamnog stanja, koju određuje veličina

$\rho_{31} \approx \text{Re}\rho_{31}$, i zbog koje se svetlost kroz sredinu prostire manjom grupnom brzinom od brzine svetlosti u vakuumu. Zbog toga što vrednost „atomske” komponente nije previše velika, polariton i dalje ima pretežno „fotonski” karakter, pa mu se grupna brzina ne smanjuje previše (kako smo videli ranije, svega za faktor 15).³ Ukoliko, pak, nastupi skladištenje svetlosti, kao na slici 10.3 (b) i (c), „fotonska” komponenta se potpuno gubi (slika 10.2 (b) i (c)), i polariton tamnog stanja je u toku vremena skladištenja sačinjen isključivo od „atomske” komponente, što potpuno odgovara diskusiji sprovedenoj u poglavlju 6.4. Sa vremenom, ipak, vrednost $\text{Re}\rho_{31}$ opada, budući da su gubici usled dekoherentnih procesa nezanemarljivi. Vidimo da ovi gubici nisu jednaki nuli ni u toku skladištenja svetlosti, što je ponovo u saglasnosti sa teorijskim razmatranjima. Naravno, duže vreme skladištenja implicira i veće gubitke, što se može videti poređenjem grafika (b) i (c) [3].



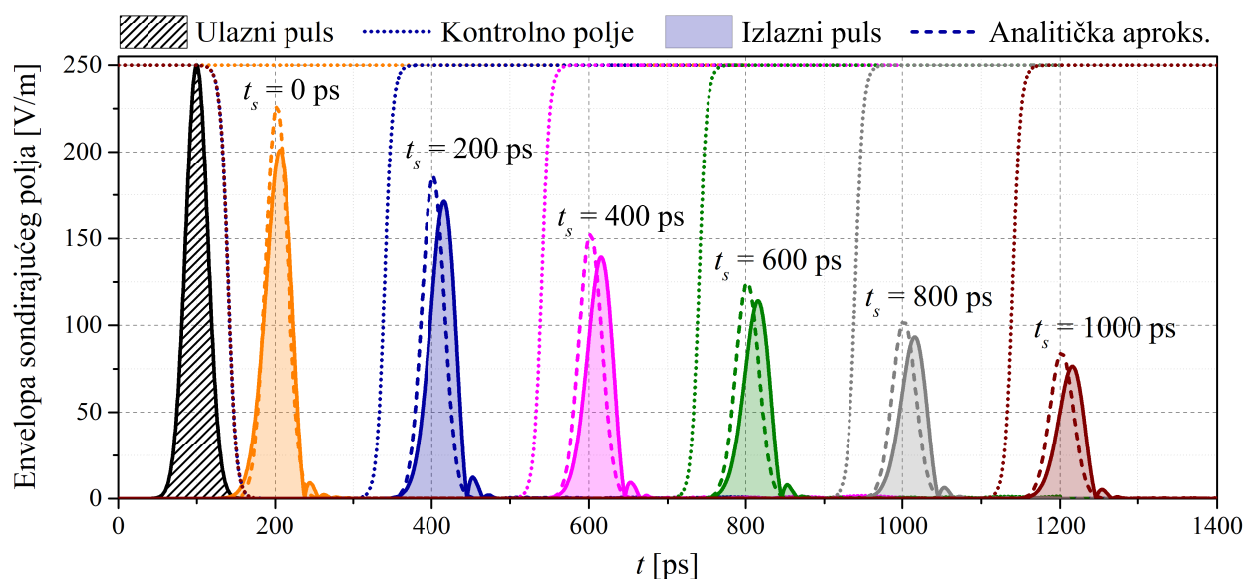
Slika 10.4: Prostorno-vremenska zavisnost realnog dela polarizacione koherencije za slučaj (a) bez skladištenja, kao i skladištenja sa (b) $t_s = 100$ ps i (c) $t_s = 300$ ps. Grafici su dobijeni u odsustvu magnetnog polja, kao i za $\Delta_p = \Delta_c = 0$.

Kako smo upravo videli, u toku skladištenja se celokupna informacija skladišti u obliku spinske koherencije. Sa druge strane, adijabatsko isključivanje (a potom i uključivanje) kontrolnog polja do- vodi do adijabatskog „gašenja” (a potom i „paljenja”) polarizacione koherencije ρ_{21} . Na slici 10.4 prikazana je upravo ova koherencija u zavisnosti od propagacione koordinate i vremena. S obzirom na to da je $\Delta_p = \Delta_c = 0$, iz (10.7) vidimo da je ρ_{21} čisto imaginarna veličina, pa je na slici dovoljno da prikažemo samo imaginarni deo ove koherencije. Istovremeno, ovakva situacija znači da će di- sperzija (srazmerna $\text{Re}\rho_{21}$) biti jednaka nuli, pa će jedino apsorpcija sondirajućeg pulsa (srazmerna $\text{Im}\rho_{21}$) biti relevantna. Kao što se to vidi na slici, polarizaciona koherencija je različita od nule ka- da je kontrolno polje uključeno, da bi se njegovim adijabatskim isključivanjem i ona na isti način dovela na nultu vrednost. Nakon toga, ponovnim uključivanjem kontrolnog polja, ρ_{21} se ponovo adijabatski uključuje i ima nenultu vrednost onda kada u sredini postoji i „fotonska” komponenta. Vidimo da je red veličine polarizacione koherencije 10^{-4} , što ponovo ukazuje na opravdanost korišćenja perturbacionog pristupa pri teorijskoj analizi interakcije svetlost–materija u slučaju sla- bog sondirajućeg polja. Kao i u prethodnim slučajevima, ponovo je očigledno smanjenje veličine $|\text{Im}\rho_{21}|$ sa vremenom, kao posledica nenulatih koeficijenata raspada.

³ Podsetimo se izvođenja iz poglavlja 6.4 i jednačine (6.272) kojom smo definisali „klasičan” polariton tamnog stanja. „Atomska” komponenta je, zapravo, veličina $\sqrt{M}\rho_{31}$, koja, za razliku od ρ_{31} , uopšte nije mala vrednost. Razlog za ovo je, naravno, činjenica da je M prilično veliko, konkretno $M = 3.45 \cdot 10^{24} \text{ s}^{-2}$, odnosno $\sqrt{M} = 1.86 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$ za vrednosti parametara koje smo odabrali u ovoj Glavi. Zbog toga je $\sqrt{M}\rho_{31} \sim 10^9 \text{ Hz}$, što odgovara redu veličine $\Omega_p \sim 10^9 \text{ Hz}$. Dakle, iako istog reda veličine, „atomska” komponenta nije dovoljno velika da izazove osetnije usporenje svetlosti od registrovanog, zbog čega i dalje možemo govoriti o predominantnosti „fotonske” komponente. Otuda u glavnom tekstu tvrđenje da vrednost „atomske” komponente „nije previše velika”.

10.1.1 Poređenje egzaktnog i aproksimativnog analitičkog rešenja za skladištenje

Na slici 10.5 prikazan je vremenski profil izlaznog sondirajućeg pulsa za nekoliko različitih vremena skladištenja (uključujući i slučaj $t_s = 0$ ps, kada de fakto nema skladištenja) [3]. Kao i do sada, ograničili smo se na situaciju kada je $B = 0B_0^*$, što znači da su i sondirajuće i kontrolno polje u rezonanciji sa odgovarajućim prelazima. Na slici je crnom punom linijom i šrafiranom površi ispod nje prikazan ulazni puls, dok su punim linijama sa obojenim oblastima ispod njih prikazani izlazni pulsevi za različito t_s . Dok su ove krive dobijene numeričkim rešavanjem MB jednačina za sistem sa tri nivoa, obojene isprekidane linije predstavljaju aproksimativna analitička rešenja u drugom redu po frekvenciji, dobijena korišćenjem izraza (6.318). Na kraju, tačkastim obojenim linijama su prikazane skalirane vrednosti envelope kontrolnog polja (konkretno, vrednost $E_{p0}E_c(t)/E_{c0} = E_{p0}\Omega_c(t)/\Omega_{c0}$), ponovo za različite vrednosti vremena skladištenja.



Slika 10.5: Vremenska zavisnost envelope električnog polja sondirajućeg pulsa na izlazu iz sredine za različite vrednosti vremena skladištenja (pune linije sa obojenom površinom ispod njih), za $B = 0B_0^*$ i $\Delta_p = \Delta_c = 0$. Ulazni puls prikazan je punom crnom linijom i šrafiranom površinom ispod nje, a aproksimativna analitička rešenja, dobijena primenom metoda FT u drugom redu po frekvenciji, isprekidanim linijama. Skalirana vrednost jačine kontrolnog polja prikazana je tačkastim linijama.

Već na prvi pogled vidimo da izlazni puls ne zadržava originalni Gausov profil – za sva vremena skladištenja, dolazi do pojave „repa” pulsa, kao posledica efekata višeg reda po frekvenciji, što je detaljno diskutovano u odeljku 9.1.1. Konkretno, pogledom na tabelu 10.2 za $w = 50$ GHz, vidimo da je zapravo reč o efektu trećeg reda po ω , pošto sada član $|\kappa_3\omega^3|$ ne može da se zanemari u odnosu na članove nultog i prvog reda. Sa druge strane, može se primetiti da se, praktično za sve vrednosti spektralne poluširine ulaznog pulsa, član drugog reda može zanemariti u odnosu na ostale relevantne članove. Ovo znači da je disperzija izlaznog pulsa vrlo mala, što se i vidi na slici 10.5, gde puls zadržava svoju (vremensku) širinu za širok opseg variranih parametara.

Činjenica da je efekat trećeg reda u našem slučaju nezanemarljiv, objašnjava primetno neslaganje između egzaktnog i aproksimativnog analitičkog rešenja. Aproksimativno rešenje, u kome je izlazni puls dobijen u drugom redu po frekvenciji, zadržava Gausov profil, pa iako se njegova pozicija

Tabela 10.2: Tabela sa vrednostima prvih sedam koeficijenata u razvoju disperzione relacije $\kappa(\omega)$, za $E_c/E_{p0} = 100$, $\Delta_p = \Delta_c = 0$ i $\gamma_{21} = \gamma_{31} = \gamma_0$, kao i vrednosti celokupnih sabiraka u ovom razvoju za spektralnu komponentu pulsa čija je frekvencija $\omega = w$. Sve navedene vrednosti dobijene su za četiri različite vrednosti spektralne poluširine ulaznog pulsa.

	w [GHz]	10	20	50	100
i	$ \kappa_i $ [s^i/m]	$ \kappa_i \omega^i $ [1/m]			
0	$4.76496 \cdot 10^1$	47.6496	47.6496	47.6496	47.6496
1	$5.09848 \cdot 10^{-8}$	509.848	1019.70	2549.24	5098.48
2	$5.82644 \cdot 10^{-22}$	0.05826	0.23306	1.45661	5.82644
3	$1.9421 \cdot 10^{-31}$	0.19421	1.55368	24.2762	194.210
4	$3.95798 \cdot 10^{-45}$	0.00004	0.00063	0.02474	0.39580
5	$7.91550 \cdot 10^{-55}$	0.00008	0.00253	0.24736	7.91550
6	$2.25850 \cdot 10^{-68}$	0.00000	0.00000	0.00035	0.02258

i maksimalna vrednost relativno dobro poklapaju sa egzaktnim rešenjem, jasno je da je za precizniji opis izlaznog pulsa potrebno uvesti efekte trećeg reda, na sličan način kao što je to učinjeno u odeljku 6.3.3. Ipak, u nastavku ćemo videti da, ukoliko nas prevashodno interesuje *efikasnost* skladištenja, aproksimacija drugog reda po frekvenciji sasvim zadovoljavajuće opisuje ovaj proces, te ju je moguće koristiti bez većih uticaja na tačnost rezultata. Sa druge strane, ukoliko želimo bolje slaganje analitike i numerike, potrebno je da koristimo spektralno uže pulseve, gde će se materijalna sredina apsorbovati znatno manje spektralnih komponenti, što dovodi do boljeg očuvanja Gausovog profila ulaznog pulsa. Ovo se vidi i letimičnim pogledom na tabelu 10.2, za manje vrednosti spektralnih poluširina od one koju smo do sada koristili. Na kraju, primetimo da se, povećanjem vremena skladištenja, smanjuje visina envelope izlaznog pulsa, ponovo u skladu sa analitičkim izrazima dobijenim u poglavlju 6.4. Ponovimo, smanjenje „visine” pulsa posledica je postojanja koeficijenta raspada γ_{31} , zbog koga dolazi do disipacije čak i u toku samog procesa skladištenja, i kontrola ove veličine predstavlja jedan od najvećih praktičnih izazova za realizaciju ovog efekta i primenu u nanonauci i nanotehnologiji.

10.1.2 Primena u izradi kvantnih memorija i optičkih bafera

Dobijeni rezultati pokazuju da je moguće manipulirati slabom sondirajućom svetlošću na vrlo efikasan način – uključivanjem i isključivanjem jakog kontrolnog polja. Skladištenje u poluprovodničkim kvantnim tačkama predstavlja jako perspektivno polje istraživanja, s obzirom na to da upravljanje poluprovodničkim nanostrukturama u nekim situacijama može biti neuporedivo lakše nego što je to slučaj sa atomskim gasovima i parama. Sa jedne strane, ovo tvrđenje se odnosi na mogućnost lakše integracije poluprovodničkih nanostrukture u odgovarajuću aparaturu, dok je, sa druge strane, promenom dimenzija SKT moguće dobiti potpuno drugačiju energijsku strukturu, a samim tim i promenjen ospeg rada uređaja koji bi se bazirao na SKT. Ovo sa atomima u gasovima ne bi bilo moguće, a može biti od izuzetnog značaja kod potencijalnih primena u raznim oblastima nauke i tehnologije. Veliku pažnju potrebno je, doduše, posvetiti proučavanju uticaja dekoherentnih efekata na skladištenje, i razmotriti načine za smanjenje koeficijenata raspada, što će biti diskutovano u narednim poglavljima. Na ovom mestu, pomenućemo dve moguće primene proučavanih efekata – u kvantnoj informatici i optičkim komunikacijama.

Jedan od potencijalnih vidova primene SKT kod skladištenja svetlosti jeste u izradi kvantnih me-

morija. Kao što je to objašnjeno u odeljku 4.2.3, materijalna sredina ima ulogu svojevrsnog „hard diska” u kome skladištimo informaciju koju kasnije želimo da eksploatišemo. Ova informacija može da bude, na primer, sadržana u polarizaciji fotona, i njeno prevođenje u spinsku koherenciju adijabatskim isključivanjem kontrolnog polja je opisano u ovom poglavlju, kao i poglavlju 6.4. Nakon vremena t_s , ponovnim uključivanjem kontrolnog polja, možemo da povratimo željenu informaciju, dalje je procesiramo i eventualno koristimo u logičkim operacijama karakterističnim za kvantno računanje. U ovom poglavlju smo pokazali da je, u sredini sačinjenoj od poluprovodničkih SKT, moguće ostvariti vremena skladištenja reda nanosekundi (ili barem nekoliko stotina pikosekundi). Ova vrednost je, naravno, značajno manja od vrednosti t_s karakterističnih za gasovite sredine, što je očekivano imajući u vidu da u čvrstim telima postoji više različitih izvora dekoherencije, o čemu je bilo reči u Glavi 5. Kako je, za dobijanje efikasnih kvantnih memorija, u praksi neophodno obezbediti veća vremena skladištenja, to je potrebno raditi na smanjenju dekoherencije koliko god je to moguće, prevashodno hlađenjem aparature do izuzetno niskih (kriogenih) temperatura [105, 282].

Iako je možda na konkretnije rezultate po pitanju primene SKT u izradi kvantnih memorija potrebno sačekati, čak i ovako mala vremena skladištenja mogu da budu dovoljna u primeni kod izrade optičkih bafera, čiji je princip rada opisan u odeljku 4.2.1. Dakle, ukoliko je potrebno obezbediti prolaz dva signala kroz isti optički kanal bez „mešanja”, ili njihov nesmetani prolaz kroz optički ruter koji preusmerava signal u različite kanale, isključivanjem i ponovnim uključivanjem kontrolnog polja u kanalu iz koga dolazi jedan od dva signala, moguće je obezbediti kašnjenje jednog od njih, tj. „zadržati” jedan puls u sredini dok drugi ne prođe nesmetano kroz kanal. Za razliku od kvantnih memorija, ova „vremena zadržavanja”, tj. „baferovanja”, ne moraju da budu velika. Konkretno, ukoliko radimo sa pulsevima čije je trajanje, kao ovde, reda nekoliko desetina pikosekundi, onda će za funkcionisanje optičkog bafera biti dovoljno da kontrolno polje isključimo na nekoliko stotina pikosekundi, ili čak i kraće. Na taj način, čak i na sobnim temperaturama, gubici usled dekoherencije nisu prepreka da se „zadržavanje” sondirajućeg pulsa obavi uz vrlo visoke vrednosti efikasnosti, tj. uz skoro potpuno očuvanje originalnog profila pulsa.

10.2 Skladištenje u spoljašnjem magnetnom polju

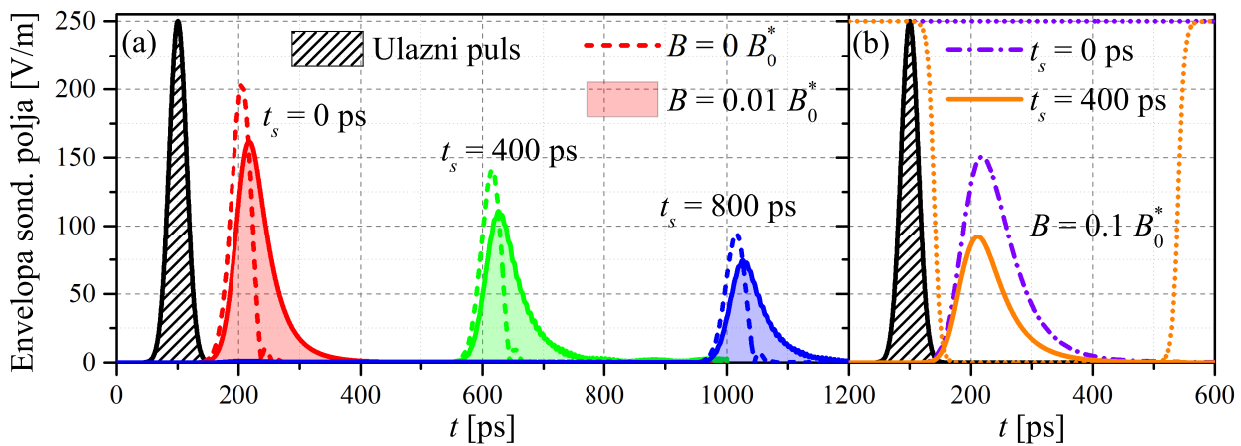
Pređimo sada na proučavanje uticaja spoljašnjeg stacionarnog magnetnog polja jačine B na skladištenje sondirajućeg pulsa. U odeljku 9.1.2 prikazani su rezultati propagacije pulsa ukoliko je sredina izložena dejstvu magnetnog polja, pri čemu se tamo dobijeni zaključci skoro u potpunosti mogu primeniti i na uskladištenje, a ne samo na sporu svetlost. Pre svega, kao u slučaju spore svetlosti, i ovde prisustvo spoljašnjeg magnetnog polja dovodi do Zemanovog pomaka energijskih nivoa, zbog čega laseri više nisu u rezonanciji sa odgovarajućim prelazima. Uz pretpostavku slabog polja, linearni Zemanov efekat će biti dominantan, pa će sondirajuća i kontrolna razdešenost približno biti date izrazima (9.4) i (9.5) u efektivnim atomskim jedinicama, respektivno, odnosno izrazom (9.14) u SI jedinicama. Pri dobijanju željenih rezultata ćemo, međutim, koristiti egzaktno vrednosti za razdešenosti, čijim ćemo poređenjem sa izrazima u aproksimaciji linearnog Zemanovog efekta moći da diskutujemo granice primene ove aproksimacije. Prilikom rešavanja MB jednačina, koristićemo iste početne i granične uslove kao u poglavlju 10.1, i variraćemo vreme skladištenja, odnosno jačinu magnetnog polja, koje će zapravo modifikovati energijsku strukturu SKT (položaje nivoa i matrice elemente operatora električnog dipolnog momenta).

U ovom poglavlju, radi ilustracije efekata koji se u proučavanom sistemu mogu javiti, ograničili smo se na slučaj $B = 0 B_0^*$, kao i na magnetna polja koja se razlikuju za po red veličine, $B = 0.01 B_0^*$ i

Tabela 10.3: Vrednosti sondirajuće, kontrolne i dvofotonske razdešenosti za tri različite vrednosti jačine spoljašnjeg magnetnog polja, za SKT poluprečnika $R = 8 a_0^*$. U tabeli je prikazana i aproksimativna vrednost sondirajuće i kontrolne razdešenosti Δ za slučaj linearnog Zemanovog efekta, dobijena primenom jednačine (9.14).

$B [B_0^*]$	$B [\text{mT}]$	$\Delta [\text{GHz}]$	$\Delta_p [\text{GHz}]$	$\Delta_c [\text{GHz}]$	$\Delta_p + \Delta_c [\text{GHz}]$
0	0	0	0	0	0
0.01	63.1	-83.224	-80.905	-81.589	-162.49
0.1	631	-832.24	-608.50	-668.87	-1277.4

$B = 0.1 B_0^*$. U tabeli 10.3 prikazane su razdešenosti sondirajućeg i kontrolnog polja računane egzaktno, kao i dvofotonska razdešenost $\Delta_1 = \Delta_p + \Delta_c$, za tri navedene vrednosti jačine magnetnog polja. Pored toga, u tabeli je prikazana i vrednost Δ , koja odgovara i sondirajućoj i kontrolnoj razdešenosti uz pretpostavku da je linearni Zemanov efekat dominantan, i računa se pomoću jednačine (9.14). Vidimo da je, u slučaju slabih magnetnih polja ($B = 0.01 B_0^*$), vrednost Δ vrlo bliska stvarnim vrednostima Δ_p i Δ_c , što znači da je linearni Zemanov efekat ovde zaista dominantan. Ovo se, sa druge strane, ne može reći za $B = 0.1 B_0^*$, gde je razlika između svake od pomenutih razdešenosti sada vrlo velika, i gde kvadratni Zemanov efekat polako preuzima primat. Same brojne vrednosti ovih veličina biće nam od koristi nešto kasnije, prilikom objašnjenja uticaja magnetnog polja na izlazni sondirajući puls. Na kraju, napomenimo samo da je, u prisustvu magnetnog polja, uslov minimuma apsorpcije narušen, pošto se iz poslednje kolone u tabeli jasno vidi da je $\Delta_p + \Delta_c \neq 0$ kada je $B \neq 0 B_0^*$.



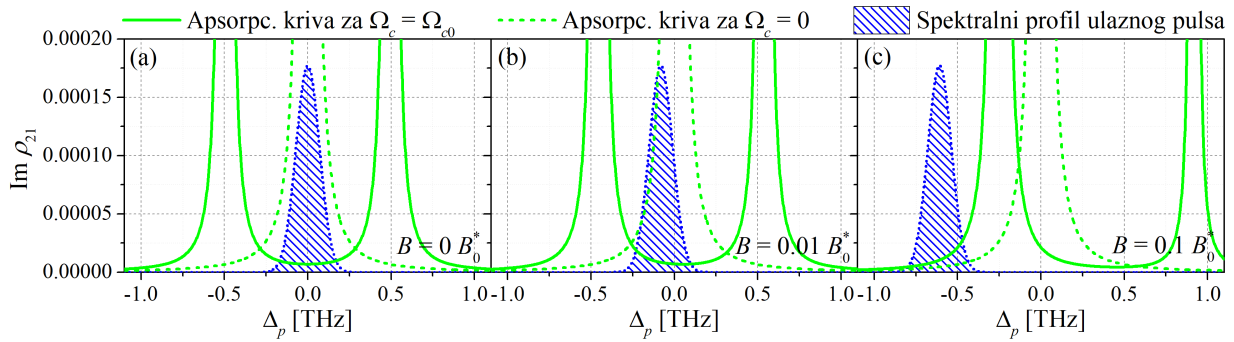
Slika 10.6: Vremenska zavisnost envelope električnog polja sondirajućeg pulsa na izlazu iz sredine (a) za različite vrednosti vremena skladištenja, za $B = 0 B_0^*$ (isprekidane linije) i $B = 0.01 B_0^*$ (pune linije sa obojenom površinom ispod njih), kao i (b) za $B = 0.01 B_0^*$, u odsustvu skladištenja (ljubičasta crta-tačka linija) i pri skladištenju sa $t_s = 400 \text{ ps}$ (narandžasta puna linija). Ulazni puls prikazan je punom crnom linijom i šrafiranom površinom ispod nje, a skalirana vrednost jačine kontrolnog polja na slici (b) prikazana je tačkastim linijama.

Uticaj spoljašnjeg magnetnog polja na oblik pulsa na izlazu iz sredine prikazan je na slici 10.6 [3]. Slika 10.6 (a) prikazuje vremenski profil envelope izlaznog pulsa u odsustvu skladištenja (crvene linije), kao i za skladištenje sa $t_s = 400 \text{ ps}$ (zelene) i $t_s = 800 \text{ ps}$ (plave linije). Ulazni puls je prikazan crnom linijom sa šrafiranom površinom ispod nje. Isprekidanim linijama prikazane su već računane vrednosti envelope pulsa u odsustvu spoljašnjeg magnetnog polja, dok su punim linijama

sa obojenim površima ispod njih prikazane ove vrednosti za $B = 0.01 B_0^*$. Efekat magnetnog polja na oblik izlaznog pulsa je već objašnjen u odeljku 9.1.2 – pomeranje energijskih nivoa dovodi do pojave nenultih razdešenosti, što u konačnom dovodi do primetne asimetrije izlaznog pulsa. Iako je, u odsustvu magnetnog polja, puls približno „pratio” oblik Gausove krive, ovde je odstupanje od nje sasvim očigledno. Sa druge strane, spoljašnje magnetno polje je eliminisalo „rep” pulsa koji se javio za $B = 0 B_0^*$ kao posledica efekata trećeg reda po ω . U slučaju nenultog magnetnog polja, u disperzionoj relaciji se efekti četvrtog i viših redova više ne mogu zanemariti, čime se objašnjava još veće odstupanje profila izlaznog pulsa od „gausovskog”. Pozicije maksimuma pulseva se u dva razmatrana slučaja ne razlikuju previše, pri čemu maksimum pulsa ima veću vrednost i nastupa ranije kada je $B = 0 B_0^*$. U oba slučaja, takođe, vrednost ovih maksimuma opada sa povećanjem vremena skladištenja, što je u skladu sa našim dosadašnjim razmatranjima u okviru ove Glave. Sa druge strane, širina pulsa je veća kada se sistem podvrgne dejstvu magnetnog polja, što je ponovo posledica efekata viših redova po frekvenciji, zbog kojih dolazi do disperzije grupne brzine, kao i veće apsorpcije spektralnih komponenti najudaljenijih od centralne. Analitički izrazi za profil pulsa u magnetnom polju na ovom mestu nisu prikazani (već samo rešenja dobijena numeričkim rešavanjem MB jednačina), jer je iz dosadašnje diskusije jasno da aproksimacija drugog reda više neće dati adekvatne rezultate u slučaju nenultog magnetnog polja. Napomenimo samo da će ona biti korektna za magnetna polja $B \sim 0.001 B_0^*$, dakle za red veličine manja od razmatranog, gde ono gotovo da neće modifikovati izlazni puls dobijen za $B = 0 B_0^*$, zbog čega ovi rezultati takođe nisu prikazani u disertaciji.

Pređimo sada na razmatranje uticaja jakih magnetnih polja na proces skladištenja. Na slici 10.6 (b) data je zavisnost envelope sondirajućeg polja od vremena za $B = 0.1 B_0^*$, i to u odsustvu skladištenja (ljubičasta crta-tačka linija), kao i za skladištenje koje traje $t_s = 400$ ps (narandžasta puna linija). Ulazni puls (puna crna linija sa šrafiranom površi ispod) je takođe prikazan, kao i skalirana vrednost jačine kontrolnog polja (tačkaste linije) u dva navedena slučaja. Ponašanje pulsa u odsustvu magnetnog polja je očekivano – primetno odstupanje od originalnog Gausovog profila, gubici kao posledica dekoherentnih efekata, kao i značajno kašnjenje u odnosu na slučaj prostiranja kroz vakuum (spora svetlost). Međutim, vidimo da je prilikom skladištenja profil pulsa sličan – pozicija maksimuma, širina i oblik pulsa se gotovo i ne razlikuju od pulsa dobijenog za $t_s = 0$ ps, osim što su gubici veći pa je i visina maksimuma envelope manja. Dakle, u slučaju jakih magnetnih polja, isključivanje i uključivanje kontrolnog polja *nije* dovelo do skladištenja pulsa u materijalnoj sredini – kontrolno polje u ovom slučaju nema nikakav efekat na prostiranje pulsa.

Da bismo objasnili gore opisani efekat, krenimo od slučaja kada je magnetno polje jednako nuli i objasnimo proces skladištenja pomoću apsorpcione krive, računate egzaktnim rešavanjem OB jednačina u stacionarnom režimu. Na slici 10.7 (a) prikazana je ova kriva za slučaj $B = 0 B_0^*$ (zeleone linije), zajedno sa spektralnim profilom ulaznog pulsa (plava tačkasta linija sa šrafiranom površi ispod nje), prikazanom u proizvoljnim jedinicama (od interesa nam je jedino položaj njegovog maksimuma). Kako nam to na ovom mestu nije od interesa, vrhovi apsorpcionih pikova nisu prikazani, ali ćemo napomenuti da su njihove vrednosti reda veličine $\text{Im}\rho_{21} \sim 0.1$. Ukoliko je kontrolno polje uključeno ($\Omega_c = \Omega_{c0}$, oblast I sa slike 6.3), apsorpciona kriva prikazana je punom linijom. Tada se puls nalazi u sredini prozora transparentnosti i prolazi kroz sredinu sa relativno malim gubicima, određenim vrednošću apsorpcije na dnu prozora. Ovo je režim spore svetlosti, kada istovremeno u sredini postoje i „fotonska” i „atomska” komponenta polaritona tamnog stanja. Ukoliko se kontrolno polje isključi ($\Omega_c = 0$, oblast II), umesto dva apsorpciona pika imaćemo jedan apsorpcioni maksimum u $\Delta_p = 0$ (isprekidana linija), potpuno u skladu sa teorijskim razmatranjima vezanim za sistem sa dva nivoa, odnosno sa jednačinom (6.44). Pošto je i puls centriran oko $\Delta_p = 0$, doći će do potpune apsorpcije i prevođenja informacije u spinsku koherenciju – polariton tamnog stanja se



Slika 10.7: Apsorpciona kriva za zatvoren sistem sa tri nivoa u lestvičastoj konfiguraciji (zelene linije), u slučaju kada je kontrolno polje uključeno (pune) i isključeno (isprekidane linije), za (a) $B = 0 B_0^*$, (b) $B = 0.01 B_0^*$ i (c) $B = 0.1 B_0^*$. Brojne vrednosti maksimuma apsorpcionih pikova iznose oko 0.12 za slučaj $\Omega_c = \Omega_{c0}$, odnosno oko 0.14 za $\Omega_c = 0$. Plavim tačkastim linijama i šrafiranom površinom ispod njih prikazan je spektralni profil ulaznog sondirajućeg pulsa u proizvoljnim jedinicama. Spektralna poluširina pulsa iznosi $w = 50 \text{ GHz}$, jačina kontrolnog polja je $E_{c0} = 100 E_{p0}$, dok su svi koeficijenti raspada međusobno jednaki i iznose $\gamma_{ij} = \gamma_0 = 1 \text{ GHz}$.

sastoji isključivo od „atomske” komponente (nastupa skladištenje svetlosti). Ponovno uključivanje kontrolnog polja ($\Omega_c = \Omega_{c0}$, oblast III) dovodi do „regeneracije” prozora transparentnosti, čime sredina opet postaje prozirna za sondirajuće polje. Na ovaj način dolazi do povraćaja informacije iz spinske koherencije.

Slučaj kada je magnetno polje slabo ($B = 0.01 B_0^*$) prikazan je na slici 10.7 (b). Ponašanje apsorpcione krive sa promenom magnetnog polja detaljno je pojašnjeno u odeljku 9.1.2, i na ovom mestu naravno imamo istu situaciju. Kada je kontrolno polje uključeno, slaba magnetna polja izazivaju blagu asimetriju apsorpcione krive, a Zemanov pomak „izmešta” maksimum sondirajućeg pulsa iz položaja $\Delta_p = 0$ ka jednom od apsorpcionih pikova (tačne vrednosti Δ_p i Δ_c prikazane su u tabeli 10.3). Zbog toga je apsorpcija pulsa spore svetlosti u prisustvu magnetnog polja pojačana, kao i efekti viših redova po frekvenciji, koji utiču na oblik vremenskog profila izlaznog pulsa, što je već detaljno diskutovano. Nasuprot tome, ukoliko se kontrolno polje isključi, i ovde, kao i u odsustvu magnetnog polja, doći će do formiranja jednog apsorpcionog maksimuma koji ima Lorencov profil, i nalaziće se opet u $\Delta_p = 0$ – dakle, njegov položaj ne zavisi od vrednosti jačine magnetnog polja. Kako je ovde magnetno polje slabo, to će se puls i dalje nalaziti blizu $\Delta_p = 0$, pa će se veći njegov deo ponovo apsorbovati, čineći proces skladištenja i dalje relativno efikasnim. Ponovno uključivanje kontrolnog polja će, naravno, obezbediti povraćaj sondirajućeg pulsa, na sličan način kako je to objašnjeno za prethodni slučaj. Ovo je upravo situacija koja je prikazana na slici 10.6 (a).

Na kraju, prodiskutujemo efekat jakog magnetnog polja na proces skladištenja, uz pomoć apsorpcione krive prikazane na slici 10.7 (c). Vidimo da je, pre svega, spektralni profil pulsa ovde jako daleko od sredine grafika, jer je zbog velikog pomeranja nivoa i razdešenost vrlo velika. Pored toga, sondirajući puls je pozicioniran van prozora transparentnosti u slučaju kada je $\Omega_c = \Omega_{c0} = 495.32 \text{ GHz}$, koji je pritom vrlo asimetričan. Ovo se može zaključiti i pogledom na tabelu 10.3, gde vidimo da je $|\Delta_p|, |\Delta_c| > \Omega_{c0}$, što je veličina koja određuje širinu ovog prozora. Primera radi, u slučaju $B = 0.01 B_0^*$, obe razdešenosti su bile za red veličine manje od Ω_{c0} , što je uslovilo da puls ostane unutar prozora transparentnosti. U oblasti frekvencija gde se nalazi sondirajući puls, iako možemo govoriti o sasvim drugačijem „režimu rada” uređaja koji bi se sastojao od mnoštva SKT, i dalje ćemo imati takav nagib disperzione krive da se svetlost kreće usporeno, kao i relativno slično ponašanje izlaznog pulsa po pitanju oblika profila i gubitaka usled apsorpcije. Dalje povećanje magnetnog po-

lja bi narušilo i ovo tvrđenje, te ne bismo više mogli govoriti o sporoj svetlosti, čime bismo izašli iz okvira disertacije. Ukoliko, pak, pokušamo da uskladištimo ovakav puls, isključivanjem kontrolnog polja ćemo ponovo dobiti jedan apsorpcioni pik u $\Delta_p = 0$, koji je, kako vidimo, još udaljeniji od sondirajućeg pulsa. Samim tim, apsorpcija će biti veoma mala, i ponovo određena vrednošću $\text{Im}\rho_{21}$ koja se nalazi daleko na „krilu” lorencijana. Pojačana apsorpcija izlaznog pulsa na slici 10.6 (b) je, dakle, posledica pojačane apsorpcije u toku propagacije pulsa kroz sredinu, a ne u toku „skladištenja”.

10.2.1 Primena u izradi optičkih prekidača i procesiranju signala

Kao što smo mogli da vidimo, vrednost magnetnog polja može drastično da utiče na propagaciju sondirajućeg pulsa kroz sredinu sačinjenu od poluprovodničkih SKT. Tako se proces skladištenja nesmetano odvija u slučaju slabih magnetnih polja ($B \lesssim 0.01 B_0^*$), gde se uključivanjem magnetnog polja može obezbediti eliminacija „repa” pulsa, koji može da se javi pri $B = 0 B_0^*$. Međutim, u slučaju jakih magnetnih polja ($B \gg 0.01 B_0^*$), razdešenost sondirajućeg i kontrolnog polja postaju uporedive sa vrednošću kontrolne Rabijeve frekvencije, zbog čega se može desiti da se puls potpuno nađe van prozora transparentnosti. U tom slučaju, uključivanje i isključivanje kontrolnog polja nema nikakav efekat na prostiranje pulsa. Na taj način, prisustvo jakog magnetnog polja u materijalnoj sredini igra ulogu „prekidača”, kojim se dodatno može kontrolisati proces skladištenja u kvantnim tačkama. Dakle, pored manipulacije kontrolnim poljem, dobili smo još jedan način za kontrolu prenosa i procesiranja informacije, što se potencijalno može realizovati u vidu optičkih prekidača, izrađenih na bazi poluprovodničkih SKT. Pored toga, činjenica da je proučavani sistem svetlost–materija izuzetno osetljiv na promene spoljašnjeg magnetnog polja, daje veliku perspektivu potencijalnoj primeni u magnetometriji, za merenje bilo slabih, bilo jakih magnetnih polja.

10.3 Grupni indeks, relativna širina, vernost i efikasnost skladištenja

Ispitivanje uticaja magnetnog polja na skladištenje, kao i poređenje numeričkih i analitičkih rešenja, najjednostavnije je izvršiti osvrtno na relevantne parametre koji karakterišu izlazni puls. Pomenuti parametri – grupni indeks, relativna širina, efikasnost i vernost, definisani su u odeljku 6.3.4, i detaljnije su analizirani za slučaj spore svetlosti. Ukoliko govorimo o skladištenju svetlosti, dobijeni izrazi će se modifikovati utoliko što se za vremenski profil pulsa na izlazu iz sredine koristi formula (6.318). Pored toga, pošto nas interesuje vrednost ovih parametara isključivo na izlazu iz sredine, moći ćemo da stavimo $z = D$. Na taj način, budući da se u (6.318) pojavljuje vreme skladištenja, kao rezultat dobićemo zavisnost grupnog indeksa n_g , relativne širine δ , efikasnosti η i vernosti ξ od t_s . Pored aproksimativnih analitičkih izraza u drugom redu po frekvenciji, pomenute parametre ćemo računati i egzaktno, uz pomoć funkcije $E_p(D, t)$ koju smo dobili numeričkim rešavanjem MB jednačina, takođe za nekoliko različitih vrednosti t_s .

Zadržimo se na kratko na diskusiji dva uvedena pojma – „egzaktno numeričko” i „aproksimativno analitičko” rešenje. Ovakvi pojmovi se ne sreću često u literaturi, i u ovoj disertaciji su uvedeni isključivo radi lakšeg snalaženja i poređenja različitih tipova rešenja. Konkretno, pod pojmom „egzaktno numeričko” rešenje ćemo smatrati rešenje koje je dobijeno primenom odgovarajućih numeričkih metoda, ali gde nisu izvršene nikakve dodatne aproksimacije polaznih jednačina (naravno, već u njima samima je moguće da su izvršene neke aproksimacije, ali tada pojam „egzaktno” treba

shvatiti uslovno, u smislu fusnote 9 iz odeljka 9.3.2). Sa druge strane, pod „aproksimativnim analitičkim” rešenjem ćemo podrazumevati rešenje koje smo dobili čisto analitičkom procedurom, ali uz uvođenje neophodnih aproksimacija kako bi dobijanje analitičkog rešenja uopšte bilo moguće, ili barem dovoljno jednostavno za dalju analizu.

S obzirom na to da ćemo parametre računati i za slučaj magnetnog polja koje je različito od nule, izrazi (6.254)–(6.257) će morati da se modifikuju. Naime, ovi izrazi su dobijeni uz pretpostavku $\Delta_p = \Delta_c = 0$, što je validno samo za $B = 0 B_0^*$. U prisustvu magnetnog polja, razdešenosti više nisu jednake nuli, pa veličine κ_1 , a i b , koje se pojavljuju u izrazima za n_g , δ , η i ξ , nisu više realne, već *kompleksne*. Ovo se jasno vidi iz izraza (6.201), (6.204) i (6.205), respektivno, preko kojih su one definisane. Imajući ovo u vidu, modifikovani izraz za efikasnost skladištenja sada postaje:

$$\eta^{(2)} = \frac{e^{-2\text{Re}a(D+v_g t_s)}}{\sqrt{1+4\text{Re}b w^2(D+v_g t_s)}}, \quad (10.8)$$

novi izraz za vernost glasi:

$$\xi^{(2)} = \frac{\sqrt{2}e^{-2\text{Re}a(D+v_g t_s)}}{\left((2+4\text{Re}b w^2(D+v_g t_s))^2 + (4\text{Im}b w^2(D+v_g t_s))^2\right)^{1/4}}, \quad (10.9)$$

dok za relativnu širinu izlaznog pulsa imamo:

$$\delta^{(2)} = \sqrt{\frac{(1+4\text{Re}b w^2(D+v_g t_s))^2 + (4\text{Im}b w^2(D+v_g t_s))^2}{1+4\text{Re}b w^2(D+v_g t_s)}}. \quad (10.10)$$

Svi navedeni izrazi se, u slučaju kada je $\Delta_p = \Delta_c = 0$, svode na izraze (6.254)–(6.256), kada κ_1 , a i b postaju čisto realne veličine.

Preostalo je još da navedemo modifikovani izraz za grupni indeks. U ovom slučaju, potrebno je samo kompleksnu veličinu κ_1 zameniti sa $\text{Re}\kappa_1$, ali ćemo na ovom mestu, samo za potrebe ovog poglavlja, dodatno preformulisati pojam grupnog indeksa. Naime, grupni indeks je definisan preko grupe brzine pulsa, i odnosi se na situaciju kada je kontrolno polje uključeno. Kako se skladištenje praktično može shvatiti kao dodatni način za usporavanje svetlosti, zbog toga što se vreme u toku kog se puls nalazi u materijalnoj sredini tada drastično povećava, definisaćemo najpre grupnu brzinu pulsa kao količnik dužine uzorka i vremena koje puls provede unutar uzorka,

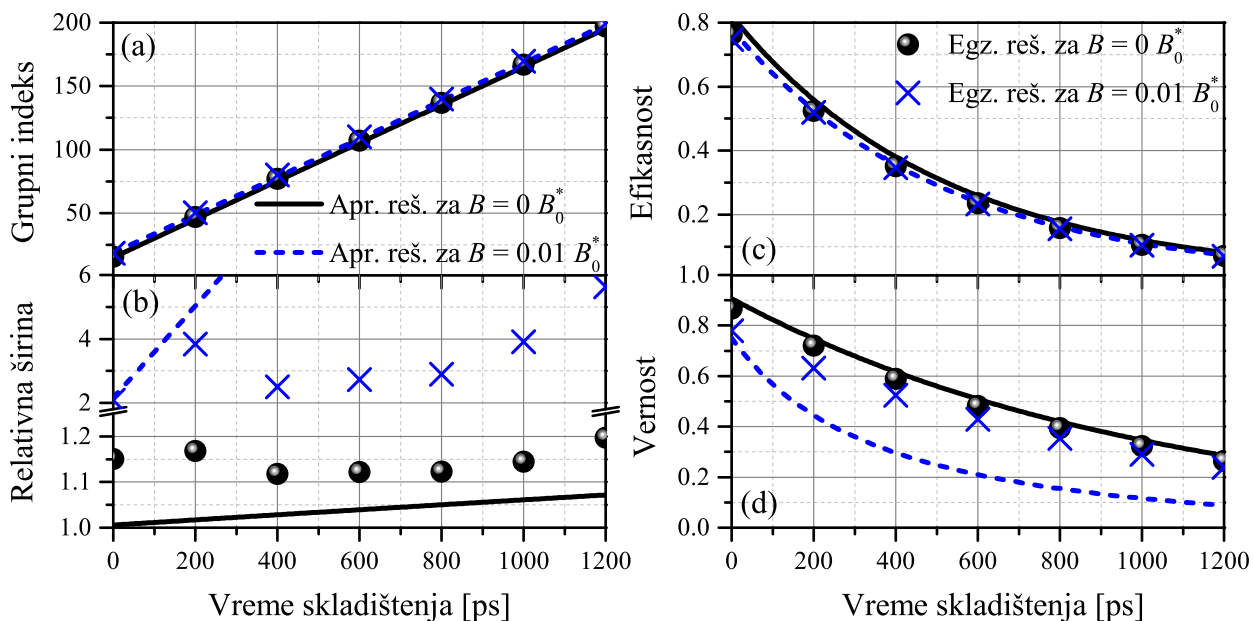
$$v_g = \frac{D}{\langle t \rangle - t_0 + t_s}, \quad (10.11)$$

a nakon toga i grupni indeks kao $n_g = c/v_g$. U aproksimaciji drugog reda po frekvenciji, to će nas dovesti do izraza:

$$n_g^{(2)} = c \left(\text{Re}\kappa_1 + \frac{t_s}{D} \right), \quad (10.12)$$

odakle vidimo da je zavisnost ovako definisanog grupnog indeksa od vremena skladištenja linearna. Ovo je naravno očekivano – što je duže vreme skladištenja, to je veće i „kašnjenje” pulsa, jer tada provede više vremena unutar materijalne sredine. Ovako definisan grupni indeks će nam olakšati poređenje između različitih tipova rešenja koja razmatramo, a koristićemo ga samo ovde, kao i u poglavlju 11.4 za analognu situaciju u kojoj je kontrolno polje modulirano, i koja se oslanja na rezultate dobijene na ovom mestu.

Zavisnost grupnog indeksa, relativne širine, efikasnosti i vernosti od vremena skladištenja prikazana je na slici 10.8. Prikazani su rezultati dobijeni u odsustvu magnetnog polja (crne linije i simboli), kao i za $B = 0.01 B_0^*$ (plave linije i simboli). Simbolima su prikazane vrednosti parametara dobijene (egzaktnim) numeričkim rešavanjem MB jednačina, dok linije predstavljaju aproksimativna analitička rešenja, dobijena primenom metoda FT i odbacivanjem kubnih i viših članova u disperzionoj relaciji (6.198). Kao što je očekivano, sa slike 10.8 (a) vidimo da grupni indeks raste linearno sa t_s , i ovo ponašanje je praktično isto za sve slučajeve prikazane na grafiku. Poklapanje analitičkih i numeričkih rešenja je takođe veoma dobro, pri čemu je grupni indeks u slučaju nenultog magnetnog polja nešto veći nego u slučaju $B = 0 B_0^*$. Naravno, ovo ponašanje je sasvim u skladu sa činjenicom da magnetno polje ne utiče značajno na položaj maksimuma envelope pulsa, te da on svakako izlazi iz sredine približno u istom trenutku kao i u odsustvu magnetnog polja, što se jasno vidi i na slici 10.6 (a).



Slika 10.8: (a) Grupni indeks, (b) relativna širina, (c) efikasnost i (d) vernost izlaznog sondirajućeg pulsa u zavisnosti od vremena skladištenja za $B = 0 B_0^*$ (crne pune linije i kružići), odnosno $B = 0.01 B_0^*$ (plave isprekidane linije i krstići). Na graficima su simbolima prikazani rezultati dobijeni egzaktnim numeričkim rešavanjem MB jednačina (simboli), a linijama aproksimativni analitički rezultati, dobijeni zadržavanjem članova zaključno sa drugim redom po frekvenciji u disperzionoj relaciji $\kappa(\omega)$.

Potpuno drugačije ponašanje možemo videti na slici 10.8 (b), na kojoj je prikazana zavisnost relativne širine izlaznog pulsa od t_s [3]. U odsustvu magnetnog polja, egzaktno i aproksimativno rešenje se očigledno *ne* poklapaju. Vrednosti δ u ovim slučajevima jesu veoma bliske (razlikuju se do na prvu decimalu), a za veliko t_s oba tipa rešenja monotono rastu sa porastom vremena skladištenja, međutim i dalje se ne može govoriti o njihovom poklapanju. Aproksimativno rešenje uračunava samo efekte drugog reda po ω , i dato je jednačinom (6.256), koja u ovom slučaju glasi $\delta^{(2)}(D) = \sqrt{1 + 4bw^2(D + v_g t_s)}$. Relativna širina u ovom slučaju, očigledno, raste sa t_s po korenoj funkciji, mada je čitav izraz blizak jedinici pošto je veličina $4bw^2(D + v_g t_s)$ i dalje vrlo mala. Nasuprot tome, egzaktno rešenje za $B = 0 B_0^*$ se ne može okarakterisati Gausovim profilom izlaznog pulsa – karakteriše ga pojava „repa”, što se vidi na slikama 10.5 i 10.6, te se u efektima višeg reda po

frekvenciji može tražiti razlog njegovog odstupanja od aproksimativnog rešenja. Ovo odstupanje, očigledno, najviše utiče na širinu izlaznog pulsa, dok se to ne može reći za položaje maksimuma pulsa (koji grubo određuju n_g) i površine ispod pulsa (srazmerne intenzitetu, odnosno efikasnosti η) – u ovim slučajevima, aproksimacija drugog reda u teoriji perturbacija sasvim prihvatljivo opisuje prostiranje pulsa.

Ukoliko je magnetno polje uključeno, aproksimativno rešenje je dato izrazom (10.10), u kome se pojavljuje i veličina Imb , koja je po apsolutnoj vrednosti mnogo veća od Reb (konkretno, za korišćene vrednosti parametara, $Reb = 1.07 \cdot 10^{-21} \text{ s}^2/\text{m}$ i $Imb = -9.71 \cdot 10^{-20} \text{ s}^2/\text{m}$, znak minus je irelevantan jer se veličina pojavljuje isključivo kvadrirana). Zbog toga je član koji sadrži Imb dominantan, i uslovljava brzi porast aproksimativne vrednosti za δ . Ovaj porast ne odgovara realnoj fizičkoj situaciji, budući da egzaktno dobijene vrednosti δ najpre opadaju, a potom rastu sa vremenom skladištenja, ali mnogo sporije nego u aproksimativnom slučaju. Na ovom primeru se najbolje vide ograničenja aproksimativnog analitičkog metoda – veoma veliko vremensko širenje pulsa, koje je vidljivo već na slici 10.6 (a) za $B = 0.01 B_0^*$, ukazuje na potrebu da se za bolji opis prostiranja pulsa uračunaju efekti trećeg i višeg reda po frekvenciji. Ovi efekti će očigledno biti suprotstavljeni efektima drugog reda, pa će relativna širina ipak trpeti nešto sporiji porast sa porastom t_s , kako se na slici 10.8 (b) i vidi. Na kraju, primetimo da se, za vrednosti $t_s \lesssim 200 \text{ ps}$, egzaktna rešenja relativno dobro poklapaju sa aproksimativnim, što se može objasniti činjenicom da, zbog toga što je vreme skladištenja malo, član $4Imb w^2(D + v_g t_s)$ još uvek nije dovoljno veliki da unese bitniju razliku između dva tipa rešenja. Drugim rečima, svi članovi u kojima se javljaju veličine povezane sa razvojem $\kappa(\omega)$ u Tejlorov red (u ovom slučaju je to koeficijent b), nemaju presudan uticaj na širinu izlaznog pulsa, već je ona posledica čisto promene vremena skladištenja. Na osnovu svega navedenog, očigledno je da, od svih računatih parametara, aproksimativno analitičko rešenje drugog reda u teoriji perturbacija daje najlošije rezultate u opisivanju relativne širine izlaznog pulsa, posebno u prisustvu magnetnog polja. Kao što smo već naglasili, ubrzo ćemo videti da se, čak i tada, ovaj tip rešenja može pouzdano koristiti u opisivanju drugih relevantnih parametara.

Zavisnost efikasnosti od vremena skladištenja prikazana je na slici 10.8 (c) [3]. Na početku, primetimo da je efikasnost u odsustvu magnetnog polja bliska, ali i dalje za nijansu veća nego ista veličina kada je magnetno polje uključeno, i naravno opada po eksponencijalnom zakonu sa t_s . Takođe, kao i kod grupnog indeksa, ovde je poklapanje između egzaktnih i aproksimativnih analitičkih rešenja izuzetno dobro. Štaviše, možemo primetiti da je ovo poklapanje čak i bolje za slučaj $B = 0.01 B_0^*$. Razlog za ovako dobro poklapanje u prisustvu magnetnog polja leži u činjenici da u opštem izrazu (10.8) za efikasnost ne figuriše Imb . Imajući u vidu ovako dobro poklapanje dva tipa rešenja, možemo iskoristiti analitički izraz za efikasnost kako bismo procenili karakteristično vreme skladištenja τ_s , koje će nam dati informaciju o redu veličine t_s koja je moguće realizovati u SKT pod razmatranim uslovima. Ovu vrednost ćemo definisati na standardan način – kao vreme skladištenja nakon koga efikasnost skladištenja opadne e puta. Kada je $B = 0 B_0^*$, ova vrednost iznosi $\tau_s = 1/(2v_g Rea) \approx 535 \text{ ps}$, dok je za $B = 0.01 B_0^*$ ona nešto niža. Prilikom ove procene, iskoristili smo činjenicu da je veličina $4Reb w^2(D + v_g t_s)$ i dalje relativno mala, pa je imenilac u izrazu (10.8) blizak jedinici.

Konačno, na slici 10.8 (d) data je zavisnost vernosti od t_s , ponovo uz poređenje analitičkog i numeričkog rešenja, kao i situacije sa i bez magnetnog polja. Poklapanje analitike i numerike za $B = 0 B_0^*$ je i ovde jako dobro, dok su u prisustvu magnetnog polja primetne jasne razlike. U aproksimaciji drugog reda po frekvenciji, vernost izlaznog pulsa originalnom pulsu tada brže opada sa vremenom skladištenja, dok se u realnosti ova veličina ne menja previše u odnosu na slučaj kada nema magnetnog polja. Ovo neslaganje je posledica postojanja sabirka koji sadrži Imb u izrazu (10.9), koji postaje dominantan i dodatno smanjuje $\xi^{(2)}$. Dakle, dok je efikasnost skladištenja moguće vrlo

precizno opisati pomoću aproksimacije drugog reda praktično za sve vrednosti jačine magnetnog polja, ova aproksimacija u opisivanju vernosti neće dati toliko dobre rezultate za magnetno polje koje je različito od nule. U prisustvu magnetnog polja, aproksimacija drugog reda opisuje zavisnost $\xi(t_s)$ samo kvalitativno.

10.3.1 Načini za povećanje efikasnosti skladištenja

U ovom poglavlju, videli smo da nezanemarljive vrednosti koeficijenata raspada dovode do toga da je efikasan proces skladištenja moguće sprovesti samo za vremena skladištenja u nekom, unapred definisanom opsegu. Konkretno, u sredini sačinjenoj od poluprovodničkih SKT, gde su koeficijenti raspada međusobno jednaki i iznose $\gamma_{ij} = 1$ GHz (ili su barem svi tog reda veličine), moguće je realizovati vremena skladištenja reda τ_s , odnosno reda nanosekundi. Takođe, pokazali smo da je efikasnost izlaznog pulsa, kao i (redefinisani) grupni indeks pri skladištenju sasvim precizno moguće opisati aproksimacijom drugog reda po ω , nezavisno od vrednosti jačine magnetnog polja. Nasuprot tome, ovo tvrđenje se ne odnosi na relativnu širinu i vernost, gde se dobro poklapanje egzaktnog i aproksimativnog rešenja postiže samo kod vernosti, i delimično kod relativne širine za $B = 0 B_0^*$, dok se u magnetnom polju aproksimativno rešenje ne može efikasno primeniti.

Analizom izraza (10.8) i parametara koji se u njemu pojavljuju, može se pokazati da, u grubim crtama, smanjenje koeficijenata raspada za red veličine odgovara povećanju karakterističnog vremena skladištenja za red veličine. Zbog toga je od velike važnosti, za obezbeđivanje što dužeg skladištenja i veće efikasnosti, smanjiti koeficijente γ_{ij} , i to prevashodno γ_{31} , za koji smo u odeljcima 6.1.1 i 6.4.2 pokazali da igra presudnu ulogu u apsorpciji sondirajućeg pulsa. Primera radi, ovo je moguće postići hlađenjem uzorka do izuzetno niskih, kriogenih temperatura. Na taj način, eliminiše se elektron-fononska interakcija kao dominantan izvor dekoherencije, ostavljajući spontanu emisiju kao jedini preostali izvor gubitaka. Vrednosti koeficijenata spontane emisije mogu imati znatno manje vrednosti od koeficijenata karakterističnih za elektron-fononsku emisiju, a u nekim slučajevima mogu čak biti reda veličine onih za atomske gasove i pare, $\Gamma_{ij} \sim 10^7$ Hz. Za kvantnu tačku čije smo dimenzije odabrali na početku rada, ove vrednosti prikazane su u tabeli 9.4, i reda su 10^9 – 10^{10} Hz. Za dobijanje *manjih* vrednosti za Γ_{ij} , potrebno je odabrati SKT *većeg* poluprečnika. Ovo tvrđenje će postati jasnije ukoliko se osvrnemo na sliku 8.1, sa koje ćemo videti da energijski nivoi SKT bivaju međusobno sve bliži sa povećanjem R , čime se smanjuje energija, odnosno frekvencija prelaza ω_{ij} . Paralelno sa tim, matrični elementi $d_{ij}^{(s)}$ rastu sa povećanjem R , ali ne trpe toliko velike promene sa promenom poluprečnika kvantne tačke kao što je to slučaj sa energijom prelaza [197]. Zbirno gledano, kako u izrazu za koeficijente spontane emisije (5.191) figuriše treći stepen ω_{ij} i kvadrat matričnog elementa $d_{ij}^{(s)}$, to će smanjenje frekvencije prelaza sa R imati presudan uticaj na smanjenje koeficijenata spontane emisije sa poluprečnikom SKT, i to čak za nekoliko redova veličine. Ukoliko, dakle, odaberemo kvantne tačke većeg poluprečnika, njihovim hlađenjem do kriogenih temperatura moguće je smanjiti koeficijente spontane emisije na oko 10^7 Hz, čime se mogu postići vremena skladištenja čak i reda nekoliko stotina nanosekundi. Razmatranje SKT većeg poluprečnika izlazi iz okvira disertacije, ali se do svih željenih rezultata dolazi na potpuno analogan način kao ovde.

Pored hlađenja do kriogenih temperatura, efikasnost skladištenja je moguće povećati i na drugačiji način – korišćenjem fazno modulisanog kontrolnog polja. Kao što smo videli u poglavlju 6.5, na ovaj način je moguće dobiti prozor transparentnosti čiji položaj u prostoru frekvencija osciluje sa vremenom. Kao rezultat, moguće je obezbediti smanjenu apsorpciju sondirajućeg pulsa pogodnim odabirom trenutka u kome će puls ući u sredinu. Detaljno proučavanje uticaja modulacije kontrolnog

polja na prostiranje sondirajućeg pulsa, kako u slučaju spore svetlosti, tako i u slučaju skladištenja, biće sprovedeno u narednoj Glavi.

11 Prostiranje svetlosti kroz sredinu sa fazno moduliranim kontrolnim poljem

Poslednja fizička situacija čije nam je proučavanje od interesa jeste ona u kojoj se sondirajući laser prostire kroz materijalnu sredinu uz prisustvo kontrolnog polja, pri čemu je ovo polje fazno modulirano. Na ovaj način, propagacijom sondirajućeg lasera je moguće dodatno manipulirati, na šta je već ukazano u poglavlju 6.5. U ovoj Glavi, bavićemo se ispitivanjem uticaja parametara modulacije na vremenski profil izlaznog sondirajućeg lasera, u slučaju kada je u pitanju kontinualni, odnosno pulsni laser. Ispitivanje se vrši u sredini sačinjenoj od velikog broja SKT, čiji su parametri dati u tabeli 8.1. Ograničićemo se na zatvoren sistem sa tri nivoa, tj. imaćemo jedan sondirajući i jedan (fazno modulirani) kontrolni laser, pri čemu je odabir energijskih nivoa izvršen kao na slici 9.1. Proučavaćemo uticaj jačine spoljašnjeg magnetnog polja na izlazni puls, pri čemu ćemo se koncentrisati na ispitivanje načina na koje modulacija kontrolnog polja može da umanjiti gubitke koji nastaju usled „pomeranja” apsorpcione krive u magnetnom polju. U tom cilju, kao i u prethodnim glavama, pretpostavićemo da su oba lasera, u odsustvu magnetnog polja, u rezonanciji sa odgovarajućim prelazima. Rezultate ćemo prikazati za slučaj spore svetlosti, kada se intenzitet kontrolne Rabijevе frekvencije ne menja sa vremenom, kao i u slučaju skladištenja, gde se intenzitet ove veličine najpre adijabatski dovodi na nultu vrednost, a zatim na isti način ponovo uključuje. U slučaju spore svetlosti, koristićemo parametre navedene u Glavi 9, dok ćemo pri proučavanju skladištenja svetlosti koristiti vrednosti parametara iz Glave 10.

11.1 Uticaj modulacije kontrolnog polja na kontinualni sondirajući laser

Neke važne posledice fazne modulacije kontrolnog polja se najbolje vide ukoliko ispitivanje vršimo *kontinualnim* sondirajućim laserom. Ovakav laser je monohromatski, pa možemo govoriti o frekvenciji lasera u najužem smislu, za razliku od pulsnog lasera gde smo morali da uvedemo pojam noseće frekvencije. Ipak, kako je u realnosti u nekom trenutku potrebno *uključiti* sondirajući laser, to ćemo pretpostaviti sledeći oblik envelope sondirajućeg polja na ulazu u sredinu:

$$E_p(0, t) = E_{p0} \left(1 - \frac{1}{1 + (\beta t)^4 / 2} \right), \quad (11.1)$$

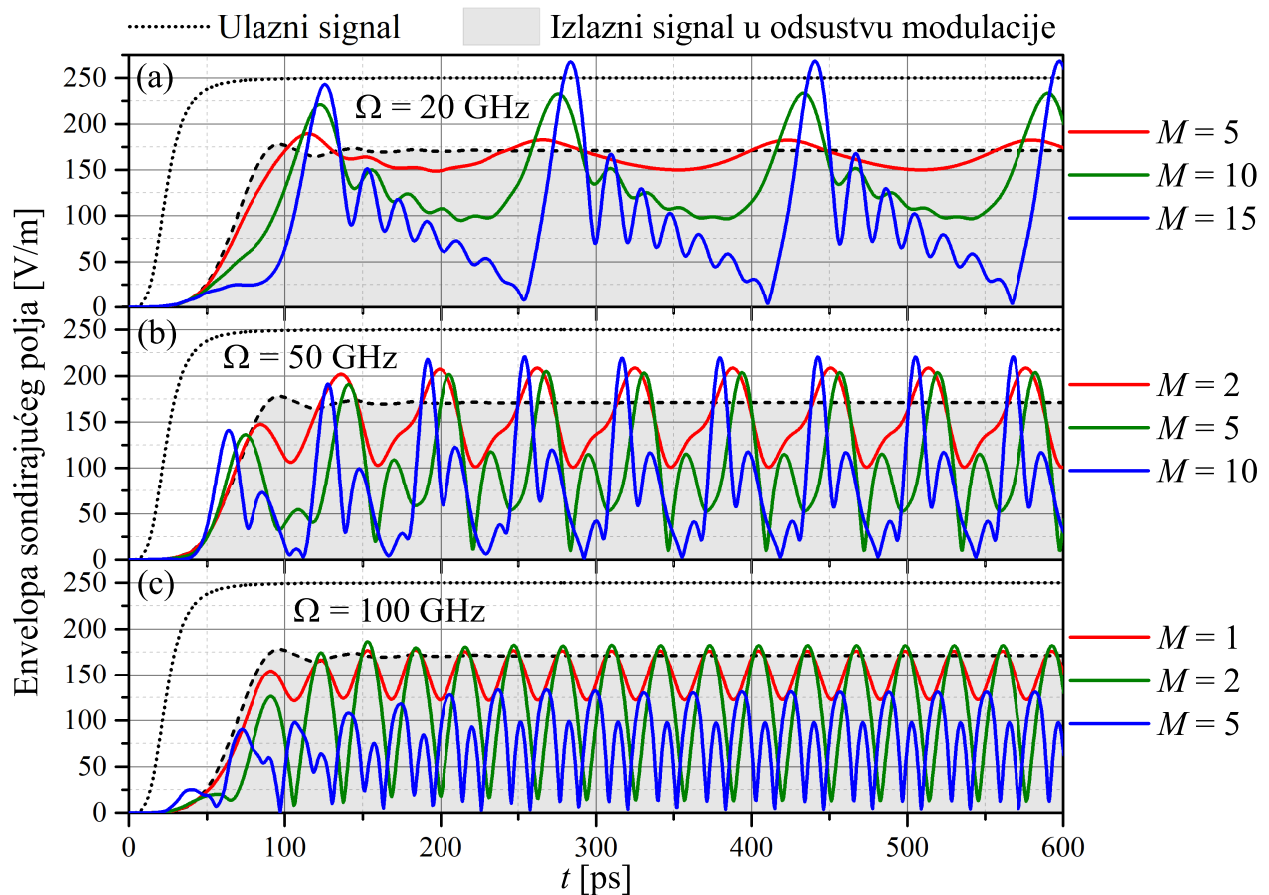
gde se električno polje lasera adijabatski uključuje, sa brzinom uključivanja β , i gde je $E_p(0, t) = E_{p0}$ kada $t \rightarrow \infty$ [212]. Gornji izraz predstavlja novi granični uslov koji zamenjuje (6.158) koji smo do sada koristili, i MB jednačine za sistem sa tri nivoa se sada ponovo rešavanju numerički, na isti način kao u prethodnoj Glavi. Pored izmenjenog graničnog uslova, ovde još treba za kontrolnu Rabijevu

frekvenciju staviti izraz

$$\Omega_c(t) = \Omega_{c0} e^{-i\varphi(t)}, \quad (11.2)$$

koji, u skladu sa diskusijom iz odeljka 6.5.1, važi u svakoj tački materijalne sredine, i gde je zavisnost faze od vremena data izrazom (6.321). Pri dobijanju rezultata, uzeto je da je $B = 0 B_0^*$, korišćeni su parametri prikazani u tabeli 9.1, kao i $E_{c0}/E_{p0} = 50$, $\beta = 0.5 \cdot 10^{11}$ Hz, odnosno $\gamma_{ij} = 10\gamma_0$.

Vremenska zavisnost envelope sondirajućeg polja na izlazu iz sredine prikazana je na slici 11.1 za različite vrednosti parametara M i Ω . Na svim graficima, crnom tačkastom linijom prikazano je sondirajuće polje na ulazu u sredinu, dato izrazom (11.1), dok je crnom isprekidanom linijom i obojenom površinom ispod nje prikazan sondirajući laser na izlazu iz sredine u odsustvu modulacije. Vidimo da je izlazni signal vrlo sličan ulaznom, uz razliku da se, zbog efekata uključivanja lasera, pojavljuju blage oscilacije u električnom polju oko $t \approx 100$ ps. Pored toga, očigledno je da nezanemarljivi koeficijenti raspada (konkretno, u najvećoj meri γ_{31}) prouzrokuju slabljenje izlaznog signala, pa je maksimalna vrednost envelope na izlazu iz sredine $|E_p(D, t \rightarrow \infty)| \approx 170$ V/m. Dakle, ukoliko kontrolno polje nije modulirano ($\Omega_c(t) = \Omega_{c0}$, što se može dobiti i iz (11.2) i (6.321) stavljanjem $M = 0$ i/ili $\Omega = 0$), kontinualni ulazni signal će opet dati kontinualni izlazni signal.



Slika 11.1: Vremenska zavisnost envelope električnog polja sondirajućeg lasera na izlazu iz sredine za različite vrednosti modulacionog indeksa M , kao i za (a) $\Omega = 20$ GHz, (b) $\Omega = 50$ GHz i (c) $\Omega = 100$ GHz (pune linije). Ulazni signal prikazan je crnom tačkastom linijom, a izlazni signal u odsustvu modulacije crnom isprekidanom linijom sa obojenom površi ispod nje. Vrednosti preostalih parametara su $E_{c0}/E_{p0} = 50$, $\beta = 0.5 \cdot 10^{11}$ Hz, $\gamma_{ij} = 10\gamma_0$, kao i $\Delta_p = \Delta_c = 0$.

Uključivanjem modulacije, na izlazu iz sredine ćemo dobiti drastičnu promenu ponašanja sondirajućeg lasera. Ova situacija je prikazana na slici 11.1 punim obojenim linijama. Slika 11.1 (a) prikazuje izlazni sondirajući signal za $\Omega = 20 \text{ GHz}$ i tri različite vrednosti M . U sva tri slučaja, primećujemo oscilovanje intenziteta izlaznog signala, i to sa identičnim razmakom između susednih maksimuma. Zbog efekata uključivanja, oscilovanje je u početku nepravilno, da bi se potom uspostavila ravnomerna promena jačine električnog polja na izlazu – dolazi do naizmeničnog jačanja i slabljenja signala, pri čemu je vremenski razmak između dva susedna maksimuma $t_{n+1} - t_n \approx 156.7 \text{ ps}$. Takođe, vidimo da su razlike između maksimalne i minimalne vrednosti intenziteta izlaznog laserskog signala veće, što je veća vrednost modulacionog indeksa M (štaviše, minimalna vrednost pada na nulu kada je $M = 15$). Dok, sa jedne strane, malo M ne unosi prevelike razlike u izlaznom signalu u odnosu na slučaj bez modulacije ($M \rightarrow 0$), velike vrednosti modulacionog indeksa doprinose primetnoj modifikaciji sondirajućeg lasera iz kontinualnog u periodični signal. Pored toga, kada je $M = 15$, primećujemo da je maksimalna vrednost električnog polja u $z = D$ čak i veća od E_{p0} [212]. Naravno, ovde ne možemo govoriti o narušavanju zakona održanja energije, budući da se svetlost jako apsorbuje u trenucima između pojava maksimuma. Na osnovu svega izloženog, jasno je da fazno modulirano kontrolno polje može da se koristi u svrhu dobijanja *niza pulseva*, polazeći od ulaznog kontinualnog sondirajućeg lasera, što može imati veliki značaj u optičkim telekomunikacijama i procesiranju signala.

Na slici 11.1 (b) i (c) data je vrednost $|E_p(D, t)|$ za $\Omega = 50 \text{ GHz}$ i $\Omega = 100 \text{ GHz}$, respektivno. Kao na slici (a), i ovde možemo primetiti oscilovanje izlaznog signala sa vremenom, za čiji je period jasno da je obrnuto srazmeran Ω . Konkretno, za $\Omega = 50 \text{ GHz}$, razmak između dva susedna maksimuma iznosi $t_{n+1} - t_n \approx 62.5 \text{ ps}$, dok je, u slučaju $\Omega = 100 \text{ GHz}$, ova vrednost $t_{n+1} - t_n \approx 31.3 \text{ ps}$. Ponovo vidimo da se, povećanjem modulacionog indeksa, obezbeđuju veće oscilacije izlaznog signala. Sa druge strane, za manje vrednosti M , ove oscilacije sve više dobijaju sinusoidalni karakter, što takođe može biti važno za potencijalne primene. Kao što je već rečeno, vrednosti M bliske nuli neće drastično modifikovati izlazni signal. On će tada biti vrlo sličan signalu koji smo dobili u odsustvu modulacije, zbog čega odgovarajući grafici nisu prikazani. Takođe, na graficima nismo prikazali ni izlazni signal za veliko M , pošto povećanje modulacionog indeksa neće dovesti ni do kakvog novog ponašanja, a pritom će izlazni signal jako odstupati od sinusoidalnog.

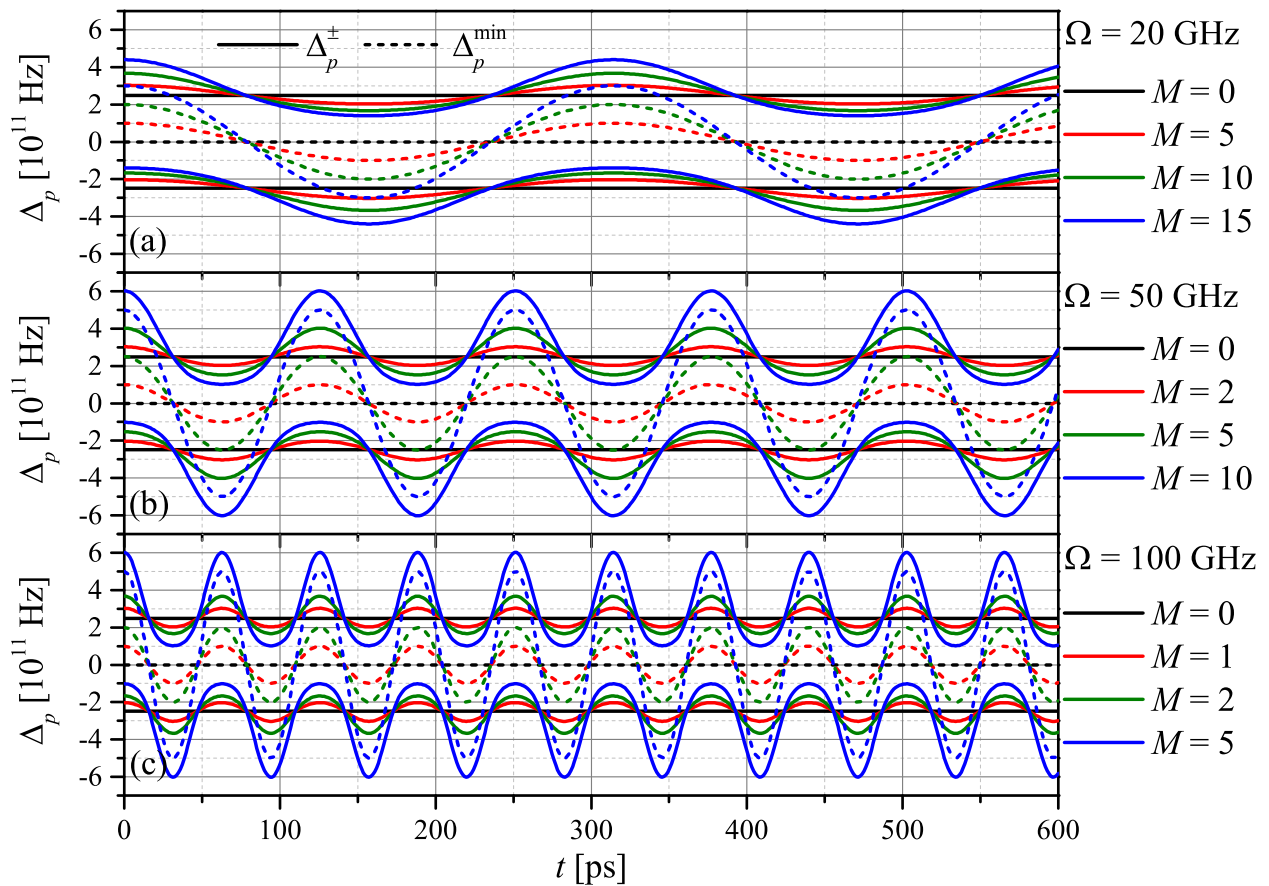
U cilju objašnjenja efekta koji modulacija kontrolnog polja ima na sondirajući laser, podsetimo se zaključaka dobijenih u poglavlju 6.5. Tamo smo dobili da modulacija izaziva oscilovanje apsorpcione krive, odnosno prozora transparentnosti, sa frekvencijom Ω i amplitudom $M\Omega$. Takođe, pokazali smo da je optičke karakteristike sredine moguće dobiti na analogan način kao u odsustvu modulacije, ukoliko se kontrolna razdešenost zameni vremenski zavisnom kontrolnom razdešenošću $\delta_c(t)$, definisanom izrazom (6.328). U tom slučaju, vrednosti sondirajuće razdešenosti za koje nastupa maksimum apsorpcije (pozicije apsorpcionih pikova) mogu se dobiti pomoću izraza (6.119), odakle dobijamo:

$$\Delta_p^\pm \equiv \Delta_p^\pm(t) = \mp \Omega_c \sqrt{1 + \frac{\delta_c^2(t)}{4\Omega_c^2}} - \frac{1}{2} \delta_c(t), \quad (11.3)$$

i vidimo da pozicije pikova sada zavise od vremena. Sa druge strane, kako znamo da je minimum apsorpcije određen uslovom (6.329), to će sondirajuća razdešenost pri kojoj dolazi do minimalne apsorpcije biti data izrazom

$$\Delta_p^{\min} \equiv \Delta_p^{\min}(t) = -\delta_c(t), \quad (11.4)$$

što je ponovo vremenski zavisna veličina. Funkcije $\Delta_p^+(t)$, $\Delta_p^-(t)$ i $\Delta_p^{\min}(t)$ prikazane su na slici 11.2 za nekoliko različitih vrednosti Ω i M , uključujući i slučaj kada modulacija odsustvuje ($M = 0$).



Slika 11.2: Vremenska zavisnost položaja maksimuma i minimuma apsorpcione krive u odnosu na sondirajuće polje za različite vrednosti modulacionog indeksa M , kao i (a) $\Omega = 20\text{GHz}$, (b) $\Omega = 50\text{GHz}$ i (c) $\Omega = 100\text{GHz}$. Punim linijama prikazani su položaji levog (Δ_p^+ , donja) i desnog maksimuma (Δ_p^- , gornja linija), a isprekidanim položaji minimuma apsorpcije. Vrednosti preostalih parametara su $E_{c0}/E_{p0} = 50$, $\gamma_{ij} = 10\gamma_0$ i $\Delta_c = 0$.

Posmatrajući sliku 11.2 (a), vidimo da čitava apsorpciona kriva osciluje sa vremenom – frekvencija oscilovanja zavisi isključivo od Ω , a amplituda i od Ω i od M . Pored toga, primećujemo da položaji maksimuma i minimuma apsorpcije ne osciluju na isti način, što se jasno vidi iz izraza (11.3) i (11.4). U prvom izrazu, zbog postojanja prvog člana sa desne strane znaka jednakosti, oscilovanje nije čisto sinusoidalno, pa se, prilikom oscilovanja, položaj minimuma apsorpcije periodično približava po jednom od apsorpcionih pikova u svakom poluperiodu. Ovo približavanje je najuočljivije za $M = 15$, i smanjuje se sa smanjenjem vrednosti modulacionog indeksa. Ovakvo, „granično” ponašanje je očekivano, s obzirom na to da smo još u odeljku 6.2.1 pokazali da se izraz (6.119) može svesti na (6.120) uz pretpostavku $\Delta_p \ll \Omega_c$. Ovaj uslov, modifikovan u cilju primene na slučaj sa modulacijom, daje $M\Omega \ll \Omega_c$, nakon čega se prvi član sa desne strane u (11.3) može zanemariti, pa će oscilovanje položaja pikova „pratiti” oscilovanje minimuma prozora transparentnosti. Ukoliko se podsetimo da je ovde $\Omega_c = 247.66\text{GHz}$, vidimo da će gornji uslov biti zadovoljen (i to vrlo grubo) jedino za $M = 5$. Na kraju, na slici je prikazan i slučaj kada je $M = 0$ (crne linije), koji naravno daje očekivano ponašanje apsorpcione krive, koja u odsustvu modulacije ne zavisi od vremena. Slični zaključci mogu se dobiti i posmatranjem slike 11.2 (b) i (c), gde je jasno da veća vrednost modulacione frekvencije dovodi do bržih oscilacija apsorpcione krive.

Objašnjenju ponašanja sa slike 11.1 je sada moguće pristupiti na sledeći način. Kao što smo rekli,

kontinualni sondirajući laser se karakteriše jedinstvenom vrednošću frekvencije, koju smo odabrali tako da rezonantno pobuđuje prelaz $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$. Dakle, imamo da je $\Delta_p = 0$, i u odsustvu modulacije sondirajući laser (u prostoru frekvencija) „leži” na dnu prozora transparentnosti ($\Delta_p = \Delta_p^{\min}$), u tački $\Delta_p^{\min} = \text{const}$, trpeći minimalnu, ali konačnu apsorpciju, koja je posledica činjenice da dno prozora transparentnosti ima vrednost različitu od nule. Ukoliko je modulacija kontrolnog polja prisutna, onda će vrednost Δ_p^{\min} oscilovati sa vremenom, i poklapaće se sa $\Delta_p = 0$ samo kada je zadovoljen izraz

$$0 = M\Omega \cos(\Omega t), \quad (11.5)$$

koji se dobija kada se u (11.4) zameni (6.328), kao i $\Delta_p = \Delta_c = 0$. Rešenje ove jednačine daće nam trenutke t_n u kojima je transparentnost sondirajućeg polja maksimalna:

$$t_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\Omega}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (11.6)$$

između kojih nastupa veća apsorpcija sondirajućeg lasera. Razlika između trenutaka u kojima dolazi do pojave dva susedna maksimuma (intenziteta izlaznog signala) će onda biti

$$t_{n+1} - t_n = \frac{\pi}{\Omega}, \quad (11.7)$$

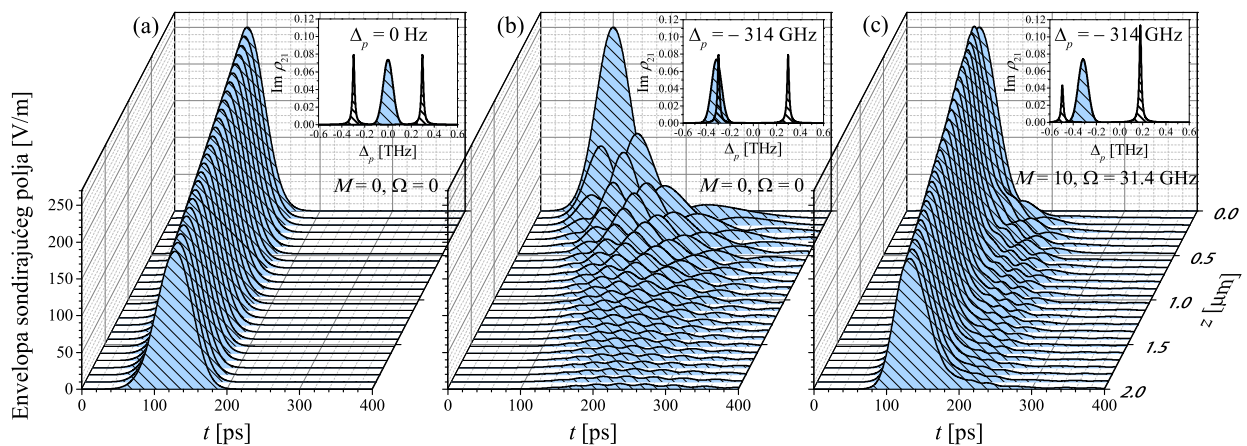
i jednaka je polovini perioda oscilovanja apsorpcione krive, odnosno faze, $T = 2\pi/\Omega$. Ukoliko u gornji izraz zamenimo $\Omega = 20 \text{ GHz}$, 50 GHz i 100 GHz , dobićemo $t_{n+1} - t_n = 157.08 \text{ ps}$, 62.83 ps i 31.46 ps , respektivno, što se jako dobro slaže sa rezultatima dobijenim prilikom analize slike 11.1. Uticaj modulacionog indeksa na izlazni signal ogleđa se u tome da, za fiksno Ω , amplitudu funkcije $\Delta_p^{\min}(t)$ određuje vrednost M . Sa porastom M , pozicija minimuma apsorpcije se, u amplitudnim položajima, sve više „udaljava” od položaja $\Delta_p = 0$ koji odgovara sondirajućem laseru. To znači da se, u trenucima kada nastupa maksimalna apsorpcija, sondirajući laser više apsorbuje u sredini ako je M veće. Ovo ponašanje je u potpunosti u skladu sa onim koje smo prikazali na slici 11.1. Pored toga, ukoliko je $M\Omega \ll \Omega_c$, čitava apsorpciona kriva osciluje kao celina, na isti način, pa će ova pravilnost dovesti i do pravilnosti u oscilacijama izlaznog signala na slici 11.1, koje će sve više podsećati na sinusoidu.

11.2 Uticaj modulacije kontrolnog polja na pulsni sondirajući laser

U prethodnom poglavlju, proučavali smo prostiranje kontinualnog sondirajućeg lasera kroz sredinu sačinjenu od SKT, u prisustvu fazno modulisanog kontrolnog polja, gde laseri i sredina čine zatvoren sistem sa tri nivoa, i gde je $B = 0B_0^*$. Na ovom mestu, koncentrisaćemo se na sondirajući laser koji je dat u formi pulsa, na isti način kako je to urađeno u poglavlju 9.1. Dakle, ponovo ćemo rešavati MB jednačine uz početni uslov (6.158), dok će Rabijeva frekvencija kontrolnog polja biti data izrazom (11.2) u svakoj tački prostora. Takođe, biće korišćene vrednosti parametara iz tabele 9.1, pri čemu će kontrolna razdešenost biti $\Delta_c = 0$, dok ćemo dozvoliti da se sondirajuća razdešenost menja. Preostale vrednosti parametara su $E_{c0}/E_{p0} = 60$, $w = 30 \text{ GHz}$ i $\gamma_{ij} = 10\gamma_0$.

Na slici 11.3 (a), prikazana je prostorno-vremenska zavisnost envelope sondirajućeg pulsa u odsustvu modulacije, i to kada je $\Delta_p = 0$. Vidimo da puls prolazi kroz sredinu sa приметnim gubicima

usled konačne visine dna prozora transparentnosti, ali i sa veoma dobro očuvanim profilom, bliskim Gausovom. Detaljna analiza prostiranja pulsa u ovoj situaciji prezentovana je u poglavlju 9.1. Podsetimo se da smo objašnjenje pojave spore svetlosti u SKT i prapatnih efekata tada tražili u analizi apsorpcione i disperzione krive. Zbog toga je ovde, na umetnutom grafiku na slici 11.3 (a), prikazana apsorpciona kriva za razmatrani slučaj (crna linija sa šrafiranom površinom ispod nje), kao i spektralni profil ulaznog sondirajućeg pulsa (crna linija sa svetloplavo obojenom šrafiranom površinom ispod krive). Apsorpciona kriva dobijena je numeričkim rešavanjem OB jednačina za sistem sa tri nivoa, u kojima je izvršena smena $\Delta_c \rightarrow \delta_c(t)$. U prikazanoj situaciji ($M = 0$, $\Omega = 0$), centralna frekvencija sondirajućeg pulsa se nalazi na dnu prozora transparentnosti, zbog čega je apsorpcija pulsa minimalna, a puls je dovoljno spektralno uzak da nema pojave efekata višeg reda po frekvenciji.



Slika 11.3: Prostorna i vremenska zavisnost envelope električnog polja sondirajućeg pulsa pri prostiranju kroz sredinu, za $E_c/E_{p0} = 60$, $w = 30$ GHz i $\Delta_c = 0$, kao i za (a) $\Delta_p = 0$ i (b) $\Delta_p = -314$ GHz u odsustvu modulacije, odnosno (c) $\Delta_p = -314$ GHz u slučaju modulacije sa parametrima $M = 10$ i $\Omega = 31.4$ GHz. Na umetnutim graficima prikazane su odgovarajuće apsorpcione krive (crne pune linije sa šrafiranom površinom ispod krive), kao i spektralni profili ulaznog pulsa (crne pune linije sa svetloplavom šrafiranom površinom ispod njih) u proizvoljnim jedinicama.

Ukoliko, pak, pri proučavanju koristimo nerezonantni sondirajući laser, doći će do pomeranja pulsa iz dna prozora transparentnosti, a samim tim i do potencijalno značajnih promena u apsorpciji pulsa. Konkretno, uzmimo sondirajući puls čija je razdešenost $\Delta_p = -314$ GHz, pri čemu su svi ostali parametri isti kao u prethodnom slučaju. Na slici 11.3 (b) vidimo zavisnost envelope sondirajućeg polja od z i t , i zaključujemo da se puls praktično u potpunosti apsorbovao u sredini. Objasnjenje ovog fenomena može se dati nakon posmatranja apsorpcione krive na umetnutom grafiku, gde vidimo da se položaj pulsa u prostoru frekvencija poklapa sa položajem levog apsorpcionog pika. Izraženo preko brojnih vrednosti, imamo da je $\Delta_p \approx -\Omega_c$ (u našem slučaju, $\Omega_c = 297.19$ GHz), a kako je položaj maksimuma apsorpcije grubo određen vrednošću Ω_c (tačnije, $-\Omega_c$ za levi pik), sledi da je apsorpcija pulsa vrlo velika. Naravno, ovde su efekti višeg reda po ω dominantni, ali o njima nema smisla govoriti budući da je intenzitet pulsa na izlazu iz sredine praktično zanemarljiv.

Apsorpcija iz prethodnog slučaja se može smanjiti ukoliko se upotrebi kontrolni laser sa faznom modulacijom. Kao što smo već napomenuli, fazna modulacija kontrolnog polja dovodi do oscilovanja prozora transparentnosti sa vremenom, pa je apsorpcionu krivu moguće pomeriti tako da se, u trenutku ulaska pulsa u sredinu, položaj spektralnog profila pulsa poklopi sa položajem Δ_p^{\min} .

Ovakva situacija prikazana je na slici 11.3 (c). Pri dobijanju ovog grafika, korišćeno je fazno modulirano kontrolno polje sa parametrima $M = 10$ i $\Omega = 31.4\text{GHz}$, sondirajuće polje razdešenosti $\Delta_p = -314\text{GHz}$, dok su preostale vrednosti parametara iste kao do sada. Primetimo da su ove vrednosti namerno izabrane tako da je $|\Delta_p| = M\Omega$. Očigledno da je apsorpcija pulsa drastično smanjena – obezbeđen je prolaz pulsa kroz sredinu skoro kao u situaciji prikazanoj na slici 11.3 (a), sa praktično istom vrednošću grupe brzine pulsa. Jedina primetna razlika ogleda se u profilu izlaznog pulsa, koji sada nešto više odstupa od Gausovog. Ovaj profil se karakteriše vidljivom asimetrijom koja, na nekim mestima unutar same sredine ($z < D$), podseća na „rep” pulsa, koji se javljao u prethodnim glavama i već je detaljno analiziran.

Da bismo objasnili „obnavljanje” pulsa u slučaju modulacije, osvrnimo se na apsorpcionu krivu sa umetnutog grafika na slici 11.3 (c), koja je dobijena na ranije objašnjen način, i prikazana u trenutku $t = t_0 = 100\text{ps}$, kada centralni deo pulsa ulazi u sredinu. Sa grafika je očigledno da je puls ponovo smešten unutar prozora transparentnosti, a videćemo da upravo ovaj položaj odgovara vrednosti Δ_p^{\min} . Kako bismo ovo pokazali, ispitajmo najpre u kojim trenucima će se puls uopšte naći u minimumu apsorpcije. Krenimo, ponovo, od izraza (11.4), u koji zamenjujemo (6.328), $\Delta_c = 0$ i $\Delta_p^{\min} = \Delta_p$. Rezultat je:

$$\Delta_p = M\Omega \cos(\Omega t), \quad (11.8)$$

što nam, uz činjenicu da je $\Delta_p = -M\Omega$, daje $\cos(\Omega t) = -1$, a za trenutke vremena u kojima se puls nalazi u minimumu apsorpcije:

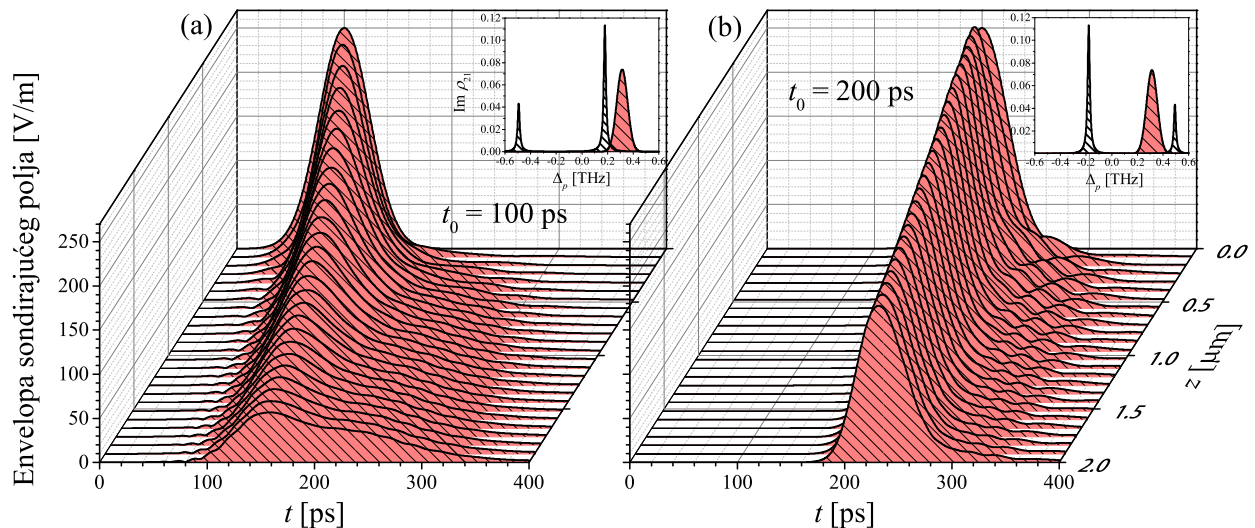
$$t_n = (2n+1) \frac{\pi}{\Omega}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (11.9)$$

dok se, zamenom konkretne vrednosti za modulacionu frekvenciju, dobija:

$$t_n \approx 100\text{ps}, 300\text{ps}, 500\text{ps}, \dots \quad (11.10)$$

Drugim rečima, sondirajući puls, čiji je maksimum u sredinu ušao u nekom od gorenavedenih trenutaka, tada prolazi kroz nju sa najmanjom mogućom apsorpcijom, jer mu se položaj u prostoru frekvencija poklapa sa položajem minimuma apsorpcije. Kako je, u našem slučaju, puls ušao u sredinu u trenutku $t_0 = 100\text{ps}$, to upravo znači da smo ovakvim, pogodnim izborom parametara modulacije, obezbedili maksimalnu transparentnost i najveću moguću sličnost izlaznog pulsa sa onim dobijenim u rezonantnom slučaju u odsustvu modulacije. Pomenimo, na kraju, još i to da je asimetrija apsorpcione krive sa umetnutog grafika posledica činjenice da je $\delta_c(t_0) \neq 0$, a pritom visine pikova takođe osciluju sa vremenom. Ova vremenska zavisnost se može ispitati korišćenjem izraza (6.117) u koje se umesto Δ_c zameni $\delta_c(t)$, ali se na tome ovde nismo zadržavali. Napomenimo samo da je asimetrija apsorpcione krive i blizina Δ_p^{\min} jednom od pikova razlog zbog koga izlazni puls ne zadržava „gausovski” karakter, već ima „rep” kao posledicu efekata trećeg, ali i viših redova.

U prethodnom slučaju, razmatrali smo uticaj modulacije na sistem svetlost–materija sa negativnom sondirajućom razdešenošću. Ispitajmo sada kako će se situacija promeniti ukoliko se za ovu veličinu uzme ista vrednost po modulu, ali ovoga puta suprotnog znaka. Prostorna i vremenska zavisnost sondirajućeg pulsa čija je razdešenost $\Delta_p = 314\text{GHz}$ prikazana je na slici 11.4 (a), za slučaj modulacije sa parametrima $M = 10$ i $\Omega = 31.4\text{GHz}$, gde su preostali parametri nepromenjeni. Vidi-mo da se sada sondirajući puls znatno više apsorbuje nego što je to slučaj na slici 11.3 (c), a takođe trpi i velike modifikacije vremenskog profila. Apsorpciona kriva na umetnutom grafiku, prikazana u trenutku $t = t_0 = 100\text{ps}$, daje nam objašnjenje ovog efekta – sondirajući puls je sada izmešten iz dna prozora transparentnosti. Štaviše, puls se kompletno nalazi van ovog prozora, i to bliže desnom



Slika 11.4: Prostorna i vremenska zavisnost envelope električnog polja sondirajućeg pulsa pri prostiranju kroz sredinu, za $E_c/E_{p0} = 60$, $w = 30$ GHz, $\Delta_p = 314$ GHz i $\Delta_c = 0$, u slučaju fazne modulacije kontrolnog polja sa parametrima $M = 10$ i $\Omega = 31.4$ GHz, ukoliko maksimum sondirajućeg pulsa ulazi u sredinu u trenutku (a) $t_0 = 100$ ps, odnosno (b) $t_0 = 200$ ps. Na umetnutim graficima prikazane su odgovarajuće apsorpcione krive (crne pune linije sa šrafiranom površi ispod krive), kao i spektralni profili ulaznog pulsa (crne pune linije sa svetlocrvenom šrafiranom površinom ispod njih) u proizvoljnim jedinicama.

piku veće visine, zbog čega je i apsorpcija povećana. Da bismo transparentnost vratili na nivo koji je odgovarao prethodnom slučaju, potrebno je da puls propustimo kroz sredinu u nekom drugom vremenskom trenutku. Ovaj trenutak ćemo naći ukoliko u izraz (11.8) zamenimo $\Delta_p = M\Omega$, što nam daje $\cos(\Omega t) = 1$. Rešenje ove jednačine je:

$$t_n = n \frac{2\pi}{\Omega}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (11.11)$$

odakle, zamenom konkretnih vrednosti za Ω , imamo

$$t_n \approx 0 \text{ ps}, 200 \text{ ps}, 400 \text{ ps}, 600 \text{ ps}, \dots, \quad (11.12)$$

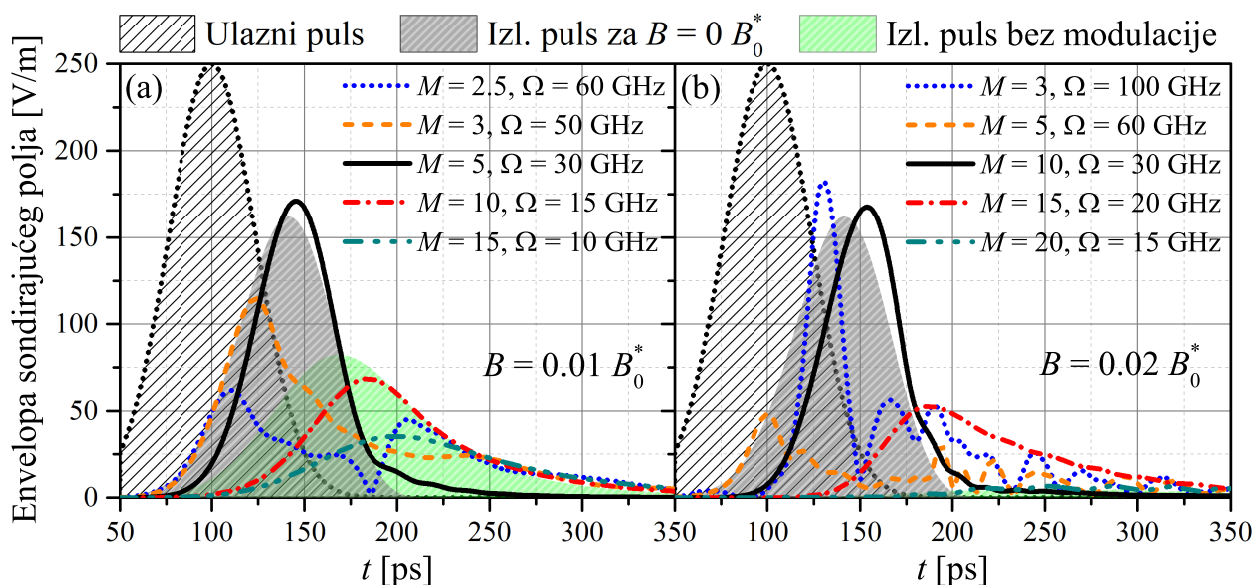
što daje vremenske trenutke u kojima će se ulazni puls, ukoliko tada uđe u sredinu, naći u minimumu prozora transparentnosti. Slika 11.4 (b) prikazuje sondirajući puls u tački sa koordinatom z i u trenutku t , u slučaju kada je za trenutak pojave maksimuma ulaznog pulsa odabrana vrednost $t_0 = 200$ ps, dok su preostale vrednosti iste kao kod grafika na slici (a). Vidimo da se ponovo obezbeđuje velika transparentnost sredine, kao u slučaju na slici 11.3 (c), što potpuno odgovara teorijskim predviđanjima. Posmatranjem umetnutog grafika, vidimo da se sada apsorpciona kriva pomerila (maksimum i minimum apsorpcije nalaze se u amplitudnom položaju, ali ovoga puta sa suprotne strane), tako da prozor transparentnosti ponovo „obuhvata” ulazni puls. Možemo primetiti da se oblik krive (do na početni trenutak) u svim tačkama na ovom grafiku poklapa sa krivom na slici 11.3 (c), što postaje jasno posmatranjem odgovarajućih umetnutih grafika – ovi grafici su, zapravo, međusobno simetrični u odnosu na ordinatu. Vidimo da je, pogodnim odabirom kako parametara M i Ω , tako i trenutka ulaska pulsa u sredinu t_0 , moguće uticati na propagaciju sondirajućeg pulsa kroz sredinu čija se optička svojstva mogu menjati u toku vremena. Uočeno ponašanje može biti od velikog značaja sa stanovišta primene u optičkim telekomunikacijama, pri čemu bi fazna modu-

lacija kontrolnog polja mogla zauzeti centralno mesto prilikom izrade optičkih prekidača na bazi poluprovodničkih SKT.

11.3 Uticaj modulacije na sondirajući puls u spoljašnjem magnetnom polju

Dosadašnja razmatranja uticaja magnetnog polja na prostiranje pulsa nedvosmisleno su pokazala da u magnetnom polju dolazi do pojačanih gubitaka i deformacije profila sondirajućeg pulsa. Ovo ponašanje je posledica činjenice da energijski nivoi, trpeći Zemanov pomak, nisu više u rezonanciji sa odgovarajućim prelazima, čime se narušava uslov (6.39) za minimum apsorpcije. U prethodnom poglavlju smo videli da je, korišćenjem fazno modulisanog kontrolnog polja, moguće modifikovati pomenuti uslov, tako da se obezbedi njegovo važenje čak i u slučaju nerezonantnih lasera. Bez obzira na to što ovde odsustvo rezonancije nije obezbeđeno podešavanjem frekvencije lasera (kao u poglavlju 11.2), već pomeranjem nivoa u magnetnom polju, efekat modulacije kontrolnog polja će u oba slučaja biti isti – u pogodno odabranim trenucima vremena, oscilujuću apsorpcionu krivu je moguće dovesti u takav položaj da centralna frekvencija sondirajućeg pulsa leži u minimumu prozora transparentnosti, čime se smanjuju gubici i puls „obnavlja”.

U cilju dobijanja vremenskog profila pulsa na izlazu iz sredine, ponovo smo numerički rešavali MB jednačine za sistem sa tri nivoa sa početnim uslovom (6.158), kao i kontrolnom Rabijevom frekvencijom čija je vremenska zavisnost zadata preko (11.2). Koristili smo parametre za SKT date u tabeli 8.1, kao i za karakteristike lasera iz table 9.1. Preostale korišćene vrednosti su $E_{c0}/E_{p0} = 50$, $w = 30\text{ GHz}$, $\gamma_{ij} = 10\gamma_0 = 10\text{ GHz}$, dok će razdešenosti Δ_p i Δ_c sada zavisiti od jačine magnetnog polja.



Slika 11.5: Vremenska zavisnost envelope električnog polja sondirajućeg pulsa na izlazu iz sredine za različite vrednosti modulacionog indeksa M i frekvencije Ω , za (a) $B = 0.01 B_0^*$ i (b) $B = 0.02 B_0^*$. Ulazni puls prikazan je crnom tačkastom linijom sa šrafiranom površi ispod nje, izlazni puls u odsustvu modulacije za $B = 0 B_0^*$ sivom, a u odsustvu modulacije za $B \neq 0 B_0^*$ svetlozelenom osenčenom površinom. Preostali parametri su $E_{c0}/E_{p0} = 50$, $w = 30\text{ GHz}$ i $\gamma_{ij} = 10\gamma_0$.

Zavisnost envelope sondirajućeg polja od vremena za ulazni puls (crna tačkasta linija sa šrafi-ranom površinom ispod nje), kao i za izlazni puls za različite vrednosti jačine magnetnog polja i modulacionih parametara, prikazana je na slici 11.5. Na slici se nalazi i profil izlaznog pulsa u odsustvu modulacije i magnetnog polja (siva osenčena površina), odnosno za slučaj $B \neq 0 B_0^*$, ponovo u odsustvu modulacije (svetlozelena osenčena površina). Modulacioni parametri su birani tako da je zadovoljen uslov $M\Omega \approx |\Delta_1|$, kako bi efekat modulacije na smanjenje apsorpcije bio najveći mogući.¹ Pri tome, matematički izrazi kojima se on opisuje dodatno se pojednostavljaju. Konkretno, za slučaj $B = 0.01 B_0^*$, prikazan na slici 11.5 (a), dvofotonska razdešenost iznosi $\Delta_1 = -1.62 \cdot 10^{11}$ Hz, dok za $B = 0.02 B_0^*$, što je ilustrovano na slici 11.5 (b), imamo $\Delta_1 = -3.17 \cdot 10^{11}$ Hz. Posmatranjem oba grafika, vidimo da samo po jedna kombinacija M i Ω na svakom od njih obezbeđuje skoro potpuno poklapanje profila izlaznog pulsa sa onim u odsustvu magnetnog polja i modulacije, i obe su prikazane punom crnom linijom. Preostale kombinacije donekle uspeavaju da „prate” željeni profil sondirajućeg pulsa (kombinacije sa manjim M i većim Ω uspeavaju da „obnove” raniji deo profila pulsa, ali u kasnijim trenucima dolazi do velike apsorpcije, dok u slučaju velikog M i malog Ω imamo mnogo bolje slaganje sa situacijom bez modulacije). Razlog za ovo odstupanje je taj što se, u svim pomenutim slučajevima, vreme ulaska pulsa u sredinu t_0 ne poklapa sa trenutkom u kome se puls nalazi na dnu prozora transparentnosti. Procena vrednosti t_n u kojima se ovo dešava se može sprovesti na sličan način kao u prethodnom poglavlju – na osnovu izraza (11.4) i (6.328), uslov za minimum apsorpcije postaje:

$$\Delta_p + \Delta_c = M\Omega \cos(\Omega t). \quad (11.13)$$

Ukoliko iskoristimo $M\Omega \approx |\Delta_1| = |\Delta_p + \Delta_c|$, ponovo ćemo dobiti uslov $\cos(\Omega t) = -1$, što će nam dati $t_n = \pi/\Omega, 3\pi/\Omega, 5\pi/\Omega, \dots$. Jedino u slučaju $\Omega = 30$ GHz, brojne vrednosti

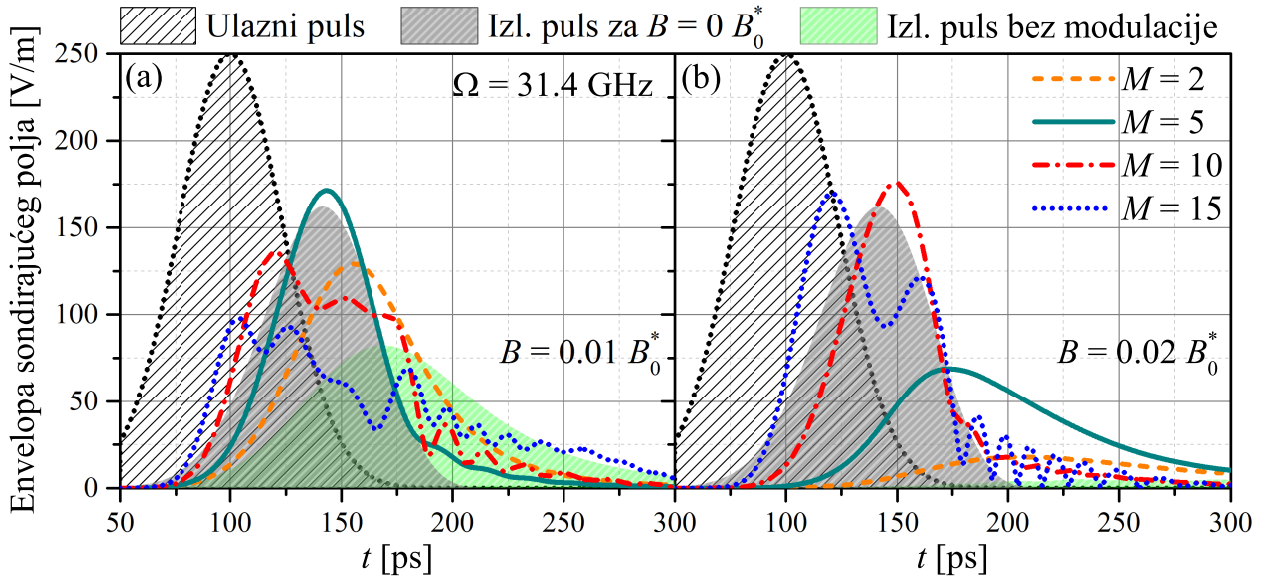
$$t_n \approx 104.72 \text{ ps}, 314.16 \text{ ps}, 523.60 \text{ ps}, \dots, \quad (11.14)$$

će biti takve da se jedna od njih skoro poklapa sa vrednošću $t_0 = 100$ ps koju smo ovde koristili. Dakle, u trenutku kada puls ulazi u sredinu, on se skoro nalazi na dnu prozora transparentnosti, i samim tim trpi najmanju apsorpciju u poređenju sa svim ostalim slučajevima. Vidimo da je, za postizanje efikasnog efekta „obnavljanja” pulsa primenom modulisanog kontrolnog polja, potrebno podesiti *oba* modulaciona parametra na odgovarajući način.

U skladu sa upravo dobijenim zaključcima, fiksirajmo vrednost modulacione frekvencije tako da se puls nađe na dnu prozora transparentnosti upravo u trenutku t_0 . Rezultati prethodnog poglavlja nam sugerišu da je u tom cilju potrebno staviti $\Omega = 31.4$ GHz.² Na slici 11.6 prikazan je ovaj slučaj, i to za nekoliko različitih vrednosti modulacionog indeksa, kao i za dve vrednosti B . Na oba grafika je, na isti način kao na prethodnoj slici, predstavljen ulazni puls, kao i izlazni puls u odsustvu modulacije, kako u odsustvu, tako i u prisustvu spoljašnjeg magnetnog polja. Može se primetiti da, iako je Ω sada pogodno izabrana veličina, vrednost M takođe igra veliku ulogu u profilisanju izlaznog pulsa. Za male vrednosti modulacionog indeksa, sistem se ponaša vrlo slično sistemu bez modulacije ($M = 0$), i za $M \rightarrow 0$ profil izlaznog sondirajućeg pulsa teži profilu u slučaju kada je kontrolni laser čisto kontinualan. Nasuprot tome, za velike vrednosti M , izlazni puls donekle prati profil pulsa za $B = 0 B_0^*$ i $M = 0$, ali se njegov centralni deo primetno apsorbuje u sredini, čime

¹ Preciznije, polazeći od jednačine (6.330), vidimo da se frekvencija pulsa za $M\Omega < |\Delta_1|$ neće poklopiti sa minimumom apsorpcije ni u jednom trenutku vremena. Sa druge strane, ukoliko je $M\Omega > |\Delta_1|$, ovakvo poklapanje će postojati, ali će se puls najduže „zadržati” u okolini ovog minimuma upravo za $M\Omega \approx |\Delta_1|$.

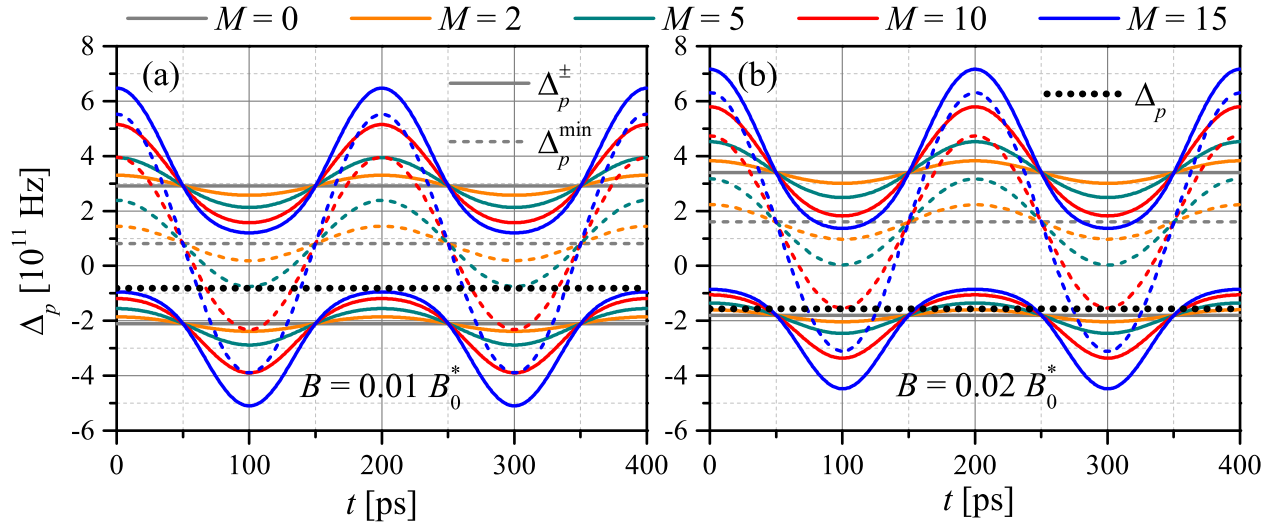
² Ako bismo bili sasvim precizni i strogo formalni, ukoliko želimo da ispunimo pomenuti uslov, ova vrednost bi trebalo da bude $\Omega = 10\pi$ GHz. Ipak, zaokrugljivanje broja π na dve decimale, kako je ovde učinjeno, neće uneti nikakvu razliku po pitanju dobijenih rezultata u ovoj Glavi.



Slika 11.6: Vremenska zavisnost envelope električnog polja sondirajućeg pulsa na izlazu iz sredine za $\Omega = 31.4 \text{ GHz}$ i različite vrednosti modulacionog indeksa M , u slučaju kada je (a) $B = 0.01 B_0^*$, odnosno (b) $B = 0.02 B_0^*$. Ulazni puls prikazan je crnom tačkastom linijom sa šrafiranom površi ispod nje, izlazni puls u odsustvu modulacije za $B = 0 B_0^*$ sivom, a u odsustvu modulacije za $B \neq 0 B_0^*$ svetlozelenom osenčenom površinom. Preostali parametri su $E_{c0}/E_{p0} = 50$, $w = 30 \text{ GHz}$ i $\gamma_{ij} = 10\gamma_0$.

se „gausovski” karakter ulaznog pulsa drastično narušava. U slučaju kada je $B = 0.01 B_0^*$ (slika 11.6 (a)), maksimalna sličnost izlaznog pulsa profilu pulsa u odsustvu magnetnog polja postiže se za kombinaciju $M = 5$ i $\Omega = 31.4 \text{ GHz}$ (zelena puna linija), dok se za $B = 0.02 B_0^*$ (slika 11.6 (b)) ovo dešava za $M = 10$ i $\Omega = 31.4 \text{ GHz}$ (crvena crta-tačka linija). Vidimo da je, u oba slučaja, $M\Omega \approx |\Delta_1|$, što očigledno predstavlja veoma bitan uslov da se puls nađe u minimumu apsorpcije. U oba prikazana slučaja, ovi pulsevi jako podsećaju na puls za $B = 0 B_0^*$, pri čemu im maksimum nastupa nešto kasnije i ima veću vrednost, dok se, nakon toga, puls „produžuje” (preciznije, traje duže), gubeći karakter Gausovog pulsa.

Prethodno dobijeni rezultati mogu biti jasniji ukoliko ponovo prikažemo kako se sa vremenom menjaju pozicije dva apsorpciona maksimuma Δ_p^\pm , kao i apsorpcionog minimuma Δ_p^{\min} . Ove zavisnosti prikazane su na slici 11.7, i to za dve različite vrednosti jačine magnetnog polja, pri čemu su parametri isti kao u celom poglavlju. Pozicije maksimuma prikazane su punim, a minimuma isprekidanim linijama. Na graficima je takođe prikazana i vrednost sondirajuće razdešenosti, i to crnom tačkastom linijom. Na slici 11.7 (a) vidimo da se frekvencija pulsa praktično sve vreme nalazi unutar prozora transparentnosti. Ova vrednost za $B = 0.01 B_0^*$ iznosi $\Delta_p = -8.09 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$ (tabela 10.3). U trenutku $t = t_0 = 100 \text{ ps}$, kada puls ulazi u sredinu, on se nalazi u minimumu prozora transparentnosti samo kada je $M = 5$ (poklapanje sa zelenom isprekidanom linijom), što kao rezultat na slici 11.6 (a) daje „obnovljen” izlazni puls. Ukoliko, na primer, uporedimo slučajeve za $M = 10$ (crvena) i $M = 15$ (plava isprekidana linija), vidimo da je u trenutku t_0 puls bliži minimumu apsorpcije u prvom od ova dva slučaja. Poređenjem profila izlaznog pulsa za pomenute vrednosti modulacionog indeksa na slici 11.6 (a), vidimo da je upravo ovo razlog zašto je puls za $M = 15$ više apsorbovan nego kada je $M = 10$. U toku prostiranja pulsa kroz sredinu, dolazi i do pomeranja prozora transparentnosti, tako da se puls više ne nalazi u njegovom dnu, što objašnjava asimetriju izlaznog pulsa čak i u slučaju kada je $M = 5$. Ipak, puls napušta sredinu dovoljno rano da ne pretrpi preveliku



Slika 11.7: Vremenska zavisnost položaja maksimuma i minimuma apsorpcione krive u odnosu na sondirajuće polje za $\Omega = 31.4$ GHz i različite vrednosti modulacionog indeksa M , u slučaju kada je (a) $B = 0.01 B_0^*$, odnosno (b) $B = 0.02 B_0^*$. Punim linijama prikazani su položaji levog (Δ_p^+ , donja) i desnog maksimuma (Δ_p^- , gornja linija), a isprekidanim položaji minimuma apsorpcije. Prikazana je i vrednost razdešenosti sondirajućeg polja (crne tačkaste linije). Vrednosti preostalih parametara su $E_{c0}/E_{p0} = 50$ i $\gamma_{ij} = 10\gamma_0$.

apsorpciju, koja bi, na primer, nastupila u trenutku $t \approx 200$ ps, kada se centralna frekvencija pulsa poklapa ili je vrlo bliska poziciji levog apsorpcionog pika, Δ_p^+ . Formalno gledano, to znači da je, za efikasno „obnavljanje” izlaznog pulsa, potrebno da bude zadovoljen uslov

$$\Delta t \ll T, \quad (11.15)$$

gde je $\Delta t = \langle t \rangle - t_0$ vreme koje puls provede krećući se kroz materijalnu sredinu, dok T predstavlja period oscilovanja prozora transparentnosti. Za vrednosti parametara koje smo ovde odabrali, imaćemo

$$\Delta t = \frac{D}{v_g} = \frac{Dn_g}{c} \approx 10 \text{ ps}, \quad T = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 200 \text{ ps}, \quad (11.16)$$

odakle je jasno da je uslov (11.15) zadovoljen.

Situacija kada jačina spoljašnjeg magnetnog polja iznosi $B = 0.02 B_0^*$ predstavljena je na slici 11.7 (b). Razdešenost sondirajućeg polja tada ima vrednost $\Delta_p = -1.57 \cdot 10^{11}$ Hz, i vidimo da ona ne leži u svim trenucima unutar prozora transparentnosti. Međutim, u $t = t_0 = 100$ ps je ovo zadovoljeno kada je $M = 10$, što u potpunosti odgovara situaciji sa slike 11.6 (b). Preciznije, u ovoj situaciji se puls upravo nalazi u minimumu apsorpcije, što se vidi sa slike 11.7 (b) kao poklapanje crne tačkaste i crvene isprekidane linije. Za preostale vrednosti modulacionog indeksa vidimo da će na izlazu dati puls koji je približniji „originalnom” puls (za $B = 0 B_0^*$) što se noseća frekvencija sondirajućeg pulsa u trenutku $t = t_0$ nalazi bliže dnu prozora transparentnosti. Kao za $B = 0.01 B_0^*$, i ovde je zadovoljen uslov (11.15), jer su parametri koji određuju Δt i T ostali nepromenjeni (grupni indeks se vrlo malo menja u dva razmatrana slučaja). Na kraju, napomenimo još da, iako je ovde puls, pri prostiranju kroz sredinu, bliže pozicijama apsorpcionih pikova nego u slučaju slabijeg magnetnog polja, ova činjenica ne utiče na efikasnost izlaznog pulsa – vidimo da je profil izlaznog pulsa za $M = 5$ na slici 11.7 (a) skoro identičan profilu za $M = 10$ na slici 11.7 (b). Dakle, od prevashodnog

značaja za dobijanje što veće efikasnosti jeste odabir M i Ω tako da se puls u trenutku ulaska u sredinu nađe u minimumu prozora transparentnosti, i da na ovu efikasnost ne utiče sama vrednost magnetnog polja u kome se materijalna sredina nalazi.

11.3.1 Primena modulacije kontrolnog polja u magnetometriji

Simultana primena spoljašnjeg magnetnog polja i fazne modulacije kontrolnog lasera može imati mnoge interesantne posledice. Na ovom mestu ćemo predstaviti ideju za primenu poluprovodničkih SKT u izradi magnetometara, čiji se rad zasniva na efektima koje smo detaljno proučili u ovom poglavlju. Podesimo, najpre, sistem svetlost–materija tako da u odsustvu magnetnog polja oba lasera budu u rezonanciji sa odgovarajućim prelazima. Tada će sondirajući puls prolaziti kroz sredinu sa minimalnim gubicima (smanjenje koeficijentata raspada, npr. hlađenjem do izuzetno niskih temperatura, može dodatno smanjiti ove gubitke). Nakon toga, uključimo spoljašnje stacionarno magnetno polje, koje će izazvati modifikaciju profila izlaznog pulsa. U cilju dobijanja što boljeg rezultata, variranjem Ω_c je moguće dovesti puls na poziciju jednog od apsorpcionih pikova, i time obezbediti potpunu apsorpciju pulsa, kao što je to slučaj za $B = 0.02 B_0^*$ na slici 11.6 (b). Sledeći korak jeste uključivanje modulacije kontrolnog polja, pri čemu se modulacioni parametri biraju tako da je $M\Omega \sim \Omega_c$. Na ovaj način obezbeđuje se da oscilacije apsorpcione krive mogu biti takve da se ona dovoljno pomeri da položaj, koji je najpre odgovarao maksimumu apsorpcije, u nekom docnijem trenutku postane položaj apsorpcionog minimuma. Uslov za pojavu ovog minimuma biće dat jednačinom (11.13). Ukoliko, kao i u poglavlju 9.4, pretpostavimo da su magnetna polja dovoljno slaba da u razmatranom slučaju dominira linearni Zemanov efekat, moći ćemo da primenimo formulu (9.14), pa ćemo za gorepomenuti uslov imati

$$2\Delta = -\frac{1}{\hbar}BE_0^* = M\Omega \cos(\Omega t). \quad (11.17)$$

Sada je potrebno da variramo vremenske trenutke t_0 u kojima puls ulazi u sredinu (alternativno, možemo varirati Ω uz konstantno t_0 , vodeći računa da proizvod takođe $M\Omega$ bude konstantan). Na izlazu će se nekad dobiti slab (ili nepostojeći), a nekad jak signal. U trenucima t_m kada je intenzitet ovog signala maksimalan (i približno isti kao signal u odsustvu magnetnog polja i modulacije) važiće gornji uslov, jer će se jedino tada centralna frekvencija pulsa nalaziti u minimumu apsorpcije. Ovo znači da ćemo jačinu magnetnog polja dobiti pomoću izraza (11.17), i to na sledeći način:

$$B_{\text{exp}} = -\frac{\hbar M \Omega}{E_0^*} \cos(\Omega t_m) [\text{eff. a.u.}]. \quad (11.18)$$

Dakle, beleženjem trenutaka u kojima apsorpcija dostiže minimum a transparentnost maksimum, moguće je utvrditi jačinu spoljašnjeg magnetnog polja. Na posletku, napomenimo da se opisani metod može primeniti i na opštiji slučaj kada se kvadratni Zemanov efekat ne može zanemariti, ali da smo se ovde, radi ilustracije, opredelili za jednostavniji slučaj, u okviru koga su relevantni izrazi zapisani na elegantan način.

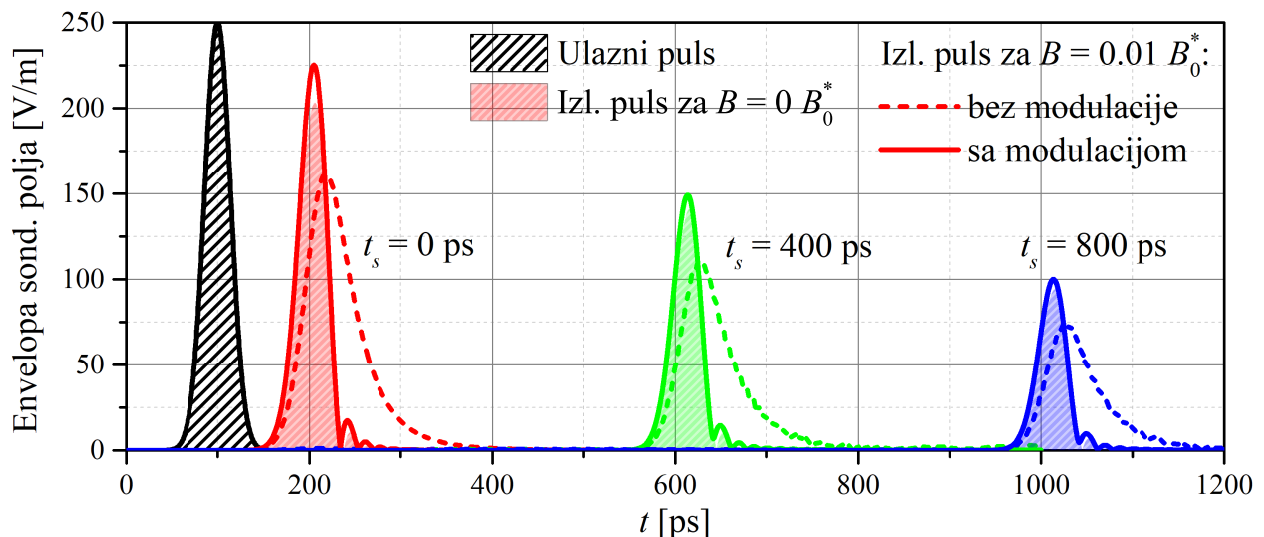
11.4 Uticaj modulacije kontrolnog polja na proces skladištenja

U dosadašnjem toku ove Glave, bavili smo se proučavanjem uticaja modulacije kontrolnog polja na sporu svetlost. U ovom poglavlju, koncentrisaćemo se na skladištenje svetlosti, i pokazati da

modulacija faze kontrolnog polja dovodi do analognih efekata kao u slučaju spore svetlosti. Prilikom dobijanja željenih rezultata, koristili smo parametre navedene u tabeli 10.1, koji se donekle razlikuju u odnosu na one korišćene u prethodnim poglavljima. Razmatraćemo sondirajući puls čiji je profil ponovo dat izrazom (6.158), dok ćemo za kontrolnu Rabijevu frekvenciju pretpostaviti sledeći oblik vremenske zavisnosti (isti u svakoj tački prostora):

$$\Omega_c(t) = \frac{\Omega_{c0}}{2} (1 - \operatorname{tgh}(\alpha_1(t - t_1)) + 1 + \operatorname{tgh}(\alpha_2(t - t_2))) e^{-i\varphi(t)}, \quad (11.19)$$

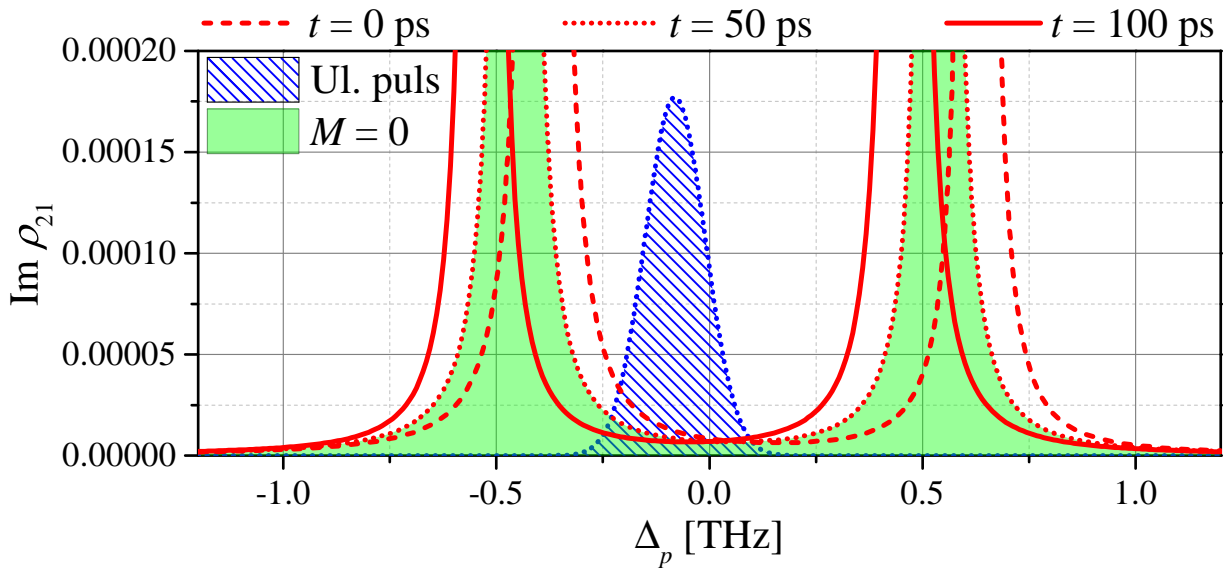
koji ne predstavlja ništa drugo do modifikovan izraz (6.281). Zavisnost faze od vremena data je relacijom (6.321), vreme skladištenja definišemo preko (6.282), a pritom smo uzeli da je $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. U daljem radu, korišćićemo kontrolno polje za čiju jačinu važi $E_{c0}/E_{p0} = 100$ (što nam daje $\Omega_{c0} = 495.32 \text{ GHz}$), sondirajući puls čija je spektralna poluširina $w = 50 \text{ GHz}$, kao i sredinu čiji su koeficijenti raspada međusobno jednaki i iznose $\gamma_{ij} = \gamma_0 = 1 \text{ GHz}$. Odredićemo vremenski profil izlaznog sondirajućeg pulsa za različita vremena skladištenja, kao i u slučaju sa i bez spoljašnjeg magnetnog polja. Odabraćemo magnetno polje jačine $B = 0.01 B_0^*$, za koje smo pokazali da dvofotonska razdešenost za SKT od interesa iznosi $\Delta_1 = -1.62 \cdot 10^{11} \text{ Hz}$. Ovo znači da ćemo za modulacione parametre odabrati iste vrednosti kao u poglavlju 11.3, konkretno $M = 5$ i $\Omega = 31.4 \text{ GHz}$. Na ovaj način, omogućićemo da efikasnost izlaznog pulsa bude maksimalna moguća.



Slika 11.8: Vremenska zavisnost envelope električnog polja sondirajućeg pulsa na izlazu iz sredine za različite vrednosti vremena skladištenja, u odsustvu modulacije za $B = 0 B_0^*$ (obojene šrafirane površi) i $B = 0.01 B_0^*$ (obojene isprekidane linije), kao i sa modulacijom sa parametrima $M = 5$ i $\Omega = 31.4 \text{ GHz}$ u magnetnom polju $B = 0.01 B_0^*$ (obojene pune linije). Ulazni puls prikazan je punom crnom linijom i šrafiranom površinom ispod nje. Pri dobijanju rezultata korišćeni su parametri $E_{c0}/E_{p0} = 100$, $w = 50 \text{ GHz}$, odnosno $\gamma_{ij} = \gamma_0 = 1 \text{ GHz}$.

Na slici 11.8 prikazan je vremenski profil izlaznog sondirajućeg pulsa u odsustvu skladištenja (crvene), kao i za skladištenje sa vremenom $t_s = 400 \text{ ps}$ (zelene) i $t_s = 800 \text{ ps}$ (plave linije). Takođe, obojenim šrafiranim površima prikazan je izlazni puls za $B = 0 B_0^*$ kada nema modulacije („originalni” puls), isprekidanim linijama slučaj bez modulacije za $B = 0.01 B_0^*$, a punim linijama sondirajući puls za $B = 0.01 B_0^*$, ukoliko je kontrolno polje modulirano sa gorenavedenim parametrima. Prva dva rezultata prikazana su i na slici 10.6 (a), i ovde su navedena radi poređenja sa trećim. Na prvi pogled, vidimo da modulacija dovodi do obnavljanja pulsa na sličan način kako je to objašnjeno

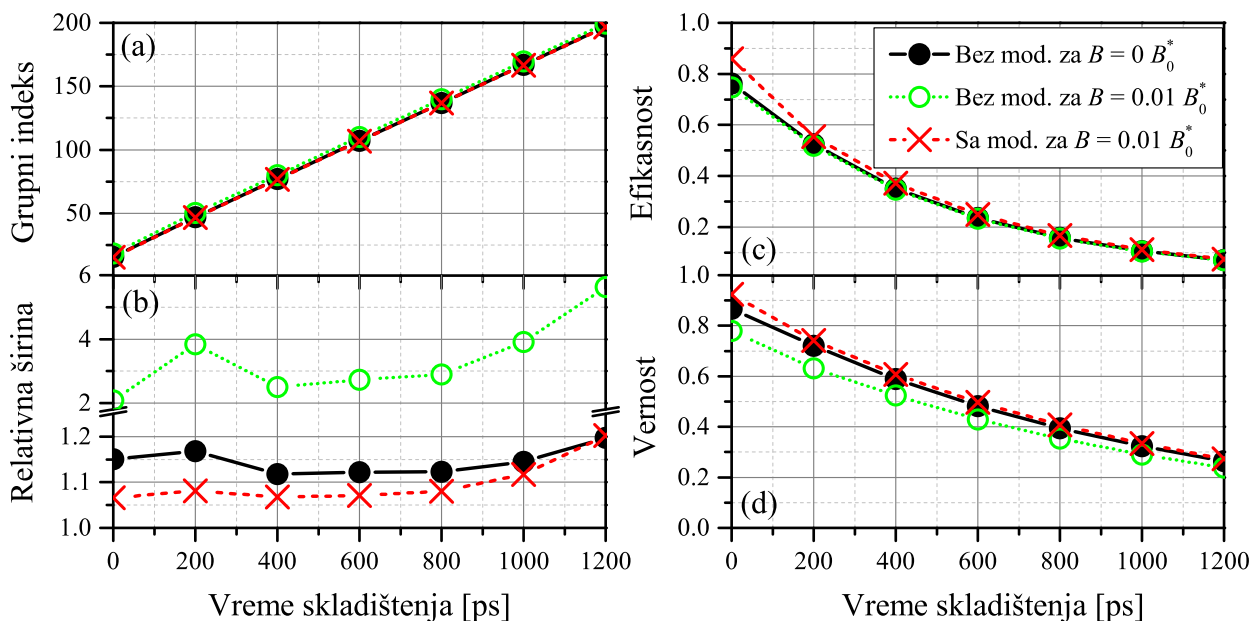
u poglavlju 11.3. Izlazni sondirajući puls u sredini sa fazno modulisanim kontrolnim poljem ima približno isti oblik kao i puls u odsustvu magnetnog polja i modulacije. Štaviše, može se primetiti da se „obnovljeni” puls karakteriše nešto većom vrednošću maksimuma, kao i „repa”, u odnosu na „originalni” puls. Ova razlika je veća što je vreme skladištenja kraće, dok se gubi u slučaju velikih vrednosti t_s . Naravno, u svim prikazanim slučajevima, vrednost maksimuma pulsa opada sa porastom vremena skladištenja, što je očekivano i već detaljno objašnjeno u Glavi 10. Možemo zaključiti da, ne samo da modulacija kontrolnog polja omogućava obnavljanje „originalnog” pulsa, nego je čak u stanju da *poveća efikasnost* izlaznog pulsa u odnosu na slučaj $B = 0 B_0^*$ i $M = 0$. Zbog toga je, u cilju dobijanja što efikasnijeg skladištenja, umesto do sada korišćenog kontinualnog kontrolnog lasera u odsustvu magnetnog polja, moguće koristiti fazno modulisani kontrolni laser u magnetnom polju, sa pogodno izabranim vrednostima parametara M i Ω .



Slika 11.9: Apsorpciona kriva za zatvoren sistem sa tri nivoa u lestvičastoj konfiguraciji za $B = 0.01 B_0^*$ u odsustvu modulacije (zeleno obojena površina), kao i sa modulacijom sa parametrima $M = 5$ i $\Omega = 31.4 \text{ GHz}$ u tri različita trenutka vremena. Plavom tačkastom linijom i šrafiranom površinom ispod nje prikazan je spektralni profil ulaznog sondirajućeg pulsa u proizvoljnim jedinicama. Pri dobijanju rezultata korišćeni su parametri $E_{c0}/E_{p0} = 100$, $w = 50 \text{ GHz}$, odnosno $\gamma_{ij} = \gamma_0 = 1 \text{ GHz}$.

Objašnjenje ovog efekta ponovo leži u činjenici da apsorpciona kriva osciluje sa vremenom, i da je, u trenucima kada se centralna frekvencija pulsa poklopi sa dnom prozora transparentnosti, apsorpcija minimalna. Apsorpciona kriva za razmatrani slučaj ($B = 0.01 B_0^*$) prikazana je na slici 11.9 u odsustvu modulacije (zeleno obojena površina), kao i sa modulacijom u različitim trenucima vremena (crvene linije). Pored toga, na grafiku je prikazan i spektralni profil ulaznog pulsa (plava tačkasta linija sa šrafiranom površinom ispod nje). Kada kontrolno polje nije modulirano, puls je pomeren iz minimuma apsorpcije, pa dolazi do modifikacija u profilu izlaznog pulsa – primetna asimetrija, povećanje relativne širine pulsa i smanjenje intenziteta posledica su (u najvećoj meri) efekata višeg reda po frekvenciji. Puls je, doduše, i dalje isuviše daleko od levog apsorpcionog maksimuma da bi trpeo veću apsorpciju od postojeće. Ona se, bez obzira na to, može smanjiti uvođenjem modulacije – sa odabranim parametrima, vidimo da će apsorpciona kriva oscilovati sa periodom $T \approx 200 \text{ ps}$, a da će amplitudni položaj dostići u trenutku $t \approx 100 \text{ ps}$, kada ćemo ujedno imati i da je $\Delta_p = \Delta_p^{\text{min}}$. Pošto je upravo u ovom trenutku maksimum pulsa ušao u sredinu ($t \approx$

t_0), sondirajući puls prolazi kroz nju sa minimalnim gubicima. Drugi, suprotni amplitudni položaj dostiže se u trenutku $t \approx 0$ ps (zatim u $t \approx 200$ ps i tako redom), kada je puls spektralno najudaljeniji od dna prozora. Vrednosti $\text{Im}\rho_{21}$ za kasnije trenutke vremena nisu prikazani, jer će se, naravno, poklapati sa već ucrtanim krivama.



Slika 11.10: (a) Grupni indeks, (b) relativna širina, (c) efikasnost i (d) vernost izlaznog sondirajućeg pulsa u zavisnosti od vremena skladištenja u odsustvu modulacije za $B = 0 B_0^*$ (crne pune linije i puni kružići) i $B = 0.01 B_0^*$ (zelene tačkaste linije i šuplji kružići), kao i u slučaju modulacije sa parametrima $M = 5$ i $\Omega = 31.4$ GHz u magnetnom polju $B = 0.01 B_0^*$ (crvene isprekidane linije i krstići). Preostale vrednosti parametara su $E_{c0}/E_{p0} = 100$, $w = 50$ GHz i $\gamma_{ij} = \gamma_0 = 1$ GHz.

Na posletku, proučimo ponašanje grupnog indeksa, relativne širine, efikasnosti i vernosti sondirajućeg pulsa u zavisnosti od vremena skladištenja, upoređujući rešenja dobijena u slučaju modulacije sa onima koja smo već analizirali na slici 10.8. Linijama i kružićima prikazana su već dobijena rešenja u odsustvu modulacije ($B = 0 B_0^*$ – crne pune linije i puni kružići, $B = 0.01 B_0^*$ – zelene tačkaste linije i šuplji kružići), dok su rešenja u slučaju modulisanog kontrolnog polja sa $M = 5$ i $\Omega = 31.4$ GHz, kao i za $B = 0.01 B_0^*$, prikazana crvenim isprekidanim linijama i krstićima. Posmatranjem slike 11.10 (a) vidimo da modulacija skoro da ne utiče na promenu grupnog indeksa sredine – sve tri krive se praktično poklapaju. Ipak, pažljivim posmatranjem se može videti da se grupni indeks sa modulacijom bolje poklapa sa rešenjem bez modulacije i bez magnetnog polja. Ovo ima smisla, budući da je „obnovljeni” puls sličniji „originalnom” nego onom koji se dobija za $B = 0.01 B_0^*$ i $M = 0$. Nasuprot grupnom indeksu, mnogo veća odstupanja se mogu videti na preostalim graficima. To je najuočljivije na slici 11.10 (b), gde je relativna širina pulsa u slučaju modulacije ponovo približno ista kao za puls u odsustvu modulacije i magnetnog polja, mada se odstupanje sada može jasno primetiti. Bez obzira na to, vidimo da se modulacijom kontrolnog polja postiže da relativna širina pulsa bude jako bliska jedinici, i to čak bliža nego što je to slučaj sa „originalnim” pulsom. Vrednost δ će, dakle, biti bliska jedinici, mada će rasti sa porastom t_s . Za velike vrednosti vremena skladištenja, dolazi do poklapanja vrednosti relativne širine za slučaj sa modulacijom u magnetnom polju i bez modulacije van magnetnog polja. Ovo znači da se najbolji efekat modulacije postiže ukoliko se koriste relativno mala vremena skladištenja. Konačno, posmatranjem slike 11.10 (c) i (d), vidimo da se efikasnost i vernost u sva tri slučaja smanjuju sa vremenom

skladištenja po eksponencijalnom zakonu, ali da su same vrednosti parametara najveće za slučaj *sa* modulacijom. Konkretno, za male vrednosti $t_s \sim 200$ ps, vrednosti η i ξ „obnovljenog” pulsa veće su čak i od odgovarajućih vrednosti za „originalni” puls. Ovo se vidi i na slici 11.8, odakle možemo zaključiti da prostiranje sondirajućeg pulsa kroz sredinu sa fazno modulisanim kontrolnim poljem, u spoljašnjem magnetnom polju, može odlično poslužiti da se eliminiše neželjena apsorpcija ovog pulsa, i „obnovi” profil koji je ovaj puls imao u odsustvu magnetnog polja i sa nemodulisanim kontrolnim poljem. Štaviše, pomoću modulacije je moguće dobiti čak i veću efikasnost i vernost, odnosno manju relativnu širinu izlaznog pulsa nego u slučaju $B = 0 B_0^*$ i $M = 0$. Pobrojana svojstva fazne modulacije kontrolnog polja i njen uticaj na sondirajući puls mogu biti od velikog značaja u procesiranju signala, optičkim telekomunikacijama i kvantnoj informatici.

Deo IV

Zaključak

12 Zaključne napomene

U ovoj disertaciji, proučavali smo prostiranje sondirajuće svetlosti slabog intenziteta kroz sredinu sačinjenu od mnoštva poluprovodničkih sfernih kvantnih tačaka sa vodoničnom nečistoćom koja se nalazi u centru kvantne tačke. Efekat usporavanja svetlosti demonstrirali smo koristeći dodatno kontrolno polje, usled koga dolazi do atomsko-koherentnog efekta elektromagnetno indukovane transparentnosti. Frekvencije i polarizacije elektromagnetnih polja odabrane su na način da pobude željene energijske nivoe kvantne tačke, i to tako da formiraju lestvičastu konfiguraciju sa tri nivoa. Pored ove konfiguracije, koja se može ostvariti odabirom nivoa $1s_0$, $2p_{-1}$ i $3d_{-2}$ kvantne tačke, ispitivani su i sistemi u lestvičastoj konfiguraciji sa tri nivoa u kojoj je srednji nivo trostruko degenerisan (birajući nivoe $1s_0$, $2p_{-1}$, $2p_0$, $2p_{+1}$ i $3d_0$), kao i sistem sa četiri nivoa u lestvičastoj konfiguraciji (izbor nivoa je tada $1s_0$, $2p_{-1}$, $3d_{-2}$ i $4f_{-3}$). Poslednja konfiguracija ostvaruje se uz prisustvo dodatnog laserskog polja, koje se može tretirati i kao sondirajuće i kao kontrolno, pri čemu su u disertaciji proučena oba ova slučaja. Prelaskom sa statičkog na dinamički EIT efekat, adijabatskim isključivanjem i ponovnim uključivanjem kontrolnog polja, demonstrirali smo skladištenje i povraćaj svetlosti u SKT, i računali kvantitativne parametre (grupni indeks, relativnu širinu izlaznog pulsa, efikasnost i vernost) koji karakterišu ovaj proces. Kao jedan od načina za povećanje efikasnosti izlaznog pulsa, kako u slučaju spore svetlosti, tako i kod skladištenja, proučavali smo prostiranje sondirajućeg pulsa kroz sredinu u prisustvu fazno modulisanog kontrolnog polja. Uticaj karakteristika lasera (razdešenosti i Rabijeve frekvencije elektromagnetnih polja, spektralna poluširina ulaznog pulsa, brzine isključivanja/uključivanja kontrolnog polja i modulacioni parametri), odnosno materijalne sredine (koeficijenti raspada), kao i spoljašnjeg stacionarnog magnetnog polja na pobrojane efekte takođe su detaljno ispitivani.

12.1 Pregled rezultata

Energijska struktura SKT dobijena je rešavanjem svojstvenog problema hamiltonijana kvantne tačke primenom varijacionog metoda Lagranževe mreže, što je detaljno objašnjeno u Glavi 7. Potencijal konfiniranja kvantne tačke modelovan je sferom sa beskonačno visokim zidovima, zbog čega je verovatnoća nalaženja nosilaca naelektrisanja van SKT jednaka nuli. Kao rezultat, koji je prikazan u Glavi 8, dobijene su energije i talasne funkcije elektrona nečistoće, a posredno i matični elementi operatora električnog dipolnog momenta, za koje je pokazano da veoma zavise od poluprečnika kvantne tačke (radijusa konfiniranja) i jačine spoljašnjeg magnetnog polja. Jedan od razloga za rad sa poluprovodničkim kvantnim tačkama je upravo činjenica da se energijska struktura može podešavati po želji variranjem ova dva parametra, dok se za atomske sredine ovo može učiniti jedino promenom jačine magnetnog polja (kao i električnog, ukoliko je prisutno u sistemu). Pokazali smo da se SKT manjih dimenzija karakterišu međusobno udaljenijim energijskim nivoima, dok energijski nivoi u graničnom slučaju $R \rightarrow \infty$ teže onima za slobodan atom vodonika. Sa druge strane, uticaj magnetnog polja ogleda se u Zemanovom efektu usled koga dolazi do skidanja degeneracije svih nivoa kvantne tačke sa $l > 0$. U disertaciji smo se prevashodno bavili slabim magnetnim poljima, kada je dominantan linearan Zemanov efekat.

U cilju nalaženja prostorne i vremenske zavisnosti jačine električnog polja izlaznog sondirajućeg lasera, sistem svetlost–materija ispitivali smo koristeći poluklasični pristup. U njemu smo elektromagnetna polja tretirali pomoću zakona klasične elektrodinamike (dobivši talasne, odnosno propagacione jednačine koje slede iz Maksvelovih jednačina), a materijalnu sredinu potpuno kvantnomehanički, koristeći formalizam matrice gustine (čijom primenom se dobijaju optičke Blohove jednačine). Kombinovanjem propagacionih i OB jednačina, dobili smo sistem Maksvel-Blohovih jednačina koji, uz odgovarajuće početne i granične uslove, potpuno opisuje sistem svetlost–materija. Detaljno izvođenje ovih jednačina, sa posebnim akcentom na razlike između gasovitih i čvrstih sredina, dato je u Glavi 5. MB jednačine rešavane su za niz fizičkih situacija od interesa, za svaku od tri razmatrane lestvičaste konfiguracije. Sa jedne strane, rešavanje je sprovedeno numerički, kombinovanom primenom metoda Runge-Kuta četvrtog reda i Laks-Vendrofovog metoda u slučaju skladištenja i modulacije kontrolnog polja, odnosno metoda Furijeove transformacije u slučaju spore svetlosti. Dobijeni rezultati dopunjeni su aproksimativnim analitičkim izrazima za razne interesantne slučajeve, koji su prevashodno zasnovani na perturbacionom pristupu, odnosno linearizaciji MB jednačina. Da bi se ovo izvelo, potrebno je da važi uslov $\Omega_p \ll \Omega_c$, koji je u slučaju sistema sa četiri nivoa potrebno dopuniti izrazom $\Omega_d \ll \Omega_c$ ako je dodatno polje sondirajuće, odnosno $\Omega_p \ll \Omega_d$ ako je ono kontrolno. Zbog toga je u najvećem delu disertacije rađeno sa jakim kontrolnim poljima, što odgovara režimu u kome je Autler-Taunsov efekat dominantan u odnosu na Fano interferenciju (apsorpciona kriva se može prikazati kao prost zbir dva ili tri lorencijana, zavisno od konfiguracije). U skladu sa tim, sprovedena je i detaljna diskusija formalizma obučenih stanja, u okviru koje su analitički prikazane i analizirane apsorpciona i disperziona kriva u AT režimu za niz slučajeva od interesa u disertaciji. Glava 6 je u potpunosti posvećena rešavanju MB jednačina, i na nju smo se u velikoj meri referencirali prilikom analize rezultata u Delu III.

U Glavi 9, pokazano je da je, u SKT poluprečnika $R = 8a_0^* \approx 81.76 \text{ nm}$, moguće smanjenje grupne brzine svetlosti za oko dva reda veličine u odnosu na brzinu svetlosti u vakuumu. Ovo smanjenje postignuto je u nedegenerisanom (zatvorenom) sistemu sa tri nivoa, pri čemu na prostiranje sondirajućeg pulsa značajno utiče njegova spektralna poluširina w , kao i Rabijeva frekvencija kontrolnog polja, za koje smo pretpostavili da ima oblik kontinualnog lasera. Dodatno usporenje svetlosti moguće je smanjenjem Ω_c , ali se u tom slučaju sužava i prozor transparentnosti, usled čega raste apsorpcija pulsa. Zbog toga je potrebno naći svojevrsan balans između gubitaka sa jedne i što većeg usporenja sondirajućeg pulsa sa druge strane. Poređenjem sa aproksimativnim analitičkim rezultatima, dobijenim razvojem disperzione relacije $\kappa(\omega)$ u Tejlorov red, pokazali smo da spektralno uski pulsevi mogu da prođu kroz aktivnu sredinu tako da im originalna „gausovska” struktura ostane nepromenjena, dok u slučaju velikih vrednosti w dolazi do raspada pulsa, koji se onda karakteriše postojanjem „repa”. Tako, za slučaj spektralno uskih pulseva, efekti trećeg i višeg reda po frekvenciji mogu da se zanemare, pa je poklapanje numeričkog i analitičkog rešenja (dobijenog u drugom redu po frekvenciji) izuzetno dobro. Takođe, analizom uticaja koeficijenata raspada na prostiranje pulsa, koji u slučaju čvrstih tela mogu uzimati veliki opseg vrednosti, videli smo da je glavni uzrok smanjenja visine envelope izlaznog pulsa velika vrednost koeficijenta γ_{31} , koja određuje visinu dna prozora transparentnosti. Sa druge strane, veličina γ_{21} , direktno srazmerna širini apsorpcionih pikova, nema preveliki uticaj na apsorpciju za slučaj spektralno uskih pulseva, zbog čega je od velikog praktičnog interesa prevashodno što efikasnije smanjenje koeficijenta γ_{31} , na primer hlađenjem kvantnih tačaka do kriogenih temperatura.

U istoj Glavi, proučavano je prostiranje svetlosti za slučaj degenerisanog (otvorenog) sistema sa tri nivoa u slučaju dominantne spontane emisije, u kome degeneracija dovodi do pojačanih efekata dekoherencije u odnosu na odgovarajući zatvoreni sistem. Pokazano je, međutim, da se otvoren sistem sa tri nivoa može posmatrati kao zatvoren sistem sa efektivnom vrednošću koeficijenta raspada

najvišeg nivoa $\Gamma_3^{\text{ef}} = \Gamma_{32} + \Gamma_{34} + \Gamma_{35}$, što značajno pojednostavljuje rad sa ovim sistemom i omogućava primenu zaključaka dobijenih za zatvorene sisteme sa tri nivoa u lestvičastoj konfiguraciji, koji se u literaturi najčešće i sreću. Pored toga, ispitivanjem sistema sa četiri nivoa, pokazali smo da dodatno kontrolno polje igra veliku ulogu u prostiranju spore svetlosti kroz sredinu, bilo da smo ga tretirali kao kontrolno ili kao sondirajuće. U prvom slučaju, uključivanjem dodatnog polja dolazi do formiranja centralnog apsorpcionog pika, usled čega se početni prozor transparentnosti deli na dva dela. Širine prozora i pozicije pikova prevashodno zavise od Ω_c i Ω_d , a posmatranjem zavisnosti relevantnih parametara od ovih veličina primećujemo da se, u prisustvu dodatnog kontrolnog polja, grupna brzina sondirajućeg pulsa može smanjiti za još jedan red veličine. Ukoliko je, pak, dodatno polje sondirajuće, onda je moguće uticati na njegovu grupnu brzinu promenom Rabijske frekvencije sondirajućeg polja, dok je suprotan efekat zanemarljiv, pošto je izraz za n_g dobijen u prvom (u kom ne figuriše Ω_d), a n_g^d u trećem redu teorije perturbacija (član u prvom redu je u slučaju dodatnog polja praktično jednak nuli). Ovako dobijena smanjenja grupne brzine, odnosno povećanja grupnog indeksa, kreću se od nekoliko do više desetina puta, mada je ponovo potrebno voditi računa o balansu između usporavanja svetlosti i velike apsorpcije.

Skladištenje svetlosti demonstrirano je na SKT u zatvorenom sistemu sa tri nivoa, gde je primenjen EIT memorijski protokol adijabatskog isključivanja i ponovnog uključivanja kontinualnog kontrolnog polja nakon isteka vremena skladištenja t_s . Demonstrirano je zadržavanje pulsa u sredini i nekoliko stotina puta veće od onog u slučaju spore svetlosti, što odgovara vremenima skladištenja reda nanosekundi, kao što je prikazano u Glavi 10. Glavni izvor gubitaka je ponovo velika vrednost koeficijenta γ_{31} , koji se može smanjiti hlađenjem aparature do vrlo niskih temperatura. Poređenje numeričkog sa analitičkim rešenjem u drugom redu teorije perturbacija pokazuje njihovo odlično slaganje u slučaju grupnog indeksa i efikasnosti izlaznog pulsa (kao i vernosti u odsustvu magnetnog polja), bez obzira na činjenicu da se sami vremenski profili dobijeni numeričkim i analitičkim rešavanjem primetno razlikuju. U realnom slučaju, vidimo postojanje repa pulsa, zbog koga je razlika između dva tipa rešenja prevashodno sadržana u grafiku koji predstavlja zavisnost relativne širine izlaznog pulsa od t_s .

Posebna pažnja u ovoj disertaciji posvećena je proučavanju uticaja spoljašnjeg magnetnog polja na sporu i uskladištenu svetlost. U odsustvu magnetnog polja, frekvencije lasera su najčešće bile podešene tako da budu u rezonanciji sa odgovarajućim atomskim prelazima. Magnetno polje je, pomeranjem nivoa usled Zemanovog efekta, ove rezonancije po pravilu narušavalo, zbog čega je dolazilo i do modifikacija disperzione i apsorpcione krive. Kao rezultat, najčešće se javljala pojačana apsorpcija praćena smanjenjem grupne brzine pulsa. Za određene, kritične vrednosti magnetnog polja B_c , kada se centralna frekvencija sondirajućeg pulsa poklopi sa jednim od apsorpcionih pikova, dolazilo je do kompletne apsorpcije pulsa. U slučaju koji smo proučavali, ovo se dešavalo za magnetna polja reda stotinu militesla, tako da se za $B < B_c$ puls i dalje nalazio unutar prozora transparentnosti, a pri $B > B_c$ izvan njega. Daljim povećanjem jačine magnetnog polja, jačina pulsa bi se ponovo povećavala, ali on više ne bi bio u regionu u kome je prisutna EIT, već samo u oblasti jako razdešenog lasera. Registrovano ponašanje je u potpunosti u skladu sa teorijskom analizom sprovedenom u Glavi 6, za zatvoren sistem kako sa tri, tako i sa četiri nivoa. Sličan efekat kao na sporu svetlost, magnetno polje ima i na skladištenje svetlosti – zbog pomeranja apsorpcione krive, apsorpcija pulsa se povećava, pri čemu puls poprima vidljivo asimetričan oblik. Dakle, u slučaju neulte razdešenosti koja je posledica postojanja magnetnog polja (čija je jačina i dalje ispod kritične), dolazi do dominacije efekata trećeg i višeg reda po frekvenciji, usled čega aproksimativno analitičko rešenje drugog reda više ne opisuje adekvatno vremenski profil izlaznog pulsa. Ipak, čak i uz ova očigledna odstupanja, aproksimativno rešenje daje sasvim dobar opis promene grupnog indeksa i efikasnosti sa vremenom skladištenja, dok se ova aproksimacija ne može koristiti pri opisivanju

zavisnosti δ i ξ od t_s .

Na pitanju povećanja efikasnosti spore i uskladištene svetlosti se godinama unazad intenzivno radi. U Glavi 11 predstavljeno je jedno od rešenja ovog problema, koje se pokazalo veoma efikasnim u kombinaciji sa efektima spoljašnjeg magnetnog polja. Kontrolno polje sa pogodno odabranom faznom modulacijom u zatvorenom sistemu sa tri nivoa izaziva oscilovanje prozora transparentnosti, zbog čega je u različitim vremenskim trenucima moguće kroz sredinu propuštati svetlosne komponente različitih frekvencija. Tako, na primer, ulazni kontinualni sondirajući puls može na izlazu iz sredine postati periodičan, pri čemu njegov konkretan vremenski profil zavisi od parametara modulacije M i Ω . Pored toga, ukoliko, iz nekog razloga, razdešenosti laserskih polja postanu različite od nule, uključivanjem modulacije je moguće obnoviti puls koji je prvobitno bio delimično ili kompletno apsorbovan. Ovakvo potpuno obnavljanje pulsa manifestovano je na primeru spore i uskladištene svetlosti u SKT nakon uključivanja spoljašnjeg magnetnog polja. U oba slučaja, nakon uključivanja modulacije kontrolnog polja, postignute su vrednosti parametara koje su skoro potpuno odgovarale onima za usporeni/uskladišteni puls u odsustvu magnetnog polja.

Značajan deo disertacije posvećen je diskusiji mogućih primena proučavanih efekata. Razmatrane su, tako, mogućnosti izrade optičkih prekidača i optičkih bafera na bazi spore i uskladištene svetlosti u poluprovodničkim kvantnim tačkama. Takođe, velika pažnja posvećena je primeni efekata skladištenja u ovim nanostrukturama za izradu kvantnih memorija, i diskutovana su praktična ograničenja i perspektive za njihovo savladavanje. Značajan uticaj magnetnog polja na energijsku strukturu kvantne tačke, a potom i posmatrane efekte nastale usled njene interakcije sa svetlošću, naveo nas je na ideju da je ovakve sisteme moguće primeniti u cilju izrade optičkih magnetometara. Ovom pitanju je, stoga, takođe posvećena posebna pažnja, naročito u poglavlju 9.4. Na kraju, napomenimo da je, zbog drastične modifikacije apsorpcione krive kako u spoljašnjem magnetnom polju, tako i u prisustvu modulacije kontrolnog polja, moguće vršiti dodatnu kontrolu prostiranja sondirajućeg pulsa, zbog čega proučavani efekti mogu imati veliku primenu u optičkim telekomunikacijama i procesiranju signala.

12.2 Pravci daljeg istraživanja

Atomsko-koherentni efekti, o kojima je u disertaciji bilo reči, skoro po pravilu su do sada ostvarivani na atomskim gasovima i parama. Da bi se poluprovodničke kvantne tačke mogle efikasno koristiti u sličnim eksperimentima, potrebno je usmeriti buduće istraživanje na metode za dodatno smanjenje vremena dekoherencije u njima, što je posebno diskutovano u odeljku 10.3.1. Na primer, moguće je, pogodnim izborom veličine i oblika kvantne tačke, realizovati takvu energijsku strukturu da koeficijenti spontane emisije, koji igraju dominantnu ulogu na kriogenim temperaturama, imaju vrednosti koje odgovaraju onima za atomske gasove i pare. U skladu sa tim, može biti korisno ispitati energijsku strukturu piramidalnih, konusnih ili paraboličnih kvantnih tačaka, i iskoristiti dobijene rezultate za realizaciju spore i uskladištene svetlosti. Motivacija za nastavak rada u ovom pravcu leži u činjenici da su kvantne tačke navedenih oblika već odavno praktično realizovane, sa eksperimentalnim tehnikama koje se konstantno usavršavaju. Energijska struktura ovakvih objekata, sa ili bez nečistoće, može biti takva da je u njima pogodnije realizovati neku konfiguraciju različitu od lestvičaste. Zbog toga je zgodno proučiti ove fenomene u drugim konfiguracijama, kako sa tri, tako i sa više nivoa. Kao što smo već napomenuli u poglavlju 2.2, povećanje broja laserskih polja, odnosno nivoa uključenih u interakciju, značajno komplikuje proces računanja, ali može dovesti do niza zanimljivih efekata koji se u konfiguracijama sa tri nivoa ne mogu javiti.

Jedan od primera fenomena koji mogu nastati u konfiguracijama sa više nivoa jeste stacionarna svetlost, koja se, na primer, može realizovati u dvostrukoj Λ ili dvostrukoj tripodnoj konfiguraciji [250]. Na ovaj način, moguće je potpuno zaustavljanje svetlosnog pulsa bez isključivanja kontrolnog polja. Da bi se realizovala stacionarna svetlost, potrebna su dva sondirajuća pulsa, koja se kroz sredinu prostiru u suprotnim smerovima, i koja se međusobno sprežu odgovarajućom kombinacijom kontrolnih polja. Stacionarna, kao i dvokomponentna svetlost uopšte, predstavljaju perspektivno polje istraživanja kome vredi posvetiti pažnju u daljem radu u oblasti kvantne optike. Jedna od ideja je, takođe, da se buduća istraživanja posvete nalaženju univerzalnih zakonitosti za gasovite i čvrste sredine, sa mogućnošću primene kako u poluprovodničkim heterostrukturama, tako i u ultrahladnim atomima i Boze-Ajnštajnovim kondenzatima. O ovom pitanju je već diskutovano u odeljku 5.1.3, odnosno poglavlju 5.5. Takođe, proučavanje drugih atomsko-koherentnih efekata u sredinama od interesa, poput koherentnog zarobljavanja naseljenosti, laserovanja bez inverzije ili mešanja četiri talasa, može biti veoma atraktivno pitanje sa stanovišta kvantne, nelinearne optike i fotonike.

Značajan deo disertacije predstavlja diskusija sličnosti i razlika između EIT i AT efekta, kao i teorijskih i eksperimentalnih metoda za njihovo razlikovanje. Takođe, slična problematika pojavljuje se i kod skladištenja svetlosti, gde možemo razlikovati EIT memorijski protokol (adijabatske memorije), odnosno AT protokol (brze memorije) [23]. Istraživanje sprovedeno u ovoj disertaciji ograničeno je prevashodno na AT režim i EIT memorijski protokol, ali se veliki deo postavke problema može primeniti i na EIT režim i AT protokol, odnosno na ma koju njihovu kombinaciju koja će dovesti do efikasnog procesa skladištenja. Polazne jednačine koje opisuju sistem svetlost–materija biće iste kao do sada, ali se, na primer, u EIT režimu ne može iskoristiti uslov $\Omega_p \ll \Omega_c$, zbog čega perturbacioni metod nije primenljiv u obliku koji je ovde korišćen. U skladu sa tim, biće potrebno da se izvrše korekcije u analitičkom pristupu rešavanja problema, što takođe predstavlja jedan od teorijskih izazova na ovom polju. Naše buduće istraživanje će u velikoj meri biti fokusirano i na razlikovanje EIT od AT memorija, pri čemu je samo jedan delić ovog složenog pitanja pojašnjen u odeljku 2.3.3.

Proučavanje efekata spore i uskladištene svetlosti u SKT sa lestvičastom konfiguracijom pokazalo se veoma perspektivnim sa stanovišta fundamentalnog razumevanja posmatranih pojava i procesa sa jedne, odnosno potencijalne primene u raznim oblastima nauke i tehnologije sa druge strane. Među oblastima koje najviše obećavaju su svakako kvantna informatika, optičke komunikacije i magnetometrija, te su stoga baš one sa posebnom pažnjom diskutovane u disertaciji. Nadamo se da bi rezultati proizašli iz ove disertacije mogli da zauzmu svoje skromno mesto u izgradnji čvrstog temelja za razvoj moćnih višenamenskih nanomaterijala, čije dalje primene tek ostaje da otkrijemo. Njen autor će, uz svesrdnu pomoć svojih saradnika, svakako nastojati da ostane na tom putu i u budućnosti.

Deo V

Dodatak

A Matematički detalji ispitivanja interakcije svetlosti i materije

A.1 Prelazak sa Šredingerove na interakcionu sliku

Kao deo procedure za izvođenje hamiltonijana sistema koji čine laseri i materijalna sredina, a u cilju primene aproksimacije rotirajućeg talasa, potrebno je izvršiti prelazak sa Šredingerove na interakcionu sliku, a potom, nakon izvršene ART, i povratak na Šredingerovu sliku. Ukoliko je hamiltonijan sistema koji posmatramo dat relacijom (5.18), prelazak na interakcionu sliku vrši se primenom unitarne transformacije

$$U = e^{\frac{i}{\hbar}H_0t}, \quad U^\dagger = e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t}, \quad U^\dagger U = I, \quad (\text{A.1})$$

gde je I jedinični operator, a slobodni hamiltonijan H_0 ujedno i ermitski operator. S obzirom na to da je u radu korišćena matricna reprezentacija operatora pri izvođenju jednačina iz Glave 5, to ćemo uraditi i na ovom mestu. Konkretno, ispitaćemo na koji način operator U (zapisan u matricnom obliku) transformiše proizvoljni linearni operator, a onda analogni postupak sprovesti i za inverznu transformaciju U^\dagger . Ovo će biti učinjeno za proizvoljan bazis koji čini n svojstvenih stanja slobodnog hamiltonijana:

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

a dobijeni rezultati se potom mogu primeniti na sve tri razmatrane konfiguracije.

Operator unitarne transformacije prelaska na interakcionu sliku sada može da se prikaže kao

$$U = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}E_1t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{\hbar}E_2t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{i}{\hbar}E_3t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\frac{i}{\hbar}E_nt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\omega_1t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\omega_2t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\omega_3t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{i\omega_nt} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

dok je operator inverzne transformacije očigledno

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}E_1t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{\hbar}E_2t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{i}{\hbar}E_3t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{-\frac{i}{\hbar}E_nt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\omega_1t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_2t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\omega_3t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{-i\omega_nt} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

pri čemu su sve relevantne veličine definisane u Glavi 5. Uzmimo sada proizvoljan linearni operator A koji se matricno, u bazu svojstvenih vektora $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, \dots, |n\rangle\}$, u Šredingerovoj slici može zapisati kao

$$A^{(S)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Pod dejstvom unitarne transformacije U , transformiše se i posmatrani operator, i to na sledeći način:

$$A^{(S)} \xrightarrow{U} A^{(I)} = UA^{(S)}U^\dagger = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}e^{-i\omega_{21}t} & a_{13}e^{-i\omega_{31}t} & \cdots & a_{1n}e^{-i\omega_{n1}t} \\ a_{21}e^{i\omega_{21}t} & a_{22} & a_{23}e^{-i\omega_{32}t} & \cdots & a_{2n}e^{-i\omega_{n2}t} \\ a_{31}e^{i\omega_{31}t} & a_{32}e^{i\omega_{32}t} & a_{33} & \cdots & a_{3n}e^{-i\omega_{n3}t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}e^{i\omega_{n1}t} & a_{n2}e^{i\omega_{n2}t} & a_{n3}e^{i\omega_{n3}t} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

gde je sa $\omega_{ij} = \omega_i - \omega_j$ označena frekvencija prelaza $|i\rangle \leftrightarrow |j\rangle$. Izraz (A.6) koji predstavlja matricnu reprezentaciju operatora A u interakcionoj slici dobijen je jednostavnim matricnim množenjem odgovarajućih matrica (A.3)–(A.5). Slično, proizvoljan linearni operator B , koji u interakcionoj slici ima oblik

$$B^{(I)} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

pod dejstvom inverzne transformacije U^\dagger prelazi na Šredingerovu sliku na sledeći način:

$$B^{(I)} \xrightarrow{U^\dagger} B^{(S)} = U^\dagger B^{(I)}U = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}e^{i\omega_{21}t} & b_{13}e^{i\omega_{31}t} & \cdots & b_{1n}e^{i\omega_{n1}t} \\ b_{21}e^{-i\omega_{21}t} & b_{22} & b_{23}e^{i\omega_{32}t} & \cdots & b_{2n}e^{i\omega_{n2}t} \\ b_{31}e^{-i\omega_{31}t} & b_{32}e^{-i\omega_{32}t} & b_{33} & \cdots & b_{3n}e^{i\omega_{n3}t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}e^{-i\omega_{n1}t} & b_{n2}e^{-i\omega_{n2}t} & b_{n3}e^{-i\omega_{n3}t} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

pri čemu je izvršeno matricno množenje matrica (A.3), (A.4) i (A.7).

Vidimo da dijagonalni elementi obe posmatrane matrice ostaju nepromenjeni pri prelasku sa Šredingerove na interakcionu sliku i obrnuto, dakle,

$$a_{ii} \xrightarrow{U} a_{ii}, \quad b_{ii} \xrightarrow{U^\dagger} b_{ii}. \quad (\text{A.9})$$

Sa druge strane, nakon izvršenih transformacija, dolazi do pojave oscilujućih članova uz nedijagonalne elemente, preciznije

$$a_{ij} \xrightarrow{U} a_{ij}e^{i\omega_{ij}t}, \quad b_{ij} \xrightarrow{U^\dagger} b_{ij}e^{-i\omega_{ij}t}. \quad (\text{A.10})$$

Stavljanjem $n = 3, 5$ ili 4 dolazi se do željenih transformacionih relacija za zatvoren sistem sa tri nivoa, otvoren sistem sa tri nivoa i sistem sa četiri nivoa, respektivno.

A.2 Prelazak na korotirajući bazis

Prelazak na korotirajući bazis vrši se delovanjem unitarne transformacije U' , koja je navedena u poglavlju 5.2 u matricnoj reprezentaciji za sve tri konfiguracije od interesa. Zapišimo je, na ovom mestu, u opštijem obliku:

$$U' = \begin{pmatrix} e^{i\alpha t} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & e^{i\beta t} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & e^{i\gamma t} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

gde su $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ proizvoljni realni skalari, a

$$U'^{\dagger} = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha t} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & e^{-i\beta t} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & e^{-i\gamma t} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

njoj inverzna unitarna transformacija. Proizvoljan linearni operator (u Šredingerovoj slici),

$$A^{(S)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

pod dejstvom operatora U' , transformiše se na sličan način kao u prethodnom poglavlju:

$$A^{(S)} \xrightarrow{U'} A^{(KB)} = U' A^{(S)} U'^{\dagger} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}e^{i(\alpha-\beta)t} & a_{13}e^{i(\alpha-\gamma)t} & \cdots \\ a_{21}e^{-i(\alpha-\beta)t} & a_{22} & a_{23}e^{i(\beta-\gamma)t} & \cdots \\ a_{31}e^{-i(\alpha-\gamma)t} & a_{32}e^{-i(\beta-\gamma)t} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

što vidimo da je analogno formuli (A.6) kada se u njoj izvrši smena $\omega_1 = \alpha$, $\omega_2 = \beta$, $\omega_3 = \gamma$ i tako redom.

Dobijeni rezultat, međutim, *ne važi* za hamiltonijan sistema svetlost–materija. Kako hamiltonijan, pre svega, zadovoljava vremenski zavisnu *Šredingerovu jednačinu*, delovanje unitarne transformacije na vektore stanja koji u njoj figurišu dovešće do nešto drugačije transformacione relacije [260]. Konkretno, hamiltonijan

$$H^{(S)} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & \cdots \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \cdots \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

koji se, u glavnom tekstu, još računa i u ART (mada smo odgovarajuću oznaku ovde izostavili), transformiše se prema relaciji (5.42). Ovo znači da je potrebno da nađemo još i

$$i\hbar \frac{dU'}{dt} U'^{\dagger} = \hbar \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\beta & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\gamma & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (\text{A.16})$$

da bismo, nakon nekoliko sukcesivnih matričnih množenja, konačno došli do

$$H^{(S)} \xrightarrow{U'} H^{(KB)} = i\hbar \frac{dU'}{dt} U'^{\dagger} + U' H^{(S)} U'^{\dagger} = \begin{pmatrix} h_{11} - \alpha & h_{12} e^{i(\alpha-\beta)t} & h_{13} e^{i(\alpha-\gamma)t} & \dots \\ h_{21} e^{-i(\alpha-\beta)t} & h_{22} - \beta & h_{23} e^{i(\beta-\gamma)t} & \dots \\ h_{31} e^{-i(\alpha-\gamma)t} & h_{32} e^{-i(\beta-\gamma)t} & h_{33} - \gamma & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

Vidimo da se, za razliku od „običnih” linearnih operatora, ovde javlja razlika i u dijagonalnim elementima hamiltonijana u korotirajućem bazu, koja nam omogućava da pojednostavimo njegov matrični oblik, biranjem jednog od skalara $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ tako da željeni dijagonalni matrični element bude jednak nuli.

A.3 Izvođenje matričnih elemenata dekoherentnog člana za slučaj spontane emisije

Formula za dekoherentni član u Liuvilovoj jednačini (5.8) izvedena je u referenci [15], da bismo je u odeljku 5.5.2 pojednostavili, primenjujući je na problem od interesa. Pojednostavljena jednačina glasi:

$$\Lambda\rho = -\frac{1}{2} \sum_{m,n}^{E_n > E_m} \Gamma_{nm} (\rho S_{nm} + S_{nm} \rho - 2\rho_{nm} S_{mm}), \quad (\text{A.18})$$

pri čemu eksplicitan oblik ovog izraza zavisi od proučavane konfiguracije. Demonstracije radi, kompletnu proceduru sprovedemo na primeru zatvorenog sistema sa tri nivoa – za preostale dve konfiguracije, iako je računica nešto duža, dekoherentni član se dobija po analogiji.

U zatvorenom sistemu sa tri nivoa, izraz (A.18) se svodi na

$$\Lambda\rho = -\frac{1}{2} \Gamma_{21} (\rho S_{22} + S_{22} \rho - 2\rho_{22} S_{11}) - \frac{1}{2} \Gamma_{32} (\rho S_{33} + S_{33} \rho - 2\rho_{33} S_{22}), \quad (\text{A.19})$$

što predstavlja već navedenu jednačinu (5.199), čije je dobijanje detaljnije pojašnjeno u glavnom tekstu. U bazu $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$, definisanom preko (5.26), operatori preslikavanja imaju oblik:

$$S_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

Sasvim uopšte, matrična reprezentacija operatora S_{ij} je takva da su svi matrični elementi jednaki nuli, osim onog na poziciji (i, j) koji je jednak jedinici. Kako se i operator gustine može prikazati u matričnoj reprezentaciji, konkretno preko (5.79), za članove koji se pojavljuju u izrazu (A.19) ćemo imati:

$$\rho S_{22} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12} & 0 \\ 0 & \rho_{22} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.21})$$

$$S_{22} \rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.22})$$

Slično ovome, važiće

$$\rho S_{33} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho_{13} \\ 0 & 0 & \rho_{23} \\ 0 & 0 & \rho_{33} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.23})$$

$$S_{33}\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.24})$$

kao i

$$\rho_{22}S_{11} = \begin{pmatrix} \rho_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_{33}S_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.25})$$

Zamenom ovih izraza u (A.19), dobićemo konačno

$$\Lambda\rho = \begin{pmatrix} \Gamma_{21}\rho_{22} & -\frac{1}{2}\Gamma_{21}\rho_{12} & -\frac{1}{2}\Gamma_{32}\rho_{13} \\ -\frac{1}{2}\Gamma_{21}\rho_{21} & -\Gamma_{21}\rho_{22} + \Gamma_{32}\rho_{33} & -\frac{1}{2}(\Gamma_{21} + \Gamma_{32})\rho_{23} \\ -\frac{1}{2}\Gamma_{32}\rho_{31} & -\frac{1}{2}(\Gamma_{21} + \Gamma_{32})\rho_{32} & -\Gamma_{32}\rho_{33} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.26})$$

što predstavlja matricnu reprezentaciju dekoherentnog člana za zatvoren sistem sa tri nivoa. Vidimo da upravo matricni elementi koji se pojavljuju ovde figurišu u OB jednačinama (5.200)–(5.204) u slučaju dominantne spontane emisije.

A.4 Analitičko rešavanje propagacione jednačine

U poglavlju 6.4 je posvećena pažnja rešavanju propagacione jednačine za polariton tamnog stanja, koja za većinu slučajeva od interesa ima oblik dat izrazom (6.289). Prepišimo ovu jednačinu uz jednostavnije označavanje veličina koje u njoj figurišu:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} \right) u(z, t) = -\gamma u(z, t), \quad (\text{A.27})$$

gde je v brzina, γ koeficijent raspada, a nepoznatu funkciju $u(z, t)$ nalazimo ukoliko još imamo u vidu i početni uslov $u(z, 0) = u_0(z)$. Uvođenjem smene promenljivih

$$\zeta = z - vt, \quad \tau = t, \quad (\text{A.28})$$

doći će do transformacije parcijalnih izvoda u propagacionoj jednačini, i to konkretno

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad (\text{A.29})$$

za izvod po vremenu, odnosno

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \quad (\text{A.30})$$

za izvod po propagacionoj koordinati, pri čemu su iskorišćene osobine izvoda složene funkcije. Zamenom ovih izraza u (A.27), dobijamo jednačinu:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} u(\zeta, \tau) = -\gamma u(\zeta, \tau), \quad (\text{A.31})$$

čijim rešavanjem se jednostavno dobija:

$$u(\zeta, \tau) = u(\zeta, 0)e^{-\gamma\tau} = u_0(\zeta)e^{-\gamma\tau}. \quad (\text{A.32})$$

Povratkom na stare promenljive, konačno ćemo imati:

$$u(z, t) = u(z - vt, 0)e^{-\gamma t} = u_0(z - vt)e^{-\gamma t}, \quad (\text{A.33})$$

što predstavlja rešenje propagacione jednačine koje koristimo pri opisivanju polaritona tamnog stanja. U slučaju da početni uslov određuje stanje sistema u trenutku $t_0 \neq 0$, onda će u gornjim izrazima, umesto t , figurisati $t - t_0$, što je u glavnom tekstu i urađeno.

B Određivanje energija i talasnih funkcija sferne kvantne tačke

B.1 Efektivne atomske jedinice

Hamiltonijan SKT sa vodoničnom nečistoćom u spoljašnjem stacionarnom magnetnom polju, kao i u aproksimaciji efektivne mase u SI jedinicama, dat je izrazom (7.8), koji ovde prepisujemo:

$$H_{\text{SKT}}^{(\text{AEM})} = -\frac{\hbar^2}{2m_e^*} \nabla^2 + \frac{eB}{2m_e^*} L_z + \frac{e^2 B^2}{8m_e^*} r^2 \sin^2 \theta - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r}. \quad (\text{B.1})$$

Od interesa je zapisati ovaj hamiltonijan u pogodnijim jedinicama za posmatrati sistem. Kod slobodnih atoma su to atomske jedinice, dok ćemo ovde raditi u efektivnim atomskim jedinicama, koje se razlikuju od atomskih utoliko što je, umesto m_e i ϵ_0 , u kristalu potrebno u odgovarajućim izrazima koristiti m_e^* i $\epsilon_0\epsilon_r$. Tako će efektivna atomska jedinica za *energiju* biti

$$E_0^* = \frac{m_e^* e^4}{(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2 \hbar^2}. \quad (\text{B.2})$$

Ako sada izraz (B.1) podelimo sa obe strane sa E_0^* , sa leve strane ćemo dobiti $H_{\text{SKT}}^{(*)} = H_{\text{SKT}}^{(\text{AEM})} / E_0^*$, što predstavlja hamiltonijan izražen u efektivnim atomskim jedinicama energije. Izraz sa desne strane se, nakon neznatnog sređivanja, svodi na:

$$\begin{aligned} H_{\text{SKT}}^{(*)} &= -\frac{(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2 \hbar^2}{m_e^* e^4} \frac{\hbar^2}{2m_e^*} \nabla^2 + \frac{(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2 \hbar^2}{m_e^* e^4} \frac{eB}{2m_e^*} L_z \\ &\quad + \frac{(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2 \hbar^2}{m_e^* e^4} \frac{e^2 B^2}{8m_e^*} r^2 \sin^2 \theta - \frac{(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2 \hbar^2}{m_e^* e^4} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2 \hbar^4}{(m_e^*)^2 e^4} \nabla^2 + \frac{1}{2} \frac{(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2 \hbar^4}{(m_e^*)^2 e^4} \frac{e}{\hbar^2} B L_z \\ &\quad + \frac{1}{8} \frac{(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2 \hbar^4}{(m_e^*)^2 e^4} \frac{e^2}{\hbar^2} B^2 r^2 \sin^2 \theta - \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r \hbar^2}{m_e^* e^2} \frac{1}{r} \\ &= -\frac{1}{2} (a_0^*)^2 \nabla^2 + \frac{1}{2} (a_0^*)^2 \frac{e}{\hbar^2} B L_z + \frac{1}{8} (a_0^*)^2 \frac{e^2}{\hbar^2} B^2 r^2 \sin^2 \theta - a_0^* \frac{1}{r}, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

gde smo uveli efektivni prvi Borov radijus elektrona:

$$a_0^* = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r \hbar^2}{m_e^* e^2}. \quad (\text{B.4})$$

Sada možemo uvesti nove veličine u efektivnim atomskim jedinicama (naravno, operator ∇ ima dimenzije inverzne dužine):

$$r' = \frac{r}{a_0^*}, \quad \nabla'^2 = (a_0^*)^2 \nabla^2, \quad B' = \frac{B}{\frac{\hbar}{e(a_0^*)^2}} = \frac{B}{B_0^*}, \quad L'_z = \frac{L_z}{\hbar}. \quad (\text{B.5})$$

Dakle, a_0^* je efektivna atomska jedinica za *dužinu*, \hbar za *moment impulsa*, a

$$B_0^* = \frac{\hbar}{e(a_0^*)^2} \quad (\text{B.6})$$

za *jačinu magnetnog polja*. Kako sada više nema mogućnosti zabune, vrtićemo se na stare promenljive, smenom $r' \rightarrow r$, $\nabla' \rightarrow \nabla$, $B' \rightarrow B$ i $L'_z \rightarrow L_z$, odakle sledi:

$$H_{\text{SKT}}^{(*)} = -\frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{2}BL_z + \frac{1}{8}B^2r^2\sin^2\theta - \frac{1}{r}, \quad (\text{B.7})$$

čime smo dobili izraz za hamiltonijan SKT u efektivnim atomskim jedinicama.

Prilikom rada će se, pored gorenavedenih veličina, često javiti i električni dipolni moment, definisan izrazom (7.44), koji je takođe onda potrebno zapisati u efektivnim atomskim jedinicama. Bez umanjenja opštosti, ovu veličinu možemo zapisati u jednodimenzionom slučaju:

$$d = -er = -\frac{er}{ea_0^*}ea_0^* = -r'd_0^*, \quad (\text{B.8})$$

gde smo rastojanje u efektivnim atomskim jedinicama ponovo izrazili kao $r' = r/a_0^*$, dok

$$d_0^* = ea_0^* \quad (\text{B.9})$$

predstavlja efektivnu atomsku jedinicu za *električni dipolni moment*. U skladu sa tim, električni dipolni moment u efektivnim atomskim jedinicama biće dat izrazom

$$d' = \frac{d}{d_0^*} = -r', \quad (\text{B.10})$$

što se, povratkom na stare promenljive, svodi na $d = -r$, što je upravo izraz koji je korišćen u odeljku 7.2.3.

B.2 Svođenje svojstvenog problema hamiltonijana SKT na običnu matričnu jednačinu

U cilju nalaženja energija i talasnih funkcija SKT, potrebno je najpre jednačinu (7.31), koju ovde prepisujemo:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{l'=|m|}^L c_{jl'} H_{ijl'} = E c_{il}, \quad (\text{B.11})$$

svesti na oblik pogodan za operisanje i računarsku implementaciju. Naime, pošto matrični element $H_{ijl'}$ zavisi od četiri indeksa, on se ne može predstaviti običnom dvodimenzionom matricom. Ovo će biti moguće ukoliko uvedeno nove indekse kojima ćemo hamiltonijan „prevesti” u oblik koji se može zapisati u obliku standardne matrice.

Preznačavanje indeksa sprovodi se na sledeći način. Najpre, primetimo da su koeficijenti c_{il} elementi matrice dimenzije $N \times (L - |m| + 1)$. Ideja je da se oni poređaju u niz po nekom unapred

određenom pravilu, formirajući *matricu kolonu*. Ovo je moguće izvesti ako se, na primer, za svaki element tog niza uzme po jedan koeficijent c_{il} na sledeći način:

$$\psi_{(i-1)(L-|m|+1)+l-|m|+1} = c_{il}, \quad i = \overline{1, N}, \quad l = \overline{|m|, L}, \quad (\text{B.12})$$

što odgovara uvođenju novog indeksa

$$u = (i-1)(L-|m|+1) + l - |m| + 1. \quad (\text{B.13})$$

Preoznačavanje indeksa sprovedeno na ovaj način podrazumeva najpre ređanje svih koeficijenata c_{il} sa $i = 0$ prema rastućem l . Nakon toga, prema rastućem l se ređaju koeficijenti sa $i = 1$ i tako redom. Na ovaj način, dobija se matrica kolona od $N(L-|m|+1)$ elemenata, što znači da za novouvedeni indeks važi $u = \overline{1, N(L-|m|+1)}$. Analogno tome, možemo definisati indeks $v = \overline{1, N(L-|m|+1)}$ pomoću izraza:

$$v = (j-1)(L-|m|+1) + l' - |m| + 1, \quad (\text{B.14})$$

gde je $j = \overline{1, N}$, odnosno $l' = \overline{|m|, L}$. Na kraju ove procedure, matrični element hamiltonijana $H_{ijl'l'}$ se transformiše u matrični element H_{uv} *kvadratne matrice* dimenzije $N(L-|m|+1) \times N(L-|m|+1)$, nakon čega jednačina (B.11) dobija oblik:

$$\sum_{v=1}^{N(L-|m|+1)} H_{uv} \psi_v = E \psi_u, \quad u = \overline{1, N(L-|m|+1)}. \quad (\text{B.15})$$

Ovo je već dobro poznata matrična reprezentacija svojstvenog problema hamiltonijana, čije svojstvene vrednosti i svojstveni vektori predstavljaju energije, odnosno (koeficijente u razvoju) talasne funkcije elektrona u kvantnoj tački. Kako bismo odredili ove talasne funkcije, na osnovu kojih, primenom relacije (7.62), možemo naći i matrične elemente operatora električnog dipolnog momenta, potrebno je da se inverznom procedurom vratimo na originalne indekse i i l , odnosno j i l' .

B.3 Vignerov $3j$ simbol

U problemima u kojima se sprežu dva ili više orbitalnih momenata pojedinačnih sistema, moguće je stanje celokupnog sistema prikazati kako u *nespregnutoj*, tako i u *spregnutoj* reprezentaciji [168]. Uzmimo, na primer, slučaj sprežanja dva pojedinačna orbitalna momenta \mathbf{J}_1 i \mathbf{J}_2 . Pojedinačno, vektori stanja ovih sistema se u Dirakovoj notaciji mogu prikazati kao $|j_k m_k\rangle$, $k = 1, 2$, koji predstavljaju svojstvena stanja operatora \mathbf{J}_k^2 i J_{kz} , pri čemu su j_k i m_k orbitalni i magnetni kvantni broj prvog, odnosno drugog sistema, respektivno. Sprežanjem ova dva sistema dobijamo sistem koji se može okarakterisati operatorom *ukupnog* orbitalnog momenta

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2. \quad (\text{B.16})$$

Sa jedne strane, celokupan sistem moguće je prikazati u *nespregnutoj* reprezentaciji, preko vektora stanja $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$, koji predstavlja proizvod pojedinačnih stanja, a istovremeno je i svojstveno stanje operatora \mathbf{J}_1^2 , \mathbf{J}_2^2 , J_{1z} i J_{2z} . Pored toga, moguće je definisati i vektor stanja $|j_1 j_2 j m\rangle$, koji istovremeno predstavlja svojstveno stanje operatora \mathbf{J}^2 i J_z . Ovo stanje zapravo odgovara *spregnutoj* reprezentaciji, i može da se zapiše kao

$$|j_1 j_2 j m\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle, \quad (\text{B.17})$$

gde se numeričke veličine $\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle$ nazivaju *Klebš-Gordonovi koeficijenti*. Iz ovog razvoja slede i relacije

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2, \quad m = m_1 + m_2, \quad (\text{B.18})$$

koje moraju da zadovoljavaju ukupni orbitalni i magnetni kvantni broj, respektivno.

Vignerov 3j simbol, koji se pojavljuje u poglavlju 7.2, proizašavši iz Gauntove formule (7.37), predstavlja numerički koeficijent koji je sa odgovarajućim Klebš-Gordonovim koeficijentom povezan na sledeći način:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1 - j_2 + m}}{\sqrt{2j + 1}} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle. \quad (\text{B.19})$$

Da 3j simbol ne bi bio jednak nuli, mora da važi *relacija trougla* (prva jednačina u (B.18)), kao i $m_1 + m_2 + (-m) = 0$, što dovodi do drugog izraza u okviru (B.18). Pored drugih osobina koje ovaj koeficijent mora da zadovoljava, i koje se mogu naći u relevantnoj literaturi [168], napomenimo samo da će 3j simbol kod koga je $m_1 = m_2 = m = 0$ biti različit od nule samo ako je $j_1 + j_2 + j$ *paran* broj.

B.4 Rotirajući jedinični vektori

Rotirajući jedinični vektori, koji se po prvi put u disertaciji pojavljuju u odeljku 7.2.3, proizlaze iz teorije ireducibilnih tenzorskih operatora, čiji su vektori jedan njihov specijalan slučaj [168]. Skalarni proizvod dva vektora se, tako, može definisati u duhu definicije skalarnog proizvoda dva tenzorska operatora:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -A_{+1}B_{-1} + A_0B_0 - A_{-1}B_{+1} = \sum_{q=-1}^{+1} (-1)^q A_q B_{-q} = \sum_{q=-1}^{+1} A_q^* B_q, \quad (\text{B.20})$$

pri čemu vidimo da su ovako definisane komponente vektora u opštem slučaju kompleksne veličine. Sa druge strane, za istu veličinu u Dekartovim koordinatama važi dobro poznat izraz:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (\text{B.21})$$

Izjednačavanjem desnih strana gornja dva izraza, dobijamo da moraju važiti sledeći izrazi:

$$A_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (A_x \pm i A_y), \quad A_0 = A_z, \quad (\text{B.22})$$

$$B_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (B_x \pm i B_y), \quad B_0 = B_z, \quad (\text{B.23})$$

za komponente vektora \mathbf{A} i \mathbf{B} u tzv. „rotirajućem” bazu.

Proizvoljni vektor može da se zapiše preko Dekartovih (ili pravougaonih) komponenti na standardan način:

$$\mathbf{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z, \quad (\text{B.24})$$

gde su \vec{e}_x , \vec{e}_y i \vec{e}_z jedinični vektori Dekartovog koordinatnog sistema. Ukoliko, pak, uvedemo jedinične vektore *sfernog* bazisa:

$$\vec{e}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - i\vec{e}_y), \quad \vec{e}_0 = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + i\vec{e}_y), \quad (\text{B.25})$$

pri čemu važi inverzna relacija

$$\vec{e}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_{-1} - \vec{e}_{+1}), \quad \vec{e}_y = \frac{i}{\sqrt{2}}(\vec{e}_{-1} + \vec{e}_{+1}), \quad \vec{e}_z = \vec{e}_0, \quad (\text{B.26})$$

za vektor \mathbf{A} u ovom bazisu možemo pisati:

$$\mathbf{A} = -A_{+1}\vec{e}_{-1} + A_0\vec{e}_0 - A_{-1}\vec{e}_{+1} = \sum_{q=-1}^{+1} (-1)^q A_q \vec{e}_{-q}, \quad (\text{B.27})$$

pri čemu su A_{+1} , A_0 i A_{-1} *sferne komponente* vektora, definisane relacijama (B.22).

Navedimo, na kraju, i *relacije ortonormiranosti* za sferne jedinične vektore. Za pravougaone jedinične vektore, naravno, važi relacija

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = x, y, z. \quad (\text{B.28})$$

Sa druge strane, relacija ortonormiranosti u sfernom bazisu glasi

$$\vec{e}_p^* \cdot \vec{e}_q = (-1)^p \vec{e}_{-p} \cdot \vec{e}_q = \delta_{pq}, \quad p, q = 0, \pm 1, \quad (\text{B.29})$$

što se lako može proveriti zamenom (B.25) u gornji izraz, i primenom relacije ortonormiranosti (B.28) za pravougaone vektore. Navedimo još i rezultat koji se dobija množenjem vektora \mathbf{A} sa jednim od „rotirajućih” vektora:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{e}_q = \sum_{p=-1}^{+1} (-1)^p A_p \vec{e}_{-p} \cdot \vec{e}_q = \sum_{p=-1}^{+1} A_p \delta_{pq} = A_q, \quad (\text{B.30})$$

gde smo iskoristili jednačine (B.27) i (B.29), kao i poznatu osobinu Kronekerove delte. Dobijeni rezultat ima veliki značaj prilikom diskusije vezane za relevantne komponente vektora električnog dipolnog momenta u Glavi 7, kao i prilikom interpretacije rezultata u Glavi III.

C Numeričko rešavanje Maksvel-Blohovih jednačina

C.1 Metod Runge-Kuta četvrtog reda

Numerički metod Runge-Kuta četvrtog reda koristi se za rešavanje sistema n običnih diferencijalnih jednačina (najčešće po vremenu, mada $t \in (0, T)$ može biti proizvoljan parametar):

$$\dot{y}_1 = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad (\text{C.1})$$

$$\dot{y}_2 = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad (\text{C.2})$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\dot{y}_n = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad (\text{C.3})$$

i služi za nalaženje nepoznatih funkcija $y_k(t)$ uz pomoć početnih uslova $y_k(0) = y_k^0$, $k = \overline{1, n}$. Gornje jednačine se često zapisuju u konciznijem, vektorskom obliku:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad (\text{C.4})$$

sa početnim uslovom $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$, gde je

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Ideja numeričkog metoda leži u *diskretizaciji* vremenskog intervala $(0, T)$, tako da se neprekidna promenljiva t definiše samo u čvorovima mreže od $N + 1$ tačaka sa korakom Δt . Formalno gledano, imaćemo

$$t \rightarrow t_j = j\Delta t, \quad j = \overline{0, N}, \quad \Delta t = \frac{T}{N}, \quad (\text{C.6})$$

dok nepoznata funkcija postaje

$$\mathbf{y}(t) \rightarrow \mathbf{y}(t_j) \equiv \mathbf{y}_j. \quad (\text{C.7})$$

U nastavku ćemo, dakle, koristiti vektorski pristup, koji omogućava jednostavniji zapis relevantnih jednačina, ali i veoma jednostavnu implementaciju.

Nakon formulacije problema, navedimo *Runge-Kuta šemu četvrtog reda*:

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(0), \quad (\text{C.8})$$

$$\mathbf{y}_{j+1} = \mathbf{y}_j + \frac{1}{6} \left(\mathbf{k}_1(t_j, \mathbf{y}_j) + 2\mathbf{k}_2(t_j, \mathbf{y}_j) + 2\mathbf{k}_3(t_j, \mathbf{y}_j) + \mathbf{k}_4(t_j, \mathbf{y}_j) \right). \quad (\text{C.9})$$

U gornjem izrazu, pomoćne vektorske funkcije

$$\mathbf{k}_i = \begin{pmatrix} k_i^1 \\ k_i^2 \\ \vdots \\ k_i^n \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,4}, \quad (\text{C.10})$$

imaju sledeći konkretan oblik:

$$\mathbf{k}_1(t_j, \mathbf{y}_j) = \Delta t \mathbf{f}(t_j, \mathbf{y}_j), \quad (\text{C.11})$$

$$\mathbf{k}_2(t_j, \mathbf{y}_j) = \Delta t \mathbf{f}\left(t_{j+\frac{1}{2}}, \mathbf{y}_j + \frac{1}{2} \mathbf{k}_1\right), \quad (\text{C.12})$$

$$\mathbf{k}_3(t_j, \mathbf{y}_j) = \Delta t \mathbf{f}\left(t_{j+\frac{1}{2}}, \mathbf{y}_j + \frac{1}{2} \mathbf{k}_2\right), \quad (\text{C.13})$$

$$\mathbf{k}_4(t_j, \mathbf{y}_j) = \Delta t \mathbf{f}(t_{j+1}, \mathbf{y}_j + \mathbf{k}_3), \quad (\text{C.14})$$

u kojima pojavljivanje faktora $1/2$ podrazumeva da se radi o računanju nepoznate veličine u tzv. *polukoraku* – tačno na polovini između dva čvora mreže, definisana preko (C.6). Ovaj numerički metod se veoma često koristi pri rešavanju problema sa početnim vrednostima, i najzastupljeniji je od svih metoda Runge-Kuta. Lokalna greška zaokruživanja mu je $O(\Delta t^4)$, uz pretpostavku da funkcije $y_k(t)$ imaju pet neprekidnih izvoda [283].

U problemima koji su od interesa u ovoj disertaciji, jednačine (C.1)–(C.3) će zapravo biti OB jednačine za konfiguraciju od interesa. Konkretno, nepoznate funkcije $y_k(t)$ biće odgovarajući elementi matrice gustine, a f_k funkcije opisane izrazima sa desne strane jednakosti OB jednačina. Prilikom rešavanja OB jednačina, naravno, poznati su i neophodni početni uslovi. Napomenimo da će metod Runge-Kuta četvrtog reda moći da se primeni i na situaciju kada nepoznate funkcije zavise i od propagacione koordinate (kao što je kod nas upravo i slučaj, jer je $\rho_{ij} = \rho_{ij}(z, t)$). Tada će totalni biti zamenjeni parcijalnim izvodima, a OB jednačine će morati da se rešavaju simultano sa propagacionom jednačinom (ili više njih, ukoliko je potrebno). Tada će metod Runge-Kuta četvrtog reda (za evoluciju) biti primenjen kombinovano sa Laks-Vendrofovom metodom za propagaciju, što će biti objašnjeno u narednom poglavlju.

C.2 Laks-Vendrofov metod

Propagacione jednačine (5.151), (5.152) i (5.159) spadaju u grupu *nehomogenih advekcionih jednačina* [284], čiji se oblik može, sasvim uopšte, zapisati kao:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi(z, t) = F(z, t). \quad (\text{C.15})$$

U ovoj jednačini figuriše nehomogeni deo $F(z, t)$, a nepoznata funkcija propagacione koordinate i vremena $\phi(z, t)$ određuje se uz pomoć *graničnog uslova* $\phi(0, t) = f(t)$. Funkcija $f(t)$ je unapred zadata, i u radu sa konkretnim fizičkim sistemima od interesa u disertaciji, gotovo uvek je opisana Gausovom krivom. U cilju rešavanja ove jednačine, krenućemo od *metoda konačnih razlika*, koji se sastoji u diskretizaciji prostora i vremena, odnosno formiranja svojevrsne prostorno-vremenske

mreže u oblasti $z \in (0, D)$ i $t \in (0, T)$. Tako se prostorni deo diskretizuje u $M + 1$ tačaka sa korakom Δz :

$$z \rightarrow z_i = i\Delta z, \quad i = \overline{0, M}, \quad \Delta z = \frac{D}{M}, \quad (\text{C.16})$$

dok ćemo za vreme imati

$$t \rightarrow t_j = j\Delta t, \quad j = \overline{0, N}, \quad \Delta t = \frac{T}{N}, \quad (\text{C.17})$$

gde je $N + 1$ broj tačaka po vremenskoj osi a Δt odgovarajući korak. Nepoznatu funkciju ćemo onda zapisivati kao

$$\phi(z, t) \rightarrow \phi(z_i, t_j) \equiv \phi_i^j, \quad (\text{C.18})$$

što predstavlja vrednost funkcije $\phi(z, t)$ u čvoru mreže na poziciji (i, j) .

Kada se diskretizacija primeni na jednačinu (C.15), nakon nezatnog sređivanja, dobićemo sledeći rezultat:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_i^j = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_i^j + F_i^j. \quad (\text{C.19})$$

Ukoliko se dobijena jednačina prepíše tako da, umesto koraka, u njoj figuriše *polukorak* ($\Delta z \rightarrow \Delta z/2$), imaćemo:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{i+\frac{1}{2}}^j = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{i+\frac{1}{2}}^j + F_{i+\frac{1}{2}}^j, \quad (\text{C.20})$$

gde članovi u kojima figuriše $1/2$ označavaju da se odgovarajuća veličina uzima u tački na polovini između dva čvora (u ovom slučaju, po z -osi). Iskoristimo sada *centralnu razliku* za zapisivanje parcijalnih izvoda po prostornoj koordinati:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{i+\frac{1}{2}}^j = \frac{\phi_{i+1}^j - \phi_i^j}{\Delta z}, \quad (\text{C.21})$$

odnosno po vremenu:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{i+\frac{1}{2}}^j = \frac{\phi_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \phi_{i+\frac{1}{2}}^{j-\frac{1}{2}}}{\Delta t}, \quad (\text{C.22})$$

i ubacimo dobijene izraze u (C.20). Rezultat je

$$\phi_{i+1}^j = \phi_i^j - \frac{\Delta z}{c\Delta t} \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \phi_{i+\frac{1}{2}}^{j-\frac{1}{2}}\right) + \Delta z F_{i+\frac{1}{2}}^j, \quad (\text{C.23})$$

što smo dobili nakon nezatnog preuređivanja jednačine.

Krenimo najpre od *Laksovog metoda*, koja za propagaciju koristi *prednju*, a za evoluciju *centralnu razliku*:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_i^j = \frac{\phi_{i+1}^j - \phi_i^j}{\Delta z}, \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_i^j = \frac{\phi_i^{j+1} - \phi_i^{j-1}}{2\Delta t}, \quad (\text{C.24})$$

i koja se često koristi pri rešavanju *homogenih* advekcionijskih jednačina ($F(z, t) = 0$). Ubacivanjem ovih izraza u (C.19), nakon preuređivanja sledi

$$\phi_{i+1}^j = \phi_i^j - \frac{\Delta z}{2c\Delta t} (\phi_i^{j+1} - \phi_i^{j-1}) + \Delta z F_i^j. \quad (\text{C.25})$$

Ako je mreža dovoljno gusta, ima smisla pretpostaviti da je vrednost funkcije u čvoru jednaka srednjoj vrednosti funkcije u dva susedna čvora (gledano po vremenskoj osi), što daje

$$\phi_i^j \approx \frac{1}{2} (\phi_i^{j+1} + \phi_i^{j-1}). \quad (\text{C.26})$$

Ubacivanjem ovog izraza u (C.25), dobijamo

$$\phi_{i+1}^j = \frac{1}{2} (\phi_i^{j+1} + \phi_i^{j-1}) - \frac{\Delta z}{2c\Delta t} (\phi_i^{j+1} - \phi_i^{j-1}) + \Delta z F_i^j. \quad (\text{C.27})$$

Primenimo sada upravo razvijenu Laksovu metodu na polukorak ($\Delta z \rightarrow \Delta z/2$ i $\Delta t \rightarrow \Delta t/2$), i to za dva slučaja:

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\phi_i^{j+1} + \phi_i^j) - \frac{\Delta z}{2c\Delta t} (\phi_i^{j+1} - \phi_i^j) + \frac{\Delta z}{2} F_i^{j+\frac{1}{2}}, \quad (\text{C.28})$$

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^{j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\phi_i^j + \phi_i^{j-1}) - \frac{\Delta z}{2c\Delta t} (\phi_i^j - \phi_i^{j-1}) + \frac{\Delta z}{2} F_i^{j-\frac{1}{2}}, \quad (\text{C.29})$$

koje sada možemo ubaciti u (C.23). U cilju dobijanja konačne šeme sa kojom ćemo raditi, uvedimo još i parametar

$$\alpha = \frac{\Delta z}{c\Delta t} \leq 1, \quad (\text{C.30})$$

pri čemu prikazana nejednakost istovremeno predstavlja i *uslov stabilnosti* algoritma (fizička brzina talasa mora biti manja ili jednaka brzini „propagacije” numeričkog metoda, odnosno Δt mora biti manje ili jednako vremenu potrebnom talasu da pređe rastojanje Δz).

Nakon primene Laksovog metoda na izraz (C.23) i sređivanja izraza, dobija se:

$$\phi_{i+1}^j = \frac{\alpha}{2} (\alpha + 1) \phi_i^{j-1} + (1 - \alpha^2) \phi_i^j + \frac{\alpha}{2} (\alpha - 1) \phi_i^{j+1} + \Delta z \chi_i^j, \quad (\text{C.31})$$

gde je

$$\chi_i^j = F_{i+\frac{1}{2}}^j + \frac{\alpha}{2} (F_i^{j-\frac{1}{2}} - F_i^{j+\frac{1}{2}}) \quad (\text{C.32})$$

nehomogeni deo čiji oblik zavisi od izbora konkretnog fizičkog problema. Ukoliko iskoristimo još i formulu za razvoj funkcije u Tejlorov red:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^j \approx F_i^j + \frac{1}{2} \Delta z \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_i^j, \quad F_i^{j\pm\frac{1}{2}} \approx F_i^j \pm \frac{1}{2} \Delta t \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_i^j, \quad (\text{C.33})$$

dobićemo konačno *Laks-Vendrofov* šemu, koja je data izrazima

$$\phi_{i+1}^j = b_{-1} \phi_i^{j-1} + b_0 \phi_i^j + b_{+1} \phi_i^{j+1} + \Delta z \chi_i^j, \quad (\text{C.34})$$

$$\chi_i^j = F_i^j + \frac{1}{2} \Delta z \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_i^j - \frac{1}{2} \alpha \Delta t \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_i^j, \quad (\text{C.35})$$

gde su

$$b_{-1} = \frac{\alpha}{2}(\alpha + 1), \quad b_0 = (1 - \alpha^2) \quad b_{+1} = \frac{\alpha}{2}(\alpha - 1), \quad (\text{C.36})$$

parametri koji zavise od karakteristika mreže.

Iako smo u poglavlju 5.4 izvodili propagacione jednačine za sva tri polja, u disertaciji smo se ograničili na situaciju gde se kontrolno i dodatno polje mogu predstaviti kontinualnim laserima, tako da je potrebno rešavati *samo jednu* propagacionu jednačinu – onu za sondirajuće polje, (5.151), odnosno (6.175) u konciznijoj formi. U našem slučaju, to znači da će biti $\phi = \Omega_p$ i $F = i\mathcal{K}\rho_{21}$, pa ćemo morati da nađemo parcijalne izvode matičnog elementa operatora gustine, koje bismo potom zamenili u (C.35). Tako ćemo izvod po propagacionoj koordinati zapisati pomoću *zadnje* razlike:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_i^j = i\mathcal{K}\left(\frac{\partial \rho_{21}}{\partial z}\right)_i^j = \frac{(\rho_{21})_i^j - (\rho_{21})_{i-1}^j}{\Delta z}, \quad (\text{C.37})$$

dok će se za izvod po vremenu morati da se iskoristi odgovarajuća OB jednačina, zavisno od toga sa kojim sistemom radimo. Primera radi, za zatvoren sistem sa tri nivoa (u slučaju dominantne elektron-fonske interakcije) je to jednačina (5.163):

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_i^j = i\mathcal{K}\left(\frac{\partial \rho_{21}}{\partial t}\right)_i^j = i\mathcal{K}\left(i(\Omega_p)_i^j(\rho_{11})_i^j - i(\Omega_p)_i^j(\rho_{22})_i^j + i\Omega_c^*(\rho_{31})_i^j - (i\Delta_p + \gamma_{21})(\rho_{21})_i^j\right), \quad (\text{C.38})$$

dok će se, za ostale konfiguracije, ovaj izraz dobiti po analogiji, korišćenjem odgovarajuće jednačine iz sistema OB jednačina – (5.168) u otvorenom sistemu sa tri, odnosno (5.182) u zatvorenom sa četiri nivoa.

Kako je propagaciona jednačina, zbog pojave ρ_{21} , spregnuta sa OB jednačinama, one moraju biti rešavane simultano, kombinacijom Laks-Vendrofovog metoda za propagaciju i metoda Runge-Kuta četvrtog reda za evoluciju. Tako se, najpre, za $z = 0$ ($i = 0$) iskoristi metod Runge-Kuta za sve trenutke vremena, čime se dobijaju matični elementi $(\rho_{mn})_0^j$:

$$(\rho_{mn})_0^0 \xrightarrow[\text{poč.uslov}]{\text{RK4}} (\rho_{mn})_0^1 \xrightarrow{\text{RK4}} (\rho_{mn})_0^2 \xrightarrow{\text{RK4}} \dots \xrightarrow{\text{RK4}} (\rho_{mn})_0^N. \quad (\text{C.39})$$

Nakon toga se primeni Laks-Vendrofov metod, čija je uloga propagacija sondirajućeg pulsa za korak Δz :

$$(\Omega_p)_0^j \xrightarrow[\text{gr.uslov}]{\text{LV}} (\Omega_p)_1^j, \quad j = \overline{0, M}, \quad (\text{C.40})$$

da bi se, potom, čitava procedura ponovila za matične elemente $(\rho_{mn})_1^j$. Dakle, rešavanje MB jednačina se odvija simultanom primenom dva numerička metoda, najpre (vremenske) evolucije u tački z_i :

$$(\rho_{mn})_i^0 \xrightarrow[\text{poč.uslov}]{\text{RK4}} (\rho_{mn})_i^1 \xrightarrow{\text{RK4}} (\rho_{mn})_i^2 \xrightarrow{\text{RK4}} \dots \xrightarrow{\text{RK4}} (\rho_{mn})_i^N, \quad (\text{C.41})$$

a potom i (prostorne) propagacije za svaki trenutak vremena:

$$(\Omega_p)_i^j \xrightarrow{\text{LV}} (\Omega_p)_{i+1}^j, \quad (\rho_{mn})_i^j \xrightarrow{\text{LV}} (\rho_{mn})_{i+1}^j, \quad j = \overline{0, M}. \quad (\text{C.42})$$

Na ovaj način, dobijamo prostorno-vremensku zavisnost Rabijeve frekvencije sondirajućeg pulsa za opseg nezavisnih promenljivih od interesa. Prilikom prikazivanja rezultata, najčešće je, umesto Ω_p , korišćena jačina električnog polja sondirajućeg pulsa, koju dobijamo primenom relacije $E_p = 2\hbar\Omega_p/d_{21}$.

Literatura

- [1] A. Krmpot, Uticaj profila i intenziteta laserskog snopa na osobine koherentnog tamnog stanja u atomima, Doktorska disertacija, Fizički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2010.
- [2] V. Pavlović, Koherentni efekti u interakciji konfiniranog atoma vodonika sa elektromagnetnim poljem, Doktorska disertacija, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu, 2017.
- [3] N. Filipović, L. Stevanović, V. Pavlović, Light storage and retrieval in spherical semiconductor quantum dots with on-center hydrogen impurity in magnetic field, *Superlattices and Microstructures* 147 (2020) 106691. doi:10.1016/j.spmi.2020.106691.
- [4] L. Stevanović, N. Filipović, V. Pavlović, Slow light pulse propagation through spherical quantum dot with on-center hydrogen impurity in magnetic field, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures* 118 (2020) 113883. doi:10.1016/j.physe.2019.113883.
- [5] L. Stevanović, N. Filipović, V. Pavlović, Electromagnetically induced transparency in degenerate ladder-type system, *Optical and Quantum Electronics* 50 (7) (2018) 287. doi:10.1007/s11082-018-1554-5.
- [6] N. Filipović, V. Pavlović, L. Stevanović, Slow and fast light propagation through ladder-type atomic media with degenerate energy levels, *Facta Universitatis, Series: Physics, Chemistry and Technology* 17 (2) (2019) 173–190. doi:10.2298/fupct1902173f.
- [7] M. O. Scully, M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, 1997. doi:10.1017/cbo9780511813993.
- [8] R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*, 3rd Edition, Academic Press, 2007.
- [9] R. W. Boyd, D. J. Gauthier, *Slow and fast light*, 2002. doi:10.1016/s0079-6638(02)80030-0.
- [10] R. W. Boyd, P. Narum, Slow- and fast-light: fundamental limitations, *Journal of Modern Optics* 54 (16-17) (2007) 2403–2411. doi:10.1080/09500340701639649.
- [11] R. W. Boyd, *Slow and fast light: fundamentals and applications*, *Journal of Modern Optics* 56 (18-19) (2009) 1908–1915. doi:10.1080/09500340903159495.
- [12] L. Brillouin, *Wave Propagation and Group Velocity*, Academic Press, New York, 1960.
- [13] J. Khurgin, R. Tucker (Eds.), *Slow light: Science and Applications*, CRC Press, Boca Raton, 2009.
- [14] J. B. Khurgin, Slow light in various media: a tutorial, *Advances in Optics and Photonics* 2 (3) (2010) 287. doi:10.1364/aop.2.000287.
- [15] Z. Ficek, S. Swain (Eds.), *Quantum Interference and Coherence: Theory and Experiments*, Springer Nature, 2004.
- [16] P. Lambropoulos, D. Petrosyan, *Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

- [17] T. Y. Abi-Salloum, Electromagnetically induced transparency and Autler-Townes splitting: Two similar but distinct phenomena in two categories of three-level atomic systems, *Physical Review A* 81 (5) (2010) 053836. doi:10.1103/physreva.81.053836.
- [18] P. M. Anisimov, J. P. Dowling, B. C. Sanders, Objectively discerning Autler-Townes splitting from electromagnetically induced transparency, *Physical Review Letters* 107 (16) (2011) 163604. doi:10.1103/physrevlett.107.163604.
- [19] R. Menzel, *Photonics: Linear and Nonlinear Interactions of Laser Light and Matter*, 2nd Edition, Springer, 2007.
- [20] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, 2000.
- [21] M. Fleischhauer, M. D. Lukin, Dark-state polaritons in electromagnetically induced transparency, *Physical Review Letters* 84 (22) (2000) 5094–5097. doi:10.1103/physrevlett.84.5094.
- [22] M. Fleischhauer, M. D. Lukin, Quantum memory for photons: Dark-state polaritons, *Physical Review A* 65 (2) (2002) 022314. doi:10.1103/physreva.65.022314.
- [23] A. Rastogi, E. Saglamyurek, T. Hrushevskiy, S. Hubele, L. J. LeBlanc, Discerning quantum memories based on electromagnetically-induced-transparency and Autler-Townes-splitting protocols, *Physical Review A* 100 (1) (2019) 012314. doi:10.1103/physreva.100.012314.
- [24] C. G. B. Garrett, D. E. McCumber, Propagation of a Gaussian light pulse through an anomalous dispersion medium, *Physical Review A* 1 (2) (1970) 305–313. doi:10.1103/physreva.1.305.
- [25] A. Isevgi, W. E. Lamb, Propagation of light pulses in a laser amplifier, *Physical Review* 185 (2) (1969) 517–545. doi:10.1103/physrev.185.517.
- [26] G. C. Sherman, K. E. Oughstun, Description of pulse dynamics in lorentz media in terms of the energy velocity and attenuation of time-harmonic waves, *Physical Review Letters* 47 (20) (1981) 1451–1454. doi:10.1103/physrevlett.47.1451.
- [27] G. Diener, Energy transport in dispersive media and superluminal group velocities, *Physics Letters A* 235 (2) (1997) 118–124. doi:10.1016/s0375-9601(97)00600-2.
- [28] N. G. Basov, R. V. Ambartsumyan, V. S. Zuev, P. G. Kryukov, V. S. Letokhov, The propagation velocity of a powerful light pulse in inversely populated medium, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 165 (1965) 58–60. doi:10.1109/jqe.1966.1074123.
- [29] N. G. Basov, V. S. Letokhov, Change of light pulse shape upon non-linear amplification, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 167 (1966) 73–76.
- [30] J. A. Carruthers, T. Bieber, Pulse Velocity in a Self-Locked He–Ne Laser, *Journal of Applied Physics* 40 (1) (1969) 426–428. doi:10.1063/1.1657079.
- [31] S. Chu, S. Wong, Linear pulse propagation in an absorbing medium, *Physical Review Letters* 48 (11) (1982) 738–741. doi:10.1103/physrevlett.48.738.
- [32] B. Segard, B. Macke, Observation of negative velocity pulse propagation, *Physics Letters A* 109 (5) (1985) 213–216. doi:10.1016/0375-9601(85)90305-6.
- [33] L. V. Hau, S. E. Harris, Z. Dutton, C. H. Behroozi, Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas, *Nature* 397 (6720) (1999) 594–598. doi:10.1038/17561.

- [34] S. E. Harris, J. E. Field, A. Kasapi, Dispersive properties of electromagnetically induced transparency, *Physical Review A* 46 (1) (1992) R29–R32. doi:10.1103/physreva.46.r29.
- [35] M. M. Kash, V. A. Sautenkov, A. S. Zibrov, L. Hollberg, G. R. Welch, M. D. Lukin, Y. Rostovtsev, E. S. Fry, M. O. Scully, Ultraslow Group Velocity and Enhanced Nonlinear Optical Effects in a Coherently Driven Hot Atomic Gas, *Physical Review Letters* 82 (26) (1999) 5229–5232. doi:10.1103/physrevlett.82.5229.
- [36] D. Budker, D. F. Kimball, S. M. Rochester, V. V. Yashchuk, Nonlinear magneto-optics and reduced group velocity of light in atomic vapor with slow ground state relaxation, *Physical Review Letters* 83 (9) (1999) 1767–1770. doi:10.1103/physrevlett.83.1767.
- [37] M. S. Bigelow, N. N. Lepeshkin, R. W. Boyd, Observation of ultraslow light propagation in a ruby crystal at room temperature, *Physical Review Letters* 90 (11) (2003) 113903. doi:10.1103/physrevlett.90.113903.
- [38] K. Y. Song, M. G. Herráez, L. Thévenaz, Observation of pulse delaying and advancement in optical fibers using stimulated Brillouin scattering, *Optics Express* 13 (1) (2005) 82. doi:10.1364/opex.13.000082.
- [39] J. E. Sharping, Y. Okawachi, A. L. Gaeta, Wide bandwidth slow light using a Raman fiber amplifier, *Optics Express* 13 (16) (2005) 6092. doi:10.1364/opex.13.006092.
- [40] A. Schweinsberg, N. N. Lepeshkin, M. S. Bigelow, R. W. Boyd, S. Jarabo, Observation of superluminal and slow light propagation in erbium-doped optical fiber, *Europhysics Letters (EPL)* 73 (2) (2006) 218–224. doi:10.1209/epl/i2005-10371-0.
- [41] M. G. Herráez, K. Y. Song, L. Thévenaz, Arbitrary-bandwidth Brillouin slow light in optical fibers, *Optics Express* 14 (4) (2006) 1395. doi:10.1364/oe.14.001395.
- [42] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*, OUP Oxford, 2000.
- [43] T. F. Gallagher, *Rydberg Atoms*, Cambridge University Press, 2005.
- [44] N. Sibalic, C. S. Adams, *Rydberg Physics*, IOP Publishing, 2018. doi:10.1088/978-0-7503-1635-4.
- [45] A. K. Mohapatra, T. R. Jackson, C. S. Adams, Coherent optical detection of highly excited Rydberg states using electromagnetically induced transparency, *Physical Review Letters* 98 (11) (2007) 113003. doi:10.1103/physrevlett.98.113003.
- [46] J. D. Pritchard, D. Maxwell, A. Gauguier, K. J. Weatherill, M. P. A. Jones, C. S. Adams, Cooperative atom-light interaction in a blockaded Rydberg ensemble, *Physical Review Letters* 105 (19) (2010) 193603. doi:10.1103/physrevlett.105.193603.
- [47] S. E. Harris, J. E. Field, A. Imamoglu, Nonlinear optical processes using electromagnetically induced transparency, *Physical Review Letters* 64 (10) (1990) 1107–1110. doi:10.1103/physrevlett.64.1107.
- [48] K.-J. Boller, A. Imamoglu, S. E. Harris, Observation of electromagnetically induced transparency, *Physical Review Letters* 66 (20) (1991) 2593–2596. doi:10.1103/physrevlett.66.2593.
- [49] J. E. Field, K. H. Hahn, S. E. Harris, Observation of electromagnetically induced transparency in collisionally broadened lead vapor, *Physical Review Letters* 67 (22) (1991) 3062–3065. doi:10.1103/physrevlett.67.3062.

- [50] S. E. Harris, Electromagnetically induced transparency, *Physics Today* 50 (7) (1997) 36–42. doi:10.1063/1.881806.
- [51] J. P. Marangos, Electromagnetically induced transparency, *Journal of Modern Optics* 45 (3) (1998) 471–503. doi:10.1080/09500349808231909.
- [52] M. Fleischhauer, A. Imamoglu, J. P. Marangos, Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media, *Reviews of Modern Physics* 77 (2) (2005) 633–673. doi:10.1103/revmodphys.77.633.
- [53] G. Alzetta, A. Gozzini, L. Moi, G. Orriols, An experimental method for the observation of r.f. transitions and laser beat resonances in oriented Na vapour, *Il Nuovo Cimento B Series* 11 36 (1) (1976) 5–20. doi:10.1007/bf02749417.
- [54] R. M. Whitley, C. R. Stroud, Double optical resonance, *Physical Review A* 14 (4) (1976) 1498–1513. doi:10.1103/physreva.14.1498.
- [55] H. R. Gray, R. M. Whitley, C. R. Stroud, Coherent trapping of atomic populations, *Optics Letters* 3 (6) (1978) 218. doi:10.1364/ol.3.000218.
- [56] S. Virally, A review of slow light physics and its applications, *École Polytechnique de Montréal* (2008).
- [57] K. Bergmann, H. Theuer, B. W. Shore, Coherent population transfer among quantum states of atoms and molecules, *Reviews of Modern Physics* 70 (3) (1998) 1003–1025. doi:10.1103/revmodphys.70.1003.
- [58] K. Bergmann, N. V. Vitanov, B. W. Shore, Perspective: Stimulated Raman adiabatic passage: The status after 25 years, *The Journal of Chemical Physics* 142 (17) (2015) 170901. doi:10.1063/1.4916903.
- [59] P. Marte, P. Zoller, J. L. Hall, Coherent atomic mirrors and beam splitters by adiabatic passage in multilevel systems, *Physical Review A* 44 (7) (1991) R4118–R4121. doi:10.1103/physreva.44.r4118.
- [60] R. Unanyan, M. Fleischhauer, B. W. Shore, K. Bergmann, Robust creation and phase-sensitive probing of superposition states via stimulated Raman adiabatic passage (STIRAP) with degenerate dark states, *Optics Communications* 155 (1-3) (1998) 144–154. doi:10.1016/s0030-4018(98)00358-7.
- [61] N. V. Vitanov, A. A. Rangelov, B. W. Shore, K. Bergmann, Stimulated Raman adiabatic passage in physics, chemistry, and beyond, *Reviews of Modern Physics* 89 (1) (2017) 015006. doi:10.1103/revmodphys.89.015006.
- [62] V. G. Arkhipkin, Y. I. Heller, Radiation amplification without population inversion at transitions to autoionizing states, *Physics Letters A* 98 (1-2) (1983) 12–14. doi:10.1016/0375-9601(83)90533-9.
- [63] A. S. Zibrov, M. D. Lukin, D. E. Nikonov, L. Hollberg, M. O. Scully, V. L. Velichansky, H. G. Robinson, Experimental demonstration of laser oscillation without population inversion via quantum interference in Rb, *Physical Review Letters* 75 (8) (1995) 1499–1502. doi:10.1103/physrevlett.75.1499.
- [64] G. G. Padmabandu, G. R. Welch, I. N. Shubin, E. S. Fry, D. E. Nikonov, M. D. Lukin, M. O. Scully, Laser oscillation without population inversion in a sodium atomic beam, *Physical Review Letters* 76 (12) (1996) 2053–2056. doi:10.1103/physrevlett.76.2053.

- [65] J. Mompart, R. Corbalán, Lasing without inversion, *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* 2 (3) (2000) R7–R24. doi:10.1088/1464-4266/2/3/201.
- [66] M. Jain, H. Xia, G. Y. Yin, A. J. Merriam, S. E. Harris, Efficient nonlinear frequency conversion with maximal atomic coherence, *Physical Review Letters* 77 (21) (1996) 4326–4329. doi:10.1103/physrevlett.77.4326.
- [67] C. Gerry, P. Knight, *Introductory Quantum Optics*, Cambridge University Press, 2004. doi:10.1017/cbo9780511791239.
- [68] U. Fano, Effects of configuration interaction on intensities and phase shifts, *Physical Review* 124 (6) (1961) 1866–1878. doi:10.1103/physrev.124.1866.
- [69] R. P. Madden, K. Codling, Two-electron excitation states in helium, *The Astrophysical Journal* 141 (1965) 364. doi:10.1086/148132.
- [70] U. Fano, J. W. Cooper, Line profiles in the far-uv absorption spectra of the rare gases, *Physical Review* 137 (5A) (1965) A1364–A1379. doi:10.1103/physrev.137.a1364.
- [71] B. W. Shore, Scattering theory of absorption-line profiles and refractivity, *Reviews of Modern Physics* 39 (2) (1967) 439–462. doi:10.1103/revmodphys.39.439.
- [72] S. H. Autler, C. H. Townes, Stark effect in rapidly varying fields, *Physical Review* 100 (2) (1955) 703–722. doi:10.1103/physrev.100.703.
- [73] M. A. Quesada, A. M. F. Lau, D. H. Parker, D. W. Chandler, Observation of Autler-Townes splitting in the multiphoton ionization of H₂: Measurement of vibronic transition moments between excited electronic states, *Physical Review A* 36 (8) (1987) 4107–4110. doi:10.1103/physreva.36.4107.
- [74] R. Garcia-Fernandez, A. Ekers, J. Klavins, L. P. Yatsenko, N. N. Bezuglov, B. W. Shore, K. Bergmann, Autler-Townes effect in a sodium molecular-ladder scheme, *Physical Review A* 71 (2) (2005) 023401. doi:10.1103/physreva.71.023401.
- [75] S. E. Harris, Lasers without inversion: Interference of lifetime-broadened resonances, *Physical Review Letters* 62 (9) (1989) 1033–1036. doi:10.1103/physrevlett.62.1033.
- [76] A. Imamoğlu, S. E. Harris, Lasers without inversion: interference of dressed lifetime-broadened states, *Optics Letters* 14 (24) (1989) 1344. doi:10.1364/ol.14.001344.
- [77] L. Hao, Y. Jiao, Y. Xue, X. Han, S. Bai, J. Zhao, G. Raithel, Transition from electromagnetically induced transparency to Autler-Townes splitting in cold cesium atoms, *New Journal of Physics* 20 (7) (2018) 073024. doi:10.1088/1367-2630/aad153.
- [78] Z. Ji, Y. Jiao, Y. Xue, L. Hao, J. Zhao, S. Jia, Distinction of electromagnetically induced transparency and Autler-Townes splitting in a Rydberg-involved ladder-type cold atom system, *Optics Express* 29 (8) (2021) 11406. doi:10.1364/oe.417529.
- [79] L.-Y. He, T.-J. Wang, Y.-P. Gao, C. Cao, C. Wang, Discerning electromagnetically induced transparency from Autler-Townes splitting in plasmonic waveguide and coupled resonators system, *Optics Express* 23 (18) (2015) 23817. doi:10.1364/oe.23.023817.
- [80] L. Giner, L. Veissier, B. Sparkes, A. S. Sheremet, A. Nicolas, O. S. Mishina, M. Scherman, S. Burks, I. Shomroni, D. V. Kupriyanov, P. K. Lam, E. Giacobino, J. Laurat, Experimental investigation of the transition between Autler-Townes splitting and electromagnetically-induced-transparency models, *Physical Review A* 87 (1) (2013) 013823. doi:10.1103/physreva.87.013823.

- [81] H.-C. Sun, Y. xi Liu, H. Ian, J. Q. You, E. Il'ichev, F. Nori, Electromagnetically induced transparency and Autler-Townes splitting in superconducting flux quantum circuits, *Physical Review A* 89 (6) (2014) 063822. doi:10.1103/physreva.89.063822.
- [82] B. Peng, Ş. K. Özdemir, W. Chen, F. Nori, L. Yang, What is and what is not electromagnetically induced transparency in whispering-gallery microcavities, *Nature Communications* 5 (1) (2014) 5082. doi:10.1038/ncomms6082.
- [83] X. Lu, X. Miao, J. Bai, L. Pei, M. Wang, Y. Gao, L.-A. Wu, P. Fu, R. Wang, Z. Zuo, Transition from Autler–Townes splitting to electromagnetically induced transparency based on the dynamics of decaying dressed states, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 48 (5) (2015) 055003. doi:10.1088/0953-4075/48/5/055003.
- [84] J. Liu, H. Yang, C. Wang, K. Xu, J. Xiao, Experimental distinction of Autler-Townes splitting from electromagnetically induced transparency using coupled mechanical oscillators system, *Scientific Reports* 6 (1) (2016) 19040. doi:10.1038/srep19040.
- [85] C. Tan, G. Huang, Crossover from electromagnetically induced transparency to Autler–Townes splitting in open ladder systems with Doppler broadening, *Journal of the Optical Society of America B* 31 (4) (2014) 704. doi:10.1364/josab.31.000704.
- [86] R. Walsworth, S. Yelin, M. Lukin, The story behind “stopped light”, *Optics and Photonics News* 13 (5) (2002) 50. doi:10.1364/opn.13.5.000050.
- [87] C. Liu, Z. Dutton, C. H. Behroozi, L. V. Hau, Observation of coherent optical information storage in an atomic medium using halted light pulses, *Nature* 409 (6819) (2001) 490–493. doi:10.1038/35054017.
- [88] D. F. Phillips, A. Fleischhauer, A. Mair, R. L. Walsworth, M. D. Lukin, Storage of light in atomic vapor, *Physical Review Letters* 86 (5) (2001) 783–786. doi:10.1103/physrevlett.86.783.
- [89] J. J. Longdell, E. Fraval, M. J. Sellars, N. B. Manson, Stopped light with storage times greater than one second using electromagnetically induced transparency in a solid, *Physical Review Letters* 95 (6) (2005) 063601. doi:10.1103/physrevlett.95.063601.
- [90] I. Novikova, R. L. Walsworth, Y. Xiao, Electromagnetically induced transparency-based slow and stored light in warm atoms, *Laser & Photonics Reviews* 6 (3) (2011) 333–353. doi:10.1002/lpor.201100021.
- [91] G. Heinze, C. Hubrich, T. Halfmann, Stopped light and image storage by electromagnetically induced transparency up to the regime of one minute, *Physical Review Letters* 111 (3) (2013) 033601. doi:10.1103/physrevlett.111.033601.
- [92] M. D. Eisaman, A. André, F. Massou, M. Fleischhauer, A. S. Zibrov, M. D. Lukin, Electromagnetically induced transparency with tunable single-photon pulses, *Nature* 438 (7069) (2005) 837–841. doi:10.1038/nature04327.
- [93] S. Zhou, S. Zhang, C. Liu, J. F. Chen, J. Wen, M. M. T. Loy, G. K. L. Wong, S. Du, Optimal storage and retrieval of single-photon waveforms, *Optics Express* 20 (22) (2012) 24124. doi:10.1364/oe.20.024124.
- [94] G. Grigoryan, V. Chaltykyan, E. Gazazyan, O. Tikhova, V. Paturyan, Pulse propagation, population transfer, and light storage in five-level media, *Physical Review A* 91 (2) (2015) 023802. doi:10.1103/physreva.91.023802.

- [95] B. M. Sparkes, M. Hosseini, G. Hétet, P. K. Lam, B. C. Buchler, ac Stark gradient echo memory in cold atoms, *Physical Review A* 82 (4) (2010) 043847. doi:10.1103/physreva.82.043847.
- [96] W.-T. Liao, C. H. Keitel, A. Pálffy, All-electromagnetic control of broadband quantum excitations using gradient photon echoes, *Physical Review Letters* 113 (12) (2014) 123602. doi:10.1103/physrevlett.113.123602.
- [97] E. Saglamyurek, T. Hrushevskiy, A. Rastogi, K. Heshami, L. J. LeBlanc, Coherent storage and manipulation of broadband photons via dynamically controlled Autler–Townes splitting, *Nature Photonics* 12 (12) (2018) 774–782. doi:10.1038/s41566-018-0279-0.
- [98] A. V. Gorshkov, A. André, M. Fleischhauer, A. S. Sørensen, M. D. Lukin, Universal approach to optimal photon storage in atomic media, *Physical Review Letters* 98 (12) (2007) 123601. doi:10.1103/physrevlett.98.123601.
- [99] T. Chakraborty, *Quantum dots: a survey of the properties of artificial atoms*, Elsevier, 1999. doi:10.1016/b978-044450258-2/50003-1.
- [100] D. Heitmann, J. P. Kotthaus, The spectroscopy of quantum dot arrays, *Physics Today* 46 (6) (1993) 56–63. doi:10.1063/1.881355.
- [101] L. P. Kouwenhoven, A. T. Johnson, N. C. van der Vaart, C. J. P. M. Harmans, C. T. Foxon, Quantized current in a quantum-dot turnstile using oscillating tunnel barriers, *Physical Review Letters* 67 (12) (1991) 1626–1629. doi:10.1103/physrevlett.67.1626.
- [102] P. C. Ku, C. J. Chang-Hasnain, S. L. Chuang, Slow light in semiconductor heterostructures, *Journal of Physics D: Applied Physics* 40 (5) (2007) R93–R107. doi:10.1088/0022-3727/40/5/r01.
- [103] P. Kaer Nielsen, H. Thyrrstrup, J. Mørk, B. Tromborg, Numerical investigation of electromagnetically induced transparency in a quantum dot structure, *Optics Express* 15 (10) (2007) 6396. doi:10.1364/oe.15.006396.
- [104] D. Bimberg, Quantum dot based nanophotonics and nanoelectronics, *Electronics Letters* 44 (3) (2008) 168. doi:10.1049/el:20080074.
- [105] P. Borri, W. Langbein, S. Schneider, U. Woggon, R. Sellin, D. Ouyang, D. Bimberg, Ultralong dephasing time in InGaAs quantum dots, *Physical Review Letters* 87 (15) (2001) 157401. doi:10.1103/physrevlett.87.157401.
- [106] P. Borri, S. Schneider, W. Langbein, U. Woggon, A. E. Zhukov, V. M. Ustinov, N. N. Ledentsov, Z. I. Alferov, D. Ouyang, D. Bimberg, Ultrafast carrier dynamics and dephasing in InAs quantum-dot amplifiers emitting near 1.3- μm -wavelength at room temperature, *Applied Physics Letters* 79 (16) (2001) 2633–2635. doi:10.1063/1.1411986.
- [107] P. Harrison, *Quantum Wells, Wires and Dots*, John Wiley & Sons, 2005. doi:10.1002/0470010827.
- [108] N. W. Ashcroft, N. D. Mermin, *Solid State Physics*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.
- [109] S. Glutsch, *Excitons in Low-Dimensional Semiconductors : Theory Numerical Methods Applications*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [110] S. W. Koch, M. Kira, G. Khitrova, H. M. Gibbs, Semiconductor excitons in new light, *Nature Materials* 5 (7) (2006) 523–531. doi:10.1038/nmat1658.

- [111] L. J. Challis, Physics in less than three dimensions, *Contemporary Physics* 33 (2) (1992) 111–127. doi:10.1080/00107519208219535.
- [112] D. Bimberg, M. Grundmann, N. N. Ledentsov, *Quantum Dot Heterostructures*, John Wiley & Sons, 1999.
- [113] H. Saito, K. Nishi, I. Ogura, S. Sugou, Y. Sugimoto, Room-temperature lasing operation of a quantum-dot vertical-cavity surface-emitting laser, *Applied Physics Letters* 69 (21) (1996) 3140–3142. doi:10.1063/1.116808.
- [114] U. Woggon, *Optical Properties of Semiconductor Quantum Dots*, Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [115] T. Skereň, *Quantum nanostructures: theoretical analysis and modeling*, Master rad, Czech Technical University in Prague, Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering, Prague, 2008.
- [116] M. Reed, J. Randall, R. Aggarwal, R. Matyi, T. Moore, A. Wetsel, Observation of discrete electronic states in a zero-dimensional semiconductor nanostructure, *Physical Review Letters* 60 (6) (1988) 535–537. doi:10.1103/physrevlett.60.535.
- [117] B. Su, V. J. Goldman, J. E. Cunningham, Single-electron tunneling in nanometer-scale double-barrier heterostructure devices, *Physical Review B* 46 (12) (1992) 7644–7655. doi:10.1103/physrevb.46.7644.
- [118] A. Kumar, S. E. Laux, F. Stern, Electron states in a GaAs quantum dot in a magnetic field, *Physical Review B* 42 (8) (1990) 5166–5175. doi:10.1103/physrevb.42.5166.
- [119] D. Loss, D. P. DiVincenzo, Quantum computation with quantum dots, *Physical Review A* 57 (1) (1998) 120–126. doi:10.1103/physreva.57.120.
- [120] R. A. Žak, B. Röthlisberger, S. Chesi, D. Loss, Quantum computing with electron spins in quantum dots, *La Rivista del Nuovo Cimento* 33 (2010) 345–399. doi:10.1393/ncr/i2010-10056-y.
- [121] H. P. Rocksby, Color of selenium ruby glasses, *J. Soc. Glass. Technol.* 16 (1932) 171.
- [122] A. I. Ekimov, A. L. Efros, A. A. Onushchenko, Quantum size effect in semiconductor microcrystals, *Solid State Communications* 56 (11) (1985) 921–924. doi:10.1016/s0038-1098(85)80025-9.
- [123] L. Manna, E. C. Scher, A. P. Alivisatos, Synthesis of soluble and processable rod-, arrow-, teardrop-, and tetrapod-shaped CdSe nanocrystals, *Journal of the American Chemical Society* 122 (2000) 12700–12706. doi:10.1021/ja003055+.
- [124] A. Y. Cho, J. R. Arthur, Molecular beam epitaxy, *Progress in Solid State Chemistry* 10 (1975) 157–191. doi:10.1016/0079-6786(75)90005-9.
- [125] J.-Y. Marzin, J.-M. Gérard, A. Izraël, D. Barrier, G. Bastard, Photoluminescence of single InAs quantum dots obtained by self-organized growth on GaAs, *Physical Review Letters* 73 (5) (1994) 716–719. doi:10.1103/physrevlett.73.716.
- [126] D. Leonard, M. Krishnamurthy, C. M. Reaves, S. P. Denbaars, P. M. Petroff, Direct formation of quantum-sized dots from uniform coherent islands of InGaAs on GaAs surfaces, *Applied Physics Letters* 63 (23) (1993) 3203–3205. doi:10.1063/1.110199.
- [127] M. Grundmann, J. Christen, N. N. Ledentsov, J. Böhrer, D. Bimberg, S. S. Ruvimov, P. Werner, U. Richter, U. Gösele, J. Heydenreich, V. M. Ustinov, A. Y. Egorov, A. E. Zhukov, P. S.

- Kop'ev, Z. I. Alferov, Ultranarrow luminescence lines from single quantum dots, *Physical Review Letters* 74 (20) (1995) 4043–4046. doi:10.1103/physrevlett.74.4043.
- [128] J. M. Moison, F. Houzay, F. Barthe, L. Leprince, E. André, O. Vatel, Self-organized growth of regular nanometer-scale InAs dots on GaAs, *Applied Physics Letters* 64 (2) (1994) 196–198. doi:10.1063/1.111502.
- [129] D. Leonard, K. Pond, P. M. Petroff, Critical layer thickness for self-assembled InAs islands on GaAs, *Physical Review B* 50 (16) (1994) 11687–11692. doi:10.1103/physrevb.50.11687.
- [130] M. Fricke, A. Lorke, J. P. Kotthaus, G. Medeiros-Ribeiro, P. M. Petroff, Shell structure and electron-electron interaction in self-assembled InAs quantum dots, *Europhysics Letters (EPL)* 36 (3) (1996) 197–202. doi:10.1209/epl/i1996-00210-x.
- [131] A. Kudelski, A. Lemaître, A. Miard, P. Voisin, T. C. M. Graham, R. J. Warburton, O. Krebs, Optically probing the fine structure of a single Mn atom in an InAs quantum dot, *Physical Review Letters* 99 (24) (2007) 247209. doi:10.1103/physrevlett.99.247209.
- [132] O. Krebs, E. Benjamin, A. Lemaître, Magnetic anisotropy of singly Mn-doped InAs/GaAs quantum dots, *Physical Review B* 80 (16) (2009) 165315. doi:10.1103/physrevb.80.165315.
- [133] E. Baudin, E. Benjamin, A. Lemaître, O. Krebs, Optical pumping and a nondestructive readout of a single magnetic impurity spin in an InAs/GaAs quantum dot, *Physical Review Letters* 107 (19) (2011) 197402. doi:10.1103/physrevlett.107.197402.
- [134] S. Sauvage, P. Boucaud, F. H. Julien, J.-M. Gérard, J.-Y. Marzin, Infrared spectroscopy of intraband transitions in self-organized InAs/GaAs quantum dots, *Journal of Applied Physics* 82 (7) (1997) 3396–3401. doi:10.1063/1.365654.
- [135] N. Liu, J. Tersoff, O. Baklenov, A. L. Holmes, C. K. Shih, Nonuniform composition profile In_{0.5}Ga_{0.5}As alloy quantum dots, *Physical Review Letters* 84 (2) (2000) 334–337. doi:10.1103/physrevlett.84.334.
- [136] T. Ando, Y. Arakawa, K. Furuya, S. Komiyama, H. Nakashima (Eds.), *Mesoscopic physics and electronics*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, 1998.
- [137] L. Sohn, L. P. Kouwenhoven, G. Schön (Eds.), *Mesoscopic electron transport*, Springer, Dordrecht, 1997.
- [138] R. C. Ashoori, H. L. Stormer, J. S. Weiner, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin, K. W. West, N-electron ground state energies of a quantum dot in magnetic field, *Physical Review Letters* 71 (4) (1993) 613–616. doi:10.1103/physrevlett.71.613.
- [139] M. W. Dellow, P. H. Beton, C. J. G. M. Langerak, T. J. Foster, P. C. Main, L. Eaves, M. Henini, S. P. Beaumont, C. D. W. Wilkinson, Resonant tunneling through the bound states of a single donor atom in a quantum well, *Physical Review Letters* 68 (11) (1992) 1754–1757. doi:10.1103/physrevlett.68.1754.
- [140] B. J. van Wees, L. P. Kouwenhoven, C. J. P. M. Harmans, J. G. Williamson, C. E. Timmering, M. E. I. Broekaart, C. T. Foxon, J. J. Harris, Observation of zero-dimensional states in a one-dimensional electron interferometer, *Physical Review Letters* 62 (21) (1989) 2523–2526. doi:10.1103/physrevlett.62.2523.
- [141] C. Sikorski, U. Merkt, Spectroscopy of electronic states in InSb quantum dots, *Physical Review Letters* 62 (18) (1989) 2164–2167. doi:10.1103/physrevlett.62.2164.

- [142] C. Schüller, K. Keller, G. Biese, E. Ulrichs, L. Rolf, C. Steinebach, D. Heitmann, K. Eberl, Quasiatomic fine structure and selection rules in quantum dots, *Physical Review Letters* 80 (12) (1998) 2673–2676. doi:10.1103/physrevlett.80.2673.
- [143] L. P. Kouwenhoven, P. L. McEuen, Single electron transport through a quantum dot, in: *Nanotechnology*, Springer New York, 1999, pp. 471–535. doi:10.1007/978-1-4612-0531-9_13.
- [144] G. W. Bryant, Electronic structure of ultras-small quantum-well boxes, *Physical Review Letters* 59 (10) (1987) 1140–1143. doi:10.1103/physrevlett.59.1140.
- [145] G. Burkard, D. Loss, D. P. DiVincenzo, Coupled quantum dots as quantum gates, *Physical Review B* 59 (3) (1999) 2070–2078. doi:10.1103/physrevb.59.2070.
- [146] M. A. Reed, J. N. Randall, J. H. Luscombe, W. R. Frensley, R. J. Aggarwal, R. J. Matyi, T. M. Moore, A. E. Wetsel, Quantum dot resonant tunneling spectroscopy, in: *Advances in Solid State Physics*, Springer Berlin Heidelberg, 1989, pp. 267–283. doi:10.1007/bfb0108017.
- [147] P. A. Maksym, L. D. Hallam, J. Weis, Models of quantum dots, *Physica B: Condensed Matter* 212 (3) (1995) 213–217. doi:10.1016/0921-4526(95)00035-8.
- [148] M. F. Crommie, C. P. Lutz, D. M. Eigler, Confinement of electrons to quantum corrals on a metal surface, *Science* 262 (5131) (1993) 218–220. doi:10.1126/science.262.5131.218.
- [149] R. Hanson, L. P. Kouwenhoven, J. R. Petta, S. Tarucha, L. M. K. Vandersypen, Spins in few-electron quantum dots, *Reviews of Modern Physics* 79 (4) (2007) 1217–1265. doi:10.1103/revmodphys.79.1217.
- [150] G. Cantele, G. Piacente, D. Ninno, G. Iadonisi, Optical anisotropy of ellipsoidal quantum dots, *Physical Review B* 66 (11) (2002) 113308. doi:10.1103/physrevb.66.113308.
- [151] E. Sadeghi, Electric field and impurity effects on optical property of a three-dimensional quantum dot: A combinational potential scheme, *Superlattices and Microstructures* 50 (4) (2011) 331–339. doi:10.1016/j.spmi.2011.07.011.
- [152] S.-S. Li, J.-B. Xia, Electronic states of a hydrogenic donor impurity in semiconductor nanostructures, *Physics Letters A* 366 (1-2) (2007) 120–123. doi:10.1016/j.physleta.2007.02.028.
- [153] L. Lu, W. Xie, Impurity and exciton effects on the nonlinear optical properties of a disc-like quantum dot under a magnetic field, *Superlattices and Microstructures* 50 (1) (2011) 40–49. doi:10.1016/j.spmi.2011.04.007.
- [154] L. Lu, W. Xie, H. Hassanabadi, The effects of intense laser on nonlinear properties of shallow donor impurities in quantum dots with the Woods–Saxon potential, *Journal of Luminescence* 131 (12) (2011) 2538–2543. doi:10.1016/j.jlumin.2011.06.051.
- [155] O. Aytekin, S. Turgut, V. Ü. Ünal, E. Akşahin, M. Tomak, Nonlinear optical properties of a Woods–Saxon quantum dot under an electric field, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures* 54 (2013) 257–261. doi:10.1016/j.physe.2013.06.004.
- [156] L. R. Wilson, D. J. Mowbray, M. S. Skolnick, M. Morifuji, M. J. Steer, I. A. Larkin, M. Hopkinson, Magneto-optical studies of self-organized InAs/GaAs quantum dots, *Physical Review B* 57 (4) (1998) R2073–R2076. doi:10.1103/physrevb.57.r2073.

- [157] U. Yesilgul, F. Ungan, S. Şakiroğlu, C. Duque, M. Mora-Ramos, E. Kasapoglu, H. Sari, I. Sökmen, The effect of magnetic field on the impurity binding energy of shallow donor impurities in a $\text{Ga}_{1-x}\text{In}_x\text{N}_y\text{As}_{1-y}/\text{GaAs}$ quantum well, *Nanoscale Research Letters* 7 (1) (2012) 586. doi:10.1186/1556-276x-7-586.
- [158] H. E. Ghazi, A. Jorio, I. Zorkani, Theoretical investigation of stark effect on shallow donor binding energy in InGaN spherical QD-QW, *Physica B: Condensed Matter* 422 (2013) 47–50. doi:10.1016/j.physb.2013.04.011.
- [159] Y. Yakar, B. Çakır, A. Özmen, Calculation of linear and nonlinear optical absorption coefficients of a spherical quantum dot with parabolic potential, *Optics Communications* 283 (9) (2010) 1795–1800. doi:10.1016/j.optcom.2009.12.027.
- [160] L. Stevanović, N. Filipović, V. Pavlović, Optical properties of spherical quantum dot with on-center hydrogen impurity in magnetic field, *Optical and Quantum Electronics* 48 (4) (2016) 231. doi:10.1007/s11082-016-0502-5.
- [161] L. Stevanović, N. Filipović, V. Pavlović, Effect of magnetic field on absorption coefficients, refractive index changes and group index of spherical quantum dot with hydrogenic impurity, *Optical Materials* 91 (2019) 62–69. doi:10.1016/j.optmat.2019.02.049.
- [162] M. Kırak, S. Yılmaz, M. Gençaslan, Effects of the magnetic field on the linear and nonlinear optical absorption coefficients and the refractive index changes in a spherical quantum dot, *Journal of Nanoelectronics and Optoelectronics* 5 (3) (2010) 391–396. doi:10.1166/jno.2010.1126.
- [163] B. Çakır, Y. Yakar, A. Özmen, M. Ö. Sezer, M. Şahin, Linear and nonlinear optical absorption coefficients and binding energy of a spherical quantum dot, *Superlattices and Microstructures* 47 (4) (2010) 556–566. doi:10.1016/j.spmi.2009.12.002.
- [164] A. A. Gusev, L. L. Hai, S. I. Vinitsky, O. Chuluunbaatar, V. L. Derbov, A. S. Klombotskaya, K. G. Dvoyan, H. A. Sarkisyan, Analytical and numerical calculations of spectral and optical characteristics of spheroidal quantum dots, *Physics of Atomic Nuclei* 76 (8) (2013) 1033–1055. doi:10.1134/s1063778813080152.
- [165] G. V. B. de Souza, A. Bruno-Alfonso, Finite-difference calculation of donor energy levels in a spherical quantum dot subject to a magnetic field, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures* 66 (2015) 128–132. doi:10.1016/j.physe.2014.10.011.
- [166] Y. Yakar, B. Çakır, A. Özmen, Magnetic field effects on oscillator strength, dipole polarizability and refractive index changes in spherical quantum dot, *Chemical Physics Letters* 708 (2018) 138–145. doi:10.1016/j.cpllett.2018.08.010.
- [167] B. H. Bransden, C. J. Joachain, *Physics of atoms and molecules*, Longman, London New York, 1983.
- [168] M. Weissbluth, *Atoms and Molecules*, Elsevier Science & Techn., 2012.
- [169] V. Fock, Bemerkung zur quantelung des harmonischen oszillators im magnetfeld, *Zeitschrift für Physik* 47 (5-6) (1928) 446–448. doi:10.1007/bf01390750.
- [170] C. G. Darwin, The diamagnetism of the free electron, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 27 (1) (1931) 86–90. doi:10.1017/s0305004100009373.
- [171] L. Landau, Diamagnetismus der metalle, *Zeitschrift für Physik* 64 (9-10) (1930) 629–637. doi:10.1007/bf01397213.

- [172] G. Bastard, Hydrogenic impurity states in a quantum well: A simple model, *Physical Review B* 24 (8) (1981) 4714–4722. doi:10.1103/physrevb.24.4714.
- [173] O. Holtz, Q. X. Zhao, Q. X. Zhao, *Impurities Confined in Quantum Structures*, Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [174] C. G. Van de Walle, Theoretical aspects of hydrogen in crystalline semiconductors, *Physica B: Condensed Matter* 170 (1-4) (1991) 21–32. doi:10.1016/0921-4526(91)90105-n.
- [175] C. G. Van de Walle, B. R. Tuttle, Microscopic theory of hydrogen in silicon devices, *IEEE Transactions on Electron Devices* 47 (10) (2000) 1779–1786. doi:10.1109/16.870547.
- [176] W. Ulrici, Hydrogen-impurity complexes in III–V semiconductors, *Reports on Progress in Physics* 67 (12) (2004) 2233–2286. doi:10.1088/0034-4885/67/12/r03.
- [177] C. G. Van de Walle, Hydrogen in semiconductors and insulators, *Journal of Alloys and Compounds* 446–447 (2007) 48–51. doi:10.1016/j.jallcom.2006.12.033.
- [178] C. G. Van de Walle, Y. Bar-Yam, S. T. Pantelides, Theory of hydrogen diffusion and reactions in crystalline silicon, *Physical Review Letters* 60 (26) (1988) 2761–2764. doi:10.1103/physrevlett.60.2761.
- [179] C. Herring, N. M. Johnson, C. G. Van de Walle, Energy levels of isolated interstitial hydrogen in silicon, *Physical Review B* 64 (12) (2001) 125209. doi:10.1103/physrevb.64.125209.
- [180] S. Limpijumnong, C. G. Van de Walle, Passivation and doping due to hydrogen in III-nitrides, *Physica Status Solidi (b)* 228 (1) (2001) 303–307. doi:10.1002/1521-3951(200111)228:1<303::aid-pssb303>3.0.co;2-a.
- [181] A. Michels, J. De Boer, A. Bijl, Remarks concerning molecular interaction and their influence on the polarisability, *Physica* 4 (10) (1937) 981–994. doi:10.1016/s0031-8914(37)80196-2.
- [182] T. Guillot, A comparison of the interiors of Jupiter and Saturn, *Planetary and Space Science* 47 (10-11) (1999) 1183–1200. doi:10.1016/s0032-0633(99)00043-4.
- [183] B. Saha, P. K. Mukherjee, G. H. F. Dierksen, Energy levels and structural properties of compressed hydrogen atom under Debye screening, *Astronomy & Astrophysics* 396 (1) (2002) 337–344. doi:10.1051/0004-6361:20021350.
- [184] J. P. Connerade, V. K. Dolmatov, P. A. Lakshmi, S. T. Manson, Electron structure of endohedrally confined atoms: atomic hydrogen in an attractive shell, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 32 (10) (1999) L239–L245. doi:10.1088/0953-4075/32/10/101.
- [185] D. S. Chuu, C. M. Hsiao, W. N. Mei, Hydrogenic impurity states in quantum dots and quantum wires, *Physical Review B* 46 (7) (1992) 3898–3905. doi:10.1103/physrevb.46.3898.
- [186] N. Porras-Montenegro, S. T. Pérez-Merchancano, Hydrogenic impurities in GaAs-(Ga,Al)As quantum dots, *Physical Review B* 46 (15) (1992) 9780–9783. doi:10.1103/physrevb.46.9780.
- [187] S. Yngve, The energy levels and the corresponding normalized wave functions for a model of a compressed atom. II, *Journal of Mathematical Physics* 29 (4) (1988) 931–936. doi:10.1063/1.527990.

- [188] C. Laughlin, B. L. Burrows, M. Cohen, A hydrogen-like atom confined within an impenetrable spherical box, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 35 (3) (2002) 701–715. doi:10.1088/0953-4075/35/3/320.
- [189] K. Guo, Z. Zhang, S. Mou, B. Xiao, Effect of hydrogenic impurity on linear and nonlinear optical absorption coefficients and refractive index changes in a quantum dot, *Journal of Optics* 17 (5) (2015) 055504. doi:10.1088/2040-8978/17/5/055504.
- [190] V. I. Boichuk, I. V. Bilynskyi, R. Y. Leshko, L. M. Turyanska, The effect of the polarization charges on the optical properties of a spherical quantum dot with an off-central hydrogenic impurity, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures* 44 (2) (2011) 476–482. doi:10.1016/j.physe.2011.09.025.
- [191] S. Cohen, S. I. Themelis, K. D. Sen, Dynamic dipole polarizabilities of the ground and excited states of confined hydrogen atom computed by means of a mapped Fourier grid method, *International Journal of Quantum Chemistry* 108 (2) (2007) 351–361. doi:10.1002/qua.21459.
- [192] L. Stevanović, Oscillator strengths of the transitions in a spherically confined hydrogen atom, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 43 (16) (2010) 165002. doi:10.1088/0953-4075/43/16/165002.
- [193] M. Kirak, Y. Altinok, S. Yilmaz, The effects of the hydrostatic pressure and temperature on binding energy and optical properties of a donor impurity in a spherical quantum dot under external electric field, *Journal of Luminescence* 136 (2013) 415–421. doi:10.1016/j.jlumin.2012.12.026.
- [194] B. Çakır, Y. Yakar, A. Özmen, Calculation of oscillator strength and the effects of electric field on energy states, static and dynamic polarizabilities of the confined hydrogen atom, *Optics Communications* 311 (2013) 222–228. doi:10.1016/j.optcom.2013.08.015.
- [195] S. Lumb, S. Lumb, V. Prasad, Laser-induced excitation and ionization of a confined hydrogen atom in an exponential-cosine-screened Coulomb potential, *Physical Review A* 90 (3) (2014) 032505. doi:10.1103/physreva.90.032505.
- [196] V. Pavlović, Electromagnetically induced transparency in a spherical quantum dot with hydrogenic impurity in a four level ladder configuration, *Optik* 127 (16) (2016) 6351–6357. doi:10.1016/j.ijleo.2016.04.071.
- [197] V. Pavlović, L. Stevanović, Electromagnetically induced transparency in a spherical quantum dot with hydrogenic impurity in the external magnetic field, *Superlattices and Microstructures* 92 (2016) 10–23. doi:10.1016/j.spmi.2016.02.003.
- [198] V. Pavlović, M. Šušnjar, K. Petrović, L. Stevanović, Electromagnetically induced transparency in a multilayered spherical quantum dot with hydrogenic impurity, *Optical Materials* 78 (2018) 191–200. doi:10.1016/j.optmat.2018.01.043.
- [199] Y. qing Li, M. Xiao, Electromagnetically induced transparency in a three-level Λ -type system in rubidium atoms, *Physical Review A* 51 (1995) R2703. doi:10.1103/physreva.51.r2703.
- [200] T. Li, M.-J. Lu, J. D. Weinstein, Electromagnetically induced transparency in an open multilevel system, *Physical Review A* 84 (2) (2011) 023801. doi:10.1103/physreva.84.023801.
- [201] H.-R. Noh, H. S. Moon, Calculation of line shapes in double-resonance optical pumping, *Physical Review A* 80 (2) (2009) 022509. doi:10.1103/physreva.80.022509.

- [202] H.-R. Noh, H. S. Moon, Transmittance signal in real ladder-type atoms, *Physical Review A* 85 (3) (2012) 033817. doi:10.1103/physreva.85.033817.
- [203] Y.-C. Chen, C.-W. Lin, I. A. Yu, Roles of degenerate Zeeman levels in electromagnetically induced transparency, *Physical Review A* 61 (5) (2000) 053805. doi:10.1103/physreva.61.053805.
- [204] S. D. Badger, I. G. Hughes, C. S. Adams, Hyperfine effects in electromagnetically induced transparency, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 34 (22) (2001) L749–L756. doi:10.1088/0953-4075/34/22/107.
- [205] H. S. Moon, H.-R. Noh, Resonant two-photon absorption and electromagnetically induced transparency in open ladder-type atomic system, *Optics Express* 21 (6) (2013) 7447. doi:10.1364/oe.21.007447.
- [206] V. A. Reshetov, I. V. Meleshko, Electromagnetically induced transparency with degenerate atomic levels, *Laser Physics* 24 (9) (2014) 094011. doi:10.1088/1054-660x/24/9/094011.
- [207] P.-C. Guan, I. A. Yu, Simplification of the electromagnetically induced transparency system with degenerate Zeeman states, *Physical Review A* 76 (3) (2007) 033817. doi:10.1103/physreva.76.033817.
- [208] Q. Sun, Y. V. Rostovtsev, J. P. Dowling, M. O. Scully, M. S. Zubairy, Optically controlled delays for broadband pulses, *Physical Review A* 72 (3) (2005) 031802(R). doi:10.1103/physreva.72.031802.
- [209] Z. Deng, D.-K. Qing, P. Hemmer, C. H. R. Ooi, M. S. Zubairy, M. O. Scully, Time-bandwidth problem in room temperature slow light, *Physical Review Letters* 96 (2) (2006) 023602. doi:10.1103/physrevlett.96.023602.
- [210] Z. Dutton, M. Bashkansky, M. Steiner, J. Reintjes, Analysis and optimization of channelization architecture for wideband slow light in atomic vapors, *Optics Express* 14 (12) (2006) 4978. doi:10.1364/oe.14.004978.
- [211] D. D. Yavuz, Electromagnetically induced transparency with broadband laser pulses, *Physical Review A* 75 (3) (2007) 031801(R). doi:10.1103/physreva.75.031801.
- [212] M. Kiffner, T. N. Dey, Dynamical control of pulse propagation in electromagnetically induced transparency, *Physical Review A* 79 (2) (2009) 023829. doi:10.1103/physreva.79.023829.
- [213] D. Shwa, N. Katz, Transient coherence of media under strong phase modulation exploiting electromagnetically induced transparency, *Physical Review A* 90 (2) (2014) 023858. doi:10.1103/physreva.90.023858.
- [214] A. Raczynski, J. Zaremba, S. Zielińska-Raczynska, Laser pulse propagation in a medium optically dressed by a phase-modulated field, *Journal of the Optical Society of America B* 33 (7) (2016) 1529. doi:10.1364/josab.33.001529.
- [215] H. Schmidt, A. Imamoglu, Giant Kerr nonlinearities obtained by electromagnetically induced transparency, *Optics Letters* 21 (23) (1996) 1936. doi:10.1364/ol.21.001936.
- [216] D. Vitali, M. Fortunato, P. Tombesi, Complete quantum teleportation with a Kerr nonlinearity, *Physical Review Letters* 85 (2) (2000) 445–448. doi:10.1103/physrevlett.85.445.

- [217] L.-M. Duan, M. D. Lukin, J. I. Cirac, P. Zoller, Long-distance quantum communication with atomic ensembles and linear optics, *Nature* 414 (6862) (2001) 413–418. doi:10.1038/35106500.
- [218] M. D. Lukin, Colloquium: Trapping and manipulating photon states in atomic ensembles, *Reviews of Modern Physics* 75 (2) (2003) 457–472. doi:10.1103/revmodphys.75.457.
- [219] R. W. Boyd, D. J. Gauthier, A. L. Gaeta, Applications of slow light in telecommunications, *Optics and Photonics News* 17 (2006) 18. doi:10.1364/opn.17.4.000018.
- [220] A. I. Lvovsky, B. C. Sanders, W. Tittel, Optical quantum memory, *Nature Photonics* 3 (12) (2009) 706–714. doi:10.1038/nphoton.2009.231.
- [221] D. Budker, M. Romalis, Optical magnetometry, *Nature Physics* 3 (4) (2007) 227–234. doi:10.1038/nphys566.
- [222] S. E. Harris, Y. Yamamoto, Photon switching by quantum interference, *Physical Review Letters* 81 (17) (1998) 3611–3614. doi:10.1103/physrevlett.81.3611.
- [223] J. Clarke, H. Chen, W. A. van Wijngaarden, Electromagnetically induced transparency and optical switching in a rubidium cascade system, *Applied Optics* 40 (12) (2001) 2047. doi:10.1364/ao.40.002047.
- [224] W.-H. Lin, W.-T. Liao, C.-Y. Wang, Y.-F. Lee, I. A. Yu, Low-light-level all-optical switching based on stored light pulses, *Physical Review A* 78 (3) (2008) 033807. doi:10.1103/physreva.78.033807.
- [225] R. R. Oliveira, H. S. Borges, J. A. Souza, C. J. Villas-Boas, Quantum memory and optical transistor based on electromagnetically induced transparency in optical cavities arXiv:1603.05127.
- [226] X. Guo, Y. Mei, S. Du, Single photon at a configurable quantum-memory-based beam splitter, *Physical Review A* 97 (6) (2018) 063805. doi:10.1103/physreva.97.063805.
- [227] J. B. Khurgin, Optical buffers based on slow light in electromagnetically induced transparent media and coupled resonator structures: comparative analysis, *Journal of the Optical Society of America B* 22 (5) (2005) 1062. doi:10.1364/josab.22.001062.
- [228] W. Yoshiki, Y. Honda, T. Tetsumoto, K. Furusawa, N. Sekine, T. Tanabe, All-optical tunable buffering with coupled ultra-high Q whispering gallery mode microcavities, *Scientific Reports* 7 (1) (2017) 10688. doi:10.1038/s41598-017-10035-4.
- [229] C. Hu, S. A. Schulz, A. A. Liles, L. O’Faolain, Tunable optical buffer through an analogue to electromagnetically induced transparency in coupled photonic crystal cavities, *ACS Photonics* 5 (5) (2018) 1827–1832. doi:10.1021/acsp Photonics.7b01590.
- [230] P. C. Ku, C. J. Chang-Hasnain, S. L. Chuang, Variable semiconductor all-optical buffer, *Electronics Letters* 38 (24) (2002) 1581. doi:10.1049/el:20021034.
- [231] C. J. Chang-Hasnain, P.-C. Ku, J. Kim, S.-L. Chuang, Variable optical buffer using slow light in semiconductor nanostructures, *Proceedings of the IEEE* 9 (11) (2003) 1884–1897. doi:10.1109/jproc.2003.818335.
- [232] C.-H. Yuan, K.-D. Zhu, Voltage-controlled slow light in asymmetry double quantum dots, *Applied Physics Letters* 89 (5) (2006) 052115. doi:10.1063/1.2335366.
- [233] J. Kim, S. L. Chuang, P. C. Ku, C. J. Chang-Hasnain, Slow light using semiconductor quantum dots, *Journal of Physics: Condensed Matter* 16 (35) (2004) S3727–S3735. doi:10.1088/0953-8984/16/35/014.

- [234] W. W. Chow, H. C. Schneider, M. C. Phillips, Theory of quantum-coherence phenomena in semiconductor quantum dots, *Physical Review A* 68 (5) (2003) 053802. doi:10.1103/physreva.68.053802.
- [235] J. Houmark, T. R. Nielsen, J. Mørk, A.-P. Jauho, Comparison of electromagnetically induced transparency schemes in semiconductor quantum dot structures: Impact of many-body interactions, *Physical Review B* 79 (11) (2009) 115420. doi:10.1103/physrevb.79.115420.
- [236] M. O. Scully, M. Fleischhauer, High-sensitivity magnetometer based on index-enhanced media, *Physical Review Letters* 69 (9) (1992) 1360–1363. doi:10.1103/physrevlett.69.1360.
- [237] M. Fleischhauer, M. O. Scully, Quantum sensitivity limits of an optical magnetometer based on atomic phase coherence, *Physical Review A* 49 (3) (1994) 1973–1986. doi:10.1103/physreva.49.1973.
- [238] M. Stähler, S. Knappe, C. Affolderbach, W. Kemp, R. Wynands, Picotesla magnetometry with coherent dark states, *Europhysics Letters (EPL)* 54 (3) (2001) 323–328. doi:10.1209/epl/i2001-00245-y.
- [239] S. Arora, B. Barak, *Computational Complexity*, Cambridge University Press, 2009. doi:10.1017/cbo9780511804090.
- [240] F. Bloch, Nuclear induction, *Physical Review* 70 (7-8) (1946) 460–474. doi:10.1103/physrev.70.460.
- [241] D. P. DiVincenzo, Quantum computation, *Science* 270 (5234) (1995) 255–261. doi:10.1126/science.270.5234.255.
- [242] D. P. DiVincenzo, The physical implementation of quantum computation, *Fortschritte der Physik* 48 (9-11) (2000) 771–783. doi:10.1002/1521-3978(200009)48:9/11<771::aid-prop771>3.0.co;2-e.
- [243] Y. Nakamura, Y. A. Pashkin, J. S. Tsai, Coherent control of macroscopic quantum states in a single-Cooper-pair box, *Nature* 398 (6730) (1999) 786–788. doi:10.1038/19718.
- [244] R. Schack, C. M. Caves, Classical model for bulk-ensemble NMR quantum computation, *Physical Review A* 60 (6) (1999) 4354–4362. doi:10.1103/physreva.60.4354.
- [245] J. I. Cirac, P. Zoller, Quantum computations with cold trapped ions, *Physical Review Letters* 74 (20) (1995) 4091–4094. doi:10.1103/physrevlett.74.4091.
- [246] I. L. Chuang, Y. Yamamoto, Simple quantum computer, *Physical Review A* 52 (5) (1995) 3489–3496. doi:10.1103/physreva.52.3489.
- [247] N. B. Phillips, A. V. Gorshkov, I. Novikova, Optimal light storage in atomic vapor, *Physical Review A* 78 (2) (2008) 023801. doi:10.1103/physreva.78.023801.
- [248] R. G. Beausoleil, W. J. Munro, D. A. Rodrigues, T. P. Spiller, Applications of electromagnetically induced transparency to quantum information processing, *Journal of Modern Optics* 51 (16-18) (2004) 2441–2448. doi:10.1080/09500340408231802.
- [249] M.-J. Lee, J. Ruseckas, C.-Y. Lee, V. Kudriašov, K.-F. Chang, H.-W. Cho, G. Juzeliūnas, I. A. Yu, Experimental demonstration of spinor slow light, *Nature Communications* 5 (1) (2014) 5542. doi:10.1038/ncomms6542.
- [250] J. Ruseckas, V. Kudriašov, G. Juzeliūnas, R. G. Unanyan, J. Otterbach, M. Fleischhauer, Photonic-band-gap properties for two-component slow light, *Physical Review A* 83 (6) (2011) 063811. doi:10.1103/physreva.83.063811.

- [251] M. Bajcsy, A. S. Zibrov, M. D. Lukin, Stationary pulses of light in an atomic medium, *Nature* 426 (6967) (2003) 638–641. doi:10.1038/nature02176.
- [252] M. Fleischhauer, J. Otterbach, R. G. Unanyan, Bose-Einstein condensation of stationary-light polaritons, *Physical Review Letters* 101 (16) (2008) 163601. doi:10.1103/physrevlett.101.163601.
- [253] T. Chanelière, D. N. Matsukevich, S. D. Jenkins, S.-Y. Lan, T. A. B. Kennedy, A. Kuzmich, Storage and retrieval of single photons transmitted between remote quantum memories, *Nature* 438 (7069) (2005) 833–836. doi:10.1038/nature04315.
- [254] B. Zhao, Y.-A. Chen, X.-H. Bao, T. Strassel, C.-S. Chuu, X.-M. Jin, J. Schmiedmayer, Z.-S. Yuan, S. Chen, J.-W. Pan, A millisecond quantum memory for scalable quantum networks, *Nature Physics* 5 (2) (2008) 95–99. doi:10.1038/nphys1153.
- [255] K. Heshami, D. G. England, P. C. Humphreys, P. J. Bustard, V. M. Acosta, J. Nunn, B. J. Susman, Quantum memories: emerging applications and recent advances, *Journal of Modern Optics* 63 (20) (2016) 2005–2028. doi:10.1080/09500340.2016.1148212.
- [256] B. Goss Levi, Researchers stop, store, and retrieve photons—or at least the information they carry, *Physics Today* 54 (3) (2001) 17–19. doi:10.1063/1.1366059.
- [257] K. L. Tsakmakidis, O. Hess, Extreme control of light in metamaterials: Complete and loss-free stopping of light, *Physica B: Condensed Matter* 407 (20) (2012) 4066–4069. doi:10.1016/j.physb.2012.01.093.
- [258] R. J. Young, S. J. Dewhurst, R. M. Stevenson, P. Atkinson, A. J. Bennett, M. B. Ward, K. Cooper, D. A. Ritchie, A. J. Shields, Single electron-spin memory with a semiconductor quantum dot, *New Journal of Physics* 9 (10) (2007) 365–365. doi:10.1088/1367-2630/9/10/365.
- [259] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 2017.
- [260] B. H. Bransden, C. J. Joachain, *Quantum Mechanics*, Pearson Education (US), 2000.
- [261] D. Manzano, A short introduction to the Lindblad master equation, *AIP Advances* 10 (2) (2020) 025106. doi:10.1063/1.5115323.
- [262] M. H. Holmes (Ed.), *Introduction to Numerical Methods in Differential Equations*, Springer New York, 2007. doi:10.1007/978-0-387-68121-4.
- [263] S. H. Asadpour, H. R. Soleimani, Phase control of transient optical properties of quantum-dot nanostructure via terahertz signal radiation, *Chinese Physics Letters* 31 (11) (2014) 114207. doi:10.1088/0256-307x/31/11/114207.
- [264] M. Bayer, A. Forchel, Temperature dependence of the exciton homogeneous linewidth in $\text{In}_{0.60}\text{Ga}_{0.40}\text{As}/\text{GaAs}$ self-assembled quantum dots, *Physical Review B* 65 (4) (2002) 041308(R). doi:10.1103/physrevb.65.041308.
- [265] K. Kowalski, V. C. Long, K. D. Xuan, M. Głodź, B. N. Huy, J. Szonert, Electromagnetically induced transparency, *Computational Methods in Science and Technology Special Issue* (2) (2010) 131–145. doi:10.12921/CMST.2010.SI.02.131-145.
- [266] R. N. Shakhmuratov, J. Odeurs, Pulse transformation and time-frequency filtering with electromagnetically induced transparency, *Physical Review A* 71 (1) (2005) 013819. doi:10.1103/physreva.71.013819.
- [267] P. DeVries, *A first course in computational physics*, Wiley, New York, 1994.

- [268] J. L. Jensen, Saddlepoint approximations, Clarendon Press Oxford University Press, Oxford New York, 1995.
- [269] R. W. Butler, Saddlepoint Approximations with Applications, Cambridge University Press, 2007. doi:10.1017/cbo9780511619083.
- [270] S. Schmidt-Eberle, T. Stolz, G. Rempe, S. Dürr, Dark-time decay of the retrieval efficiency of light stored as a Rydberg excitation in a noninteracting ultracold gas, *Physical Review A* 101 (1) (2020) 013421. doi:10.1103/physreva.101.013421.
- [271] L. Giannelli, T. Schmit, T. Calarco, C. P. Koch, S. Ritter, G. Morigi, Optimal storage of a single photon by a single intra-cavity atom, *New Journal of Physics* 20 (10) (2018) 105009. doi:10.1088/1367-2630/aae725.
- [272] T. Macha, E. Uruñuela, W. Alt, M. Ammenwerth, D. Pandey, H. Pfeifer, D. Meschede, Nonadiabatic storage of short light pulses in an atom-cavity system, *Physical Review A* 101 (5) (2020) 053406. doi:10.1103/physreva.101.053406.
- [273] V. V. Mitin, D. I. Sementsov, N. Z. Vagidov, *Quantum Mechanics for Nanostructures*, Cambridge University Press, 2018.
- [274] J. D. Patterson, B. C. Bailey, *Solid-state physics: introduction to the theory*, Springer, Berlin, 2007.
- [275] D. Baye, P.-H. Heenen, Generalised meshes for quantum mechanical problems, *Journal of Physics A: Mathematical and General* 19 (11) (1986) 2041–2059. doi:10.1088/0305-4470/19/11/013.
- [276] D. Baye, Lagrange-mesh method for quantum-mechanical problems, *Physica Status Solidi* 243 (5) (2006) 1095–1109. doi:10.1002/pssb.200541305.
- [277] D. Baye, K. D. Sen, Confined hydrogen atom by the Lagrange-mesh method: Energies, mean radii, and dynamic polarizabilities, *Physical Review E* 78 (2) (2008) 026701. doi:10.1103/physreve.78.026701.
- [278] D. Baye, The Lagrange-mesh method, *Physics Reports* 565 (2015) 1–107. doi:10.1016/j.physrep.2014.11.006.
- [279] V. Szalay, Discrete variable representations of differential operators, *The Journal of Chemical Physics* 99 (3) (1993) 1978–1984. doi:10.1063/1.465258.
- [280] S. Adachi, GaAs, AlAs, and $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$: Material parameters for use in research and device applications, *Journal of Applied Physics* 58 (3) (1985) R1–R29. doi:10.1063/1.336070.
- [281] N. V. Lien, N. M. Trinh, Electric field effects on the binding energy of hydrogen impurities in quantum dots with parabolic confinements, *Journal of Physics: Condensed Matter* 13 (11) (2001) 2563–2571. doi:10.1088/0953-8984/13/11/312.
- [282] F. Pobell, *Matter and Methods at Low Temperatures*, Springer-Verlag GmbH, 2007.
- [283] R. L. Burden, J. Douglas Faires, *Numerical analysis*, Brooks/Cole, Cengage Learning, Boston, MA, 2011.
- [284] R. Fleischhaker, J. Evers, A Maxwell–Schrödinger solver for quantum optical few-level systems, *Computer Physics Communications* 182 (3) (2011) 739–747. doi:10.1016/j.cpc.2010.10.018.

Lista skraćenica

- AEM aproksimacija efektivne mase
- AIK Akaikeov informacijski kriterijum
- ART aproksimacija rotirajućeg talasa
- ASPE aproksimacija sporo promenljive envelope
- AT Autler-Taunsov (efekat)
- EDA električna dipolna aproksimacija
- EIT elektromagnetno indukovana transparentnost
- FD Fok-Darvinovi (nivoi)
- FT Furijeova transformacija
- KON koherentne oscilacije naseljenosti
- KZN koherentno zarobljavanje naseljenosti
- LBI laserovanje bez inverzije
- MB Maksvel-Blohove (jednačine)
- MLM metod Lagranževe mreže
- OB optičke Blohove (jednačine)
- SKT sferna kvantna tačka
- STIRAP stimulisani Ramanov adijabatski prolaz

Biografija autora

Nikola Filipović je rođen 19. januara 1991. godine u Nišu. Osnovnu školu „Bubanjski heroji“ u Nišu završio je 2006. godine kao učenik generacije. Odeljenje za učenike sa posebnim sposobnostima za fiziku pri Gimnaziji „Svetozar Marković“ u Nišu završio je kao nosilac diplome „Vuk Karadžić“ 2010. godine. U toku školovanja, osvojio je brojne nagrade na takmičenjima iz fizike, a bio je i učesnik Srpske fizičke olimpijade 2010. godine.

Na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu završio je osnovne studije fizike (2010–2013), kao i master studije, smer Opšta fizika (2013–2015), odbranivši master rad pod nazivom *Optičke karakteristike sferne kvantne tačke sa vodoničnom nečistoćom u spoljašnjim stacionarnim elektromagnetnim poljima*. Oba nivoa studija završio je sa prosečnom ocenom 10,00. Doktorske studije fizike na istom fakultetu upisao je 2015. godine, i položio sve ispite sa prosečnom ocenom 10,00. U toku studija, bio je dobitnik brojnih priznanja, među kojima se ističe stipendija Fonda za mlade talente – *Dositeja*.

Zaposlen je na Departmanu za fiziku Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu od septembra 2014. godine kao saradnik u nastavi, a od oktobra 2016. godine kao asistent. Od 2016. godine je angažovan i kao nastavnik u Odeljenju za učenike sa posebnim sposobnostima za fiziku pri Gimnaziji „Svetozar Marković“ u Nišu. Učestvuje u pripremi učenika srednjih škola za takmičenja iz fizike, kao i u radu na popularizaciji nauke. Održao je nekoliko naučno-popularnih predavanja, a zadužen je i za izradu promotivnog materijala Departmana za fiziku.

Od aprila 2018. godine angažovan je na projektu Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja pod nazivom *Fotonika mikro i nanostrukturnih materijala* (III 45010). Takođe, učesnik je COST akcije CA 16221: *Quantum Technologies with Ultra-Cold Atoms* od 2017. godine. U okviru svog naučnoistraživačkog rada, uzeo je učešće na brojnim međunarodnim školama i konferencijama, kao i na kratkom stručnom usavršavanju u Litvaniji. Koautor je šest radova objavljenih u međunarodnim časopisima.

Pored srpskog, govori engleski (nivo C1) i nemački jezik (nivo A1).

Bibliografija autora

Radovi u istaknutim međunarodnim časopisima (M22):

- N. Filipović, Lj. Stevanović, V. Pavlović, Light storage and retrieval in spherical semiconductor quantum dots with on-center hydrogen impurity in magnetic field, Superlattices and Microstructures 147 (2020) 106691:1–16. [IF = 2.120]
- Lj. Stevanović, N. Filipović, V. Pavlović, Slow light pulse propagation through spherical quantum dot with on-center hydrogen impurity in magnetic field, Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures 118 (2020) 113883:1–10. [IF = 3.570]
- Lj. Stevanović, N. Filipović, V. Pavlović, J. Zimmermann, Theoretical investigation of the transient regime of electromagnetically induced transparency in spherical quantum dot with on-center hydrogen impurity, Optical and Quantum Electronics 52 (2020) 172:1–10. [IF = 1.842]
- Lj. Stevanović, N. Filipović, V. Pavlović, Effect of magnetic field on absorption coefficients, refractive index changes and group index of spherical quantum dot with hydrogenic impurity, Optical Materials 91 (2019) 62–69. [IF = 2.687]
- Lj. Stevanović, N. Filipović, V. Pavlović, Optical properties of spherical quantum dot with on-center hydrogen impurity in magnetic field, Optical and Quantum Electronics 48 (2016) 231:1–7. [IF = 1.290]

Radovi u međunarodnim časopisima (M23):

- Lj. Stevanović, N. Filipović, V. Pavlović, Electromagnetically induced transparency in degenerate ladder-type system, Optical and Quantum Electronics 50 (2018) 287:1–12. [IF = 1.168]

Saopštenja na međunarodnim konferencijama štampana u celini (M33):

- Lj. Stevanović, A. Maluckov, N. Filipović, V. Pavlović, Spatial solitary like weak probe wave in the three-level Λ -type atoms, AIP Conference Proceedings 2075 (2019) 030015.
- N. Filipović, V. Pavlović, Lj. Stevanović, Effect of magnetic field on structural properties of confined hydrogen atom, SPIG, Belgrade, 2016, Contributed papers 28–31.

Saopštenja na međunarodnim konferencijama štampana u izvodu (M34):

- N. Filipović, V. Pavlović, Slow light under double-double EIT regime in spherical quantum dot with hydrogen impurity, Photonica 2021, Belgrade, Serbia, 2021, Book of Abstracts, pp. 61.
- N. Filipović, Slow light pulse propagation through spherical quantum dot with hydrogen impurity in magnetic field, International Conference on Quantum Optics 2020, Obergurgl, Tirol, Austria, 2020, Book of Abstracts, pp. 35.
- V. Pavlović, Ž. Lazić, Lj. Stevanović, N. Filipović, Pulse propagation through rectangular quantum dots under conditions of electromagnetically induced transparency, Photonica 2019, Belgrade, Serbia, 2019, Book of Abstracts, pp. 76.

- Lj. Stevanović, J. Zimmermann, N. Filipović, V. Pavlović, Transient properties of electromagnetically induced transparency in spherical quantum dot with hydrogen impurity, Photonica 2019, Belgrade, Serbia, 2019, Book of Abstracts, pp. 75.
- Lj. Stevanović, N. Filipović, V. Pavlović, Refractive index changes of spherical quantum dot with hydrogenic impurity in magnetic field, ICOM 2018, Igalo, Montenegro, 2018, Book of Abstracts, pp. 204.
- Lj. Stevanović, A. Maluckov, N. Filipović, V. Pavlović, Spatial Solitary like Weak Probe Wave in the Three-Level Λ -Type Atoms, BPU 10, Sofia, Bulgaria, 2018, Book of Abstracts, pp. 201–202.
- Lj. Stevanović, N. Filipović, V. Pavlović, Electromagnetically induced transparency in degenerate 3-level ladder-type system, Photonica 2017, Belgrade 2017, Book of Abstracts, pp. 58.
- Lj. Stevanović, N. Filipović, V. Pavlović, Optical properties of spherical quantum dot with on-center hydrogen impurity in magnetic field, Photonica 2015, Belgrade, Serbia, 2015, Book of Abstracts, pp. 67.

Radovi u domaćim časopisima (M51):

- N. Filipović, V. Pavlović, Lj. Stevanović, Slow and fast light propagation through ladder-type atomic media with degenerate energy levels, Facta Universitatis, Series: Physics, Chemistry and Technology 17 (2) (2019) 173–190.
- V. Pavlović, Ž. Lazić, Lj. Stevanović, N. Filipović, Electromagnetically induced transparency in a rectangular quantum dot on a single electron, Facta Universitatis, Series: Physics, Chemistry and Technology 17 (2) (2019) 131–144.

Izjave autora

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

СПОРА И УСКЛАДИШТЕНА СВЕТЛОСТ У СФЕРНИМ КВАНТНИМ ТАЧКАМА У ЛЕСТВИЧАСТОЈ КОНФИГУРАЦИЈИ

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио ауторска права, нити злоупотребио интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 23. 9. 2021.

Потпис аутора дисертације:



Никола Н. Филиповић

**ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНОГ И ЕЛЕКТРОНСКОГ ОБЛИКА
ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ**

Наслов дисертације:

**СПОРА И УСКЛАДИШТЕНА СВЕЛОСТ У СФЕРНИМ КВАНТНИМ
ТАЧКАМА У ЛЕСТВИЧАСТОЈ КОНФИГУРАЦИЈИ**

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао за уношење у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, истоветан штампаном облику.

У Нишу, 23. 9. 2021.

Потпис аутора дисертације:



Никола. Н. Филиповић

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

СПОРА И УСКЛАДИШТЕНА СВЕТЛОСТ У СФЕРНИМ КВАНТНИМ ТАЧКАМА У ЛЕСТВИЧАСТОЈ КОНФИГУРАЦИЈИ

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)
- 3. Ауторство – некомерцијално – без прераде (CC BY-NC-ND)**
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство – без прераде (CC BY-ND)
6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

У Нишу, 23. 9. 2021.

Потпис аутора дисертације:



Никола. Н. Филиповић