UNIVERZITET U NIŠU
ELEKTRONSKI FAKULTET

Mr Ana N. Vučković

NUMERIČKI PRISTUPI U ODREĐIVANJU RASPODELE MAGNETNOG POLJA I SILE LEVITACIJE KOD STALNIH MAGNETA

Doktorska disertacija

Niš, 2014. godina

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF ELECTRONIC ENGINEERING

Mr Ana N. Vučković

NUMERICAL METHODS FOR PERMANENT MAGNET'S MAGNETIC FIELD DISTRIBUTION AND LEVITATION FORCE CALCULATION.

Doctoral dissertation

Niš, 2014.

AUTOR	
Ime i prezime	Ana N. Vučković
Datum i mesto rođenja	29.07.1977. godine, Niš

DOKTORSKA DISERTACIJA	
Naslov	Numerički pristupi u određivanju raspodele magnetnog polja i sile levitacije kod stalnih magneta
Naučna oblast	Teorijska elektrotehnika
Broj strana	196
Broj slika	139
Broj tabela	27
Broj bibliografskih jedinica	170
Ustanova i mesto gde je disertacija rađena	Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet, Niš Katedra za teorijsku elektrotehniku
Mentor	Dr Nebojša Raičević, docent, Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet, Niš
Datum prijave teme doktorske disertacije	25.02.2013.
Broj odluke i datum prihvatanja teme doktorske disertacije	8/20-01-004/13-026 14. 05. 2013.
Komisija za pisanje izveštaja o naučnoj zasnovanosti teme doktorske disertacije	1. Dr Nebojša Raičević, docent, Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet, Niš 2. Dr Ivan Yatchev, redovni profesor, Tehnički univerzitet u Sofiji, Bugarska 3. Dr Slavoljub Aleksić, redovni profesor, Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet, Niš 4. Dr Dragan Tasić, redovni profesor, Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet, Niš 5. Dr Zlata Cvetković, redovni profesor, Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet, Niš
Komisija za ocenu i odbranu doktorske disertacije	1. Dr Nebojša Raičević, docent, Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet, Niš 2. Dr Ivan Yatchev, redovni profesor, Tehnički univerzitet u Sofiji, Bugarska 3. Dr Slavoljub Aleksić, redovni profesor, Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet, Niš 4. Dr Dragan Tasić, redovni profesor, Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet, Niš 5. Dr Zlata Cvetković, redovni profesor, Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet, Niš
Datum odbrane	

AUTHOR	
Name and surname	Ana N. Vučković
Date of birth	29.07.1977. Niš

DOCTORAL DISSERTATION	
Title	Numerical methods for permanent magnet's magnetic field distribution and levitation force calculation.
Scientific area	Theoretical electrical engineering
Number of pages	196
Number of figures	139
Number of tables	27
Number of references	170
Institution	University of Niš Faculty of Electronic Engineering, Niš Department of Theoretical Electrical Engineering
Mentor	dr Nebojša Raičević, assistant professor, University of Niš, Faculty of Electronic Engineering, Niš
Date of doctoral dissertation submit	25.02.2013.
Number of decision and the date of acceptance of the doctoral dissertation theme	8/20-01-004/13-026 14. 05. 2013.
Commission for the assessment of the doctoral dissertation theme	1. Dr Nebojša Raičević, assistant professor, University of Niš, Faculty of Electronic Engineering, Niš 2. Dr Ivan Yatchev, full-time professor, Technical University of Sofia, Bulgaria 3. Dr Slavoljub Aleksić, full-time professor, University of Niš, Faculty of Electronic Engineering, Niš 4. Dr Dragan Tasić, full-time professor, University of Niš, Faculty of Electronic Engineering, Niš 5. Dr Zlata Cvetković, full-time professor, University of Niš, Faculty of Electronic Engineering, Niš
Commission for the dissertation defense	1. Dr Nebojša Raičević, assistant professor, University of Niš, Faculty of Electronic Engineering, Niš 2. Dr Ivan Yatchev, full-time professor, Technical University of Sofia, Bulgaria 3. Dr Slavoljub Aleksić, full-time professor, University of Niš, Faculty of Electronic Engineering, Niš 4. Dr Dragan Tasić, full-time professor, University of Niš, Faculty of Electronic Engineering, Niš 5. Dr Zlata Cvetković, full-time professor, University of Niš, Faculty of Electronic Engineering, Niš
Date of defense	

Rezime

Stalni magneti su poslednjih godina u sve većoj upotrebi u širokom spektru električnih uređaja i opšta potreba za optimizacijom njihovih dimenzija vodi ka razvoju metoda za proračun magnetnog polja. Kvalitet električnih uređaja koji sadrže stalne magnete u velikoj meri zavisi od magnetnog materijala od koga su načinjeni stalni magneti, kao i od njihove magnetizacije i dimenzija. Predloženi su različiti metodi za proračun polja koje stvaraju stalni magneti u cilju pronalaženja pristupa koji će omogućiti najjednostavniju analizu magnetnih struktura u funkciji parametara. Najčešće korišćene analitičke metode za proračun polja kod stalnih magneta, bazirane na raspodeli površinskih magnetnih opterećenja i raspodeli Amperovih mikroskopskih struja, uglavnom su ograničene na blok i clindrične strukture. U cilju prevazilaženja nedostataka postojećih analitičkih i numeričkih metoda, u disertaciji su predložena dva polunumerička pristupa.

Metodi koji su korišćeni u disertaciji za proračun polja i sile kod različitih konfiguracija stalnih magneta su zasnovani na Amperskom pristupu i metodu fiktivnih magnetnih opterećenja. Uvođenjem diskretizacione tehnike u oba pristupa znatno je pojednostavljeno korišćenje pomenutih metoda i pružena je mogućnost primene istih na kompleksnije strukture. Pristup zasnovan na raspodeli površinskih i zapreminskih Amperovih mikroskopskih struja je korišćen za proračun polja i sile sistema stalnih magneta oblika zarubljene kupe, torusa trapezoidnog poprečnog preseka i magneta pomenutih oblika postavljenih iznad linearne magnetne ravni. Magnetno polje i sila za pomenute strukture je prvi put određena od strane autora ove disertacije, i od značaja je s obzirom da pruža mogućnost korišćenja magneta netipičnih oblika kod projektovanja novih uređaja u čiji sastav ulaze stalni magneti ili poboljšanja performansi postojećih.

Drugi metod koji je korišćen u disertaciji zasniva se na raspodeli fiktivnih magnetnih opterećenja i zajedno sa diskretizacionom tehnikom omogućava određivanje polja i sile kod različitih magnetnih struktura. Posebna pažnja je posvećena analizi različitih konfiguracija magnetnih ležaja. U konačnom izrazu za silu figuriše, pored elementarnih funkcija, samo elipitički integral druge vrste, tako da je prednost ovog metoda u poređenju sa dosada korišćenim pristupima, njegova jednostavnost, a samim tim i vremenska efikasnost. I ovaj metod pruža veliku mogućnost analize polja i sile u funkciji parametara magneta što je od velikog značaja za proizvodnju i kontrolu uređaja koji sadrže stalne magnete. Pored toga,

dobijeni izrazi za silu mogu biti od značaja za inverzne optimizacione probleme, kao i u procesu projektovanja magnetnih senzora i drugih uređaja zasnovanih na stalnim magnetima.

Posebnu grupu problema koji su analizirani u disertaciji predstavljaju strukture koje čine stalni magneti u prisustvu tela načinjenih od magnetnih materijala. Do sada se u literaturi isključivo moglo naći rešenje za polje, odnosno silu koja deluje između stalnog magneta i neograničene magnetne ravni. Problemi tog tipa su rešavani primenom teoreme lika u ravnom ogledalu, a potom je dobijena konfiguracija modelovana Amperskim ili Kulombijskim pristupom. U ovoj disertaciji su prvi put modelovani sistemi stalnih magneta u prisustvu tela konačnih dimenzija, načinjenih od magnetnih materijala primenom hibridnog metoda graničnih elemenata. Hibridni metod graničnih elemenata je relativno nov metod, razvijen na Katedri za teorijsku elektrotehniku Elektronskog fakulteta u Nišu, i do sada je uspešno primenjen za analizu različitih višeslojnih elektromagnetnih problema. U ovoj disertaciji korišćen je za modelovanje aksijalno simetričnih sistema stalnih magneta, a uspešno se može primeniti i za analizu 3D statičkih, stacionarnih i kvazistacionarnih elektromagnetnih problema.

Prikazani rezultati su od značaja u procesu modelovanja i proizvodnje različitih uređaja sa stalnim magnetima.

Ključne reči

Amperove struje, diskretizaciona tehnika, hibridni metod graničnih elemenata, metod konačnih elemenata, magnetna sila, magnetna opterećenja, magnetni ležaj, stalni magnet.

Abstract

Permanent magnets are increasingly being used as a result of the wider adoption of electrical devices and gadgets. There is a constant need for their optimization and size reduction, leading to new mathematical methods for their field calculation. The quality of electrical devices that contain permanent magnets is dependent on the magnetic material they are made of, their magnetization, and their size. Many different methods for permanent magnet field calculation are available, aiming towards the simplest and fastest analysis of magnetic structures in relation to different parameters. In most cases, analytical methods for permanent magnet field calculation based on the distribution of magnetic charges or Ampere's microscopic currents are limited to block and cylindrical structures. In order to overcome drawbacks of analytical and numerical methods, this thesis presents two additional, semi-numerical approaches.

Methods for field and force calculation of different permanent magnet configurations presented in this thesis are based on Ampere's currents approach and the fictitious magnetic charges method. The introduction of the discretization technique in both approaches simplifies these methods and allows them to be used in the resolution of specific complex configurations. An approach that takes into account the distribution of surface and volume microscopic Ampere's currents is being applied to systems consisting of truncated cone-shaped or trapezoidal cross-section torus magnets. Also, the same magnets above linear magnetic plain were analyzed. Magnetic field and force for the structures mentioned was implemented for the first time by the thesis author, and it is considered important since it allows for the design of new devices incorporating permanent magnets of atypical shapes, in addition to performance improvements in existing ones.

The second method used in this thesis is based on fictitious magnetic charges distribution. This method, along with the discretization technique, allows field and force calculation with different magnetic structures. Special attention was paid to different magnetic bearings configurations. The final expression for magnetic force has, along with elementary functions, only elliptical integral of the second kind, emphasizing its simplicity and time efficiency in comparison to contemporary methods. This method also allows field and force analysis in relation to magnetic parameters, which is important in controlling devices containing permanent magnets. Moreover, magnetic force expressions obtained are important for inverse

optimization problems and for the design process of magnetic sensors and other devices based on permanent magnets.

A special group of problems was addressed, considering permanent magnet structures in the vicinity of different bodies with magnetic material composition. In the survey of existing literature, only field or force between permanent magnet and infinite magnetic plain calculation was available. Problems of this kind were solved by first applying the method of images, after which Ampere's or Coulombian approach was used to model the configuration. For the first time, this thesis presents modeling of permanent magnet systems in the vicinity of geometrical bodies of finite dimensions made of magnetic material. "Homebrew" Hybrid Boundary Element Method (HBEM) was used in order to model this structure. Hybrid Boundary Element Method (HBEM) is a relatively new method, developed at the Department of Theoretical Electrical Engineering, Faculty of Electronic Engineering of Niš, was successfully used for the analysis of multilayered electromagnetic problems. In this thesis, HBEM was used for modeling a permanent magnet axial-symmetric system, and can also be applied to 3D analysis of stationary and quasi-stationary electromagnetic problems.

The results presented are important in the modeling process itself and in the manufacturing of various devices that incorporate permanent magnets.

Keywords

Ampere's currents, discretization technique, hybrid boundary element method, finite element method, magnetic force, magnetization charges, magnetic bearing, permanent magnet.

Predgovor

Ova doktorska disertacija je rezultat dugogodišnjeg rada i predstavlja nastavak istraživanja vezanog za stalne magnete, prikazanog u mojoj magistarskoj tezi. Ideja je potekla od profesora Dragutina Veličkovića na čiju inicijativu sam počela da se bavim stalnim magnetima i 2003. godine provela sate u biblioteci Tehničkog Univerziteta u Ilmenauu, prikupljajući literaturu vezanu za ovu oblast.

Na ovom putu sam imala veliku podršku ljudi koji me okružuju. Najpre bih se zahvalila profesoru Slavoljubu Aleksiću na idejama koje su bile okosnica ove doktorske disertacije i konstruktivnim savetima tokom njene izrade. Zahvaljujem se i mentoru Nebojši Raičeviću na podršci, sugestijama i pruženoj mogućnosti da svoja teorijska znanja praktično i primenim. Takođe, zahvalnost dugujem i svim članovima Katedre za teorijsku elektrotehniku na dugogodišnjoj divnoj saradnji, a posebno koleginici Mirjani Perić i kolegi Saši Iliću na dragocenim savetima i rečima podrške koje su mi pružali tokom izrade ove disertacije.

Zahvaljujem se mojim roditeljima i sestri koji su mi bili velika potpora tokom celog školovanja i kroz život uopšte. I na kraju, najveću zahvalnost dugujem suprugu Dušanu na ljubavi, razumevanju, podršci i veri u mene u svakom životnom trenutku i mojoj Minji zbog koje mi je srce puno i zbog koje sve ovo ima smisla.

Autor

Sadržaj

1. Uvod **1**

2. Podela i primena stalnih magneta **15**

2.1 Karakteristike magnetnih materijala 16

2.2 Podela stalnih magneta 18

3. Numerički i analitički pristupi za modelovanje stalnih magneta **21**

3.1 Numerički pristupi zasnovani na diskretizaciji zapremine 22

3.1.1 Metod konačnih elemenata 22

3.1.2 Metod konačnih razlika 23

3.1.3 Metod konačnih zapremina 23

3.1.4 Model ekvivalentnih magnetnih kola 24

3.2 Numerički pristupi zasnovani na diskretizaciji površine 24

3.2.1 Metod graničnih elemenata 25

3.2.2 Metod harmonika 25

3.3 Analitički metodi 26

3.4 Pomoćne tehnike za modelovanje stalnih magneta 28

4. Tehnike za proračun sile kod stalnih magneta **30**

4.1. Lorencova sila 31

4.2 Tenzor Maksvelovih napona 32

4.3 Metod virtuelnih pomeraja 32

5. Novi polunumerički pristupi za modelovanje polja i sile kod stalnih magneta **34**

5.1 Jednačine i pojmovi na kojima se baziraju primenjeni pristupi 35

5.1.1 Maksvelove jednačine u integralnom i lokalnom obliku 35

5.1.2 Magnetni vektor potencijal i Amperove struje 36

5.1.3 Magnetni skalar potencijal i fiktivna magnetna opterećenja 37

5.2 Polunumerički pristupi za modelovanje stalnih magneta 40

5.2.1 Metod baziran na raspodeli Amperovih mikroskopskih struja i diskretizacionoj tehnici 40

5.2.2. Metod baziran na raspodeli fiktivnih magnetnih opterećenja i diskretizacionoj tehnici 43

5.2.3. Hibridni metod graničnih elemenata 50

5.2.3.1 Primer primene Hibridnog metoda graničnih elemenata 52

6. Primeri modelovanje sistema stalnih magneta primenom raspodele Amperovih struja **56**

6.1 Sistem stalnih magneta oblika zarubljene kupe 57

6.2 Sistem stalnih magneta oblika torusa trapezoidnog poprečnog preseka 65

6.3 Stalni magnet oblika torusa trapezoidnog poprečnog preseka iznad neograničene magnetne ravni 75

7. Primeri modelovanje sistema stalnih magneta primenom raspodele fiktivnih magnetnih opterećenja **84**

7.1 Sistem blok magneta 85

7.2 Blok magnet iznad neograničene magnetne ravni 90

7.3 Sistem lateralno pomerenih stalnih magneta 93

7.4 Stalni magnet oblika potkovice iznad neograničene magnetne ravni 99

8. Modelovanje pasivnih magnetnih ležaja **104**

8.1 Pasivni magnetni ležaj - aksijalna magnetizacija magneta 105

8.2 Pasivni magneti ležaj - radijalna magnetizacije magneta 117

8.3 Pasivni magnetni ležaj - aksijalna i radijalna magnetizacije magneta 134

9. Stalni magneti u prisustvu tela od magnetnog materijala **143**

9.1 Stalni magnet oblika cilindra i cilindar od linearnog magnetnog materijala 144

9.2 Aksijalno namagnetisan stalni magnet oblika torusa iznad cilindra od magnetnog materijala 152

9.3 Radijalno namagnetisan stalni magnet u prisustvu cilindra od magnetnog materijala 159

10. Nepreciznosti u procesu modelovanja i proizvodnji stalnih magneta **167**

10.1. Globalni efekti 168

10.1. 1. Varijacije u remanentnoj indukciji 168

10.1. 2. Relativna magnetna permeabilnost 168

10.1. 3. Loše poravnanje ugla magnetizacije 169

10.2. Lokalni efekti 169

10.2.1. Geometrijske tolerancije 170

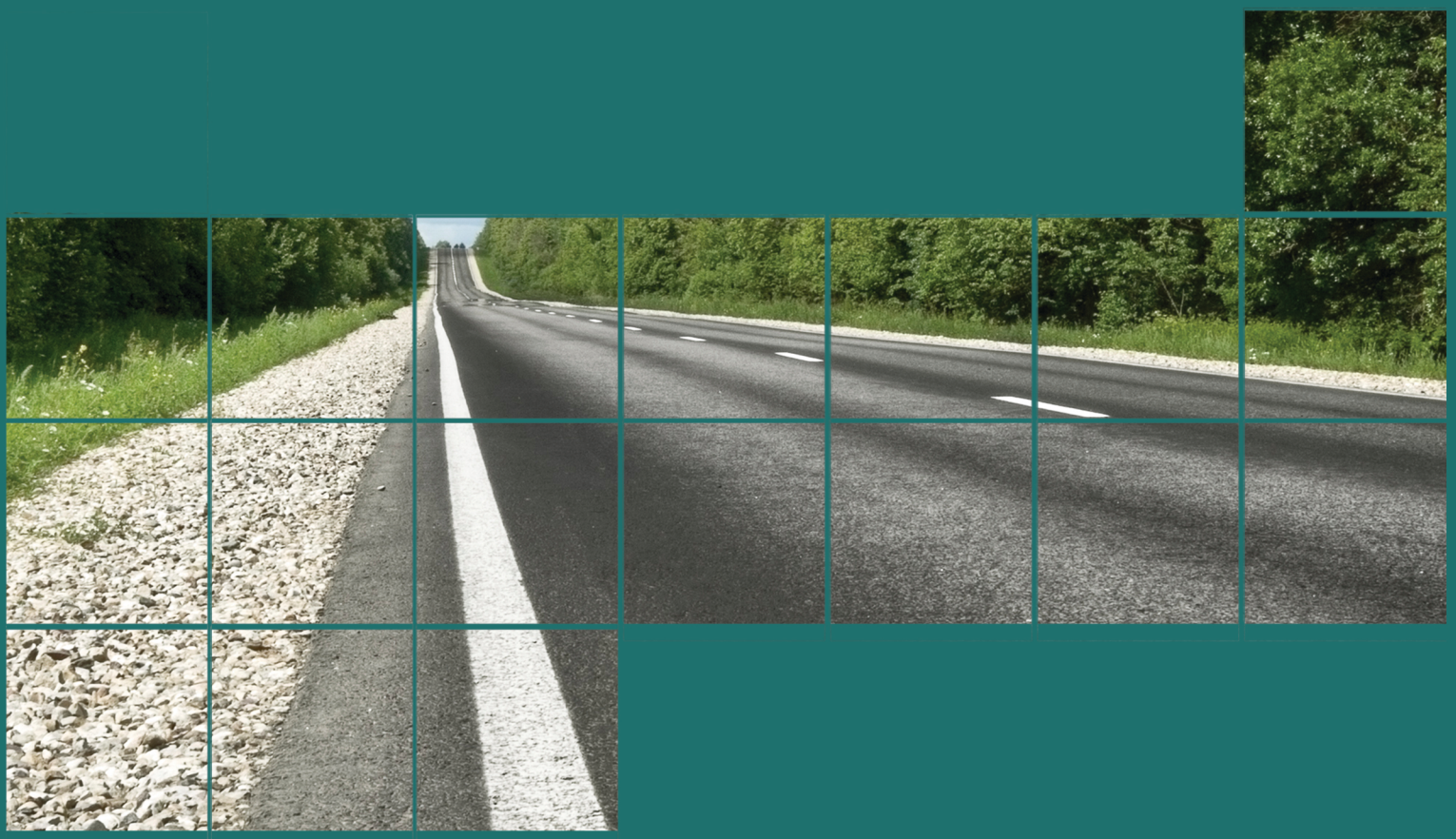
11. Zaključak **171**

12. Literatura **176**

13. Prilozi **193**

Biografija autora **196**

Izjave autora **204**



Uvod

Uvod

Priče o stalnim magnetima datiraju još iz vremena drevne Kine. U delu Jozefa Nidhama „Nauka i civilizacija Kine“ pominju se magneti i stavljaju u vezu sa društvenom igrom „Šah“. Nidham tvrdi da je „Šah“ poistekao iz starog metoda proricanja sudbine, u kome su se različite figurice postavljale na tablu , koja se u to vreme zvala „Ših“, pa nakon toga tumačio njihov raspored na tabli. Luan Ta je još 113. godine pre nove ere predstavio Caru svoju čaroliju, koja se sastojala u tome da figure za šah na tabli same ulaze u „borbu“ jedna sa drugom. Zanimljiv komentar ove „čarolije“ je sačuvan u enciklopediji koja je objavljena znatno kasnije, 983 godine naše ere [21, 106]:

„Uzmi krv petla i pomešaj je sa gvozdenim opiljcima dobijenim mlevenjem igala koje treba zasuti prahom magnetita. Preko dana, stavi dobijenu smesu na glave šahovskih figura i pusti da se osuši na suncu. Stavi ih na tablu i one će stalno udarati jedne o druge .“

Sve ovo ukazuje na činjenicu da su magnetne legure postojale još pre 2000 godina. Ideja vodilja savremenih istraživanja magneta, da je potrebno kombinovati veoma fine čestice dve potpuno različite magnetne faze, postojala je očigledno i u to vreme [21].

Nezavisna otkrića u vezi sa osobinama prirodnih magneta i gvožđa mogu se pronaći na tri različita kontinenta, i to u Grčkoj, Egiptu i Gvatemali.

Naše moderno shvatanje magnetizma započinje prvim naučno prihvaćenim tekstom Vilijama Gilberta objavljenog 1600. Gilbert otklanja sva praznoverja o magnetima koja su postojala u svetu i identifikuje samu Zemlju kao izvor magnetnog polja. On daje opis bipolarnog polja na osnovu eksperimenata sa iglama kompasa i malim sferama od magnetita, gde je na kraju dao i hipotezu da je sama Zemlja veliki magnet, [93].

Stalni (permanentni) magneti su delovi magnetnog materijala, namagnetisani dejstvom spoljašnjeg magnetnog polja, koji zadržavaju veliki magnetni momenat nakon što se ono ukloni. Oni tada postaju izvor magnetnog polja koje reaguje sa drugim magnetnim materijalima ili sa strujnim provodnicima. U prošlosti su pronalaženi u prirodi u obliku magnetnih ruda, bogatih magnetitom Fe_3O_4. O prvim veštačkim magnetima sa izraženijim magnetnim karakteristikama napravljenim od rashlađenih ojačanih legura gvožđa i ugljenika (čelični mač) govorio je Gilbert još 1600. godine, a tokom vekova dodavano je još materijala kako bi se pojačala njihova snaga. Tridesetih godina prošlog veka, započeo je razvoj Alniko – legura, patentiranjem prvog očvrsnutog magneta zasnovanog na leguri Fe, Ni i Al, a ne više na čeliku, a nešto kasnije i na legurama SmCo i Nd FeB [106].

Kroz istoriju, stalni magneti su imali širok spektar primene. Ritualna kašika koja pokazuje jug, prvi put viđena u Kini, a prvi put opisana u Evropi oko 1200. Godine, je evoluirala u kompas, slika 1.1. Kompas je bio prvi magnetni uređaj koji je promenio svet i dao osnovu za razvoj magnetizma. Njegova primena u navigaciji je dovela do putovanja koja su za rezultat imala velika otkrića u svetu. U elektromehaničkim uređajima, poput prvih električnih generatora i motora [106, 143], stalni magneti od mekog čelika u obliku potkovice ili šipke su korišćeni još u 19. veku. Nakon što su ih prevazišle mašine koje rotacijom kreiraju magnetno polje, uvođenjem AlNiCO materijala i čvrstih magnetnih ferita, oni ponovo postaju popularni i dobijaju sve veću primenu, na primer u DC motorima, naročito u auto industriji, ručnim alatima itd. [143].



Slika 1.1. *Ritualna kineska kašika - preteča kompasa.*

Nakon razvoja NdFeB magnetnih materijala na bazi retke zemlje, osamdesetih godina prošlog veka, oblast primene uređaja sa stalnim magnetima se znatno proširila. Čvrsti feriti su postali izuzetno jeftini magnetni materijali, dok su magneti na bazi retke zemlje povećavali maksimalnu moguću energiju proizvoda 4 do 5 puta i koercitivnost za red veličine. Iako njihovo ime navodi na drugačiji zaključak, materijali neodimijum, gvožđe i bor su daleko od retkih. Ono što je retko jesu njihove veće koncentracije. Samo na nekim mestima prirodni procesi su ih koncentrisali dovoljno za isplativu eksploataciju. Pored toga, danas se veći deo neodimijuma iskopava u Kini, tako da monopol nad ovim popularnim materijalom može dovesti do nedostatka zaliha u svetu. Razvoj novih materijala na bazi retke zemlje bi, definitivno, trebo da pomogne u komercijalizaciji uređaja sa stalnim magnetima.

U poređenju sa prethodnim magnetnim materijalima, magnetni materijali na bazi retke zemlje su pokazali značajno veću gustinu energije i sposobnost otpora demagnetizaciji. Njihova unapređena fizička svojstva omogućila su poboljšanje performansi postojećih uređaja i razvoj novih uređaja i koncepta dizajna, naročito kod linearnih i rotacijskih aktuatora. Na primer, njihova povećana koercitivnost omogućila je primenu uređaja zasnovanih na odbojnoj sili između stalnih magneta nasuprot do tada korišćenih topologija zasnovanim na privlačnim silama [62, 160, 166]. Pre toga, niska koercitivnost magnetnih materijala uzrokovala je veliki rizik od demagnetizacije, koja je primoravala proizvođače da koriste isključivo stalne magnete kod konfiguracija baziranih na privlačnoj sili.

U današnje vreme, stalni magneti su postali vitalne komponente mnogih naprednih elektromehaničkih mašina i elektronskih uređaja, ali su oni obično skriveni u njihovoj unutrašnjosti, pa ih krajnji korisnik ne vidi. Primeri za to su laseri zasnovani na slobodnim elektronima, fokuseri snopa čestica, senzori, visokoprecizni transduktori, MRI, aktuatori za robotiku i kontrolu leta, kod pogonskih sistema ili sistema ogibljenja za vozila koja koriste magnetnu levitaciju (MAGLEV), kod visokokvalitetnih zvučnika [38, 143] itd. Kako projektanti pomeraju granice performansi, tako raste i potreba za brzim i preciznim tehnikama projektovanja.

Usled histerezisa i izuzetno promenljivog ponašanja prvih magnetnih materijala sa niskom koercitivnošću, matematički opis magnetnih kola koja sadrže ove magnetne materijale je oduvek bio težak. Unapređenje fizičkih svojstva stalnih magneta, istovremeno sa usavršavanjem tehnika projektovanja, omogućava preciznije fizičko modelovanje. Od tada, razvoj elektromehaničkih uređaja koji sadrže stalne magnete je omogućen sve više zahvaljujući uvođenju novih, bržih i preciznijih, metoda za proračun polja i sile kod stalnih magneta, nasuprot dotadašnjim pomacima zasnovanim na empirijskim merenjima.

Kontinuirani razvoj tehnologije je doveo do toga da elektromehanički uređaji još više unaprede svoje performanse. To je posledica uvođenja metoda koji su omogućili rešavanje trodimenzionalnih (3D) problema, umesto dvodimenzionalnih (2D) modela koji su često korišćeni za konvencionalne rotacione ili linearne mašine. Iako je svaki elektromagnetni problem sam po sebi 3D, kod mnogih uređaja je on prilično blizu ponašanju dvodimenzionalnog modela. Čak se i gubici usled vrtložnih struja često mogu proceniti sa prilično preciznošću na osnovu rezultata dvodimenzionalnog modelovanja. Međutim ima uređaja kod kojih je potreba za 3D analizom neophodna. Na primer, kod linearnog Halbach-ovog niza, kod koga su stalni magneti postavljaju jedan pored u drugog istoj ravni,

poznavanje načina njihove interakcije je ključno, a precizno trodimenzionalno modelovanje je neophodno kako bi se unapredio dizajn modernih uređaja u čiji sastav oni ulaze.

Tokom godina razvijen je veliki broj analitičkih i numeričkih tehnika za rešavanje elektromagnetnih problema. Numeričke metode, kao što je dobro poznat metod konačnih elemenata, su veoma moćne u smislu visoke preciznosti i niske apstrakcije modela. Nažalost, njihovo izračunavanje je računarski zahtevno zbog njihove primene zasnovane na mreži i jedino postoji mogućnost izračunavanja sile interakcije i obrtnog momenta na osnovu određene energije i raspodele polja. Kao posledica javlja se numerička nepreciznost i mala mogućnost analize pomenutih veličina u funkciji parametara. Još jedna karakteristika takve tehnike je da moraju biti postavljene granice domena u kom se problem rešava. Ovo je od značaja za simetrične i periodične probleme. Međutim, za problem bez ovih svojstava, granice modelovanja moraju biti dovoljno daleko od posmatranog objekta, što za posledicu ima to da je rešavanje ovakvih problema procesorski zahtevno.

Analitički metodi za rešavanje elektromagnetnih problema omogućavaju izračunavanje energije, polja, sile i obrtnog momenta direktno iz jednačina, što je u poređenju sa numeričkim metodama, mnogo manje procesorski zahtevno. Njih karakteriše mogućnost da predstave polje, u oblasti u kojoj se posmatrana konfiguracija nalazi, pomoću analitičke jednačine. Međutim, oni zahtevaju više abstrakcije modela od numeričkih metoda i ograničeni su na manje složene konfiguracije. Glavna pretpostavka kod analitičke tehnike koja se koristi kod rešavanja magnetnih problema je da je relativna permeabilnost jednaka jedinici. U današnje vreme stalni magneti su načinjeni od magnetnih materijala koji omogućavaju ovu pretpostavku jer je njihova permeabilnost približna onoj kod vakuuma. Ranije kada su korišćeni feriti, ova pretpostavka nije važila usled visoke magnetne permeabilnosti i niskog koercitivnog polja. Rešenja do kojih se dolazi direktno na osnovu analitičkih jednačina za energiju, polje i silu čine analitičke metode veoma pogodnim za brzu procenu velikog broja topologija i za procese optimizacije. Međutim, s obzirom da se iz godine u godinu koriste sve napredniji računari, i činjenice da se analitičko rešenje za neke konfiguracije ne može dobiti u zatvorenoj formi, poslednjih godina je posvećena pažnja razvoju polunumeričkih metodama. Cilj je da se razvije metod koji bi omogućio dobijanje rešenja za veoma kratko vreme, sa visokom tačnošću i mogućnošću analize performansi uređaja u funkciji parametara u cilju njihove optimizacije.

Jedan od takvih metoda je metod zasnovan na fiktivnim magnetnim opterećenjima koji se koristi za rešavanje brojnih problema sa stalnim magnetima. Zasnovan je na magnetnom

skalar potencijalu magneta, izvedenom iz Maksvelovih jednačina pod pretpostavkom da je relativna permeabilnost, μ_r, konstantna kroz ceo posmatrani uzorak. Kao takav, često se koristi za rešavanje problema koji obuhvataju stalne magnete bez materijala sa visokom permeabilnošću u svojoj blizini. Iako se za matematičke formule na kojima se zasniva ovaj metod znalo godinama [141], tek je 1984. godine polje stalnog magneta u obliku paralelopipeda opisano ovom metodom i istovremeno sa jednačinama za izračunavanje sile za dva paralelna namagnetisana stalna magneta, publikovano u [2]. Iako od tada mnogi autori koriste ovu tehniku, poznatu pod nazivom Kulombijski pristup (eng. Colombien approach) samo određena grupa problema se može objasniti ovim jednačinama.

Jedan od ciljeva ove disertacije je da umanji ovaj nedostatak i da proširi delokrug postojećih jednačina, što bi omogućilo preciznije modelovanje šireg spektra uređaja sa stalnim magnetima i analizu njihovog ponašanja u prisustvu linearnih magnetnih materijala. Dublja diskusija u vezi sa ovim metodom je data u petom poglavlju.

Kvalitet električnih uređaja koji sadrže stalne magnete u velikoj meri zavisi od magnetnog materijala od koga su načinjeni stalni magneti kao i od njihove magnetizacije i dimenzija. Dve osnovne aplikacije stalnih magneta se mogu razlikovati: prva koja koristi blok magnete i druga koja koristi cilindrične magnete. Blok stalni magneti su jednostavni za proizvodnju i magnetizaciju i mnogo je jednostavnije izračunati magnetno polje koje oni stvaraju. Međutim, u većini inženjerskih aplikacija potrebno je nekoliko stalnih magneta oblika cilindra ili prstena tako da je određivanje polja i magnetne sile između njih od velikog značaja. Poznavanje magnetne sile, bilo da je ona odbojna ili privlačna, neophodno je za kontrolu rada i pouzdanosti uređaja u čijem su sastavu stalni magneti. Veliki broj naučnika u svetu se bavi ovom tematikom pokušavajući da primeni metod kojim će se što tačnije i što brže odrediti magnetno polje i sila između stalnih magneta, što je od veoma velikog značaja za projektovanje uređaja koji sadrže stalne magnete. Takođe je velika pažnja usmerena i na pronalaženje materijala sa što boljim karakteristikama i stalnih magneta koji će biti bolju u odnosu na postojeće i sa inženjerskog i ekonomskog aspekta. O tome svedoči i niz publikovanih radova u vodećim međunarodnim časopisima i konferencijskim zbornicima radova.

Stalni magneti oblika cilindra, prstena ili lučnog oblika sastavni su deo velikog broja električnih uređaja, poput aksijalnih i radijalnih ležajeva, spojnica, senzora, motora i aktuatora. [12, 13, 17, 23, 30, 34, 35, 37, 43, 48, 54, 59, 111, 127]. Analitički izraz za polje koje stvara stalni magnet oblika cilindra homogeno namagnetisani u aksijalnom pravcu je

izveden još sedamdestih godina prošlog veka [29, 141]. Nakon toga, veliki broj istraživača predlaže različite modele za proračun sile između dva cilindrična magneta ili cilindričnog i blok magneta [1, 10, 128, 132]. Hull i Cansiz su 1999.godine [49] predložili integralnu jednačinu za proračun sile i krutosti (eng. stiffnes) između cilindričnog magneta i cilindričnog superprovodnika što je zapravo ekvivalentno proračunu sile između dva magneta. Vokoun je 2009. godine odredio silu između dva laterarno pomerena cilindrična magneta korišćenjem metoda zasnovanog na elementarnim magnetnim dipolima potvrdivši svoje rezultate eksperimentalnim putem [148]. Rešenje za silu između cilindričnih magneta u zatvorenoj formi odredio je Ravaud sa grupom autora 2010. godine, [128]. Uporedili su Kolumbijski i Amperski pristup ističući činjenicu da se cilindrični magnet ponaša identično kao tanak solenoidni namotaj. Naravno, magnetno polje koje stvara, a samim tim i sila neće biti istog reda veličine kao kod solenoidnog namotaja. Robertson, Cazzolato i Zander su 2011. godine predložili jednostavnije rešenje za silu u zatvorenom obliku, koje sadrži duplo manji broj elemenata i realno je za razliku od prethodnog koje je sadržalo i imaginarne delove, [132]. Takođe je vreme dobijanja ovog rešenja za red veličine kraće od prethodnog.

Analitički model stalnog magneta oblika prstena među prvima su predložili Perigo, Faria i Motta 2007. godine. Oni su u svoj publikaciji [115] dali uporedne rezultate za komponente vektora magnetne indukcije aksijalno namagnetisanog magneta oblika torusa dobijene primenom analitičko-integralene metode (zasnovane na određivanju magnetnog skalar potencijala), razvoja u Tejlorov red i eksperimentalne rezultate. U istom radu su dali i izraz za indukciju koju stvaraju periodični stalni magneti. To je sistem aksijalno namagnetisanih stalnih magneta oblika prstena koji se koristi u strukturama za usmeravanje snopa elektrona. Ravaud, G. Lemarquand, i V. Lemarquand su 2008. godine predložili nov oblik rešenja za proračun polja radijalno i aksijalno namagnetisanog torusa zasnovan na Kolumbijskom pristupu, [123]. Dobijene jednačine su sadržale eliptičke integrale, prve, druge i treće vrste. Kao osnovni nedostatak ovog pristupa, Babic i Akyel su istakli to što su dobijeni izarazi veoma složeni za dalji numerički proračun, [15]. Pored toga, u jednoj od komponenti magnetnog polja javlja se imaginarni deo koji je približno jednak nuli, ali je to otežavajuća okolnost pri crtanju raspodele magnetnog polja u programskom paketu Mathematica, u kom je obavljen pomenuti numerički proračun. Iz tog razloga su Babić i Akeyel [15] predložili nov, unapređen model za proračun magnetnog polja stalnih magneta oblika prstena, zasnovan na fiktivnim magnetnim opterećenjima. Konačni izraz sadrži eliptičke integrale prve i druge vrste i Heuman Lambda funkciju.

Mnogo pre objavljivanja pomenutih naučnih radova na temu proračuna polja stalnog magneta oblika prstena, veliki broj publikacija je bio posvećen proračunu sile kod magnetnih ležajeva, kao osnovnog parametra za kontrolu pouzdanosti rada uređaja u čiji sastav ulaze magnetni ležaji. Za veliki broj mašina rotacionog tipa znatno bi bilo pogodnije zamenti konvencione mehaničke ležaje sa magnetnim ležajima koji se oslanjaju na magnetno polje magneta kako bi ostvarili funkciju levitacije, centriranja i kontrole pouzdanosti rotacionih delova, poput one koju obavljaju mehanički ležaji. Prednost magnetnih ležajeva u odnosu na mehaničke je to što su oni beznontaktni, pa stoga nema mehaničkog trenja i ne zahtevaju podmazivanje. Kod aplikacija kod kojih postoji veliki broj obrtaja veoma je veliki gubitak energije usled trenja u slučaju kada se koriste mehanički lageri, dok pri upotrebi magnetnih ležajeva nema nikakvih gubitaka. Magnetni ležaji imaju veliku ulogu u kompresorima, turbinama, pumpama, motorima, generatorima i mnogim drugim uređajima. Postoje dva tipa magnetnih ležajeva: aktivni i pasivni.

Aktivni ležaji ostvaruju bezkontaktnost pomoću pozicionih senzora i elektronskih kola koji omogućavaju stabilnu levitaciju rotacionog dela elektromagneta. Nasuprot njima, rad pasivnih ležajeva je omogućen isključivo pomoću polja, odnosu sile između stalnih magneta koji ga čine. Jedan takav magnetni ležaj je, na primer, realizovan u Lawrence Livermore nacionalnoj laboratoriji [12]. U cilju ostvarivanja dinamičke stabilnosti magnetnog ležaja, oni su povezani na stabilizator u čijim sastavu je Halbachov niz. U poređenju sa aktivnim lagerima prednost pasivnih je što imaju znatno nižu cenu.

Analizom magnetnih ležajeva se među prvima bavio Yonnet, koji je 1978 godine dao pregled deset različitih konfiguracija magnetnih ležajeva [166], od kojih su neke bile poznate decenijama ranije. Napomenuo je i veliki značaj pojave novih samarijum kobalt magneta (SmCo5) na tržištu sa kojim se javila mogućnost korišćenja odbojne sile magneta, za razliku od dotadašnjih uređaja koji su mahom bili zasnovani na privlačnoj sili. Takođe, istako je činjenicu da je sila koja deluje između dva aksijalna magneta potpuno ista kao i sila između radijalnih magneta kada je magnetizacija magneta istog intenziteta, tako da je u svojim publikacijama predlagao prelaz radijalnih na aksijalne magnete s obzirom da su oni mnogo jednostavniji za proizvodnju. 1981. godine je primenom metoda zasnovanog na elementarnim magnetnim dipolima, pomoću izraza za energiju, odredio silu i krutost različitih konfiguracija magnetnih ležajeva i magnetnih spojnica [167]. Ravaud, G. Lemarquand, V. Lemarquand i Depollie su pored određivanja magnetnog polja radijalno i aksijalno namagnetisanih magneta oblika prstena [123], dali i polunumerička rešenja za silu i krutost između aksijalnih [124] i

radijalnih torusa [125]. Koristeći Kolumbijski pristup, pokazali su da nije moguće dobiti izraz za silu između radijalno namagnetisanih magneta u zatvorenom obliku, da je njihov Kulombijski pristup tačniji od numeričkih rešenja dobijenih metodom konačnih elemenata i dali optimalne dimenzije magneta koji ulaze u sastav magnetnog ležaja, u cilju postizanja maksimalne sile. Rešenje za polje i silu kod magnetnog ležaja načinjenog od Halbach-ovog niza stalnih magneta predložio je 2012. godine Bachovchin sa grupom autora, [12]. Dokazali su da Halbahovi nizovi, pomoću kojih se koncentriše polje samo sa jedne strane niza, dovode do toga da sila koja deluje između ovako načinjenih magneta bude i za red veličine veća od sile kod standardnih magnetnih ležaja, a sami tim se dobija i veća krutost. Pored veoma dobrih svojstva koje imaju ovakvi ležaji, oni nisu široko zastupljeni s obzirom na cenu koja je daleko veća od cene magnetnih ležajeva koje čine dva magneta oblika prstena.

Stalni magneti lučnog oblika, ili kako se još nazivaju sektoralni magneti, takođe se često koriste u elektromagnetnim uređajima. Ovaj tip magneta ima primenu u električnim motorima, kod diamagnetnih levitacionih uređaja, 3-D senzora, akcelerometara, ali pre svega treba istaći njihovu primenu u Halbach-ovim strukturama i kod magnetnih spojnica. Nasar i Xiong su prvi dali analitičko rešenje za magnetno polje koje stvara sektoralni magnet 1988. godine, [105]. Nagrial se u svom radu iz 1993. godine, [104], kritički osvrće na postojeće metode za projektovanje magnetnih spojnica. Dao je i uporednu studiju 3D poluanalitičkog rešenja za polje kod aksijalnih spojnica u čiji sastav ulaze sektoralni magneti i magneti oblika prstena i pokazao koliko veliki uticaj na performanse uređaja imaju dimenzije magneta. Ipak, najznačajniji pomak u određivanju 3D parametarskih jednačine za proračun sile i obrtnog momenta kod aksijalnih spojnica dao je Furlani [36, 37, 41, 42, 43], devedesetih godina prošlog veka. Nakon toga, veliki broj istraživača predlaže različite poluanalitičke pristupe za proračun polja sektoralnog magneta [71, 118, 121, 139, 160] i različite dvodimenzionalne i trodimenzionalne tehnike za određivanje obrtnog momenta [41, 126, 127].

Rakotoarison, Yonnet i Delinchant su 2007. godine predložili model za proračun magnetnog skalar potencijala i magnetnog polja sektoralnog magneta koji se zasniva na Kulombijskom pristupu, kritikujići Furlanijev [43] model zasnovan na raspodeli mikroskopskih Amperovih struja. Kao glavni nedostatak ističu to što u krajnjim izrazima figurišu dvostruki integrali suma, pa je model kao takav procesorski veoma zahtevan i nimalo pogodan za dinamičke simulacije i optimizacione procese. Mnogi autori su se godinama bavili, uglavnom, dvodimenzionalnom analizom sektoralnih magneta. Glavni razlog je to što se 2D pristupom dobija potpuno analitičko rešenje koje omogućava jednostavnu optimizaciju

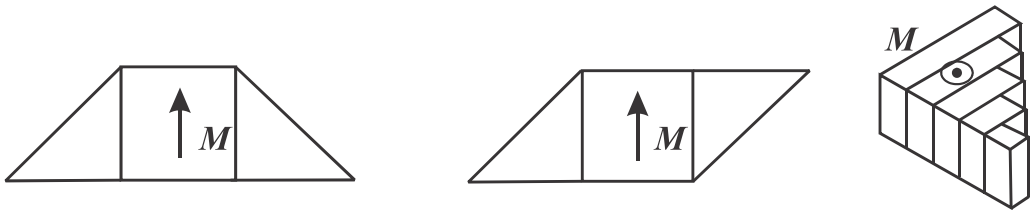
parametara, u cilju dobijanja što veće sile kod sinhronih spojnica, [23, 67]. Međutim, ovaj dvodimenzijalni pristup ne daje tačno rešenje u tačakam koje su dosta udaljene od posmatranog sistema. Veliki doprinos u 3D analizi sektoralnih magneta dali su Ravaud, G. Lemarquand i V. Lemarquand. Oni su najpre odredili potpuno analitičko rešenje za sve tri komponente polja tankog sektoralnog magneta uniformno tangencijalno i radijalno namagnetisanog, upoređujući Kulombijski pristup i pristup zasnovan na Amperovim strujama [121, 122]. Predstavili su i poluanalitički pristup za proračun obrtnog momenta između uniformno namagnetisanih sektoralnih magneta [126] i naveli nedostatke korišćenja uniformno namagnetisanih sektoralnih magneta u odnosu na radijalno namagnetisane sektoralne magnete. U svojoj publikaciji [127] su dali potpuno analitičko rešenje za sektoralni magnet bilo koje debljine, uzevši u obzir zapreminska opterećenja koja su u prethodnim analizama bila zanemarena [122]. Takođe su odredili silu i obrtni moment između dva radijalno namagetisana sektoralna magneta korišćenjem poluanalitičkog pristupa i konačne izraze dobili u formi koja je znatno jednostavnija od do tada poznatih. To je omogućilo veoma brzu analizu performansi uređaja u čiji sastav ulaze sektoralni magneti u funkciji parametara i ostvarivanje većeg obrtnog momenta podešavanjem dimenzija magneta.

Proračunom sile između dva blok magneta bavio se veliki broj naučnika [2, 4, 5, 6, 7], a prvo analitičko rešenje izvedeno je osamdesetih godina prošlog veka. 1984. godine, Akoun i Yonnet su dali 3D analitičko rešenje za silu koja deluje između dva blok magneta za paralelne pravce magnetizacije [2], koji su paralelni sa jednom od ivica magneta. Iako su oni isticali da je rešenje jednostavno, i kao takvo pogodno je za određivanje krutosti sistema, ipak je izraz za silu sadržao 256 članova i kao takav bio veoma glomazan. Ipak, na osnovu dobijenog izraza, moglo se zaključiti da sila zavisi samo od pozicija uglova blok magneta. Na osnovu tog saznanja, 1999. godine, Bancel je predložio novi pristup: predstavljanje magneta pomoću magnetnih čvorova smeštenih u uglovima blok magneta [11]. Korišćen pristup se zasniva na raspodeli fiktivnih magnetnih opterećenja. Izrazi za silu i obrtni moment, dobijeni na ovaj način, su tačni sa matematičke tačke gledišta. Međutim, mora se obratiti pažnja na činjenicu da se magnetni čvorovi ne mogu izolovati. Izraz za ukupnu silu je tačan, ali vrednosti koje se odose na pojedine magnetne čvorove, nisu. Elies i Lemarquand su dali značajan doprinos odredivši silu između dva proizvoljno postavljena blok magneta i obrtni moment kod koaksijalne sinhrone spojnice, [34]. 2009. godine Allag i Yonnet su odreditili analitičko rešenje za silu [4] i obrtni moment [5] za sistem dva blok magneta u slučaju kada su pravci vektora magnetizacije magneta normalni jedan u odnosu na drugi. Potvrdili su da se

komponente sile i obrtnog momenata mogu direktno izračunati na osnovu rasporeda čvorova, pri čemu bi u krajnjim izrazima figurisale logaritamske funkcije i funkcija arctang. Uporedo sa njima, Janssen je sa grupom autora predložio [57] drugi oblik izraza za silu između blok magneta čiji su vektori magnetizacije normalani jedan u odnosu na drugi, kao i izraz za obrtni moment [58]. Yonnet i Allag su nakon svih dotadašnjih istraživanja, 2011. godine dali najjednostavniji analitički oblik za silu i obrtni moment sistema proizvoljno postavljenih blok magneta zasnovan na raspodeli "magnetnih čvorova", [168].

Analitički i poluanalitički modeli za proračun magnetnog polja stalnih magneta, koju su do sada predlagani od strane velikog broja autora, uglavnom su se odnosili na magnete oblika paralelopipeda, cilindra i prstena. Međutim, neki naučnici smatraju, da u mnogim elektromehaničkim uređajima upotreba stalnog magneta nekog drugog oblika, poput onih prikazanih na slici 1.2, može dovesti do poboljšanja performansi uređaja. Bancel [11] je objasnio kako se svaki od tih netipičnih oblika stalnih magneta može posmatrati kao sistem blok magneta, a određivanje polja koje stvara takav magnet se svodi na superpoziciju vrednosti dobijenih za blok magnete. Međutim, u zavisnosti od primenjenog metoda za proračun polja, to može da bude problem u slučaju kada broj blok magneta postane značajno veliki, što dovodi do veoma dugog vremena proračuna.

Na slici 1. 2 prikazani su magneti različitih geometrijskih oblika koji se mogu podeliti na jednostavnije oblike i čije se polje može odrediti superpozicijom rezultata dobijenih za kompozitne delove. Još neki od netipičnih oblika stalnog magneta koji su do sada analizirani su: stalni magneti oblika zarubljene kupi [91] i oblika torusa trapezoidnog poprečnog preseka [158], čija su magnetna polja i sile određene od strane autora ove disertacije, magnet oblika piramide [28, 56], četvorougaonog [59,63], šestougaong i osmougaonog oblika.



Slika 1.2. *Netipični oblici magneta.*

Predmet ove doktorske disertacije predstavlja nastavak istraživanja vezanog za proračun magnetnog polja stalnih magneta publikovanog u magistarskoj tezi [93]. Analizirane su različite konfiguracije stalnih magneta, kao i stalni magneti različitih oblika u prisustvu linearnih magnetnih ravni i u prisustvu različitih struktura načinjenih od linearnih magnetnih materijala. Posebna pažnja će biti usmerena na aksijalne i radijalne magnetne lažaje. Za

rešavanje ovih problema, umesto analitičkih, korišćeni su numerički i polunumerički pristupi kojima su izbegnute višestruke integracije i kompleksni proračuni, a samim tim je ubrzan proces dobijanja konačnih rezultata. U cilju provere tačnosti razvijenih metoda, rezultati su upoređeni sa rezultatima dobijenim primenom FEMM i COMSOL Multiphysics softvera, koji se baziraju na primeni metoda konačnih elemenata, kao i sa rezultatima koji su već saopšteni u radovima drugih istraživača iz ove oblasti u svetu. Deo rezultata prikazanih u ovoj disertaciji, koji se odnose na proračun polja i sile kod različitih konfiguracija stalnih magneta, publikovan je u časopisima i prezentovan na međunarodnim konferencijama, [50], [79-100], [149-158].

Struktura disertacije je organizovana tako da omogućava jednostavno praćenje sadržaja. Tekst je podeljen u 13 poglavlja (glava). Pojedine glava su podeljene na podglave. Pored poglavlja standardnih za publikacije ovog tipa, Uvoda (Poglavlje 1), Zaključka (Poglavlje 11) Literature (Poglavlje 12) i Priloga (Poglavlje 13), sadrži poglavlja koja se odnose na teorijska razmatranja (od Poglavlja 2 do Poglavlja 5 i Poglavlje 10) i ona u kojima su izloženi rezultati (od Poglavlja 6 do poglavlja 9).

U Poglavlju 2 su ukratko navedene osnovne karakteristike magnetnih materijala i njihova podela. Potom su klasifikovani materijali koji služe za izradu stalnih magneta po svom sastavu, navedena su njihova svojstva i primena.

Treće poglavlje je posvećeno najčešće korišćenim numeričkim i analitičkim pristupima za modelovanje stalnih magneta.

U četvrtom poglavlju je dat kratak opis tehnika za proračun sile kod stalnih magneta.

Peto poglavlje sadrži detaljan opis polunumeričkih metoda za proračun polja i sile kod stalnih magneta koji su korišćeni u disertaciji za modelovanje različitih konfiguracija. Najpre su izvedene jednačine na kojima se baziraju pomenuti pristupi, a potom je dat opis metoda koji se zasniva na raspodeli mikroskopskih Amperovih struja. Drugi pristup koji je korišćen za proračun magnetnog polja se zasniva na uvođenju fiktivnih magnetnih opterećenja (magnetnih masa), koji u kombinaciji sa diskretizacionom tehnikom omogućava rešavanje velikog broja problema sa stalnim magnetima. Dat je i detaljan opis trećeg metoda koji je korišćen u disertaciji, a to je nov metod razvijen na Katedri za teorijsku elektrotehniku Elektronskog fakulteta u Nišu i naziva se hibridni metod graničnih elemenata (eng. Hybrid boundary element method - HBEM). Zasniva se na metodu ekvivalentne elektrode i metodu podešavanja u tačkama (eng. point-matching method). Primenjivan je za potencijal savršeno provodnih elektroda, podešavanjem normalne komponente vektora električnog polja na

graničnoj površini bilo koja dva dielektrična sloja. Do sada je primenjivan za određivanje raspodele elektromagnetnog polja u okolini kablovskih završnica i spojnica [117], kod kvazi TEM analize mikrotalasnih oklopljenih ili neoklopljenih vodova [113], [114], sa konačnom širinom dielektrika, raspodele temperaturnog polja, za analizu uzemljivačkih sistema, itd. Metod je pogodan i za analizu trodimenzionalnih statičkih, stacionarnih i kvazistacionarnih elektromagnetnih problema. U ovoj disertaciji je prvi put primenjen za proračun magnetnog polja i sile stalnih magneta, u prisustvu tela načinjenih od linearnih magnetnih materijala, podešavanjem normalne komponente vektora magnetnog polja na graničnoj površini bilo koja dva magnetna sloja [158].

U Poglavlju 6 dati su rezultati za proračun polja i sile različitih sistema stalnih magneta rešenih metodom zasnovanom na Amperovim mikro strujama i diskretizacionoj tehnici. Ovaj metod je korišćen je kod stalnih magneta cilindričnog oblika, kao i oblika kupe i prstena homogeno namagnetisanih u aksijalnom pravcu kod kojih, usled homogene aksijalne magnetizacije, postoje samo površinske Amperove mikroskopske struje.

Poglavlje 7 sadrži različite konfiguracije stalnih magneta rešene primenom metoda zasnovanog na raspodeli fiktivnih magnetnih opterećenja i diskretizacionoj tehnici. Određena su i magnetna polja koja stvaraju stalni magneti različitog oblika, postavljeni iznad linearne magnetne ravni i privlačna sila između njih. Za analizu takvih struktura je, najpre, primenjena teorema lika u ravnom ogledalu, a zatim i metod zasnovan na raspodeli fiktivnih magnetnih opterećenja.

Primenom diskretizacione tehnike u okviru pristupa, zasnovanog na magnetnim opterećenjima, u velikoj meri je pojednostavljeno određivanje polja i sile kod aksijalnih i radijalnih magnetnih ležaja. Na taj način su izbegnuti višestruki integrali prisutni u do sada korišćenim metodama i problem je rešen primenom elementarnih funkcija i eliptičkih integrala prve i druge vrste, što je prikazano u Poglavlju 8.

Konfiguracije stalnih magneta u prisustvu cilindra načinjenog od linearnog magnetnog materijala, rešenih primenom Hibridnog metoda graničnih elemenata u kombinaciji sa metodom zasnovanom na fiktivnim magnetnim opterećenjima, analizirane su u Poglavlju 9. Do sada su se problemi stalnih magneta u prisustvu, isključivo, ravni od magnetnih materijala rešavali primenom teoreme lika u ravnom ogledalu, dok je u ovom poglavlju primenjen HBEM metod za određivanje sile između stalnog magneta i cilindra konačnih dimenzija. Na bazi prethodnih analiza, istaknute su najvažnije karakteristike različitih struktura, ukazano je na mogućnosti njihovog unapređenja podešavanjem geometrije magneta i parametara sredine

u cilju postizanja maksimalne odbojne i privlačne sile, zavisno od posmatrane konfiguracije, što je od velikog značaja u projektovanju uređaja koji sadrže stalne magnete.

U Poglavlju 10 su razmatrane različite nepreciznosti u procesu modelovanja i procesu proizvodnje stalnih magneta. One imaju najveći uticaj na funkcionisanje uređaja zasnovanih na stalnim magnetima s obzirom da svaka tehnika modelovanja polazi od pretpostavke koja unosi izvesnu grešku, a i sam proces proizvodnje je podložan oscilacijama u granicama tolerancije.

Nakon Zaključka (Poglavlje 11), navedena je korišćena literaratura po abecednom redu, kao i spisak referenci autora iz oblasti doktorske disertacije, (Poglavlje 12). Na kraju su dati Prilozi (Poglavlje 13) u kojima su prikazana detaljna izvođenja korišćenih formula, što omogućava lakše razumevanje primenjenih metoda i praćenje osnovnog teksta.

Rad se sastoji od 139 slika, 303 formule i 27 tabela. Slike, jednačine i tabele su numerisane za svako poglavlje posebno. Formule su navođene u malim zagradama, a kao i slike, numerisane su sa dva broja od kojih se prvi odnosi na broj glave, a drugi na redni broj jednačine, odnosno slike. Reference su navedene u srednjim (uglastim) zagradama. Za označavanje skalarnih veličina korišćena su kosa (*italic*) mala i velika slova latinice kao i uspravna grčka slova, dok su vektorske veličine označene masnim i iskošenim (***bold-italic***) karakterima. Kao indeksi su korišćeni numerički simboli i iskošeni i normalni karakteri.

Svi proračuni su izvršeni u programskom paketu Mathematica, dok su za poređenje rezultata korišćeni softveri FEMM [76] i COMSOL Multiphysics [30]. Konačna vizuelna forma disertacije dobijena je primenom programskih paketa: Microsoft Word, Corel Draw i OriginePro.



2. Podela i primena stalnih magneta

2. Podela i primena stalnih magneta

Proučavanje karakteristika nelinearnih magnetnih materijala predstavlja ogromno područje naučnih istraživanja i tehničkih primena. Bez poznavanja karakteristika ovih materijala nemoguća je njihova primena u bilo kojoj čovekovoj delatnosti vezanoj za elektrotehniku. Iako proučavanje ovih materijala nije predmet disertacije, u ovom poglavlju će, najpre, biti reči o podeli i karakteristikama magnetnih materijala [26, 72, 93], kao osnove dalje prikazanog istarživanja.

2.1 Karakteristike magnetnih materijala

Prema svojim magnetnim osobinama materijali se mogu podeliti na linerne i nelinearne magnetne materijale. Kod linearnih magnetnih materijala, pri određenoj temperaturi i pri normalnim jačinama magnetnog polja sa kojima se radi u laboratoriji, vektor magnetne indukcije je direktno srazmeran jačini magnetnog polja, a relativna magnetna permeabilnost ima konstantnu vrednost koja se neznatno razlikuje od jedinice. U ovu grupu materijala spadaju dijamagnetici i paramagnetici. Dijamagnetici nemaju sopstveni magnetni moment na nivou atoma ili molekula dok paramagnetici imaju. Međutim, sprega između susednih magnetnih momenata kod paramegnetika je slaba i pri delovanju spoljašnjeg magnetnog polja imaju tendenciju preorjentisanja u skladu sa magnetnim poljem. Pored toga, stepen uređenosti opada sa porastom temperature. Kod nelinearnih magnetnih materijala zavisnost između vektora magnetne indukcije i vektora jačine polja nije linearna pa magnetna permeabilnost ovih materijala nije konstantna veličina. Vektor magnetne indukcije i vektor gustine magnetnog momenta predstavljaju složene i višeznačne funkcije vektora jačine magnetnog polja i ne zavise samo od njegovog intenziteta u trenutku posmatranja već i od jačina polja kojima je materijal ranije bio podvrgnut. Malobrojnu, ali za tehniku izuzetno značajnu grupu nelinearnih magnetnih materijala, predstavljaju feromagnetni materijali ili feromagnetici, u koje spadaju gvožđe, nikl, pojedine njihove legure i neke retke zemlje. Treba napomenuti i antiferomagnetike i ferimagnetike kod kojih su susedni amperski magnetni momenti međusobno paralelni ali suprotno orijentisani jedan u odnosu na drugi.

Objašnjenje ponašanja feromagnetika dao je i francuz Pjer Vajs, koji je 1907. godine postavio svoju teoriju magnetnih domena i molekularnog polja. Po Vajsovoj teoriji u svakom feromagnetnom materijalu postoje sitne oblasti stalno namagnetisane, koje su se spontano namagnetisale pri nastanku feromagnetika, a nazivaju se magnetni domeni. Veličine magnet-

nih domena kreću se u granicama od $0.01mm$ do $0.1mm$, dakle daleko su većih dimenzija od atoma i molekula feromagnetika. Svaki domen se ponaša kao zaseban magnet. Ove oblasti predstavljaju grupe većeg broja atoma, čiji su magnetni momenti, zahvaljujući posebnim i veoma jakim silama međusobnog dejstva, dovedeni do paralelne orijentacije, tako da svaki magnetni domen karakteriše po jedan magnetni moment. Domeni sadrže vrlo veliki broj atoma (reda 10^{15}). U formiranju domena moraju učestvovati sile sprege u kristalnoj rešetki. Ukupna namagnetisanost materije jednaka je zbiru magnetnih momenata pojedinih domena. Ukoliko materijal prethodno nije bio namagnetisan, onda su magnetne ose pojedinih domena orijentisane u raznim pravcima, pa je rezultujuća namagnetisanost materijala jednaka nuli. Podvrgavanje magnetika spoljašnjem magnetnom polju, makar i slabog intenziteta, orijentiše ose magnetnih domena u jednom smeru, što izaziva porast namagnetisanosti materijala.

Feromagnetici imaju vaoma značajne primene tako da je potreba za ovim materijalima veoma velika, pa je poznavanje njihovih karakteristika posebno važno. Osnovna karakteristika feromagnetnih materijala i magnetnih kola od feromagnetika je kriva magnetisanja koja predstavlja zavisnost magnetne indukcije od jačine magnetnog polja, $B = f(H)$. Feromagnetne sredine su magnetno nelinearne, pa je magnetna permeabilnost funkcija jačine magnetnog polja. Kada se feromagnetik pobuđuje stranim magnetnim poljem ciklično, tada se magnetna indukcija menja po krivoj koja obrazuje zatvorenu konturu i naziva se histerezisni ciklus ili histerezisna petlja. Posebno je značajna histerezisna petlja koja se dobije pobuđivanjem u simetričnim ciklusima i u užem smislu se podrazumeva pod histerezisnom petljom. Histerezis je fenomen zapažen u mnogim materijalima i procesima. Najveći grupni primeri su histerezisni efekti u feromagnetnim materijalima. Takođe, histerezis je primećen kod dielektrika i kod napregnutog stanja materijala podvrgnutog plastičnoj deformaciji [93].

Fizička suština histerezisnih pojava je složena i teško se može matematički prikazati. Ljudi su dugo pokušavali da odrede analitički izraz histerezisne petlje, što je posledica značaja te potrebe. Naročito su značajni rezultati koji se odnose na aproksimacije karakteristika u slučaju prostoperiodičnih pobuda, kada se histerezisna petlja aproksimira pomoću elipse i između magnetne indukcije i jačine polja obrazuje linearna zavisnost. Tada se magnetna propustljivost određuje kao kompleksna, ali od jačine polja nezavisna veličina. U slučaju analize kola koja sadrže histerezisne elemente neophodno je imati matematički model koji blisko simulira histerezisni fenomen. Prikazivanje histerezisne petlje analitičkim izrazima ne može da bude egzaktno, već aproksimativno. To je rezultat nedostatka

sveobuhvatnosti matematičkog aparata. Međutim, aproksimacija krivih magnetisanja magnetnih materijala matematičkim izrazima, odnosno matematičkim modelima, može biti veoma tačna. Pri tome su obično izrazi dovoljno složeni da se komplikuje njihova primena, tako da se teško dolazi do rezultata. Ova teškoća je, u današnje vreme, prevaziđena s obzirom na postojeće numeričke metode i primenu računara u proračunima. Zahvaljujući računaru danas se uspešno i relatino brzo mogu ispitati i primeniti složene funkcije za numeričke proračune, koje se analitički ne bi mogle ispitati.

Analitički izraz za krivu magnetisanja nema samo teorijski, već ima i poseban praktični značaj. Pomoću tog izraza može se pri bilo kom načinu promene jačine magnetnog polja odrediti vremenski oblik magnetne indukcije. Pored toga, mogu se odrediti gubici usled histerezisa, nastala izobličenja pri vremenski promenljivim pobudama feromagnetika i uopšte se mogu rešavati preblemi magnetnih kola od feromanetika uz postojeće zakone koji važe za magnetno kolo. I ne samo to, može se odrediti i zakon promene jačine magnetnog polja, pri kome se magnetna indukcija menja prostoperiodično u funkciji vremena, a to može da ima važne praktične primene.

Prema obliku histerezisne petlje feromagnetni materijali se dele na meke i tvrde magnetne materijale. Meki magnetni materijali imaju male vrednosti remanentne indukcije i koercitivnog polja i veoma usku histerezisnu petlju za razliku od tvrdih feromagnetnih materijala koji imaju veliku remantnu indukciju i koercitivno polje, a samim tim i široku histerezisnu petlju. Zbog toga su tvrdi feromagnetni materijali veoma pogodni za izradu stalnih magneta.

2.2 Podela stalnih magneta

U današnje vreme magnetni materijali imaju izuzetno veliku primenu [21, 93, 11, 143]. Poslednjih godina je najveća potražnja za stalnim magnetima na bazi retke zemalje u čiji sastav ulaze lantanoidi koji predstavljaju grupu od petnaest elemenata periodnog sistema od lantana do lutecija sa atomskim brojem od 57 do 71. Lantanoidi su zajedno sa skandiumom i itriumom poznati i pod nazivom retke zemlje pa otuda i naziv ovim magnetima u čiji sastav oni ulaze. Najviše su u upotrebi sledeće vrste magneta:

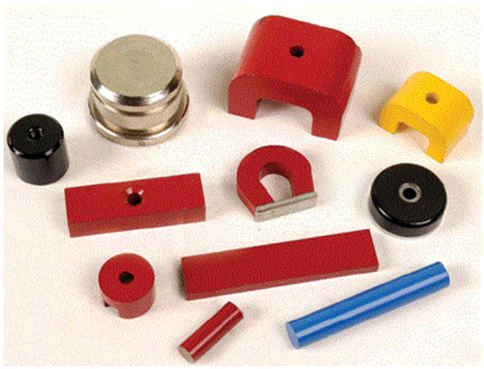
Magneti od neodimijuma. To je vrsta magneta razvijena osamdesetih godina prošlog veka sa odličnim magnetnim karakteristikama u smislu visoke koercitivnosti i energije. To je najjači i najmoćniji magnetni materijal do danas i na njega se gleda kao na „kralja“ magneta. U današnje vreme magneti od neodimijuma se pojavljuju na tržištu sa sve boljim performansama pa stoga dobijaju sve širu primenu. Polako zamenjuju tradicionalne feritne,

AlNiCo i SmCo magnete u električnim motorima, mernim instrumentima, auto industriji, petrohemijskoj industriji i medicini. Ovi magneti mogu da se proizvode u različitim oblicima kao što su: disk, prsten, blok i lučni oblik, slika 2.1. Takođe mogu biti i presvučeni različitim emulzijama kako bi se prilagodili uslovima mesta ugradnje. Emulzije mogu biti od cinka, lima, hroma, epoksi smeše, srebra, pa čak i od zlata.



Slika 2.1. *Sinterovani NdFeB magneti.*

AlNiCo magneti se pravi od legure aluminijuma, nikla, gvožđa i kobalta sa malom količinom primesa, slika 2.2. Imaju dobru temperaturnu stabilnost, veliku remanentnu indukciju, relativno jaku energiju, a otporni su i na demagnetizaciju. Ako poredimo snagu, mnogo su slabiji od NdFeB, SmCo i feritnih magneta.



Slika 2.2. *AlNiCo magneti.*

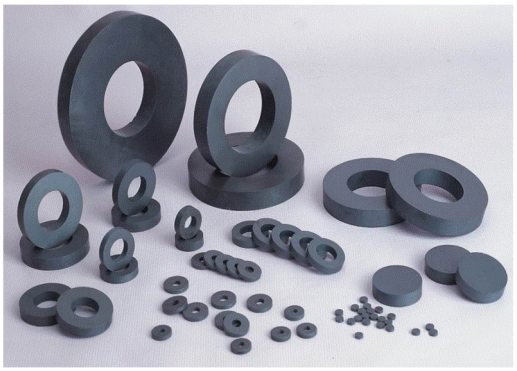
Proizvode se dvema metodama: livenjem i sinterovanjem. Metoda livenja daje proizvode sa visokom energijom i pruža veće mogućnosti oblikovanja magneta. Sinterovanjem se dobijaju magneti manjih dimenzija i daju malo slabija magnetna svojstva, ali sa druge strane, po pitanju dimenzija konačnog magneta su mnogo fleksibilniji. AlNiCo magneti se mogu proizvesti sa izotropnim i anizotropnim osobinama. Imaju širok opseg radnih temperatura, do čak 550°C. Upotreba ovih magneta je posebno značajna kod temperaturno senzitivnih aplikacija kao što su magnetne rezonance, elektronski senzori, magnetroni, TWT pojačavači, aktuatori, motori, itd.



Slika 2.3. *SmCo magneti.*

Samarijum kobalt (SmCo) magneti su na tržištu od ranih sedamdesetih godina prošlog veka, slika 2.3. Dobijaju sinterovanjem i impregnacijom pod pritiskom. Poseduju veoma važne magnetne osobine, izuzetnu termalnu stabilnost i otpornost na koroziju i oksidaciju. Zbog svojih svojstava predstavljaju idealno rešenje za aplikacije gde se zahteva otpornost na temperaturne promene i različite režime rada.

Feriti (Keramički magneti) su najjeftinija klasa permanentno magnetnih materijala. Prave se od kompozitnog čelik oksida i barijum-stroncijum karbonata, tehnologijom keramičkog procesiranja. Lako se proizvode i imaju veoma jaku koercitivnu silu. Po snazi, keramički su jači od AlNiCo magneta ali slabiji od neodimijum-skih i samarijum kobaltnih. Proizvode se preso-vanjem legure i kasnijim sinterovanjem. Ovo je veoma rentabilan način proizvodnje u različitim oblicima i veličinama, Slika 2.4. Ovi magneti se mogu proizvesti sa izotropnim i anizotropnim osobinama. Imaju veoma dobar balans magnetne snage, otpornosti na koroziju i dobru nominalnu temperaturu rada između -40°C i 250°C. U najširoj su upotrebi danas i imaju svakojaku primenu: automobilskoj industriji, industrijskim i drugim motorima, računarima, zvučnicima.

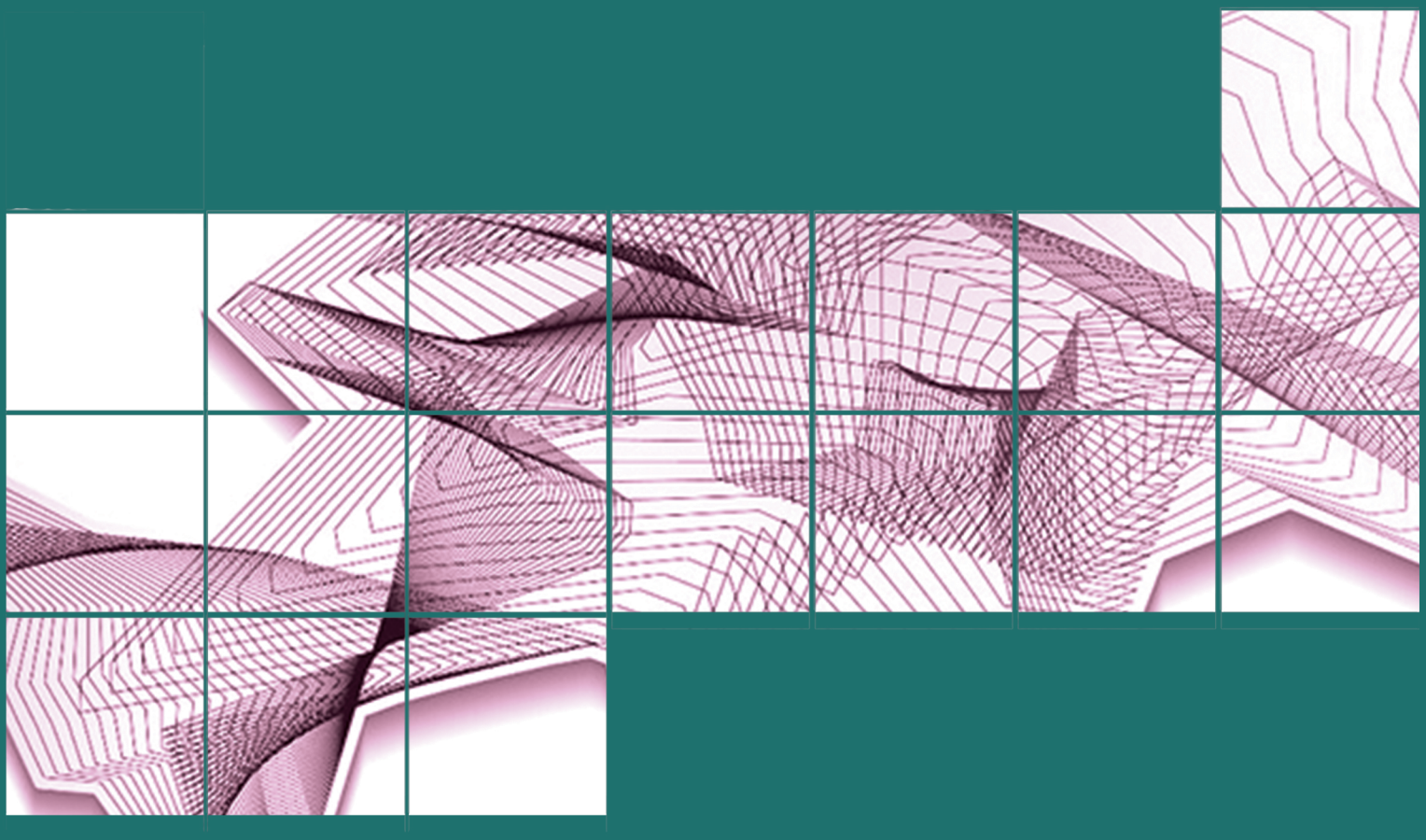


Slika 2.4. *Keramički magneti.*

Pored gore pomenutih vrsta magneta, klasifikovanih na osnovu sastava, stalni magneti se na osnovu aplikacije mogu podeliti u četiri grupe:

- Magneti kod kojih se koristi privlačna i odbojna sila magneta. Imaju primenu kod magnetnih ležaja (kompresori, turbine, pumpe), magnetnih separatora, magnetnih brava, magnetnih držača, senzora.
- Koristi se magnetno polje magneta da bi se konvertovala mehanička energija u električnu, kod generatora, bobina, kočnica kod ICE vozova i kod hibridnih automobila.
- Koristi se magnetno polje magneta da bi se konvertovala električna energija u mehaničku (motori, merni uređaji, zvučnici, releji, linearni i rotacioni aktuatori).
- Koristi se magnetno polje magneta da bi se upravljali, oblikovali i kontrolisali snopovi elektrona ili jona (Magnetroni, jonske pumpe, ciklotroni).

Pored gore pomenutih aplikacija, značajno je napomenuti i primenu stalnih magneta u medicini (magnetna rezonansa) i u transportnim vozilima (Maglev vozovi).



3. Numerički i analitički pristupi za modelovanje stalnih magneta

3. Numerički i analitički pristupi za modelovanje stalnih magneta

Stalni magneti su poslednjih godina u sve većoj upotrebi u širokom spektru električnih uređaja i opšta potreba za optimizacijom njihovih dimenzija vodi ka razvoju metoda za proračun magnetnog polja koje oni stvaraju. Tokom godina razvijen je veliki broj numeričkih i analitičkih tehnika za analizu stalnih magneta i određivanja potencijala i polja koje stvaraju konfiguracije u čiji sastav oni ulaze. O tome svedoči veliki broj publikacija koje se bave metodama za proračun polja i sile kod stalnih magneta, [16, 22, 33, 38, 53, 116]. U ovom poglavlju je dat kratak pregled najčešće korišćenih numeričkih i analitičkih metoda za rešavanje elektromagnetnih problema.

3.1 Numerički pristupi zasnovani na diskretizaciji zapremine

Diskretizacijom oblasti rešavanja na manje zapremine i određivanjem polja u svakoj od od tih zapremina, može se dobiti precizna slika elektromagnetnog fenomena. Najpoznatiji metod iz ove grupe je metod konačnih elemenata. U ovu kategoriju spada i metod ekvivalentnog magnetnog kola, koji takođe predstavlja discretizaciju zapremine, iako sa manje elemenata mreže. Kod dvodimenzionalnih problema, diskretizacija zapremine se svodi na diskretizaciju površine. Zbog rezultata koji su zasnovani na diskretizaciji, ove metode su naročito pogodne za ograničene probleme i periodične strukture, a manje pogodne za neograničene probleme, kao što su stalni magneti u slobodnom prostoru [22].

3.1.1. Metod konačnih elemenata

Metod konačnih elemenata (eng. The Finite Element Method – FEM) je numerička tehnika za pronalaženje približnog rešenja parcijalnih diferencijalnih jednačina kao i integralnih jednačina i najačešće je korišćen pristup za rešavanje problema elektromagnetnog polja [53]. U pitanju je moćna, široko dostupna tehnika, kojom mogu biti obuhvaćena različita svojstva sistema. Međutim, on ipak pokazuje značajne nedostatke usled svog pristupa zasnovanog na mreži. Tokom primene FEMa za rešavanje nekog elektromagnetnog problema, oblast rešenja se razlaže na konačni broj podregiona koji se nazivaju elementima mreže. Elementi mreže su dovoljno mali pa se može smatrati da su unutar njih polje i potencijal stalni. Gustina ove mreže može da varira kroz oblast rešenja i često je neophodno prethodno poznavati raspodelu polja kod modela, kako bi se sačinila odgovarajuća mreža.

Tačnost rešenja metode konačnih elemenata raste sa većom gustinom mreže, međutim sa gušćom mrežom proračuni postaju procesorski zahtevniji pa mogu da prevaziđu mogućnosti računara. Takođe može doći i do numeričkih grešaka usled zaokruživanja u određenim granicama. Ovaj metod za proračun polja je takođe osetljiv na skokovite promene permeabilnosti na graničnim površinama između materijala. Iako je ovaj pristup procesorski i vremenski zahtevan, za razliku od mnogih drugih metoda, on omogućava analizu složenih struktura načinjenih od materijala različite magnetne permeabilnosti. Kod struktura koje nisu od feromagnetnih materijala ili kod konfiguracija sa malim pomerajima u odnosu na dimenzije, primena ovog metoda može biti problematična usled potrebe za velikom gustinom mreže. Umrežavanje modela postaje dominantan vremenski faktor u procesu rešavanja, iako odsustvo efekata zasićenosti olakšava kompijuterski proračun samih polja. Mreža mora biti gusta kako unutar aktivnih zapremina, tako i izvan njih. Štaviše, oblast rešenja sa elementima mreže mora biti dovoljno velika da obuhvati polja koja nestaju. Ako je spoljašnja granica, sa nultim potencijalom suviše blizu, polja u blizini posmatranog objekta mogu biti pod velikim uticajem tih granica. S obzirom da nije jednostavno naći kompromis između preciznosti i procesorski zahtevnog proračuna, ovaj metod i nije najbolji izbor za brze procene projektanata, niti za napredne procese optimizacije sa velikim brojem iteracija. Međutim, njegova mogućnost da rešava kompleksne strukture, njegova dostupnost i preciznost, u poređenju sa ostalim metodama opisanim u nastavku teksta, čine ga veoma pogodnim za korišćenje prilikom verifikacije drugih metoda, što je učinjeno i u ovoj disertaciji.

3.1.2 Metod konačnih razlika

Metod konačnih razlika (eng. Finite Difference Method – FDM) je jedan od najstarijih numeričkih metoda za rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina. On se zasniva na određivanju približnih vrednosti rešenja Laplasove jednačine u konačnom broju tačaka, koje se nalaze u čvorovima prethodno formirane mreže. Suština metoda je u tome da se parcijalni izvodi u Laplasovoj jednačini aproksimiraju algebarskim izrazima za konačne priraštaje tražene funkcije, u okolini čvorova mreže. Mreža kod ovog metoda je ravnomerno raspoređena. Nedostatak ovog metoda je veliki broj nepoznatih veličina (potencijali čvorova formirane mreže) pa kao i metod konačnih elemenata iziskuje dosta procesorskog vremena.

3.1.3. Metod konačnih zapremina

Metod konačnih zapremina (eng. Finite volume method) kao i metod konačnih elemenata i metod konačnih razlika koristi geometriju mreže. Termin “konačna zapremina” odnosi se na

malu zapreminu koja okružuje svaki čvor mreže. Kod metode konačnih zapremina, zapreminski integrali u parcijalnoj diferencijalnoj jednačini, koji sadrže član koji divergira, svode se na površinske integrale, korišćenjem teoreme divergencije. Ti članovi se svode na fluks kroz površinu svake konačne zapremine.

3.1.4. Model ekvivalentnih magnetnih kola

Model ekvivalentnih magnetnih kola (eng. Magnetic Equivalent Circuit) predstavlja prezentaciju magnetnog kola ekvivalentnim električnim kolom [110, 134]. Najznačajnija razlika, i istovremeno najveći problem, je što magnetnetni fluks, za razliku od električnih struja, nije ograničen na dobro definisane, analitički dokazive putanje. U poređenju sa, na primer, metodom konačnih elemenata, metod ekvivalentnih magnetnih kola je relativno jednostavan i brzo se rešava, jer je metod uključuje diskretizaciju na ograničen broj elemenata mreže, koji se nazivaju „tube fluksa". Tube fluksa bi trebalo da budu dobro definisane i zato je neophodno dobro poznavanje strukture magneta.

Ova tehnika je veoma osetljiva na geometrijske promene, jer putanja fluksa ima tendenciju da se menja i kod najmanjih promena geometrije, što može dovesti do potpuno novog izgleda ekvivalentnog kola. S obzirom da se u ovom metodu koriste prosečne vrednosti za jačinu magnetnog polja ovaj metod je pogodan za rešavanje struktura sa velikom permeabilnošću. Generalno, model ekvivalentnih magnetnih kola se uglavnom koristi kod struktura sa mekim magnetnim materijalima, kod koji se definišu tube fluksa sa relativno velikom preciznošću. Kako bi se došlo do odgovarajućeg modela, često je neophodno imati uvid u rezultate nešto preciznijeg metoda, kao što je metod konačnih elemenata, [97]. Čak i tada model ekvivalentnih magnetnih kola je izuzetno osetljiv na varijacije geometrije modela i brzo postaje netačan. Kod stalnih magneta, na primer, pri određivanju magnetne sili na malim rastojanjima, veoma je teško primeniti ovaj metod usled odsustva dobro definisanih putanja fluksa. Stoga se jedino smatra pogodnim za rešavanje ograničenog broja elektromagnetnih problema.

3.2. Numerički pristupi zasnovani na diskretizaciji površine

Kod nekih metoda je za rešavanje problema potrebno izvršiti samo diskretizaciju graničenih površina u oblasti rešavanja, umesto diskretizacije čitave zapremine proučavanog problema. Dva najčešće korišćena metoda iz ove grupe su metod graničnih elemenata i metod harmonika. Kod dvodimenzionalnih problema, diskretizacije površina se svodi na podelu na segmente. Metode sa diskretizacijom površine su naročito pogodne za ograničene probleme.

3.2.1. Metod graničnih elemenata

Metod graničnih elemenata (eng. Boundary element method - BEM) je numerički metod za rešavanje linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina pomoću kojih je opisan neki problem. Zasniva se na formiranju čvorova koji se postavljaju na graničnoj površini magnetnog materijala, dakle, diskretizuju se površine permeabilnih objekata. Linearne parcijalne diferencijalne jednačine, kojima je opisan neki problem, se transformišu u integralne jednačine [161] u kojima se pojavljuje ogovarajuća Grinova funkcija u slučaju direktnog metoda. U tom slučaju su nepoznate, koje se javljaju u integralnoj formulaciji graničnih vrednosti, primitivne promenljive na samoj razdvojnoj površini. U slučaju indirektne formulacije, singularna rešenja parcijalnih diferencijalnih jednačina na graničnoj oblasti se izražavaju u povoljno odabranoj kontinualnoj formi i nepoznate su površinska naelektrisanja smeštena na granici dva magnetna materijala. Polje se određuje izvan permeabilnih objekata na osnovu dobijene integralne jednačine korišćenjem datih graničnih uslova na površinama čije se granične vrednosti uklapaju u integralnu jednačinu, umesto vrednosti celokupne zapremine definisane parcijalnom diferencijalnom jednačinom. Jednom kada se ovo uradi, u kasnijoj fazi obrade, integralna jednačina se može ponovo iskoristiti da bi se numerički direktno izračunalo rešenje u bilo kojoj tački u okviru oblasti rešavanja. Iako često manje precizan od metoda konačnih elemenata, potreban broj elemenata je kod ovog metoda je znatno manji, što ga čini značajno bržim. Ako su svi objekti čija se površina diskretizuje neograničeno velike permeabilnosti, tačnost ove metode je veoma visoka, međutim generalno se smanjuje ukoliko se pojavi efekat zasićenosti. Najbolje osobine pokazuje kada se kombinuje sa nekim drugim metodama, poput metoda konačnih elemenata i metoda konačnih razlika.

3.2.2. Metod harmonika

Metod harmonika, koji se zasniva na Furijeovoj transformaciji, koristi se za rešavanje velikog broja raznovrsnih elektromagnetnih problema [45, 52, 54, 77, 159]. Kod ove tehnike, rešenje Maksvelovih jednačina za magnetostatiku, se svodi na rešavanje ili Laplasove jednačine ili Poasonove jednačine (kod rešavanja problema sa stalnim magnetima). Primenjuje se kod različitih problema ali pod pretpostavkom da su svi materijali linearni i homogeni i da su meki magnetni materijali beskonačno velike permeabilnosti. Ova metoda opisuje magnetnu strukturu u funkciji beskonačnog reda prostornih harmonika.

Ona opisuje topologiju sa beskonačnom permeabilnošću u periodičnoj strukturi ili strukturi koja može da se konvertuje u periodičnu strukturu obuhvatanjem dovoljno velikog dela prostora oko posmatranog objekta, kako bi se razdvojile periodične strukture u magnetnom smislu. Vertikalno u odnosu na pravac periodičnosti, smešteno je nekoliko oblasti i u svakoj od njih je različit materijal i svojstvo (magnet, vakuum, struja itd.). Svaka od tih oblasti je objašnjena Furijeovom transformacijom u periodičnom smeru. Počevši od izvornih oblasti, granične vrednosti između različitih oblasti se međusobno uparuju, što dovodi do koeficijenata Furijeovog reda koji opisuju svaku oblast. U teoriji, ovaj metod dovodi do potpuno analitičkog rešenja za sumiranje od n = 1... ∞. U većini slučajeva, njena praktična primena zahteva ograničavanje broja posmatranih harmonika kako bi proračun bio manje kompijuterski zahtevan, pošto svaki harmonik iziskuje odvojeno izračunavanje. Ova tehnika je takođe pogodna za korišćenje kod trodimenzionalnih struktura [125]. Međutim, pošto se više harmonijskih koeficijenata mora spojiti u graničnoj oblasti, proporcionalno tome povećava se i složenost.

3.3. Analitički metodi

Analitičke tehnike za proračun magnetnog polja ne zahtevaju nikakav oblik diskretizacije i daju potpuno analitičko rešenje problema. Ovo čini analitičke metode ekstremno brzim, s obzirom da nisu zasnovani na mreži, pa se određivanje polja u bilo kojoj tački prostora dobija direktno iz jednačina. Broj pretpostavki na kojima se baziraju ovi metodi su generalno veći nego u slučaju numeričkih metoda zasnovanih na diskretizaciji zapremine ili površine, ali se pri tome mora voditi računa da modeli ostanu realna reprezentacija posmatranog problema. Glavna pretpostavka je da su stalni magneti homogeno namagnetisani (što je zajedničko za većinu tehnika modelovanja) i da je relativna magnetna permeabilnost konstantna unutar posmatranog domena. Najčešće korišćeni analitički metodi su metod zasnovan na raspodeli Amperovih mikroskopskih struja i metod baziran na fiktivnim magnetnim opterećenjima.

Analitički model zasnovan na fiktivnim magnetnim opterećenjima, poznat još pod nazivom Kulombijski pristup (eng. Coulombian approach) i metod zasnovan na raspodeli površinskih i zapreminskih Amperovih mikroskopskih struja (Amperski model – eng. Amperian approach) se u mnogim slučajevima smatraju pogodnim za dobijanje potpunog 3D rešenja magnetnog polja. Izuzetno su precizni i procesorski nisu zahtevni, što je velika prednost u odnosu na numeričke metode koji su zasnovani na mreži [73]. Još jedna prednost ovih metoda u poređenju sa drugim je to što ne postoji potreba za granicama, što, inače, dodatno povećava složenost proračuna u numeričkim pristupima [22]. Ne zahteva se ni

periodičnost, niti ograničenje prostora u okviru koga se problem rešava. Glavna, a ujedno i pretpostavka od najvećeg uticaja, koja je jedinstvena za sve analitičke pristupe, je da je relativna magnetna permeabilnost u celokupnoj posmatranoj zapremini jednaka relativnoj magnetnoj permeabilnosti vakuuma, $\mu_r = 1$.

Ova pretpostavka omogućava korišćenje superpozicije za rešavanje konfiguracija koje sadrže više magneta. Amperski pristup se bazira na određivanju raspodele površinskih i zapreminskih Amperovih mikroskopskih struja stalnog magneta, a potom i magnetnog vektor potencijala koji je posledica njihovog postojanja. U poglavlju 5 su izvedeni izrazi za gustinu zapreminske i površinske Amperove struje, koji su osnova ovog pristupa:

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{a}} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{M}\text{, i} \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{sa}} = \boldsymbol{M} \times \hat{n}\,, \tag{3.2}$$

kao i izraz za magnetni vektor potencijal koji stvara stalni magnet zapremine V

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_V \frac{\boldsymbol{J}_{\mathrm{a}}}{R}\,\mathrm{d}V + \int_S \frac{\boldsymbol{J}_{\mathrm{sa}}}{R}\,\mathrm{d}S\right]. \tag{3.3}$$

Na slici 3.1 prikazan je stalni magnet cilindričnog oblika, homogeno namagnetisan u aksijalnom pravcu. Zapreminske Amperove struje ne postoje, s obzirom na homogenu magnetizaciju, već samo površinske struje na omotaču cilindra, slika 3.1a.

Kulombiski pristup se zasniva na određivanju raspodele fiktivnih magnetnih opterećenja magneta a potom i magnetnog skalar potencijala koji ona stvaraju. U poglavlju 5 je dokazano da je površinska gustina fiktivnih magnetnih opterećenja

$$\eta_m = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{M}\,, \tag{3.4}$$

a zapreminska gustina magnetnih opterećenja

$$\rho_m = -\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{M}\,, \tag{3.5}$$

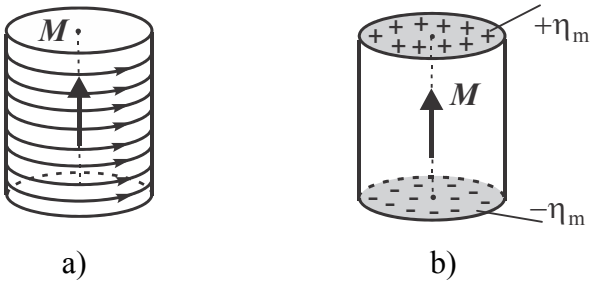
pa je magnetni skalar potencijal koji stvara stalni magnet zapremine V i površine S

$$\varphi_{\mathrm{m}} = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\rho_{\mathrm{m}}}{R}\,\mathrm{d}V + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\eta_{\mathrm{m}}}{R}\,\mathrm{d}S\,. \tag{3.6}$$

U slučaju cilindričnog magneta, na osnovu izraza 3.4, može se zaključiti da fiktivna magnetna opterećenja postoje samo na bazisima cilindra, slika 3.1b.

Rezultati za polje dobijeni ovim pristupima su ekvivalentni, a koji će od njih biti korišćen zavisi od konfiguracije posmatranog sistema. Na primer, u slučaju blok magneta, prednost

ima pristup zasnovan na magnetnim opterećenjima s obzirom da se analiza svodi na analizu samo dve stranice, pa bi samim tim i dobijeno rešenje bilo jednostavnije.



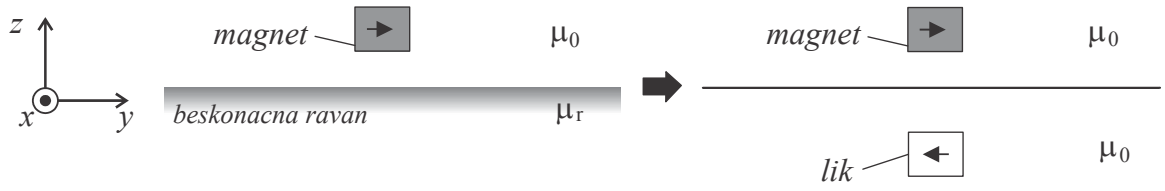
Slika 3.1. *Model cilindričnog magneta*

a) Raspodela površinskih Amperovih struja; b) Raspodela fiktivnih magnetnih opterećenja.

3.4. Pomoćne tehnike za modelovanju stalnih magneta

Komforno preslikavanje, teorema lika i superpozicija se veoma često koriste, uz pomenute metode, kao dodatne tehnike koje olakšavaju modelovanje velikog broja elektromehaničkih uređaja. Komforno preslikavanje, kao što je Švarc Kristofelova transformacija jednog domena u drugi, omogućava preslikavanje veoma kompleksnih struktura u relativno jednostavne strukture [16]. Za jednostavnije topologije moguće je naći analitičko rešenje, dok se kod složenijih konfiguracija do rešenja dolazi numeričkim putem. Iako je ovaj pristup pogodan za rešavanje mnogih problema, ograničen je na dvodimenzionalne probleme zbog kompleksnosti. Koristi se kod problema sa dobro definisanim graničnim uslovima, kao što je interfejs vazduh-gvožđe, a nepogodan za neograničene probleme.

Princip superpozicije je takođe veoma korišćen kod linernih sistema i tehnika modelovanja poput metoda harmonika i analitičkih pristupa zasnovanim na Amperovim strujama i magnetnim opterećenjima. Na ovoj tehnici se baziraju i metodi koji su korišćeni u ovo doktorskoj disertaciji.

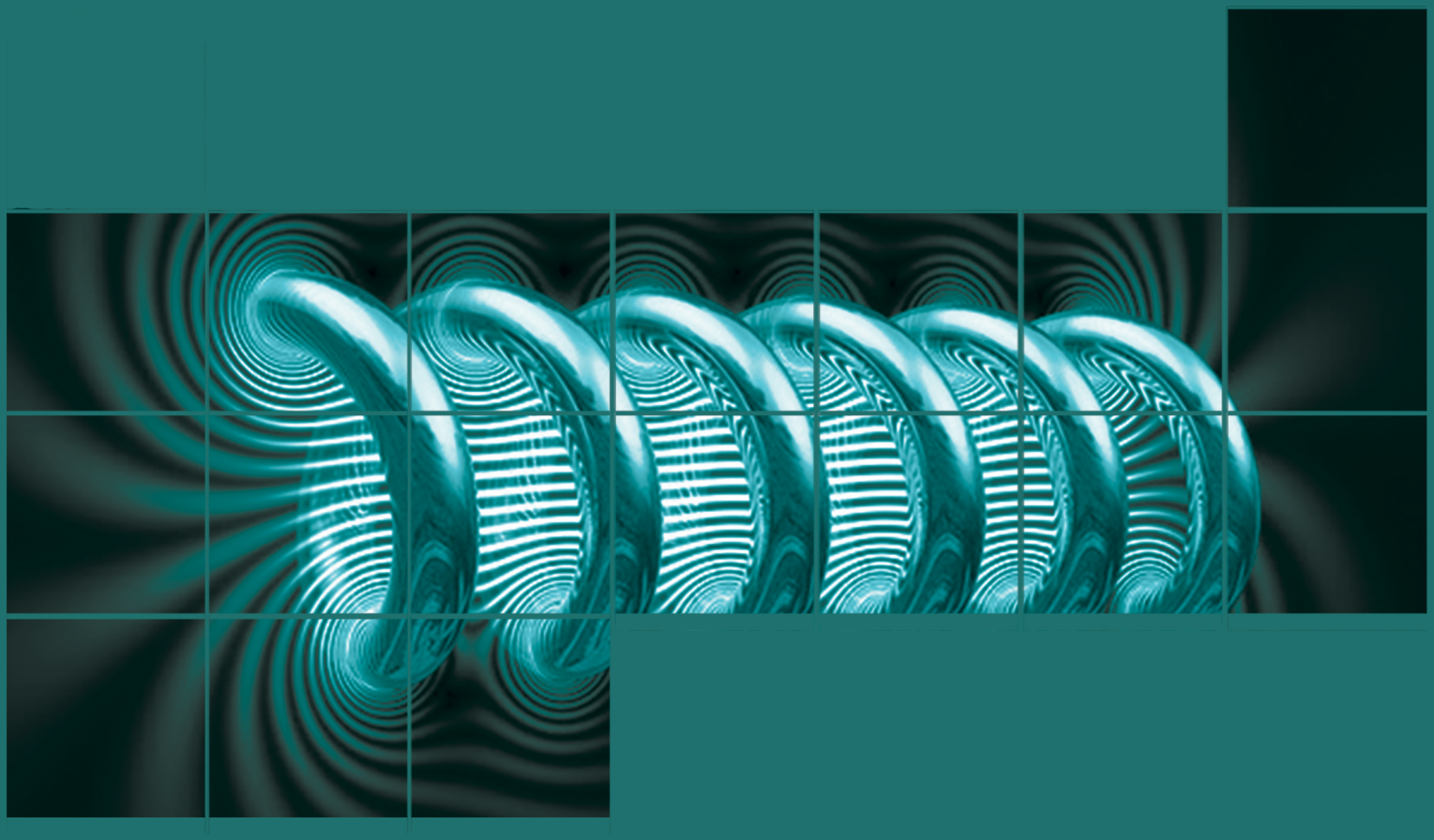


Slika 3.2*. Stalni magnet iznad beskonačne permeabilne ravni.*

Još jedna pomoćna metoda koja se veoma koristi za rešavanje brojnih elektromagnetnih problema je teorema likova. Ona omogućava, zajedno sa gore pomenutim analitičkim pristupima, određivanje polja stalnog magneta iznad permeabilne neograničene ravni i sile koja deluje između njih. Uticaj ravni se može zameniti uticajem lika stalnog magneta, slika 3.2.

Ako je je površinska gustina naelektrisanja originala (stalnog magneta) η_m, površinska gustina naelektrisanja lika će biti

$$\eta'_{\mathrm{m}} = \frac{1-\mu_{\mathrm{r}}}{1+\mu_{\mathrm{r}}}\eta_{\mathrm{m}}. \tag{3.7}$$



4. Tehnike za proračun sile kod stalnih magneta

4. Tehnike za proračun sile kod stalnih magneta

Jedna od najvažnijih veličina kada je u pitanju projektovanje elektromehaničkih uređaja je sila koja u velikoj meri određuje pouzdanost uređaja. Generalno, postoje tri metode za izračunavanje sile kod elektromehaničkih uređaja i to: metod virtuelnih pomeraja zasnovan na varijaciji energije, tenzor Maksvelovih napona i Lorencova sila.

4.1. Lorencova sila

Lorencova sila je sila $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ koja deluje na naelektrisanu čestice q koje se kreće kroz eksterno magnetno polje indukcije $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}(\boldsymbol{x})$, brzinom $\boldsymbol{v}$ u prisustvu električnog polja $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = q\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_{\text{ext}}(\boldsymbol{x})\right). \tag{4.1}$$

Pod pretpostavkom da je $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = 0$, ako se posmatra zapremina V u eksternom magnetnom polju indukcije $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}(\boldsymbol{x})$, iz prethodne jednačine se dobija [36, 38] zapreminska gustina elektromagnetne sile

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{B}_{\text{ext}}(\boldsymbol{x}), \tag{4.2}$$

pa je konačni izraz za silu oblika

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}v' = \int_V \boldsymbol{J}_{\text{a}}(\boldsymbol{x}') \times \boldsymbol{B}_{\text{ext}}(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}v' + \int_S \boldsymbol{J}_{\text{sa}}(\boldsymbol{x}') \times \boldsymbol{B}_{\text{ext}}(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}s', \tag{4.3}$$

gde je

$\boldsymbol{J}_{\text{a}}(\boldsymbol{x}')$ vektor zapreminske gustinu struje u posmatranoj zapremini V;

$\boldsymbol{J}_{\text{sa}}(\boldsymbol{x}')$ vektor površinske gustinu struje na površini S koja obuhvata posmatranu zapreminu.

Gore prikazani integrali se mogu izvesti numerički, kao i analitički, u zavisnosti od metode koja je odabrana za određivanje polja i geometrijskih svojstava posmatranog uređaja. Sila prikazana u ovom obliku je direktno pogodna za proračun kod primene metoda baziranih na određivanju magnetnog vektor potencijala, pošto u izrazu za magnetni skalar potencijal ne figurišu struje. Smenom veze koja postoji između vektora gustine magnetnog momenta i površinske i zapreminske gustine struje (3.1) i (3.2) u izraz za Lorencovu silu dobija se

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \int_V \left(\operatorname{rot}\boldsymbol{M}\right) \times \boldsymbol{B}_{\text{ext}}(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}v' + \int_S \left(\boldsymbol{M} \times \hat{n}\right) \times \boldsymbol{B}_{\text{ext}}(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}s', \tag{4.4}$$

Poslednja jednačina se, međutim, može svesti na oblik pogodan za proračun sile kod metoda zasnovanih na proračunu magnetni skalar potencijal, [36]

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\int_V \left(\operatorname{div}\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{B}_{\text{ext}}(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}v' + \int_S \left(\boldsymbol{M}\cdot\hat{n}\right)\cdot\boldsymbol{B}_{\text{ext}}(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}s' . \tag{4.5}$$

4.2. Tenzor Maksvelovih napona

Prema Faradej-Maksvelovoj teoriji, elektomagnetne sile se prenose posredstvom polja i posledica su aksijalnih i bočnih naprezanja, kojima su tube flukasa izožene po celoj svojoj dužini. Dakle, elektomagnetne sile, koje deluju unutar nekog domena, se mogu svesti na sistem površinskih napona na graničnoj površini domena. Alternativa prethodno opisanom pristupu i nešto širu primenu za određivanje elektromagnetne sile ima tenzor Maksvelovih napona. Po ovom pristupu sila koja deluje na telo se izračunava pomoću izraza

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{\mu}\int_V \operatorname{div}\overline{\overline{\mathrm{T}}}\,\mathrm{d}v' \ , \tag{4.6}$$

gde je $\overline{\overline{T}}\left[\mathrm{N/m^3}\right]$ tenzor Maksvelovih napona oblika

$$\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} B_x^2 - \frac{1}{2}B^2 & B_xB_y & B_xB_z \\ B_yB_x & B_y^2 - \frac{1}{2}B^2 & B_yB_z \\ B_zB_x & B_zB_y & B_z^2 - \frac{1}{2}B^2 \end{bmatrix} . \tag{4.7}$$

Prethodni integral se nakon primene Gausove teoreme svodi na oblik

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{\mu}\oint_S \overline{\overline{\mathrm{T}}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s , \tag{4.8}$$

gde je μ magnetna permeablinost u oblasti integracije, a $\hat{\boldsymbol{n}}$ jedinični vektor izlazne normalne.

4.3. Metod virtuelnih pomeraja

Princip virtualnih pomeraja je zasnovan na zakonu o održanju energije i rezultat je rada koji se vrši usled virtuelnih sila koje deluju kroz stvarne pomeraje ili stvarnih sila koje deluju kroz virtuelne pomeraje. To je najčešće korišćeni metod za proračun sile jer se zasniva na određivanju energije i zbog toga obuhvata i druge domene, kao što su mehanika, termodinamika, za razliku od prethodna dva gore spomenuta metoda, koji su ograničeni na elektromagnetne probleme.

Ako se energija W_{in} doda sistemu ona se delimično potroši W_{dss} , delimično čuva kao elektromagnetna energija u sistemu W_{em}, a delimično se pretvara u mehaničku izlaznu energiju W_{mech} ,

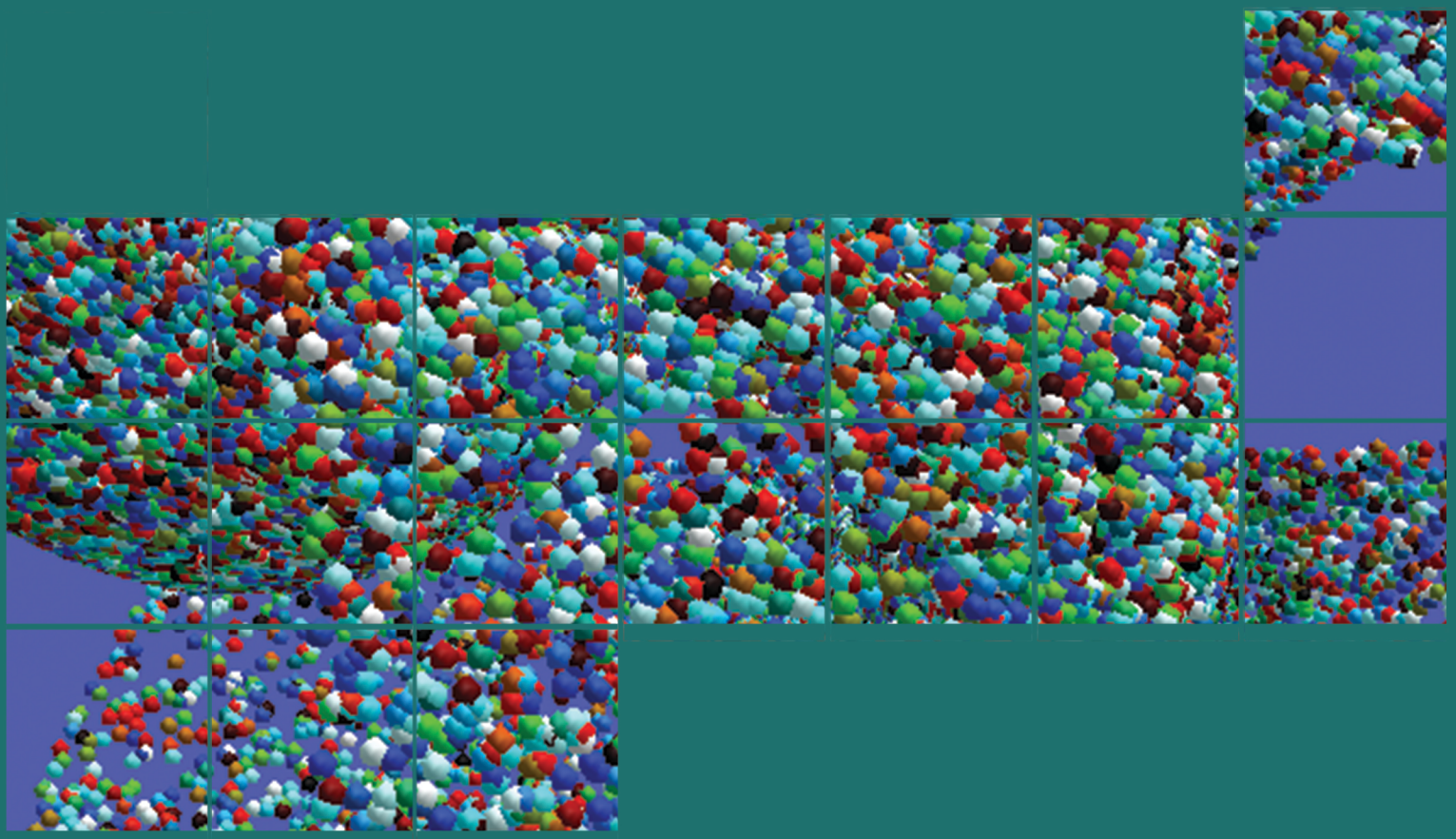
$$W_{\text{in}} = W_{\text{diss}} + W_{\text{em}} + W_{\text{mech}} \tag{4.9}$$

Ako se pretpostavi da u sistemu nema gubitaka i da je $W_{\text{in}} = 0$, dolazi se do zaključka da energija samo menja oblik iz mehaničke u elektromagnetnu i obratno. Drugim rečima, mehanička i elektromagnetna energija se mogu razmeniti bez gubitaka. Sila se može zapisati kao

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} W_{\text{em}}. \tag{4.10}$$

U slučaju stalnog magneta zapremine V i vektora gustine magnetnog momenta $\boldsymbol{M}$, kada se nalazi u eksternom magnetnom polju indukcije $\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$, sila koja deluje na magnet se određuje iz relacije, [38]

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{grad}\left(\int_V \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{B}_{\text{ext}} \, \mathrm{d}v' \right). \tag{4.11}$$



5. Novi polunumerički pristupi za modelovanje polja i sile kod stalnih magneta

5. Novi polunumerički pristupi za modelovanje polja i sile kod stalnih magneta

5.1. Jednačine i pojmovi na kojima se baziraju primenjeni pristupi

5.1.1. Maksvelove jednačine u integralnom i lokalnom obliku

Za rešavanje magnetnog polja i sile kod stalnih magneta primenjeni su metodi zasnovani na raspodeli Amperovih struja i raspodeli fiktivnih magnetnih opterećenja. Da bi se izvele relacije na kojima se baziraju pomenuti metodi, krenućemo od dobro poznatih Maksvelovih jednačina u lokalnom obliku.

$$\text{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\,, \tag{5.1}$$

$$\text{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,, \tag{5.2}$$

$$\text{div}\,\boldsymbol{D} = \rho_s\,, \tag{5.3}$$

$$\text{div}\;\boldsymbol{B} = 0\,. \tag{5.4}$$

Koriste se i dve konstitutivna veze kojima se uvode osobine sredina:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}\,, \tag{5.5}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \tag{5.6}$$

U navedenim izrazima $\boldsymbol{E}$ je vektor jačine električnog polja, $\boldsymbol{D}$ vektor jačine električne indukcije, $\boldsymbol{P}$ vektor jačine polarizacije, $\boldsymbol{H}$ vektor jačine magnetnog polja, $\boldsymbol{B}$ vektor magnetne indukcije, $\boldsymbol{M}$ vektor gustine magnetnog momenta, ρ_s zapreminska gustina slobodnih naelektrisanja, $\boldsymbol{J}$ zbir vektora gustina kondukcione i konvekcione struje.

$\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi \times 9 \times 10^9}\left[\text{F/m}\right]$ je dielektrična konstanta slobodnog prostora, a $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\left[\text{H/m}\right]$ magnetna propustljivost slobodnog prostora.

Opšte poznato je da se, u pogledu vremenske zavisnosti elektromagnetnog polja, problemi mogu podeliti na: statičke, stacionarne, kvazistacionarne i dinamičke.

Kod statičkih i stacionarnih problema komponente polja ne zavise od vremena ($\dfrac{\partial}{\partial t}$=0) i ne protiču ni kondukcione ni konvekcione struje $(\boldsymbol{J} = 0)$. U ovom slučaju potpun sistem Maksvelovih jednačina se razlaže na dva podsistema.

Prvi podsistem se izvodi iz prve i treće Maksvelove jednačine i koristi se za opisivanje elektrostatičkog polja. Ovaj podsistem čine jednačine:

$$\text{rot}\,\boldsymbol{E} = 0 \quad \text{i} \tag{5.7}$$

$$\text{div}\,\boldsymbol{D} = \rho_s\,. \tag{5.8}$$

Drugi podsistem se izvodi iz druge i četvrte Maksvelove jednačine i opisuje magnetostatičko polje i polje stalnih magneta. Čine ga jednačine:

$$\text{rot}\,\boldsymbol{H} = 0 \quad \text{i} \tag{5.9}$$

$$\text{div}\,\boldsymbol{B} = 0\,. \tag{5.10}$$

Ovi podsistemi su nezavisni pa između magnetostatičkih i elektrostatičkih pojava ne postoji direktna veza.

5.1.2. Magnetni vektor potencijal i Amperove struje

Magnetno polje stacionarnih struja u vakuumu kao i u sredinama čija je magnetna permeabilnost približno jednaka magnetnoj permeabilnosti vakuma μ_0, mora da zadovolji Amperov zakon i zakon o konzervaciji fluksa vektora magnetne indukcije:

$$\text{rot}\,\boldsymbol{B} = \mu_0\,\boldsymbol{J}\,, \tag{5.11}$$

$$\text{div}\,\boldsymbol{B} = 0\,, \tag{5.12}$$

Četvrta Maksvelova jednačina (5.12) će sigurno biti zadovoljena ako se usvoji da je vektor magnetne indukcije rotor neke pomoćne vektorske funkcije $\boldsymbol{A}$, koja je nazvana magnetni vektor potencijal. Tada važi:

$$\boldsymbol{B} = \text{rot}\,\boldsymbol{A}\,. \tag{5.13}$$

Dakle, određivanje vektora magnetne indukcije se svodi na pronalaženje magnetnog vektor potencijala $\boldsymbol{A}$.

Iz prethodne tri jednačine i analogije koja postoji sa Puasonovom diferencijalnom jednačinom za električni sklar potencijal (Prilog 1) [144], dobija se vektorska jednačina

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}V}{R}\,. \tag{5.14}$$

Pri proračunu magnetnog polja, namagnetisana materija se može posmatrati kao sistem malih mikroskopskih kontura magnetnog momenta

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{m} = \boldsymbol{M}\,\mathrm{d}V'\,. \tag{5.15}$$

Magnetni vektor potencijal se može prikazati i u alternativnoj formi u kojoj umesto gustine Amperovih struja figuriše gustina magnetnog momenta.

Dakle, magnetni vektor potencijal, koji u nekoj tački P stvara celokupna namagnetisana materija, u zapremini V, iznosi

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{R}}{R^3} \mathrm{d}V \,. \tag{5.16}$$

S obzirom da je polje stalnih magneta magnetostatičko, znači da ne teku ni kondukcione ni konvekcione struje, odnosno vektor gustine tih struja je jednak nuli, $\boldsymbol{J} = 0$. U tom slučaju se magnetni vektor potencijal, koji potiče od sistema Amperovih struja u unutrašnjosti i na površini magnetika, može napisati u obliku

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_V \frac{\boldsymbol{J}_\mathrm{a}}{R} \mathrm{d}V + \int_S \frac{\boldsymbol{J}_\mathrm{sa}}{R} \mathrm{d}S \right], \tag{5.17}$$

gde je $\boldsymbol{J}_\mathrm{a}$ gustina Amperovih struja u unutrašnjosti magneta zapremine V, $\boldsymbol{J}_\mathrm{sa}$ površinska gustina Amperovih struja na površini magneta S, a R predstavlja rastojanje od posmatrane tačke do elementa zapremine ili površine magneta.

Veza između vektora gustine magnetnog momenta $\boldsymbol{M}$ i gustine Amperovih struja $\boldsymbol{J}_\mathrm{a}$ i $\boldsymbol{J}_\mathrm{sa}$ može se odrediti na osnovu izraza (5.16) i (5.17), iz kojih se, nakon kraćeg izvođenja (Prilog 2) [144], dobija

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_V \frac{\mathrm{rot}\, \boldsymbol{M}}{R} \mathrm{d}V + \oint_S \frac{\boldsymbol{M} \times \hat{n}}{R} \mathrm{d}S \right]. \tag{5.18}$$

gde je $\hat{n}$ jedinični vektor izlazne normale na površini S koja definiše domen V.

Upoređivanjem izraza (5.17) i (5.18), dobijaju se izrazi za gustinu zapreminske i površinske Amperove struje:

$$\boldsymbol{J}_\mathrm{a} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{M} \,, \text{ i} \tag{5.19}$$

$$\boldsymbol{J}_\mathrm{sa} = \boldsymbol{M} \times \hat{n} \,, \tag{5.20}$$

Poslednje dve jednačine su ključne kod metoda za proračun polja i sile kod stalnih magneta koji se bazira na raspodeli mikroskopskih Amperovih struja.

5.1.3. Magnetni skalar potencijal i fiktivna magnetna opterećenja

Ukoliko posmatramo magnetno polje koje potiče od namagnetisane materije u odsustvu makroskopskih električnih struja $(\boldsymbol{J} = 0)$, prema generalisanom Amperovom zakonu važi da

je rotor vektora magnetnog polja jednak nuli. Tada se vektor magnetnog polja, $\boldsymbol{H}$, predstavlja kao gradijent magnetnog skalar potencijala φ_m:

$$\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad}\varphi_m. \tag{5.21}$$

Kako je polje vektora magnetne indukcije, $\boldsymbol{B}$, bezizvorno, važi sledeća relacija

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = \operatorname{div}\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}) = 0, \tag{5.22}$$

tako da je

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H} = -\operatorname{div}\boldsymbol{M}. \tag{5.23}$$

Kada se izvrši operacija div nad jednačinom (5.21) dobija se

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H} = -\operatorname{divgrad}\varphi_m = -\Delta\varphi_m, \tag{5.24}$$

pa je

$$\Delta\varphi_m = \operatorname{div}\boldsymbol{M}. \tag{5.25}$$

Poslednja jednačina predstavlja Puasonovu jednačinu za magnetni skalar potencijal.

Ako se uvede pojam gustine magnetne pseudo mase, ρ_m, i definiše kao

$$\rho_m = -\operatorname{div}\boldsymbol{M} = \operatorname{div}\boldsymbol{H}, \tag{5.26}$$

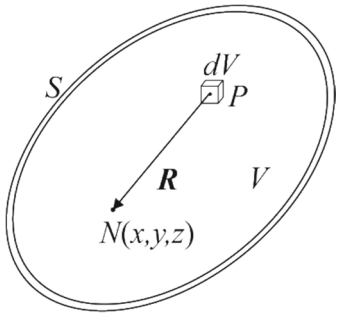
onda se prethodna jednačina može napisati u obliku

$$\Delta\varphi_m = -\rho_m, \tag{5.27}$$

koja je analogna Puasonovoj jednačini za električni skalar potencijal, bez koeficijenta $1/\varepsilon_0$ na desnoj strani. Rešenja ovih jednačina moraju imati isti oblik

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\rho_m}{R}\,\mathrm{d}V, \tag{5.28}$$

gde zapreminski integral treba primeniti na ceo domen zapremine V gde postoji namagnisana materija, uključujući i tanak granični sloj uz površinu magnetika, slika 5.1.



Slika 5.1. *Domen zapremine u kom postoji namagnetisana materija.*

Uvođenjem magnetnih pseudo masa, ρ_m, odnosno fiktivnih magnetnih opterećenja, u velikoj meri je olakšano rešavenje mnogih elektromagnetnih problema.

Na površini diskontinuiteta gde se vektor gustine magnetnog momenta skokovito menja, s obzirom da gustina fiktivnih magnethih opterećenja teži beskonačno velikim vrednostima, uvodi se pojam površinskih magnethih opterećenja η_m.

Veza između površinske gustine magnetnih opterećenja i vektora gustine magnetnog momenta se određuje pomoću Gausove teoreme. Ukoliko se izraz (5.26) integrali po domenu V koji je definisan zatvorenom površinom S, a zatim se na levu stranu jednačine primeni teorema Gaus-Ostrogradskog [144], dobije se

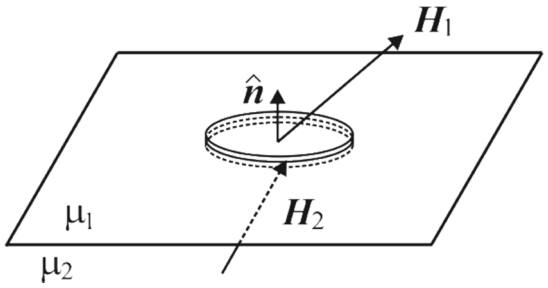
$$\int_S \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}S = \int_V \rho_\mathrm{m}\,\mathrm{d}V = q_m, \tag{5.29}$$

odnosno

$$\int_S \boldsymbol{M}\,\mathrm{d}S = -\int_V \rho_\mathrm{m}\,\mathrm{d}V = -q_m. \tag{5.30}$$

Ako se primeni Gausova teorema (5.29) na elementaru valjkastu površinu, slika 5.2, dobija se veza između površinske gustine magnetnih opterećenja i vektora jačine magnetnog polja

$$\eta_m = \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\left(\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2\right). \tag{5.31}$$



Slika 5.2. *Elementarna površina.*

S obzirom na relaciju 5.30, dobija se veza između vektora magnetizacije i površinske gustine fiktivnih magnetnih opterećenja.

$$\eta_m = \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\left(\boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}_1\right). \tag{5.32}$$

Na osnovu prethodno izvedenih izraza, može se zaključiti da je magnetni skalar potencijal koji potiče od namagnećene materije jednak

$$\varphi_\mathrm{m} = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\rho_\mathrm{m}}{R}\,\mathrm{d}V + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\eta_\mathrm{m}}{R}\,\mathrm{d}S. \tag{5.33}$$

Prvi integral predstavlja udeo fiktivnih magnetnih opterećenja raspoređenih u unutrašnjosti magnetika, dok je drugi integral udeo magnetnih opterećenja lokalizovanih u površinskom sloju magnetika.

Na jednačinama 5.26 i 5.32 se zasniva metod za proračun polja i sile kod stalnog magneta zasnovan na fiktivnim magnetnim opterećenjima.

5.2. Polunumerički pristupi za modelovanje stalnih magneta

U okviru ove doktorske disertacije biće analizirane različite konfiguracije stalnih magneta, kao i stalni magneti različitih oblika u prisustvu linearnih magnetnih ravni i u prisustvu struktura načinjenih od linearnih magnetnih materijala. Posebna pažnja će biti usmerena na aksijalne i radijalne magnetne ležaje. Za rešavanje ovih problema, umesto analitičkih, biće korišćeni numerički i polunumerički pristupi kojima su izbegnute višestruke integracije i kompleksni proračuni, a samim tim je ubrzan proces dobijanja konačnih rezultata. Metodi su biti primenjeni u disertaciji za sve proračune su:

- Metod baziran na raspodeli Amperovih mikroskopskih struja i diskretizacionoj tehnici;
- Metod baziran na raspodeli fiktivnih magnetnih opterećenja i diskretizacionoj tehnici;
- Hibridni metod graničnih elemenata.

Prva dva metoda su zasnovana na dobro poznatom Amperskom i Kulombijskom pristupu ali unapređena uvođenjem diskretizacione tehnike kojom je znatno smanjena kompleksnost konačnih izraza za polje i silu kod posmatranih konfiguracija. Treći metod je nov metod koji se prvi put primenjuje kod modelovanja stalnog magneta i o njemu će detaljnije biti reči u nastavku teksta.

U cilju provere tačnosti razvijenih metoda, rezultati su upoređeni sa vrednostima dobijenim primenom metoda konačnih elemenata (FEMM i COMSOL Multiphysics softver), kao i sa rezultatima koji su već saopšteni u radovima drugih istraživača iz ove oblasti u svetu.

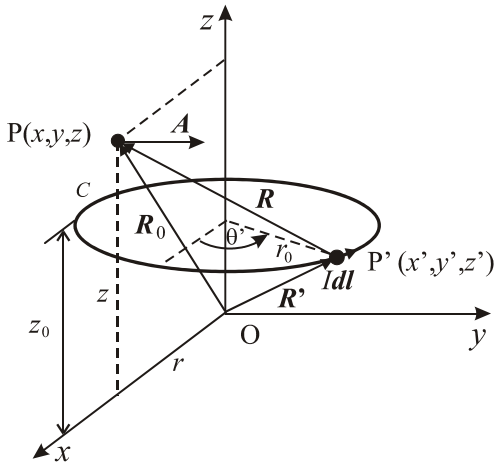
5.2.1. Metod baziran na raspodeli Amperovih mikroskopskih struja i diskretizacionoj tehnici

Metod koji se zasniva na raspodeli Amperovih mikroskopskih struja je polunumerički metod koji u kombinaciji sa diskretizacionom tehnikom omogućava veoma brzo i jednostavno određivanje magnetnog polja i magnetne sile stalnih magneta. Korišćen je kod stalnih magneta homogeno namagnetisanih u aksijalnom pravcu kod kojih usled homogene aksijalne magnetizacije postoje samo površinske Amperove struje, dok su zapreminske jednake nuli. U tom slučaju se stalni magneti, homogeno namagnetisani u aksijalnom pravcu, mogu posmatrati kao solenoidni namotaji. Metod se bazira na određivanju najpre magnetnog vektor potencijala, zatim magnetne indukcije i magnetnog polja, a potom i sile između stalnih magneta [151].

U cilju određivanja magnetne idukcije koju stvara stalni magnet, a nakon toga i sile između stalnih magneta, prvo će biti razmatrana strujna kružna kontura, C (slika 5.3). Neka je kontura poluprečnika r_0 i neka je struja u njoj I. Prvi korak u određivanju magnetne indukcije koju stvara strujna kružna kontura je proračun magnetnog vektor potencijala. Magnetni vektor potencijal u proizvoljnoj tački $\mathrm{P}(x,y,z)$ je

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{J}}{R}\,\mathrm{d}V\,. \tag{5.34}$$

Magnetni vektor potencijal u proizvoljnoj tački ne zavisi od $\theta-$ komponente (elektromagnetni problem sa rotacijonom simetrijom), tako da se može pretpostaviti da se tačka $\mathrm{P}(x,y,z)$ nalazi u $x\,\mathrm{O}\,z$ ravni (slika 5.3).



Slika 5.3. *Kružna strujna kontura.*

Kako je $\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}V = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ i $\mathrm{d}l = r_0\,\mathrm{d}\theta'$, magnetni vektor potencijal u proizvoljnoj tački je

$$\boldsymbol{A} = A_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tag{5.35}$$

$$A_\theta = \frac{\mu}{4\pi}\oint_C \frac{I\cos(\theta')}{R}\,\mathrm{d}l = \frac{\mu I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r_0\cos(\theta')}{R}\,\mathrm{d}\theta', \tag{5.36}$$

pri čemu je

$$R = \left|\boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{R}'\right| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} \tag{5.37}$$

rastojanje tačke $\mathrm{P}(x,y,z)$ u kojoj se određuje polje od tačke $\mathrm{P}'(x',y',z')$ u kojoj se nalaze izvori polja.

Između koordinata Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema x, y, z i cilindričnih koordinata r,θ i z postoje veze

$$x = r\cos(\theta);\ y = r\sin(\theta);\ z = z\,,$$

tako da se koordinate tačke $\mathrm{P}'(x', y', z')$ mogu napisati u sledećem obliku

$$x' = r_0\cos(\theta');\ y' = r_0\sin(\theta');\ z' = z_0\,.$$

Korišćenjem pomenutih veza, rastojanje R se može izraziti

$$R = \sqrt{r^2 + {r_0}^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta') + (z - z_0)^2}\,. \tag{5.38}$$

Kako je tačka posmatranja u $x\,\mathrm{O}\,z$ ravni, gde je $\theta = 0$, rastojanje R postaje

$$R = \sqrt{r^2 + {r_0}^2 - 2rr_0\cos(\theta') + (z - z_0)^2}\,, \tag{5.39}$$

a magnetni vektor potencijal

$$A_\theta = \frac{\mu I}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r_0\cos(\theta')}{\sqrt{r^2 + {r_0}^2 - 2rr_0\cos(\theta') + (z - z_0)^2}}\,\mathrm{d}\,\theta'\,. \tag{5.40}$$

Nakon smene $\theta' = \pi - 2\varphi$ u prethodnu jednačinu, dobija se sledeći oblik $\theta-$ komponente magnetnog vektor potencija

$$A_\theta = \frac{\mu I}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{r_0\left(2\sin^2(\varphi) - 1\right)}{\sqrt{(r + r_0)^2 - 4rr_0\sin^2(\varphi) + (z - z_0)^2}}\,\mathrm{d}\,\varphi\,. \tag{5.41}$$

Nakon nekoliko jednostavnih matematičkih operacija, za magnetni vektor potencijal dobija se

$$A_\theta = \frac{\mu I k}{\pi}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin^2(\varphi) - 1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2(\varphi)}}\,\mathrm{d}\,\varphi\,, \tag{5.42}$$

odnosno

$$A_\theta = \frac{\mu I}{k\pi}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\left(\left(1 - \frac{k^2}{2}\right)K - E\right), \tag{5.43}$$

pri čemu su :

$$K = K\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2(\varphi)}}\,\mathrm{d}\,\varphi\,,\quad E = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\,\varphi\,,$$

potpuni eliptički integrali prve (K) i druge vrste (E) gde je

$$k^2 = \frac{4rr_0}{(r + r_0)^2 + (z - z_0)^2}\,.$$

Magnetni indukcija se može odrediti na osnovu poznatog magnetnog vektor potencijala,

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\left(\boldsymbol{A}\right). \tag{5.44}$$

Kako magnetni vektor potencijal ima samo $\theta-$ komponentu, vektor magnetne indukcije je

$$\boldsymbol{B} = -\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r}\hat{\boldsymbol{z}}, \tag{5.45}$$

a njegove komponente su

$$B_r = -\frac{\partial A_\theta}{\partial z} = -\frac{\partial A_\theta}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial z}, \tag{5.46}$$

$$B_z = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} = \frac{1}{r}A_\theta + \frac{\partial A_\theta}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial r}, \tag{5.47}$$

$$B_\theta = 0. \tag{5.48}$$

Smenom sledećih izvoda

$$\frac{\partial k}{\partial r} = \frac{k}{2r} - \frac{r + r_0}{4r_0 r}k^3,$$

$$\frac{\partial k}{\partial z} = -\frac{z - z_0}{4r_0 r}k^3,$$

$$\frac{\partial K}{\partial k} = \frac{1}{k}\left(\frac{E}{1-k^2} - K\right),$$

$$\frac{\partial E}{\partial k} = \frac{1}{k}\left(E - K\right),$$

u jednačine (5.46) i (5.47), dobijaju se komponente vektora magnetne indukcije

$$B_r = B_r(r, z, r_0, z_0) = \frac{\mu I}{2\pi r}\frac{z - z_0}{\sqrt{(r + r_0)^2 + (z - z_0)^2}}\left(-K\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + \frac{{r_0}^2 + r^2 + (z - z_0)^2}{(r_0 - r)^2 + (z - z_0)^2}E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)\right), \tag{5.49}$$

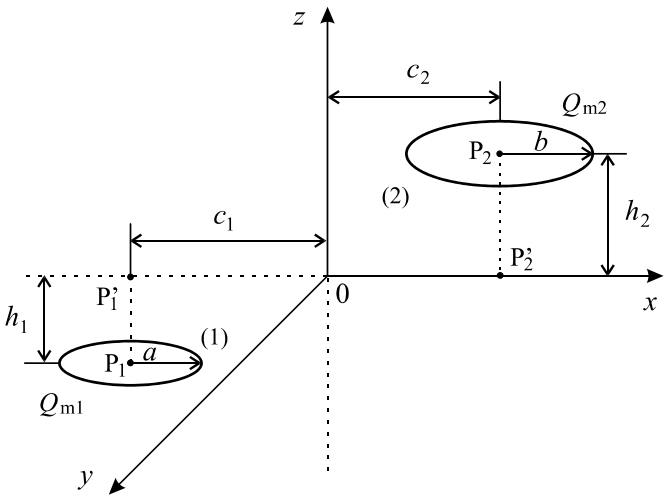
$$B_z = B_z(r, z, r_0, z_0) = \frac{\mu I}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{(r + r_0)^2 + (z - z_0)^2}}\left(K\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + \frac{{r_0}^2 - r^2 - (z - z_0)^2}{(r_0 - r)^2 + (z - z_0)^2}E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)\right). \tag{5.50}$$

5.2.2. Metod baziran na raspodeli fiktivnih magnetnih opterećenja i diskretizacionoj tehnici.

Drugi pristup koji je korišćen za proračun magnetnog polja i sile zasniva se na uvođenju fiktivnih magnetnih opterećenja. U zavisnosti od oblika i magnetizacije analiziranog stalnog magneta postoje samo površinska ili i površinska i zapreminska magnetna opterećenja.

Primenom diskretizacione tehnike u okviru ovog pristupa znatno je pojednostavljeno određivanje polja i sile kod aksijalnih i radijalnih magnetnih ležaja čime su izbegnuti višestruki integrali prisutni u do sada primenjenim metodama i problem rešen primenom elementarnih funkcija i eliptičkih integrala prve i druge vrste. Ovim pristupom su određena i magnetna polja koja stvaraju stalni magneti različitog oblika iznad linearne magnetne ravni i privlačna sila između njih. Za analizu takvih struktura je, najpre, primenjena teorema lika u ravnom ogledalu, a zatim i metod zasnovan na raspodeli fiktivnih magnetnih opterećenja.

Za realizaciju pomenutog metoda, s obzirom na konfiguracije sistema koji su analizirani, potrebno je prvo odrediti silu između dve kružne konture opterećene određenim količinama magnetnog opterećenja za slučaj kada su konuture lateralno pomerene jedna u odnosu na drugu, [153], i u slučaju kada su centri kontura na z osi, [155]. Dakle, posmatraju se, najpre, dve kružne konture ravnomerno opterećene magnetnim opterećenjima Q_{m1} i Q_{m2}. Dimenzije i položaj kontura je prikazan na slici 5.4



Slika 5.4. *Kružne konture opterećene različitim magnetnim opterećenjima.*

Kružne konture se nalaze u ravnima koje su paralelne $x0y$ ravni. Da bi se odredila sila između kontura prvo treba odrediti vektor magnetne indukcije koju stvara donja kontura, u bilo kojoj tački prostora. Magnetna indukcija se može odrediti tako sto se odredi magnetni skalar potencijal koji stvara donji magnet u proizvoljnoj tački, a potom magnetno polje i magnetna indukcija. Elementarni magnetni skalar potencijal koji stvara elementarno magnetno opterećenje $\mathrm{d}Q_{\mathrm{m1}}$ je

$$\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{d}Q_{\mathrm{m1}}}{4\pi}\frac{1}{R} \ . \tag{5.51}$$

Kako je zadovoljena sledeća relacija

$$\mathrm{d}\,Q_{\mathrm{m}1} = Q'_{\mathrm{m}1}\,\mathrm{d}\,l = \frac{Q_{\mathrm{m}1}}{2\pi a}\,a\,\mathrm{d}\,\theta = \frac{Q_{\mathrm{m}1}}{2\pi}\,\mathrm{d}\,\theta\,, \tag{5.52}$$

elementarni magnetni skalar potencijal ima oblik

$$\mathrm{d}\,\varphi_{\mathrm{m}} = \frac{Q_{\mathrm{m}1}}{8\pi^2}\,\frac{1}{R}\,\mathrm{d}\,\theta\ , \tag{5.53}$$

pa rezultujući magnetni skalar potencijal koji stvara donja kontura u proizvoljnoj tački $\mathrm{P}(x,y,z)$ iznosi

$$\varphi_{\mathrm{m}} = \frac{Q_{\mathrm{m}1}}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 + (z-z_0)^2 - 2ar\cos(\theta-\beta)}}\,\mathrm{d}\,\theta\,, \tag{5.54}$$

S obzirom da je

$$r = \sqrt{(x+c_1)^2 + y^2}\ ,$$

magnetni skalar potencijal se može napisati u sledećoj formi

$$\varphi_{\mathrm{m}}(x,y,z) = \frac{Q_{\mathrm{m}1}}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{(x+c_1)^2 + y^2 + a^2 + (z+h_1)^2 - 2a\sqrt{(x+c_1)^2+y^2}\,\cos(\theta-\beta)}}\,\mathrm{d}\,\theta\,, \tag{5.55}$$

gde je $\beta = \arctan\left(\dfrac{y}{x+c_1}\right)$.

Magnetno polje koje stvara donja konture u proizvoljnoj tački $\mathrm{P}(x,y,z)$ se određuje iz relacije

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{ext}}(x,y,z) = -\,\mathrm{grad}\,\varphi_{\mathrm{m}}(x,y,z)\,, \tag{5.56}$$

a magnetna indukcija je

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{ext}}(x,y,z) = \mu_0\boldsymbol{H}^{\mathrm{ext}}(x,y,z)\,, \tag{5.57}$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{ext}}(x,y,z) = B_x^{\mathrm{ext}}(x,y,z)\hat{\boldsymbol{x}} + B_y^{\mathrm{ext}}(x,y,z)\hat{\boldsymbol{y}} + B_z^{\mathrm{ext}}(x,y,z)\hat{\boldsymbol{z}}\,. \tag{5.58}$$

Komponente vektora magnetne indukcije su:

$$B_x^{\mathrm{ext}}(x,y,z) = -\mu_0\frac{\partial\varphi_{\mathrm{m}}}{\partial x}\,,$$

$$B_x^{\mathrm{ext}}(x,y,z) = \mu_0\frac{Q_{\mathrm{m}1}}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\frac{c_1 + x - a\cos(\theta)}{\left(a^2 + (c_1+x)^2 + y^2 + (h_1+z)^2 - 2a\sqrt{(c_1+x)^2+y^2}\,\cos(\theta-\beta)\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\theta\,; \tag{5.59}$$

$$B_y^{\mathrm{ext}}(x,y,z) = -\mu_0\frac{\partial\varphi_{\mathrm{m}}}{\partial y}\,,$$

$$B_y^{\text{ext}}(x,y,z)=\mu_0\frac{Q_{\text{m}1}}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\frac{y-a\sin(\theta)}{\left(a^2+(c_1+x)^2+y^2+(h_1+z)^2-2a\sqrt{(c_1+x)^2+y^2}\cos(\theta-\beta)\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\theta\,; \quad (5.60)$$

$$B_z^{\text{ext}}(x,y,z)=-\mu_0\frac{\partial\varphi_{\text{m}}}{\partial z},$$

$$B_z^{\text{ext}}(x,y,z)=\mu_0\frac{Q_{\text{m}1}}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\frac{h_1+z}{\left(a^2+(c_1+x)^2+y^2+(h_1+z)^2-2a\sqrt{(c_1+x)^2+y^2}\cos(\theta-\beta)\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\theta\,. \quad (5.61)$$

Elementarno magnetno opterećenje gornje konture $\mathrm{d}Q_{\text{m}2}$ se može prikazati u obliku

$$\mathrm{d}\,Q_{\text{m}2}=Q'_{\text{m}2}\,\mathrm{d}\,l=\frac{Q_{\text{m}2}}{2\pi b}\,b\,\mathrm{d}\,\alpha=\frac{Q_{\text{m}2}}{2\pi}\,\mathrm{d}\,\alpha\,. \quad (5.62)$$

Sila koja deluje na elementarno magnetno opterećenje kada se ono nalazi u spoljašnjem magnetnom polju indukcije $\boldsymbol{B}^{\text{ext}}$ iznosi

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{F}=\mathrm{d}\,Q_{\text{m}2}\,\boldsymbol{B}^{\text{ext}}(x,y,z)\,. \quad (5.63)$$

Kako su koordinate tačke u kojoj se nalazi elementarno magnetno opterećenje $\mathrm{d}Q_{\text{m}2}$

$$x=c_2+b\cos(\alpha);\;\; y=b\sin(\alpha);\;\; z=h_2\,, \quad (5.64)$$

sila koja deluje na elementarno magnetno opterećenje je

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{F}=\mathrm{d}\,Q_{\text{m}2}\,\boldsymbol{B}^{\text{ext}}(c_2+b\cos(\alpha),b\sin(\alpha),h_2)\,. \quad (5.65)$$

Konačno, komponente sile koja deluje između dve kružne konture, ravnomerno opterećene magnetnim opterećenjima $Q_{\text{m}1}$ i $Q_{\text{m}2}$, iznose

$$F_x(a,b,c_1,h_1,c_2,h_2)=\mu_0\frac{Q_{\text{m}1}Q_{\text{m}2}}{16\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{c_1+c_2+b\cos(\alpha)-a\cos(\theta)}{C^{3/2}}\,\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\,\alpha\,, \quad (5.66)$$

$$F_y(a,b,c_1,h_1,c_2,h_2)=\mu_0\frac{Q_{\text{m}1}Q_{\text{m}2}}{16\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{b\sin(\alpha)-a\sin(\theta)}{C^{3/2}}\,\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\,\alpha\,, \quad (5.67)$$

$$F_z(a,b,c_1,h_1,c_2,h_2)=\mu_0\frac{Q_{\text{m}1}Q_{\text{m}2}}{16\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h_1+h_2}{C^{3/2}}\,\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\,\alpha\,, \quad (5.68)$$

gde je

$$C=a^2+(h_1+h_2)^2+(c_1+c_2)^2+b^2+2b(c_1+c_2)\cos(\alpha)-$$
$$-2a\cos(\theta-\beta)\sqrt{(c_1+c_2)^2+b^2+2b(c_1+c_2)\cos(\alpha)}$$

i

$$\beta = \arctan\left(\frac{b\sin(\alpha)}{c_1 + c_2 + b\cos(\alpha)}\right).$$

Uvođenjem smena $u = \frac{\theta}{\pi}$ i $w = \frac{\alpha}{\pi}$ u jednačine (5.66 - 5.68), x, y, z komponente magnetne sile koja deluje između kružnih kontura se mogu izraziti na sledeći način:

$$\begin{aligned} F_x(a,b,c_1,h_1,c_2,h_2) &= \mu_0 \frac{Q_{m1}Q_{m2}}{16\pi} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{c_1 + c_2 - b\cos(\pi w) + a\cos(\pi u)}{C_1^{3/2}} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}w = \\ &= \mu_0 \frac{Q_{m1}Q_{m2}}{16\pi} F_{x_p}(a,b,c_1,h_1,c_2,h_2), \end{aligned} \tag{5.69}$$

$$\begin{aligned} F_y(a,b,c_1,h_1,c_2,h_2) &= \mu_0 \frac{Q_{m1}Q_{m2}}{16\pi} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{-b\sin(\pi w) + a\sin(\pi u)}{C_1^{3/2}} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}w = \\ &= \mu_0 \frac{Q_{m1}Q_{m2}}{16\pi} F_{y_p}(a,b,c_1,h_1,c_2,h_2), \end{aligned} \tag{5.70}$$

$$\begin{aligned} F_z(a,b,c_1,h_1,c_2,h_2) &= \mu_0 \frac{Q_{m1}Q_{m2}}{16\pi} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{h_1 + h_2}{C_1^{3/2}} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}w = \\ &= \mu_0 \frac{Q_{m1}Q_{m2}}{16\pi} F_{z_p}(a,b,c_1,h_1,c_2,h_2), \end{aligned} \tag{5.71}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} C_1 = a^2 + (h_1 + h_2)^2 + (c_1 + c_2)^2 + b^2 - 2b(c_1 + c_2)\cos(\pi w) + \\ 2a\cos(\pi u - \beta)\sqrt{(c_1 + c_2)^2 + b^2 - 2b(c_1 + c_2)\cos(\pi w)} \end{aligned}$$

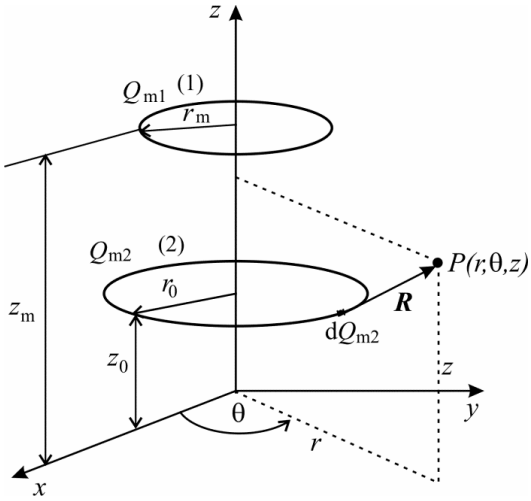
i

$$\beta = \arctan\left(\frac{-b\sin(\pi w)}{c_1 + c_2 - b\cos(\pi w)}\right).$$

Jednačine (5.69 - 5.71) su voma važene jer omogućavaju da se na osnovu njih odredi sila koja deluje između dva lateralno pomerena cilindra, kao i sila koja deluje između magneta oblika potkovice i beskonačne magnetne ravni.

Kao što je ranije pomenuto, veoma važna primena stalnih magneta je u magnetnim ležajima. S obzirom na konfiguraciju magnetnih ležaja i činjenicu da su stalni magneti torusnog oblika koji čine magnetni ležaj koaksijalni, najednostavniji način da se odredi sila između njih jeste da se, najpre, odredi sila između dve kružne konture sa centrima na *z* osi (slika 5.5) [155], opterećene različitim magnetnim opterećenjem, a potom da se primenom uniformne diskretizacione tehnike sumiranjem udela oba magneta odredi i rezultujuća sila

između njih. Postupak je sličan prethodno opisanom kojim je određena sila između lateralno pomerenih kontura, s tim što će se ovde iskoristiti postojeća simetrija i krajnji izrazi za silu dobiti u formi znatno jednostavnijoj za dalji numerički proračun.



Slika 5.5. *Kružne konture sa centrima na z osi.*

Dimenzije i položaji kružnih kontura koje su opterećene magnetnim opterećenjima Q_{m1} i Q_{m2} su prikazani na slici 5.5. Polazeći od elementarnog magnetnog skalar potencijala koji stvara elementarno magnetno opterećenje dato jednačinom (5.51), analogno prethodnom izvođenju (5.51 - 5.54), dobija se da je ukupan magnetni skalar potencijal koji stvara donja kružna kontura, poluprečnika r_0, u proizvoljnoj tački $P(r,\theta,z)$ jednak

$$\varphi_{\mathrm{m}} = \frac{Q_{\mathrm{m}2}}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2+r_0^2+(z-z_0)^2-2r_0 r\cos(\theta-\theta')}}\,\mathrm{d}\theta'. \tag{5.72}$$

S obzirom na postojeću simetriju, magnetni skalar potencijal se može odrediti za $\theta = 0$ i iznosi

$$\varphi_{\mathrm{m}}(r,z) = \frac{Q_{\mathrm{m}2}}{4\pi^2}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2+r_0^2+(z-z_0)^2-2rr_0\cos\theta'}}\,\mathrm{d}\theta'. \tag{5.73}$$

Uvođenjem smene $\theta' = \pi - 2\alpha$, prethodna jednačina se svodi na oblik

$$\varphi_{\mathrm{m}}(r,z) = \frac{Q_{\mathrm{m}2}}{2\pi^2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{(r+r_0)^2-4rr_0\sin^2(\alpha)+(z-z_0)^2}}\,\mathrm{d}\alpha. \tag{5.74}$$

Nakon nekoliko jednostavnih matematičkih operacija, magnetni skalar potencijal koji stvara donja kontura u tački $P(r,\theta,z)$ se može predstaviti u obliku

$$\varphi_{\mathrm{m}}(r,z)=\frac{Q_{\mathrm{m}2}}{2\pi^2}\frac{K\left(\frac{\pi}{2},k\right)}{\sqrt{(r+r_0)^2+(z-z_0)^2}}, \tag{5.75}$$

gde je $K\left(\frac{\pi}{2},k\right)=K=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\alpha)}}\mathrm{d}\alpha$, potpuni eliptički integral prve vrste i $k^2=\frac{4rr_0}{(r+r_0)^2+(z-z_0)^2}$.

Na osnovu određenog magnetnog polja (5.56), dobija se vektor magnetne indukcije oblika

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{ext}}(r,z)=B_r^{\mathrm{ext}}(r,z)\hat{\boldsymbol{r}}+B_z^{\mathrm{ext}}(r,z)\hat{\boldsymbol{z}}, \tag{5.76}$$

pri čemu su njegove komponente:

$$B_r^{\mathrm{ext}}(r,z)=-\mu_0\frac{\partial\varphi_{\mathrm{m}}(r,z)}{\partial r},$$

$$B_r^{\mathrm{ext}}(r,z)=\mu_0\frac{Q_{\mathrm{m}2}}{2\pi^2}\times\left(\frac{\left(r^2-r_0^2-(z-z_0)^2\right)E\left(\frac{\pi}{2},k\right)}{2r\left((r-r_0)^2+(z-z_0)^2\right)\sqrt{(r+r_0)^2+(z-z_0)^2}}+\frac{K\left(\frac{\pi}{2},k\right)}{2r\sqrt{(r+r_0)^2+(z-z_0)^2}}\right); \tag{5.77}$$

$$B_z^{\mathrm{ext}}(r,z)=-\mu_0\frac{\partial\varphi_{\mathrm{m}}(r,z)}{\partial z},$$

$$B_z^{\mathrm{ext}}(r,z)=\mu_0\frac{Q_{\mathrm{m}2}}{2\pi^2}\times\frac{(z-z_0)E\left(\frac{\pi}{2},k\right)}{\left((r-r_0)^2+(z-z_0)^2\right)\sqrt{(r+r_0)^2+(z-z_0)^2}}, \tag{5.78}$$

pri čemu je $E\left(\frac{\pi}{2},k\right)=E=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2(\alpha)}\,\mathrm{d}\alpha$ potpuni eliptički integral druge vrste i $k^2=\frac{4rr_0}{(r+r_0)^2+(z-z_0)^2}$.

Sila na elementarno magnetno opterećenje gornje konture

$$\mathrm{d}Q_{\mathrm{m}1}=Q'_{\mathrm{m}1}\cdot\mathrm{d}l=\frac{Q_{\mathrm{m}1}}{2\pi r_{\mathrm{m}}}\cdot r_{\mathrm{m}}\cdot\mathrm{d}\beta=\frac{Q_{\mathrm{m}1}}{2\pi}\mathrm{d}\beta, \tag{5.79}$$

usled postojanja polja koje stvara donja kontura, može se odrediti iz ralacije

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\mathrm{d}Q_{\mathrm{m}1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{ext}}(r_{\mathrm{m}},z_{\mathrm{m}}), \tag{5.80}$$

Konačno, smenom jednačina (5.77) i (5.78) u poslednji izraz, dobijaju se komponente sile koja deluje između dve kružne konture:

$$F_r = \mu_0 \frac{Q_{\mathrm{m}1} Q_{\mathrm{m}2}}{2\pi^2} \times \left(\frac{\left(r_{\mathrm{m}}^2 - r_0^2 - (z_{\mathrm{m}} - z_0)^2\right) E\left(\frac{\pi}{2}, k_0\right)}{2r_{\mathrm{m}}\left((r_{\mathrm{m}} - r_0)^2 + (z_{\mathrm{m}} - z_0)^2\right)\sqrt{(r_{\mathrm{m}} + r_0)^2 + (z_{\mathrm{m}} - z_0)^2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{K\left(\frac{\pi}{2}, k_0\right)}{2r_{\mathrm{m}}\sqrt{(r_{\mathrm{m}} + r_0)^2 + (z_{\mathrm{m}} - z_0)^2}} \right) = 0; \tag{5.81}$$

$$F_z = \mu_0 \frac{Q_{\mathrm{m}1} Q_{\mathrm{m}2}}{2\pi^2} \times \frac{(z_{\mathrm{m}} - z_0) E\left(\frac{\pi}{2}, k_0\right)}{\left((r_{\mathrm{m}} - r_0)^2 + (z_{\mathrm{m}} - z_0)^2\right)\sqrt{(r_{\mathrm{m}} + r_0)^2 + (z_{\mathrm{m}} - z_0)^2}} =$$
$$= \mu_0 \frac{Q_{\mathrm{m}1} Q_{\mathrm{m}2}}{2\pi^2} F_{z_{\mathrm{p}}}(r_0, r_{\mathrm{m}}, z_0, z_{\mathrm{m}}). \tag{5.82}$$

gde je

$$k_0^2 = \frac{4 r_0 r_{\mathrm{m}}}{(r_{\mathrm{m}} + r_0)^2 + (z_{\mathrm{m}} - z_0)^2}.$$

Na osnovu izraza (5.82), u poglavlju 8, određena je sila za različite konfiguracije magnetnih ležaja.

5.2.3. Hibridni metod graničnih elemenata

U prethode dve podglave opisane su metode za proračun magnetnog polja, razvijene na osnovu poznatog Amperskog i Kulombijskog pristupa, u cilju unapređenja postojećih metoda. Ovde će biti reči o novom metodu koji do sada nije korišćen za analizu stalnih magneta. Hibridni metod graničnih elemenata (eng. Hibrid boundary element method-HBEM) je razvijen na Katedri za teorijsku elektrotehniku Elektronskog fakulteta u Nišu i zasniva se na metodu ekvivalentne elektrode i metodu podešavanja u tačkama. Generalno se primenom ovog metoda mogu analizirati sistemi koji se sastoje od proizvoljnog broja provodnika (elektroda) i proizvoljnog broja linearnih, homogenih dielektrika i magnetnih materijala.

Kod rešavanja problema kod kojih postoji dva ili više dielektrika, na razdvojnoj površini dielektrika se postavljaju takozvana ekvivalentna naelektrisanja koja odgovaraju prisutnim vezanim naelektrisanjima i nalaze se u vakuumu ili vazduhu. Na taj načim se eliminišu dielektrične osobine sredine. Na osnovu graničnih uslova za potencijal na površini

provodnika i graničnih uslova za normalnu komponentu vektora električnog polja na razdvojnoj površini dielektrika ili dielektrika i vakuuma, formira se se sistem jednačina. Nepoznate u jednačinama su slobodna naelektrisanja na elektrodama i vezana naelektrisanja na površini dielektrika i određuju se metodom podešavanja u tačkama.

Kod rešavanja problema sa višeslojnim magnetnim materijalima moguće je uticaj različitih magnetnih materijala na formiranje polja zameniti postavljanjem ekvivalentnih provodnika ili ekvivalentnih izvora po razdvojnoj površini dva materijala, [117]. Ukoliko se po razdvojnoj površini postavljaju provodnici, struje kroz provodnike su ekvivalentne Amperovim mikroskopskim strujama. Uticaj različitih magnetnih materijala na formiranje magnetnog polja se na taj način zamenjuje strujnim provodnicima postavljenim na granici dva materijala u vazduhu ili vakuumu. Formira sistem lineranih jednačina u kom su nepoznate veličine površinske gustine Amperovih struja. Pri proračunu se koristi granični uslov za tangencijalnu komponentu vektora magnetizacije, tj. vektora gustine magnetnog momenta

$$M_{2\mathrm{t}} - M_{1\mathrm{t}} = J_{\mathrm{s}}. \tag{5.83}$$

Na ovaj način bi se, na primer, mogao rešiti sistem stalnog magneta i diska od linearnog magnetnog materijala kada se magnet modeluje pomoću Amperovih mikroskopskih struja.

Sa druge strane, uticaj različitih magnethih materijala kod modelovanje različitih sistema bi se mogao zameniti postavljanjem ekvivalentnih magnetnih izvora na graničnim površinama dva magnetna materijala ili magnetnog materijala i vakuuma. U tom slučaju bi nepoznate veličine u formiranom sistemu jednačina bila postavljena magnetna opterećenja koja bi se nalazila u vazduhu ili vakuumu. U ovom slučaju, koristi se granični uslov za normalnu komponentu vektora gustine magnetnog momenta

$$M_{2\mathrm{n}} - M_{1\mathrm{n}} = \eta_{\mathrm{m}}, \tag{5.84}$$

gde je η_{m} površinsko naelektrisanje na razdvojnoj površini materijala. Na opisan način bi se mogao odrediti uticaj različitih magnetnih materijala ili uticaj objekta od magnetnog materijala u okolini stalnog magneta kada se on modeluje pomoću fiktivnih magnetnih opterećenja. Ekvivalentan sistem magnetnih izvora bi činila površinska magnetna opterećenja na površinama diskontinuiteta vektora magnetizacije magneta, zapreminska fiktivna magnetna opterećenja i magnetni izvori na granici dva magnetna materijala ili magnetnog materijala i vazduha postavljeni u vakuumu (ili vazduhu). S obzirom da se površinska i zapreminska fiktivna magnetna opterećenja magneta mogu odrediti na osnovu poznatog

vektora gustine magnetnog momenta (Odeljak 5.2.2), u formiranom sistemu jednačina nepoznata su samo opterećenja postavljena na granici sredina. Na osnovu konstitutivne veze

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}), \tag{5.85}$$

mogu se izraziti vektori gustine magnetnog momenta, za obe magnetne sredine, sledećim relacijama

$$\boldsymbol{M}_1 = (\mu_{r1} - 1)\boldsymbol{H}_1 ; \ \boldsymbol{M}_2 = (\mu_{r2} - 1)\boldsymbol{H}_2 . \tag{5.86}$$

Smenom prethodnih relacija u jednačinu (5.84) dobija se

$$\eta_m = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \left((\mu_{r2} - 1)\boldsymbol{H}_2 - (\mu_{r1} - 1)\boldsymbol{H}_1 \right). \tag{5.87}$$

Na osnovu graničnog uslova za normalnu komponentu vektora jačine magnetnog polja

$$H_{2n} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} H_{1n}, \tag{5.88}$$

iz jednačine (5.87), dobija se

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{H}_1 = \frac{-\mu_{r2}}{\mu_{r1} - \mu_{r2}} \eta_m . \tag{5.89}$$

Podešavanjem normalne komponente vektora jačine magnetnog polja (5.89) na razdvojnoj površini magnetnih materijala (ili magnetnog materijala i vazduha), određuju se nepoznata magnetna opterećenja. Kada se odrede nepoznata magnetna opterećenja, može se odrediti najpre magnetni skalar potencijal, a zatim i vektor jačine magnetnog polja, vektor magnetne indukcije ili sila koja deluje između stalnog magneta i tela načinjenog od linearnog magnetnog materijala.

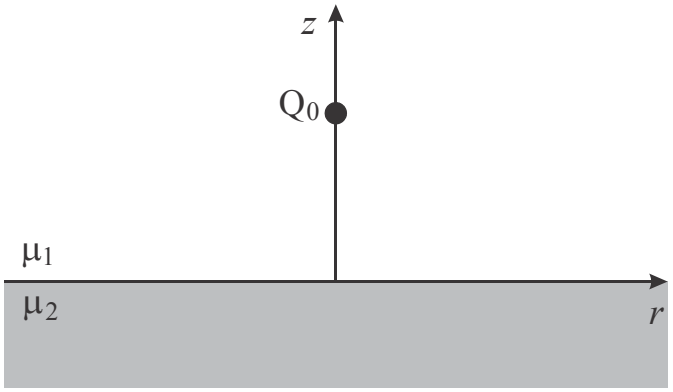
5.2.3.1 Primer primene hibridnog metoda graničnih elemenata

U cilju potvrde mogućnosti korišćenja ovog metoda za rešavanje magnetnih problema i provere njegove tačnosti, analiziran je jednostavan slučaj tačkastog magnetnog opterećenja postavljenog iznad razdvojne površine dva različita magnetna materijala.

Rezultat je upoređen sa vrednostima dobijenim primenom modifikovane teoreme lika. Iako HBEM važi za ogranične strukture, odgovarajućim izborom parametara potvrđena je tačnost ovog metoda.

Tačkasto magnetno opterećenje je postavljeno iznad razdvojne površine dva različita magnetna materijala magnetnih permeabilnosti μ_1 i μ_2 (slika 5.6). Uticaj različitih magnetnih materijala na formiranje polja u okolini naelektrisanja, može se zameniti uticajem magnetnih

izvora toroidalnog oblika postavljenih na razdvojnoj površini materijala u vakuumu ili vazduhu, kao na slici 5.7.

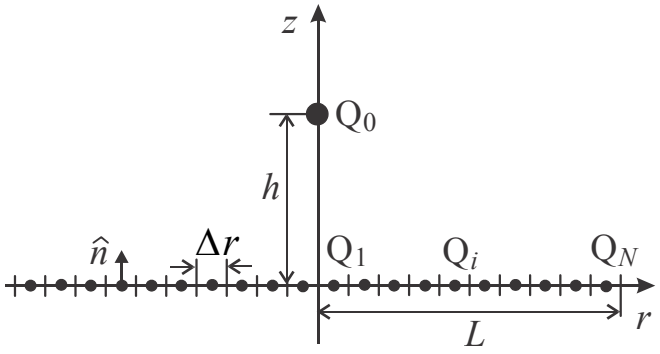


Slika 5.6. *Tačkasto magnetno opterećenje iznad razdvojne površine dva različita magnetna materijala.*

Magnetni skalar potencijal u proizvoljnoj tački sistema je

$$\varphi_{\mathrm{m}} = \frac{Q_0}{4\pi\sqrt{r^2+(z-h)^2}} + \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{2\pi^2} \frac{K\left(\frac{\pi}{2}, k_i\right)}{\sqrt{(r+r_i)^2+(z-z_i)^2}} \tag{5.90}$$

Pri čemu je $k_i^2 = \dfrac{4rr_i}{(r+r_i)^2+(z-z_i)^2}$.



Slika 5.7. *HBEM model.*

Ukupan broj toroidalnih izvora je *N*. S obzirom da su izvori postavljeni po graničnoj površini, važi da je $z_i = 0$, $r_i = \dfrac{2i-1}{2N} L$, $i = 1,2,\ldots,N$. Poluprečnik poprečnog preseka svakog od torusa je $a_e = \dfrac{\Delta r}{\pi}$, $\Delta r = \dfrac{L}{N}$.

S obzirom da je vektor jačine magnetnog polja zadovoljava relaciju

$$\boldsymbol{H} = -\mathrm{grad}(\varphi_\mathrm{m}) = H_r\hat{r} + H_z\hat{z}\,. \tag{5.91}$$

Njegove komponente su

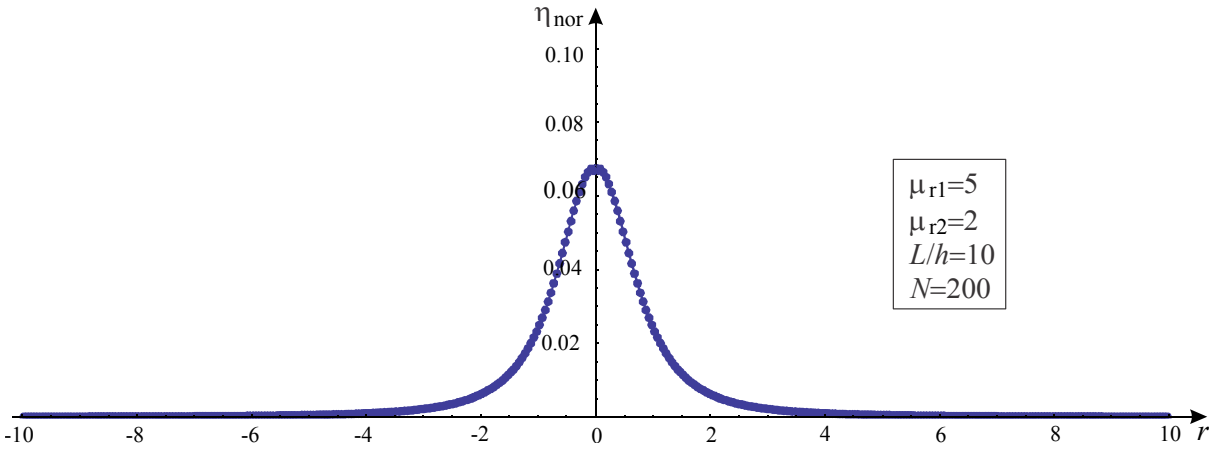
$$H_r = -\frac{\partial\varphi_\mathrm{m}}{\partial r} = \frac{Q_0}{4\pi}\frac{1}{\left(r^2+(z-h)^2\right)^{3/2}} + \\ + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{i=1}^{N} Q_i \frac{\left(r^2 - r_i^2 - (z-z_i)^2\right)E\left(\frac{\pi}{2},k_i\right) + \left((r-r_i)^2+(z-z_i)^2\right)K\left(\frac{\pi}{2},k_i\right)}{2r\left((r-r_i)^2+(z-z_i)^2\right)\sqrt{(r+r_i)^2+(z-z_i)^2}}; \tag{5.92}$$

$$H_z = -\frac{\partial\varphi_\mathrm{m}}{\partial z} = \frac{Q_0}{4\pi}\frac{z-h}{\left(r^2+(z-h)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{i=1}^{N} Q_i \frac{(z-z_i)E\left(\frac{\pi}{2},k_i\right)}{2r\left((r-r_i)^2+(z-z_i)^2\right)\sqrt{(r+r_i)^2+(z-z_i)^2}}\,. \tag{5.93}$$

Iz jednačina (5.89) i (5.93) dobija se

$$H_z^{(0+)} = -\frac{\mu_{\mathrm{r}2}}{\mu_{\mathrm{r}1}-\mu_{\mathrm{r}2}}\eta_\mathrm{m} = -\frac{\mu_{\mathrm{r}2}}{\mu_{\mathrm{r}1}-\mu_{\mathrm{r}2}}\frac{Q_i}{2r_i\pi\Delta r}\,. \tag{5.94}$$

Podešavanjem normalne komponente vektora jačine magnetnog polja na razdvojnoj površini magnetnih materijala, određuju se nepoznata magnetna opterećenja, Q_i, $i = 1,2,...N$.

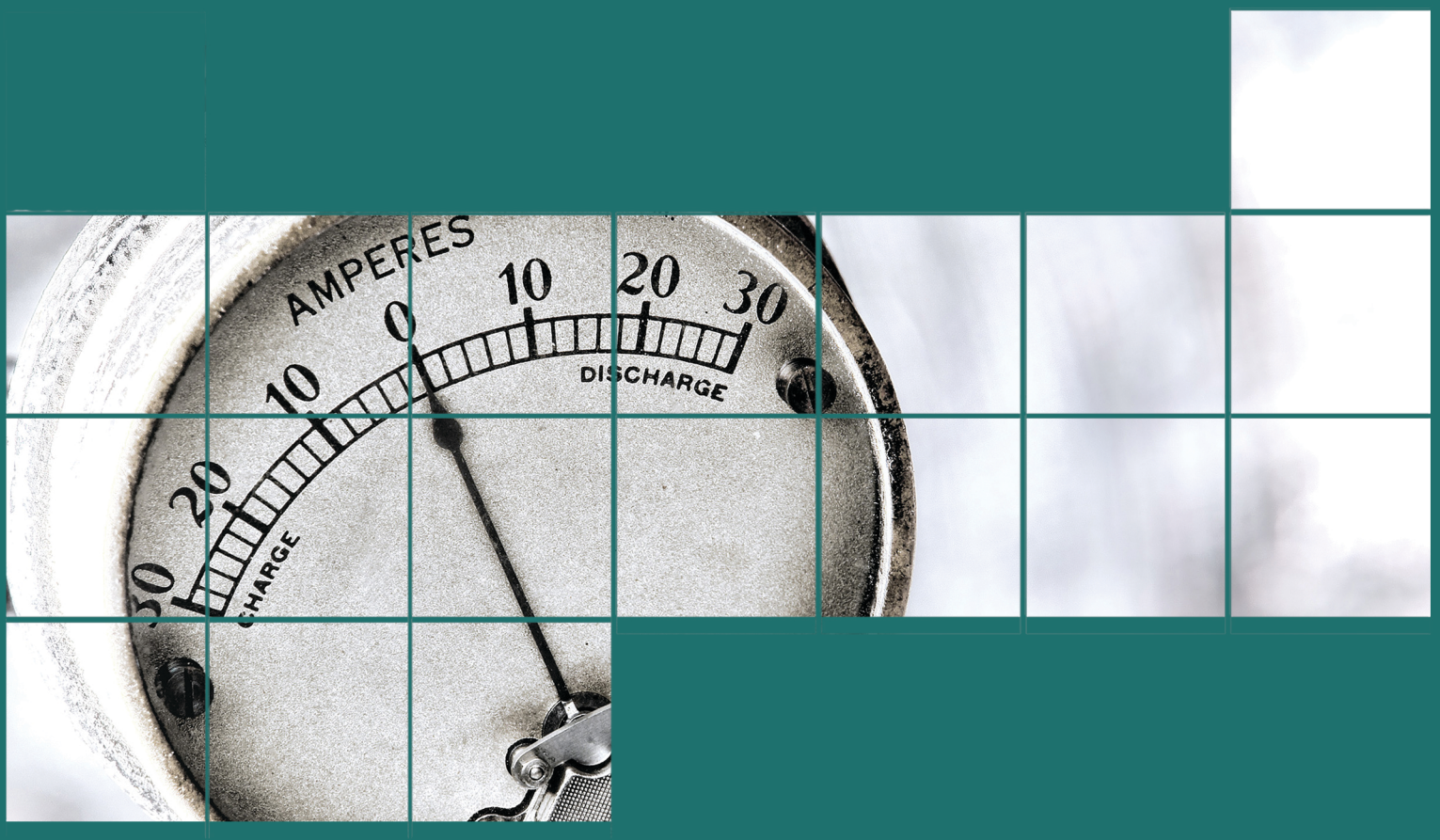


Slika 5.8. *Raspodela površinskih magnetnih opterećenja na razdvojnoj površini različitih magnetnih materijala.*

Na slici 5.8, prikazana je raspodela normalizovanog površinskog magnetnog opterećenja, $\eta_\mathrm{nor} = \eta_\mathrm{m}\dfrac{h^2}{Q_0}$, na razdvojnoj površini sredina različitih magnetnih permeabilnosti, dobijena primenom hibridnog metoda graničnih elemenata (puna linija). Rezultati su upoređeni sa onim dobijenim primenom teoreme lika,

$$\eta_{\mathrm{m}} = \frac{\mu_{\mathrm{r}1} - \mu_{\mathrm{r}2}}{\mu_{\mathrm{r}1} + \mu_{\mathrm{r}2}} \cdot \frac{Q_{\mathrm{m}}}{2\pi} \frac{h}{\left(r^2 + h^2\right)^{3/2}} . \tag{5.95}$$

Na osnovu prikazanog grafika, evidentno je odlično slaganje primenjenih metoda.

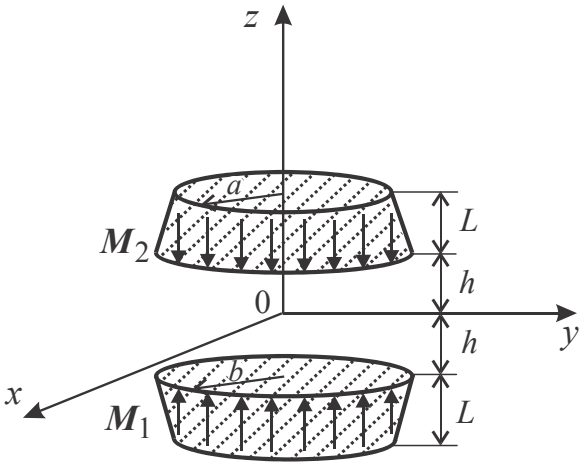


6. Primeri modelovanja sistema stalnih magneta primenom raspodele Amperovih struja

6. Primeri modelovanja sistema stalnih magneta primenom raspodele Amperovih struja

6.1. Sistem stalnih magneta oblika zarubljene kupe

Pored stalnih magneta oblika cilindra, torusa i paralelopipeda, čijom se analizom godinama bavi najveći broj istraživača u svetu, poslednjih godina se sve veća pažnja posvećuje analizi konfiguracija stalnih magneta netipičnog oblika, sa ciljem da se poboljšaju performanse uređaja u čiji sastav oni ulaze. Jednu takvu konfiguraciju čine dva stalna magneta oblika zarubljene kupe, homogeno namagnetisana u aksijalnom pravcu, suprotnog smera (slika 6.1). Polunumerički metod koji se zasniva na Amperovim mikroskopskim strujama i diskretizacionoj tehnici, je korišćen za proračun magnetnog polja i sile ovog sistema stalnih magneta.



Slika 6.1. *Sistem stalnih magneta oblika zarobljene kupe.*

Cilj ovog pristupa je da se odredi magnetna indukcija koju stvara donji stalni magnet u bilo kojoj tački, a potom sila na gornji stalni magnet. Pretpostavka je da su stalni magneti homogeno namagnetisani u aksijalnom pravcu, pri čemu je vektor gustine magnetnog momenta donjeg magneta $\boldsymbol{M}_1$, a gornjeg magneta $\boldsymbol{M}_2$, tako da važe relacija

$$\boldsymbol{M}_1 = M_1 \hat{z}\,; \tag{6.1}$$

$$\boldsymbol{M}_2 = M_2 (-\hat{z})\,. \tag{6.2}$$

S obzirom da su magneti homogeno namagnetisani u aksijalnom pravcu, zapreminske Amperove mikrostruje ne postoje,

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{a}1} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{M}_1 = 0\,,\ \boldsymbol{J}_{\mathrm{a}2} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{M}_2 = 0\,, \tag{6.3}$$

već samo površinske mikroskopske struje gustine

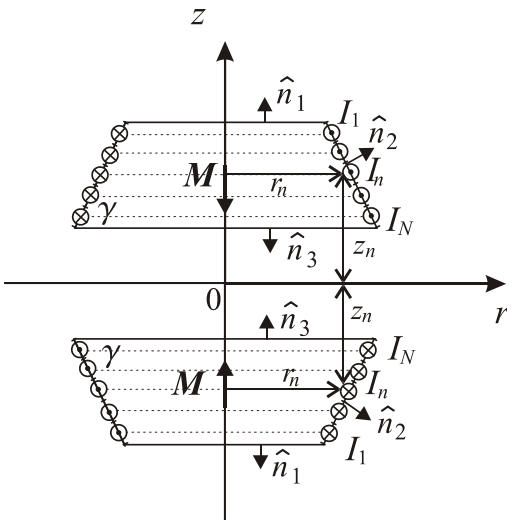
$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{sa}\,1} = \boldsymbol{M}_1 \times \hat{n} \ , \ \boldsymbol{J}_{\mathrm{sa}\,2} = \boldsymbol{M}_2 \times \hat{n} \tag{6.4}$$

postoje na omotačima magneta, tako da se stalni magneti ponašaju kao tanki uniformno namotani solenoidni namotaji.

Cilj primenjenog pristupa je da se omotači oba stalna magneta diskretizuju, odnosno predstave kao sistemi strujnih kružnih kontura. Na slici 6.2 je prikazan diskretizacioni model za sistem ova dva magneta, na osnovu koga se vidi da su zadovoljene sledeće relacije

$$\boldsymbol{M}_1 \times \hat{n}_1 = 0 \,,\ \boldsymbol{M}_1 \times \hat{n}_3 = 0 \,,\ \boldsymbol{M}_1 \times \hat{n}_2 = \boldsymbol{J}_{\mathrm{sa}\,1} = J_{\mathrm{sa}\,1} \cdot \hat{\theta} \,,$$

$$\boldsymbol{M}_2 \times \hat{n}_4 = 0 \,,\ \boldsymbol{M}_2 \times \hat{n}_6 = 0 \,,\ \boldsymbol{M}_2 \times \hat{n}_5 = \boldsymbol{J}_{\mathrm{sa}\,2} = J_{\mathrm{sa}\,2} \cdot (-\hat{\theta}) \,. \tag{6.5}$$



Slika 6.2. *Discretizacioni model.*

Korišćenjem izraza za indukciju koju stvara strujna kružna kontura, (jednačine 5.49 i 5.50), može se najpre odrediti magnetna indukcija koju stvara donji magent u bilo kojoj tački.

Kako samo površinske Amperove mikrostruje, postoje na omotačima magneta, ukupna magnetna indukcija koju stvara donji magnet dobija se sumiranjem rezultata za sve strujne konture (segmente) omotača. Uzimajući u obzir geometriju magneta, radijalna komponenta vektora magnetne indukcije može se izraziti

$$B_r = \frac{\mu I_n}{2\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{z + z_n}{r\sqrt{(r + r_n)^2 + (z + z_n)^2}} \left(-K\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + \frac{{r_n}^2 + r^2 + (z + z_n)^2}{(r_n - r)^2 + (z + z_n)^2} E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \right), \tag{6.6}$$

dok je aksijalna komponenta

$$B_z = \frac{\mu I_n}{2\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{r\sqrt{(r+r_n)^2+(z+z_n)^2}}\left(K\left(\frac{\pi}{2},k\right)+\frac{{r_n}^2-r^2-(z+z_n)^2}{(r_n-r)^2+(z+z_n)^2}E\left(\frac{\pi}{2},k\right)\right), \qquad (6.7)$$

pri čemu su $K\left(\frac{\pi}{2},k\right)$ i $E\left(\frac{\pi}{2},k\right)$ potpuni eliptički integrali prve i druge vrste čiji je modul $k^2=\frac{4rr_n}{(r+r_n)^2+(z-z_n)^2}$.

Sa N je označen ukupan broj segmenata kojim je diskretizovan omotač magneta.

Na osnovu slike 6.2 mogu se definisati sledeći parametri:

$$z_n = h+\frac{2n-1}{2N}L; \qquad (6.8)$$

$$r_n = b+\frac{a-b}{L}(z_n-h); \qquad (6.9)$$

$$\sin(\gamma)=\frac{L}{\sqrt{(b-a)^2+L^2}}; \qquad (6.10)$$

$$\Delta l=\frac{\sqrt{(b-a)^2+L^2}}{N}; \qquad (6.11)$$

Dok je struja strujne konture poluprečnika r_n

$$I_n = M\Delta l\sin(\gamma). \qquad (6.12)$$

Magnetna sila koja deluje na jedan segment gornjeg magneta, odnosno strujnu konturu poluprečnika r_i, kao posledica postojanja magnetnog polja donjeg magneta je

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}, \qquad (6.13)$$

pri čemu je struja strujne konture poluprečnika r_i

$$I_i = I_n = M\Delta l\sin(\gamma), \qquad (6.14)$$

a poluprečnik konture zadovoljava relaciju

$$r_i = r_n = b+\frac{a-b}{L}(z_n-h). \qquad (6.15)$$

Kako je $\mathrm{d}\boldsymbol{l} = r_i\,\mathrm{d}\theta(-\hat{\theta})$, korišćenjem sledećih realacija

$$\hat{\theta} = -\sin(\theta)\hat{x}+\cos(\theta)\hat{y},$$

$$\hat{r} = \cos(\theta)\,\hat{x} + \sin(\theta)\,\hat{y},$$

$$\hat{z} = \hat{z}, \tag{6.16}$$

iz jednačine (6.13), magnetna sila se može prikazati u obliku

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I_i\, r_i\, B_z \cos(\theta)\mathrm{d}\theta\,(-\hat{x}) + I_i\, r_i\, B_z \sin(\theta)\mathrm{d}\theta\,(-\hat{y}) + I_i\, r_i\, B_r\, \mathrm{d}\theta\,\hat{z}. \tag{6.17}$$

z komponenta sile predstavlja silu levitacije koja deluje na jedan segment stalnog magneta

$$\mathrm{d}F_z = I_i r_i B_r\, \mathrm{d}\theta. \tag{6.18}$$

S obzirom na geometriju magneta i njihov medjusobni položaj, *x* i *y* komponente sile nemaju nikakav uticaj na rezultujuću silu i iznose nula. Prema tome, sila levitacije između donjeg magneta i jednog segmenta gornjeg magneta se može dobiti iz jednačina 6.18 i 6.14 i iznosi

$$F_{z_i} = 2\pi r_i B_r M \Delta l \sin(\gamma). \tag{6.19}$$

Konačno, sumiranjem rezultata za svaki segment stalnog magneta dobija se izraz za silu koja deluje između magneta posmatranog sistema

$$F_z = \frac{\mu_0 M^2 L^2}{N^2} \sum_{i=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} \frac{z_i + z_n}{\sqrt{(r_i + r_n)^2 + (z_i + z_n)^2}} \left(-K\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + \frac{{r_n}^2 + {r_i}^2 + (z_i + z_n)^2}{(r_n - r_i)^2 + (z_i + z_n)^2} E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \right), \tag{6.20}$$

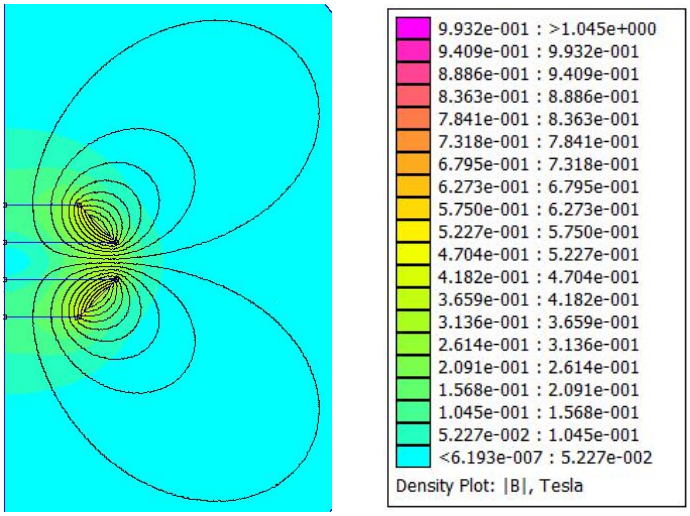
gde je $k^2 = \dfrac{4 r_i r_n}{(r_i + r_n)^2 + (z_i + z_n)^2}$.

Korišćenjem poslednjeg izraza, jednostavno se može odrediti sila levitacije za bilo koje vrednosti vektora gustine magnetnog momenta, kao i za bilo koje dimenzije stalnih magneta i rastojanje između njih. Rezultati dobijeni primenom metoda zasnovanog na mikroskopskim Amperovim strujama prikazani su grafički, tabelarno i upoređeni sa numeričkim rezultatima metoda konačnih elementa, dobijenim primenom FEMM softvera. Polje kao i sila koja deluje između magneta zavisi od magnetizacije magneta, međusobnog rastojanja i geometrije magneta.

Raspodela vektora magnetne indukcije za posmatranu konfiguraciju magneta, primenom FEMM softvera, prikazana je na slici 6.3. Numeričke vrednosti korišćene za ovaj proračun su $a = 2\,\mathrm{mm}$, $b = 3\,\mathrm{mm}$, $L = 1\,\mathrm{mm}$, $h = 0.5\,\mathrm{mm}$, dok je intenzitet vektora gustine magnetnog momenta za oba magneta isti i iznosi $M_1 = M_2 = 900\,\mathrm{KA/}m$.

Ispitana je konvergencija rezultata za različiti broj segmenata. Dobijene vrednosti za silu prikazane su u Tabeli 6.1 za gore navedene parametre stalnih magneta. Očigledno, rezultati variraju zavisno od broja segmenata (*N*) ali sa povećanjem broja segmenata odstupanja

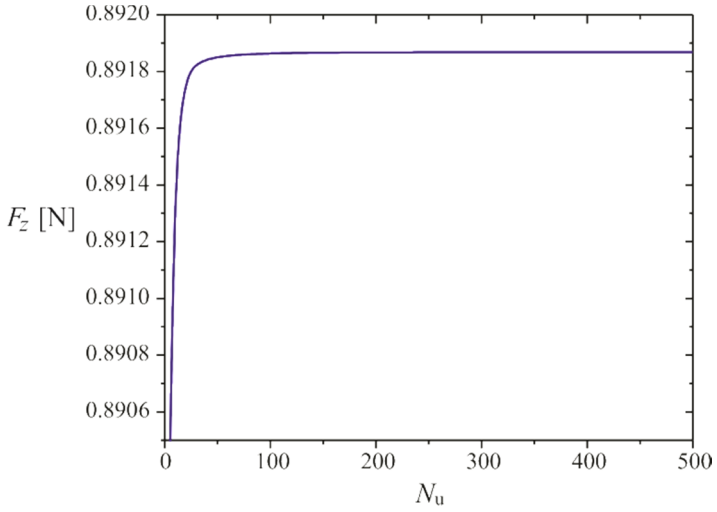
rezultata postaju sve manja i manja. Kako bi vreme računanja bilo što kraće, neophodno je ograničiti broj segmenta. Na osnovu vrednosti u Tabeli 6.1 i grafika na slici 6.4, evidentno je da nije neophodno uzeti preveliki broj segmenta kako bi se postigla željena tačnost, te je taj broj u narednim proračunima ograničen na $N = 100$.



Slika 6.3. *Raspodela vektora magnetne indukcije.*

Tabela 6.1. *Konvergencija rezultata.*

N	F_z[N]
5	0.890474
10	0.891522
20	0.891782
30	0.891830
50	0.891855
100	0.891865
200	0.891868
500	0.891868



Slika 6.4. *Zavisnost intenziteta magnetne sile od ukupnog broja diskretizacionih segmenata.*

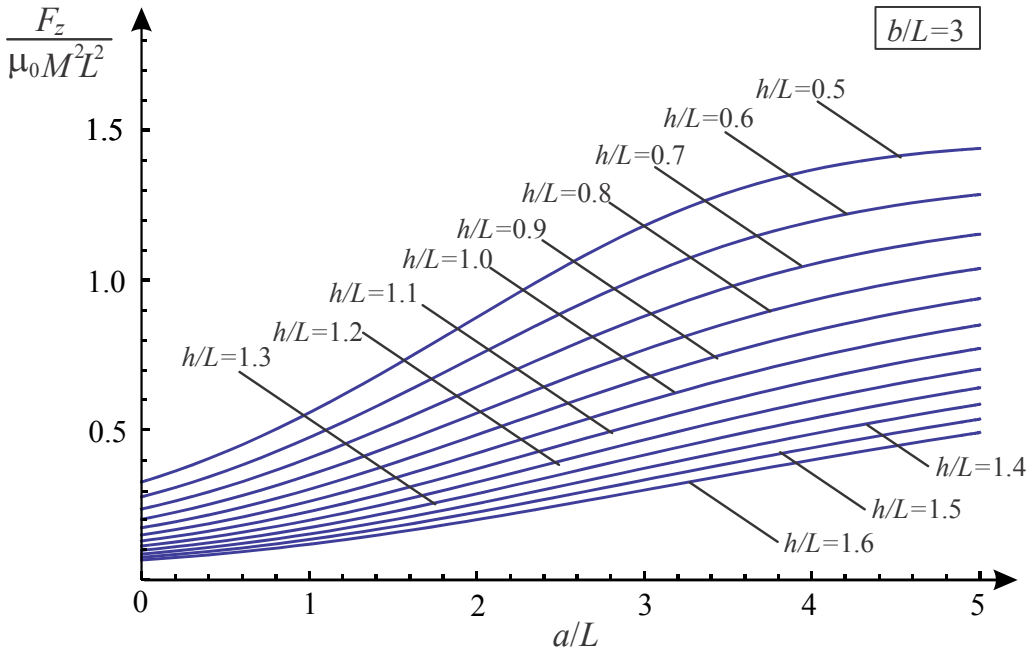
U Tabeli 6.2 prikazani su uporedni rezultati za silu levitacije primenom prikazanog pristupa i metoda konačnih elemenata (FEMM softver). Sila je prikazana za različita rastojanja između stalnih magneta za slučaj kada su poluprečnici magneta $a = 2\,\text{mm}, b = 3\,\text{mm},$ njegova debljina $L = 1\,\text{mm}$ i magnetizacija $M = M_1 = M_2 = 900\,\text{KA}/m$. Broj segmenata kojim je diskretizovan omotač magneta iznosi $N = 100$. Rezultati FEMM softvera su dobijeni za oko 200 000 elemenata. Poređenjem rezultata iz Tabele 6.2 može se zaključiti

da se rezultati primenjenog metoda odlično slažu sa vrednostima dobijenim primenom FEMM softvera. Sa inženjerske tačke gledišta slaganje rezultata na četiri decimale je više nego dovoljno tako da je na ovaj način još jednom potvrđena činjenica da nije neophodno uzimati veliki broj segmenata kako bi se dobila željena tačnost.

Kao što je očekivano, sila opada sa povećanjem rastojanja. Takođe, smanjuje se i razlika između rezultata primenjenog metoda i metoda konačnih elementa sa povećanjem međusobnog rastojanja.

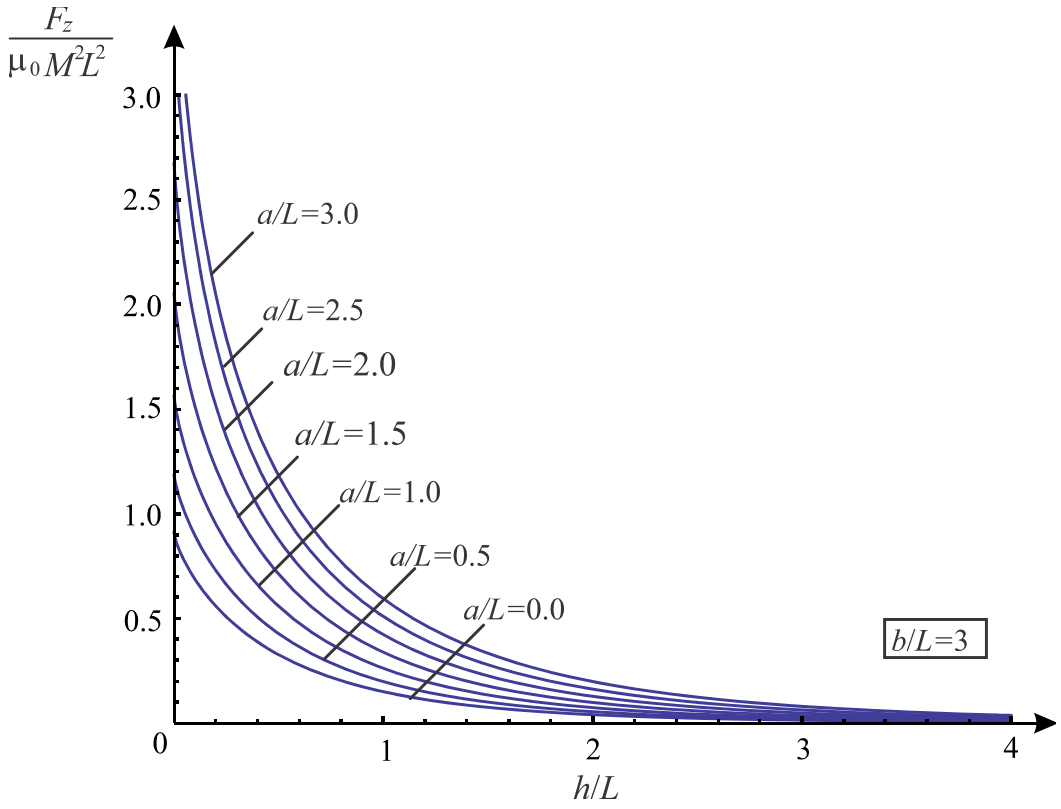
Tabela 6.2. *Uporedni rezultati za silu levitacije u funkciji rastojanja između magneta.*

h/L	F_z[N]	F_z[N] (FEMM)
0.5	0.891865	0.891695
0.6	0.761331	0.761281
0.7	0.654709	0.654682
0.8	0.566406	0.566389
0.9	0.492484	0.492495
1.0	0.430069	0.430078
1.1	0.376997	0.376978
1.2	0.331606	0.331639
1.3	0.292589	0.292602
1.4	0.258905	0.258972
1.5	0.229713	0.229791

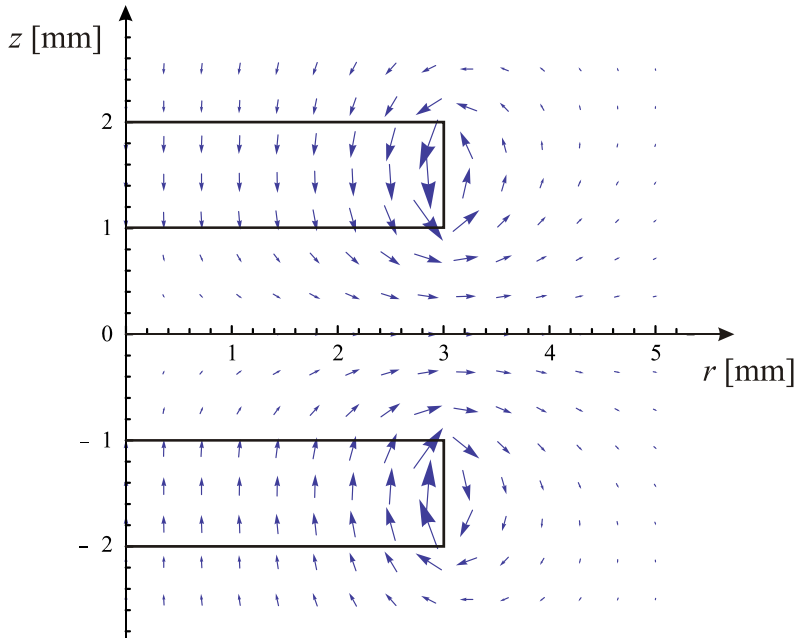


Slika 6.5. *Normalizovana vrednost sile levitacije u zavisnosti od normalizovanog poluprečnika gornjeg bazisa magneta,* a/L .

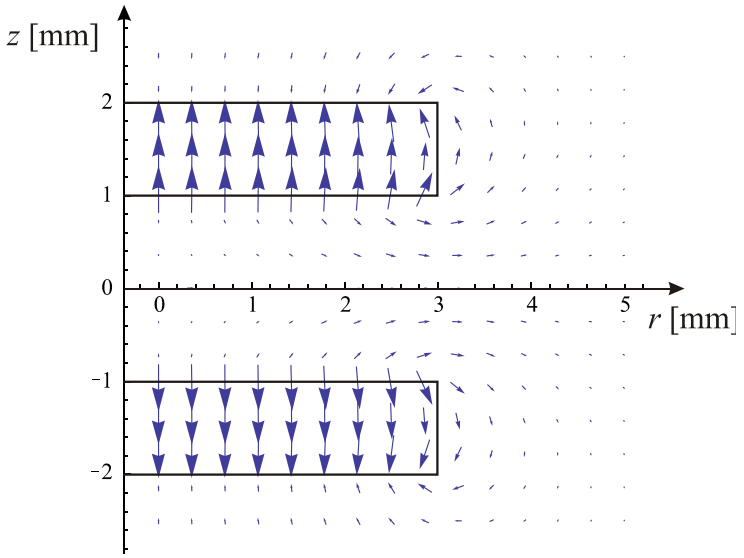
Na slici 6.5 je prikazana normalizovana vrednost sile, $F_{z\,\mathrm{nor}} = F_z \big/ \mu_0 M^2 L^2$, u zavisnosti od normalizovanog poluprečnika gornjeg bazisa magneta za različita rastojanja između magneta dok je na slici 6.6 data raspodela sile levitacije u funkciji rastojanja između magneta za različite poluprečnike gornjeg bazisa magneta.



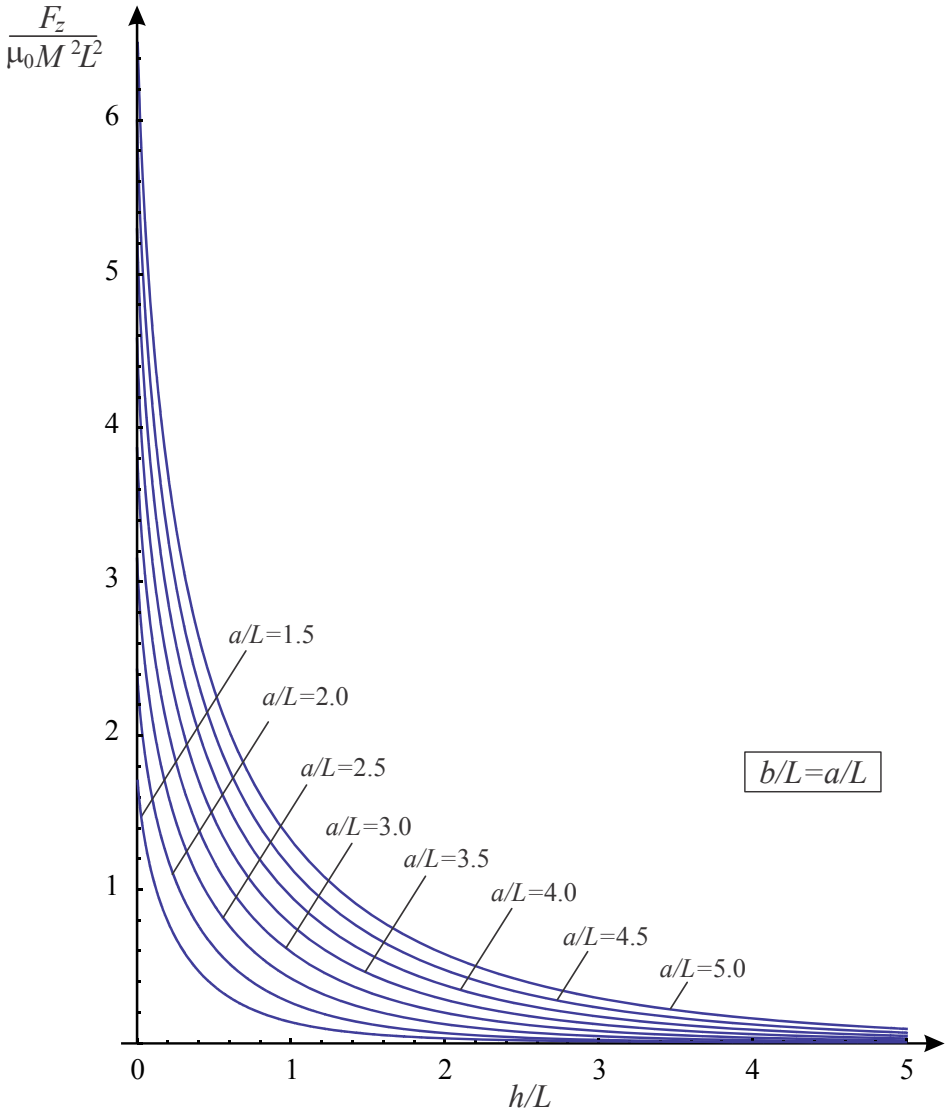
Slika 6.6. *Sila levitacije u funkciji rastojanja između stalnih magneta.*



Slika 6.7. *Raspodela vektora magnetne indukcije.*



Slika 6.8. *Raspodela vektora magnetnog polja.*



Slika 6.9. *Normalizovana vrednost sile levitacije u funkciji rastojanja* h/L .

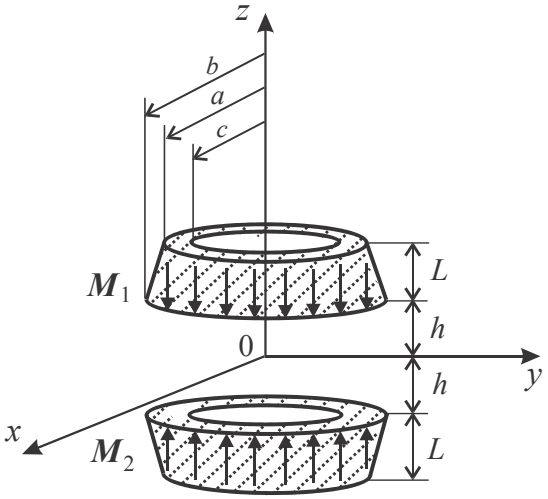
Poseban slučaj se dobija kada se uzme da su poluprečnici gornjeg i donjeg bazisa stalnog magneta oblika zarubljene kupe jednaki. Tada se konfiguracija svodi na sistem koji se sastoji od dva cilindrična magneta, homogeno namagnetisana u aksijalnom pravcu ali suprotnom smeru, poluprečnika bazisa a i visine L.

Na slikama 6.7 i 6.8 prikazane su raspodele vektora magnetne indukcije i magnetnog polja, respektivno. Prikazane raspodele su dobijene primenom metoda zanovanog na mikroskopskim Amperovim strujama za parametre magneta $a = 3\,\text{mm}, L = 1\,\text{mm}$ i rastojanje $h = 1\,\text{mm}$.

Sile levitacije u fukciji rastojanja h/L za različite poluprečnike stalnih magneta oblika cilindra prikazana je na slici 6.9. Prikazani rezultati su veoma značajni za projektovanje magnetnih ležaja koji su sastavni deo velikog broja električnih uređaja jer omogućavaju proračun i analizu sile između stalnih magneta u funkciji parametara. Pored toga, prednost ovog pristupa u poređenju sa metodom konačnih elemenata je, pored jednostavnosti i povećene mogućnosti analize razmetrane konfiguracije, i kraće vreme izračunavanja.

6.2. Sistem stalnih magneta oblika torusa trapezoidnog poprečnog preseka

Još jedna konfiguracija koja sadrži stalne magnete netipičnog oblika prikazana je na slici 6.10. Sastoji se iz dva stalna magneta oblika prstena, trapezoidnog poprečnog preseka, načinjena od istih materijala, homogeno namagnetisana u aksijalnom pravcu, suprotnog smera.



Slika 6.10. *Stalni magneti oblika prstena trapezoidnog poprečnog preseka.*

Vektori gustine magnetnog momenta za gornji i donji magnet su

$$\boldsymbol{M}_1 = -M_1\hat{z}\,, \tag{6.21}$$

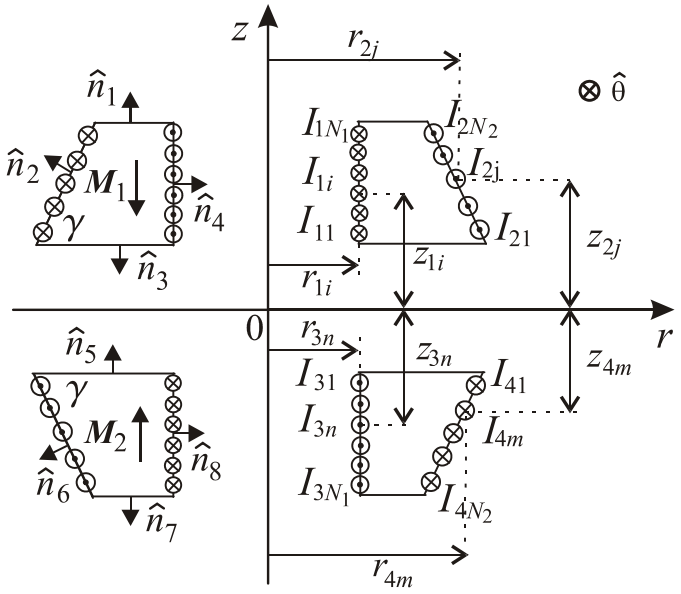
$$\boldsymbol{M}_2 = M_2 \hat{z}\,. \tag{6.22}$$

Kao i u prethodnom analiziranom primeru, s obzirom da su magneti homogeno namagnetisani u aksijalnom pravcu, zapreminske Amperove struje neće postojati (jednačina 6.3).

Samo površinske Amperove mikroskopske struje postoje na unutrašnjem i spoljašnjem omotaču oba magneta, (jednačina 6.4), tako da se svaki od magneta ponaša kao dva uniformno namotana solenoidna namotaja.

Najjednostavnija procedura za određivanje polja i sile levitacije je da se svaki od omotača oba magneta diskretizuje i posmatra kao sistem strujnih kružnih kontura [151]. Broj segmenata unutrašnjeg omotača je N_1, a spoljašnjeg N_2.

Diskretizacioni model je prikazan na slici 6.11.



Slika 6.11. *Diskretizacioni model za sistem stalnih magneta oblika prstena.*

Kako bi slika 6.11 bila preglednija, jedinični vektori su prikazani na levoj strani slike. Očigledno je da su za oba magneta zadovoljeni sledeći granični uslovi

$$\boldsymbol{M}_1 \times \hat{n}_1 = 0\,,\boldsymbol{M}_1 \times \hat{n}_3 = 0\,,\ \boldsymbol{M}_1 \times \hat{n}_2 = \boldsymbol{J}_{2\mathrm{sa}} = J_{2\mathrm{sa}}\left(-\hat{\theta}\right),\ \boldsymbol{M}_1 \times \hat{n}_4 = \boldsymbol{J}_{1\mathrm{sa}} = J_{1\mathrm{sa}}\,\hat{\theta}\,,$$

$$\boldsymbol{M}_2 \times \hat{n}_5 = 0\,,\boldsymbol{M}_2 \times \hat{n}_7 = 0\,,\ \boldsymbol{M}_2 \times \hat{n}_6 = \boldsymbol{J}_{2\mathrm{sa}} = J_{2\mathrm{sa}}\,\hat{\theta}\,,\ \boldsymbol{M}_2 \times \hat{n}_8 = \boldsymbol{J}_{1\mathrm{sa}} = J_{1\mathrm{sa}}\left(-\hat{\theta}\right). \tag{6.23}$$

Uzimajući u obzir geometriju stalnih magneta, mogu se definisati sledeći parametri segmenata unutrašnjeg i spoljašnjeg omotača:

$$z_{1i} = h + \frac{2i-1}{2N_1}L,\ i = 1,\ldots,N_1\,, \tag{6.24}$$

$$r_{1i} = c,\ i = 1,\ldots,N_1, \tag{6.25}$$

$$z_{3n} = h + \frac{2n-1}{2N_1}L,\ n = 1,\ldots,N_1, \tag{6.26}$$

$$r_{3n} = c,\ n = 1,\ldots,N_1, \tag{6.27}$$

$$z_{4m} = h + \frac{2m-1}{2N_2}L,\ m = 1,\ldots,N_2, \tag{6.28}$$

$$r_{4m} = b + \frac{a-b}{L}(z_{4m} - h),\ m = 1,\ldots,N_2, \tag{6.29}$$

$$z_{2j} = h + \frac{2j-1}{2N_2}L,\ j = 1,\ldots,N_2, \tag{6.30}$$

$$r_{2j} = b + \frac{a-b}{L}(z_{2j} - h),\ j = 1,\ldots,N_2, \text{ i} \tag{6.31}$$

$$\sin(\gamma) = \frac{L}{\sqrt{(b-a)^2 + L^2}}. \tag{6.32}$$

Polazeći od pretpostavke da su vektori gustine magnetnog momenta oba magneta istog intenziteta, $M_1 = M_2 = M$, površinske Amperove mikroskopske struje postoje na unutrašnjim omotačima magneta gustine $J_{1\text{sa}} = M$, i na spoljašnjim omotačima gustine $J_{2\text{sa}} = M\sin(\gamma)$.

Struje kružnih kontura poluprečnika r_{1i}, r_{3n}, r_{2j} i r_{4m} su:

$$I_{1i} = J_{1\text{sa}}\Delta l_1 = M\Delta l_1,\ i = 1,\ldots,N_1, \tag{6.33}$$

$$I_{3n} = J_{1\text{sa}}\Delta l_1 = M\Delta l_1,\ n = 1,\ldots,N_1, \tag{6.34}$$

$$I_{2j} = J_{2\text{sa}}\Delta l_2 = M\Delta l_2\sin(\gamma),\ j = 1,\ldots,N_2, \tag{6.35}$$

$$I_{4m} = J_{2\text{sa}}\Delta l_2 = M\Delta l_2\sin(\gamma),\ m = 1,\ldots,N_2, \tag{6.36}$$

pri čemu su dužine diskretizacionih segmenata:

$$\Delta l_1 = \frac{L}{N_1}, \tag{6.37}$$

$$\Delta l_2 = \frac{\sqrt{(b-a)^2 + L^2}}{N_2}. \tag{6.38}$$

Pomoću izraza za komponente vektora magnetne indukcije koju stvara strujna kružna kontura, jednačine (5.49) i (5.50), magnetna indukcija koju stvara donji magnet se može

odrediti u bilo kojoj tački (za $z \geq 0$) sumiranjem udela oba omotača korišćenjem uniformne diskretizacione tehnike

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{B}^{\text{ext}}\left(r, z, r_{3n}, -z_{3n}, r_{4m}, -z_{4m}\right) &= \Delta B_r^{\text{ext}}\left(r, z, r_{3n}, -z_{3n}, r_{4m}, -z_{4m}\right)\hat{\boldsymbol{r}} \\ &+ \Delta B_z^{\text{ext}}\left(r, z, r_{3n}, -z_{3n}, r_{4m}, -z_{4m}\right)\hat{\boldsymbol{z}},\end{aligned} \tag{6.39}$$

gde je

$$\Delta B_r^{\text{ext}}(r, z, r_{3n}, -z_{3n}, r_{4m}, -z_{4m}) = \sum_{m=1}^{N_2} B_r(r, z, r_{4m}, -z_{4m}) - \sum_{n=1}^{N_1} B_r(r, z, r_{3n}, -z_{3n}), \tag{6.40}$$

$$\Delta B_z^{\text{ext}}(r, z, r_{3n}, -z_{3n}, r_{4m}, -z_{4m}) = \sum_{m=1}^{N_2} B_z(r, z, r_{4m}, -z_{4m}) - \sum_{n=1}^{N_1} B_z(r, z, r_{3n}, -z_{3n}). \tag{6.41}$$

Elementarna magnetna sila na jedan strujni element ($I_{1i}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ i $I_{2j}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$) može se odrediti:

$$\mathrm{d}\left(\Delta \boldsymbol{F}_i\right) = I_{1i}\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{l}_1 \times \Delta \boldsymbol{B}^{\text{ext}}(r_{1i}, z_{1i}, r_{3n}, -z_{3n}, r_{4m}, -z_{4m}), \tag{6.42}$$

$$\mathrm{d}\left(\Delta \boldsymbol{F}_j\right) = I_{2j}\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{l}_2 \times \Delta \boldsymbol{B}^{\text{ext}}(r_{2j}, z_{2j}, r_{3n}, -z_{3n}, r_{4m}, -z_{4m}), \tag{6.43}$$

Pri čemu je $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 = r_{1i}\,\mathrm{d}\theta\,\hat{\theta}$ i $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 = -r_{2i}\,\mathrm{d}\theta\,\hat{\theta}$.

Smenom veza koje postoje između jediničnih vektora cilindričnog koordinatnog sistema $\hat{\theta}, \hat{r}, \hat{z}$ i jediničnih vektora pravouglog koordinatnog sistema $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, (jednačina 6.16) u jednačine (6.42) i (6.43), elementarna magnetna sila se dobija u obliku

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(\Delta \boldsymbol{F}_i\right) &= I_{1i}\, r_{1i}\, \Delta B_z^{\text{ext}}(r_{1i}, z_{1i}, r_{3n}, -z_{3n}, r_{4m}, -z_{4m})\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\hat{x} + \\ &+ I_{1i}\, r_{1i}\, \Delta B_z^{\text{ext}}(r_{1i}, z_{1i}, r_{3n}, -z_{3n}, r_{4m}, -z_{4m})\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\hat{y} + \\ &+ I_{1i}\, r_{1i}\, \Delta B_r^{\text{ext}}(r_{1i}, z_{1i}, r_{3n}, -z_{3n}, r_{4m}, -z_{4m})\,\mathrm{d}\theta\,(-\hat{z}),\end{aligned} \tag{6.44}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(\Delta \boldsymbol{F}_j\right) &= I_{2j}\, r_{2j}\, \Delta B_z^{\text{ext}}(r_{2j}, z_{2j}, r_{3n}, -z_{3n}, r_{4m}, -z_{4m})\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,(-\hat{x}) + \\ &+ I_{2j}\, r_{2j}\, \Delta B_z^{\text{ext}}(r_{2j}, z_{2j}, r_{3n}, -z_{3n}, r_{4m}, -z_{4m})\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,(-\hat{y}) + \\ &+ I_{2j}\, r_{2j}\, \Delta B_r^{\text{ext}}(r_{2j}, z_{2j}, r_{3n}, -z_{3n}, r_{4m}, -z_{4m})\,\mathrm{d}\theta\,\hat{z}.\end{aligned} \tag{6.45}$$

x i y komonente magnetne sile za *i*-tu i *j*-tu strujnu kružnu konturu, unutrašnjeg, odnosno spoljašnjeg omotača su:

$$\Delta F_{xi} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\left(\Delta F_{xi}\right)\mathrm{d}\,\theta = 0, \quad \Delta F_{xj} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\left(\Delta F_{xj}\right)\mathrm{d}\,\theta = 0, \tag{6.46}$$

$$\Delta F_{yi} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\left(\Delta F_{yi}\right)\mathrm{d}\,\theta = 0,\ \Delta F_{yj} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\left(\Delta F_{yj}\right)\mathrm{d}\,\theta = 0\,. \tag{6.47}$$

Prema tome, magnetna sila ima samo $z-$komponentu koja je za *i*-tu i *j*-tu strujnu koturu oblika:

$$\Delta F_{zi} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\left(\Delta F_{zi}\right)\mathrm{d}\,\theta = -2\pi r_{1i} I_{1i} B_r^{\mathrm{ext}}(r_{1i}, z_{1i}, r_{3n}, -z_{3n}, r_{4m}, -z_{4m})\,, \tag{6.48}$$

$$\Delta F_{zj} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\left(\Delta F_{zj}\right)\mathrm{d}\,\theta = 2\pi r_{2j} I_{2j} B_r^{\mathrm{ext}}(r_{2j}, z_{2j}, r_{3n}, -z_{3n}, r_{4m}, -z_{4m})\,. \tag{6.49}$$

Konačno, ukupna sila levitacije ($\boldsymbol{F} = F_z\hat{\boldsymbol{z}},\ F_z > 0$) ima samo *z*- komponentu i iznosi

$$F_z = \sum_{i=1}^{N_1} \Delta F_{zi} + \sum_{j=1}^{N_2} \Delta F_{zj} = F_{z42} - F_{z32} - F_{z41} + F_{z31}\,, \tag{6.50}$$

gde je:

$$F_{z42} = \frac{\mu_0 M^2 L^2}{N_2^2} \sum_{j=1}^{N_2}\sum_{m=1}^{N_2} \frac{z_{2j} + z_{4m}}{\sqrt{\left(r_{2j} + r_{4m}\right)^2 + \left(z_{2j} + z_{4m}\right)^2}} \times \\ \times \left(-K\left(\frac{\pi}{2}, k_{42}\right) + \frac{r_{2j}^2 + r_{4m}^2 + \left(z_{2j} + z_{4m}\right)^2}{\left(r_{2j} - r_{4m}\right)^2 + \left(z_{2j} + z_{4m}\right)^2} E\left(\frac{\pi}{2}, k_{42}\right)\right), \tag{6.51}$$

$$F_{z32} = \frac{\mu_0 M^2 L^2}{N_1 N_2} \sum_{j=1}^{N_2}\sum_{n=1}^{N_1} \frac{z_{2j} + z_{3n}}{\sqrt{\left(r_{2j} + r_{3n}\right)^2 + \left(z_{2j} + z_{3n}\right)^2}} \times \\ \times \left(-K\left(\frac{\pi}{2}, k_{32}\right) + \frac{r_{2j}^2 + r_{3n}^2 + \left(z_{2j} + z_{3n}\right)^2}{\left(r_{2j} - r_{3n}\right)^2 + \left(z_{2j} + z_{3n}\right)^2} E\left(\frac{\pi}{2}, k_{32}\right)\right), \tag{6.52}$$

$$F_{z41} = \frac{\mu_0 M^2 L^2}{N_1 N_2} \sum_{i=1}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_2} \frac{z_{1i} + z_{4m}}{\sqrt{\left(r_{1i} + r_{4m}\right)^2 + \left(z_{1i} + z_{4m}\right)^2}} \times \\ \times \left(-K\left(\frac{\pi}{2}, k_{41}\right) + \frac{r_{1i}^2 + r_{4m}^2 + \left(z_{1i} + z_{4m}\right)^2}{\left(r_{1i} - r_{4m}\right)^2 + \left(z_{1i} + z_{4m}\right)^2} E\left(\frac{\pi}{2}, k_{41}\right)\right), \tag{6.53}$$

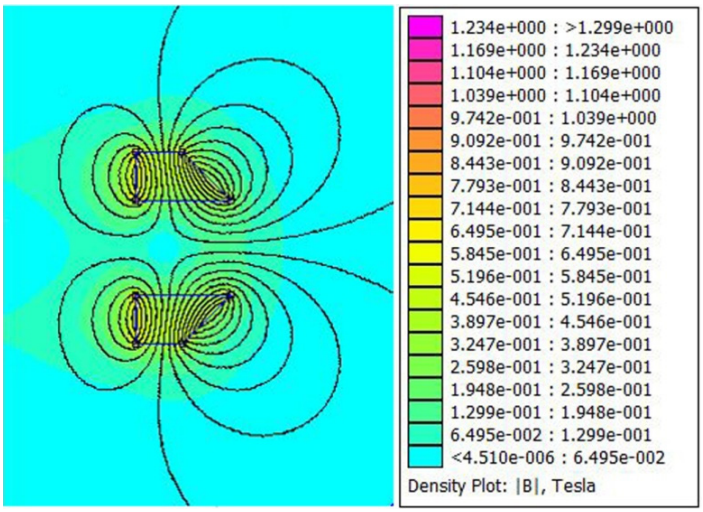
$$F_{z31} = \frac{\mu_0 M^2 L^2}{N_1^2} \sum_{i=1}^{N_1}\sum_{n=1}^{N_1} \frac{z_{1i} + z_{3n}}{\sqrt{\left(r_{1i} + r_{3n}\right)^2 + \left(z_{1i} + z_{3n}\right)^2}} \times \\ \times \left(-K\left(\frac{\pi}{2}, k_{31}\right) + \frac{r_{1i}^2 + r_{3n}^2 + \left(z_{1i} + z_{3n}\right)^2}{\left(r_{1i} - r_{3n}\right)^2 + \left(z_{1i} + z_{3n}\right)^2} E\left(\frac{\pi}{2}, k_{31}\right)\right), \tag{6.54}$$

pri čemu su moduli eliptičkih integrala:

$$k_{42}^2 = \frac{4r_{2j}r_{4m}}{(r_{2j}+r_{4m})^2+(z_{2j}+z_{4m})^2},\ k_{32}^2 = \frac{4r_{2j}r_{3n}}{(r_{2j}+r_{3n})^2+(z_{2j}+z_{3n})^2},$$

$$k_{41}^2 = \frac{4r_{1i}r_{4m}}{(r_{1i}+r_{4m})^2+(z_{1i}+z_{4m})^2},\ k_{31}^2 = \frac{4r_{1i}r_{3n}}{(r_{1i}+r_{3n})^2+(z_{1i}+z_{3n})^2}.$$

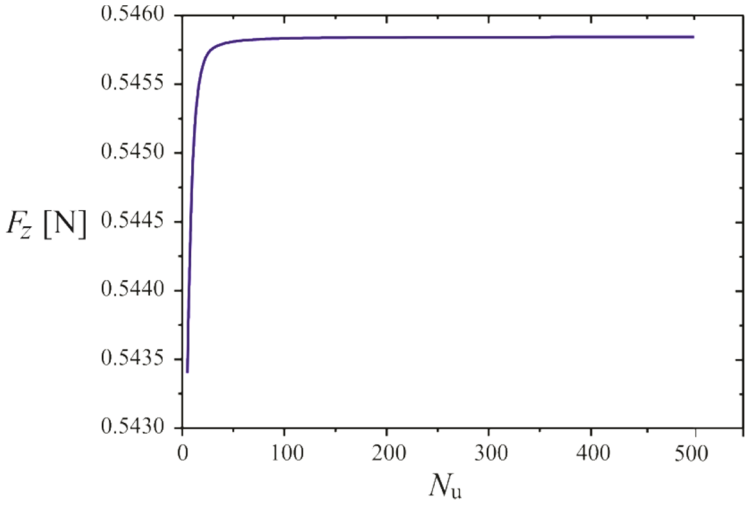
Raspodela vektora magnetne indukcije, dobijena korišćenjem FEMM 4.2 softvera, prikazana je na slici 6.12. Parametri magneta koji su korišćeni za datu raspodelu su $a/L=4, b/L=5, c/L=3, h/L=1,\ L=1\,\text{mm}$, dok je vektor gustine magnetnog momenta $M=900\,\text{kA/m}$.



Slika 6.12. *Raspodela magnetne indukcije za sistem torusnih magneta trapezoidnog poprečnog preseka (FEMM 4.2 softvare).*

Tabela 6.3. *Konvergencija rezultata.*

$N_1=N_2$	F_z [N]
5	0.543399
10	0.545232
20	0.545691
30	0.545775
50	0.545819
100	0.545837
200	0.545842
500	0.545843



Slika 6.13. *Zavisnost sile levitacije od broja segmenata.*

Primenom opisanog polunumeričkog pristupa, za gore pomenute dimenzije magneta, data je konvergencija rezultata za silu levitacije u Tabeli 6.3. Sila levitacije je izračunata na osnovu izraza (6.50) za jednak broj segmenta na unutrašnjem i spoljašnjem omotaču stalnog magneta, $N_{\mathrm{u}} = N_1 = N_2$. Kako bi vreme proračuna bilo što kraće, broj segmenta mora da bude što je moguće manji. Na osnovu grafika prikazanog na slici 6.13, očigledno je da nije neophodno uzeti veliki broj segmenta kako bi se dobila zadovoljavajuća tačnost tako da je taj broj ograničen na $N_1 = N_2 = 100$. Poređenjem sa FEM-om utvrđeno je da je u tom slučaju relativna greška oko 0.4%.

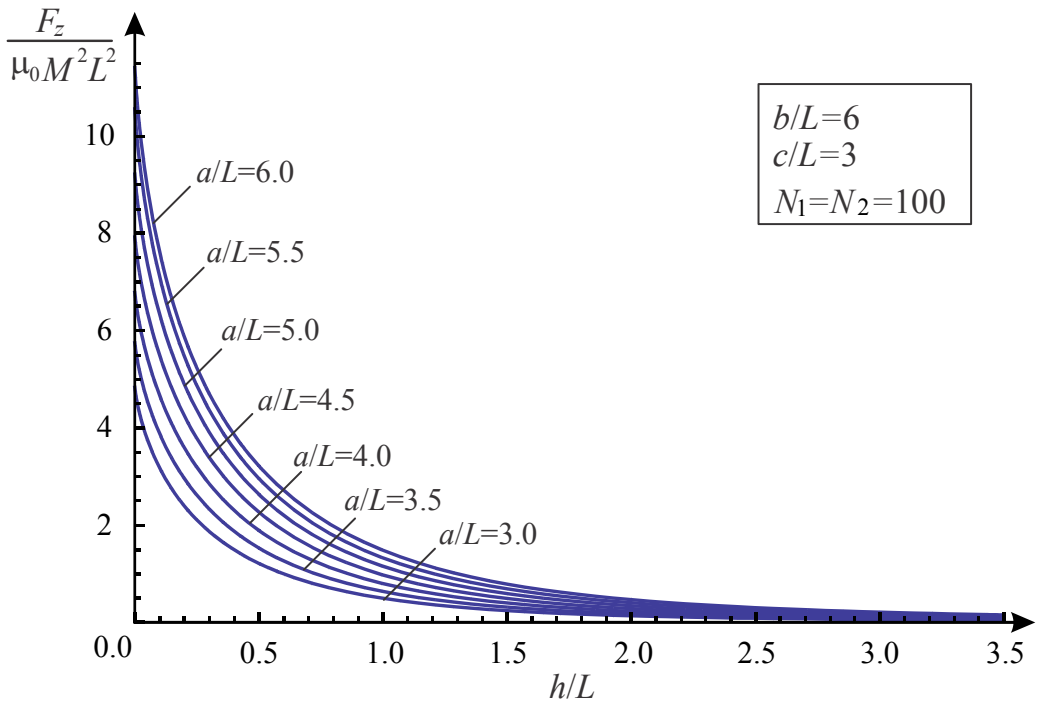
Uporedni rezultati za silu levitacije dobijeni primenom polunumeričkog pristupa i metoda konačnih elementa (FEM) dati su u Tabeli 6.4. Sila je određena za različita rastojanja između stalnih magneta, h/L, kada je intenzitet vekora gustine magnetnog momenta $M = 900\,\mathrm{kA/m}$ i parametri magneta: $a/L = 4,\ b/L = 5,\ c/L = 3,\ L = 1\,\mathrm{mm}$.

Tabela 6.4. *Uporedni rezultati za silu levitacije u funkciji rastojanja između magneta,* h/L .

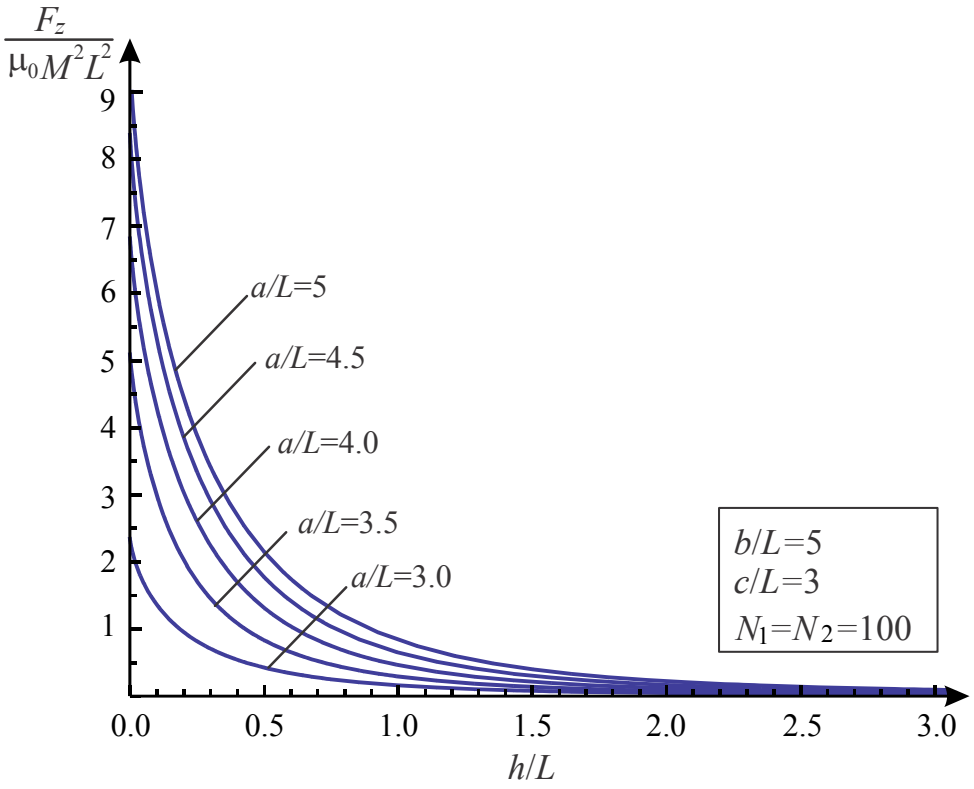
h / L	F_z [N]	F_z^{FEM} [N]
0.5	1.524470	1.522670
0.6	1.212510	1.210490
0.7	0.976784	0.974666
0.8	0.796102	0.793958
0.9	0.655880	0.653643
1.0	0.545837	0.543550
1.1	0.458588	0.456094
1.2	0.388749	0.386141
1.3	0.332342	0.329577
1.4	0.286396	0.283537
1.5	0.248668	0.245665

Normalizovana sila levitacije, $F_{z\,\mathrm{nor}} = F_z \big/ \mu_0 M^2 L^2$, u zavisnosti od normalizovanog rastojanja između magneta h/L, za parametre magneta: $b/L = 6,\ c/L = 3$ i $N_1 = N_2 = 100$, data je na slici 6.14, dok je na slici 6.15 prikazana zavisnost sile za parametre magneta $b/L = 5,\ c/L = 3$ i $N_1 = N_2 = 100$.

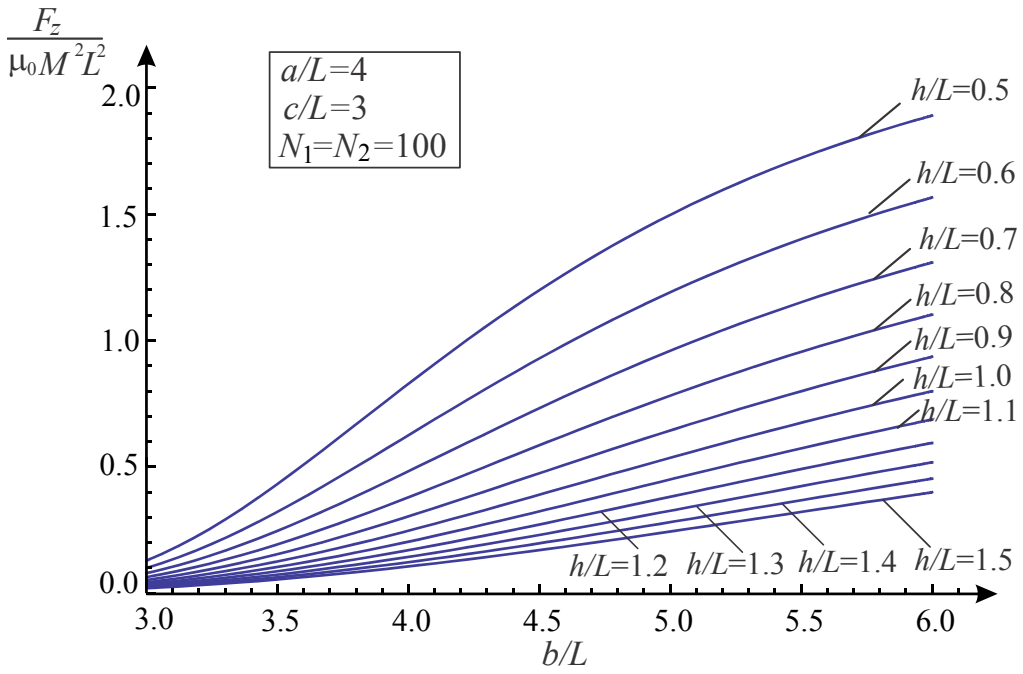
Na slikama 6.16 i 6.17 prikazana je magnetna sila u funkciji spoljašnjeg poluprečnika magneta b/L, za različita međusobna rastojanja, h/L, kada su parametri magneta: $a/L = 4,\ c/L = 3$, odnosno $a/L = 3,\ c/L = 2$, i broj segmenata $N_1 = N_2 = 100$.



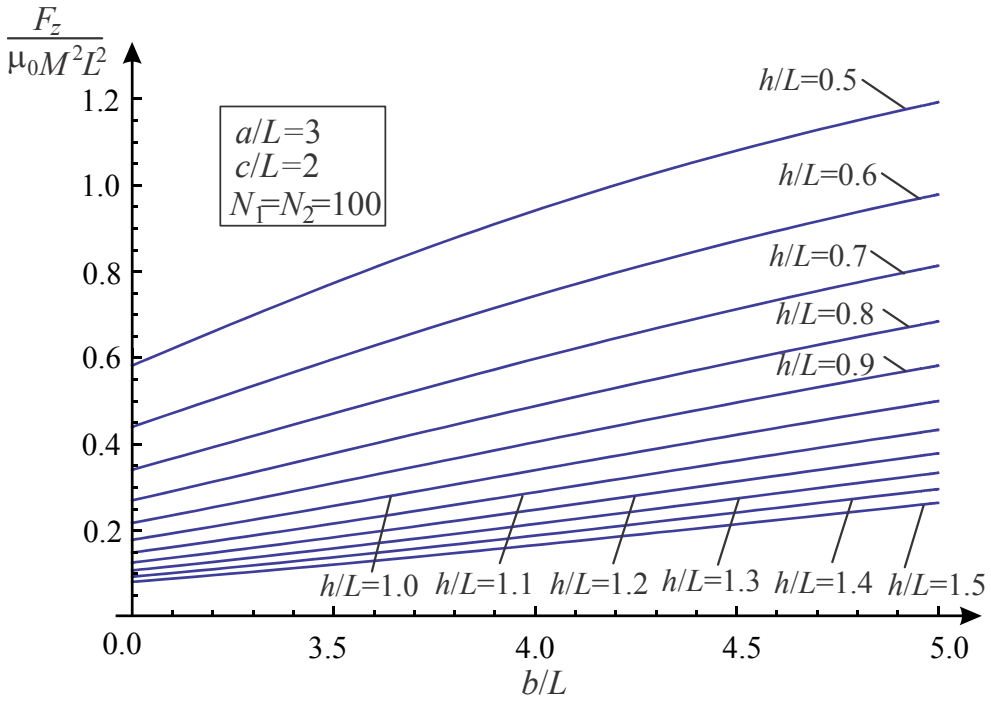
Slika 6.14. *Sila levitacije u funkciji rastojanja* h/L *za* $b/L=6, c/L=3$.



Slika 6.15. *Sila levitacije u funkciji rastojanja* h/L *za* $b/L=5, c/L=3$.



Slika 6.16. *Sila levitacije u funkciji* b/L *za* $a/L=4,\ c/L=3$.

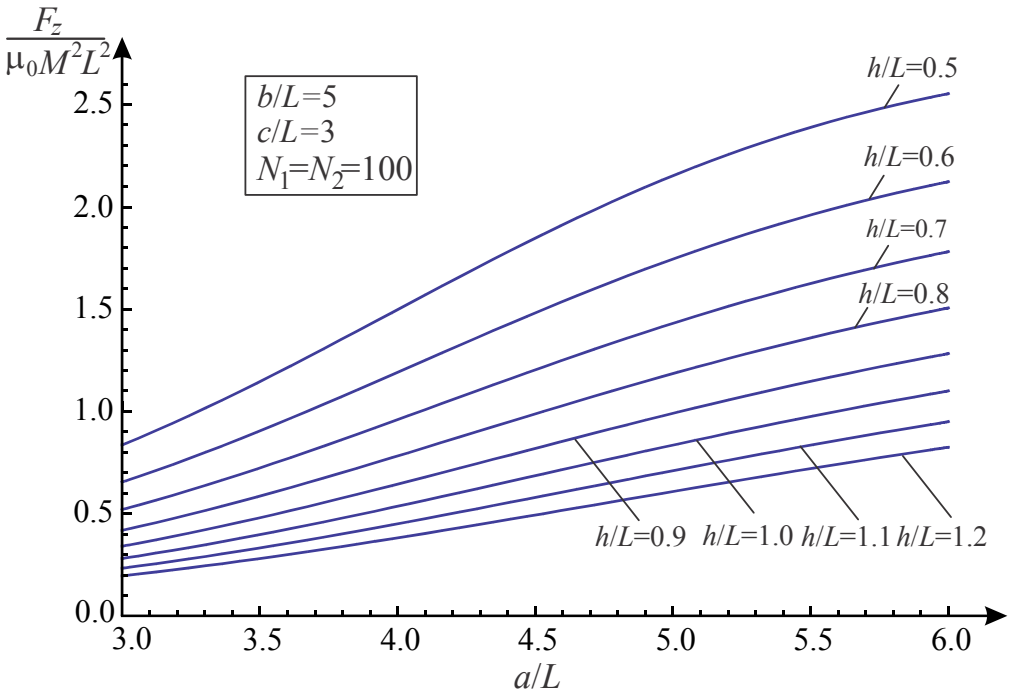


Slika 6.17. *Sila levitacije u funkciji* b/L *za* $a/L=3,\ c/L=2$.

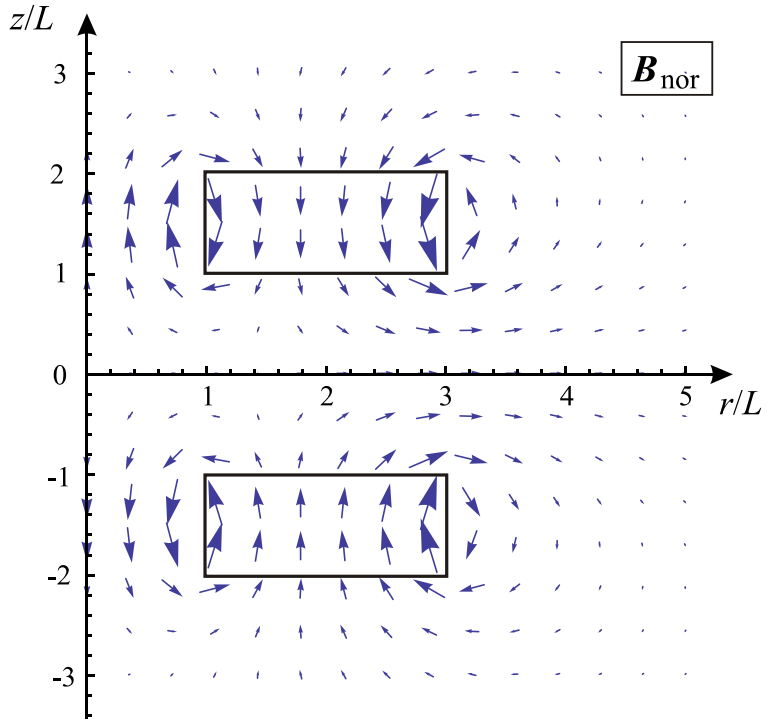
Zavisnost sile levitacije od poluprečnika a/L za različita rastojanja između magneta prikazana je na slici 6.18 za parametre $b/L=5,\ c/L=3$ i $N_1=N_2=100$.

U slučaju kada se izjednače poluprečnici a i b dobije se sistem magneta oblika prstena pravouganog poprečnog preseka. Za takav jedan slučaj, na slikama 6.19 i 6. 20, prikazane su

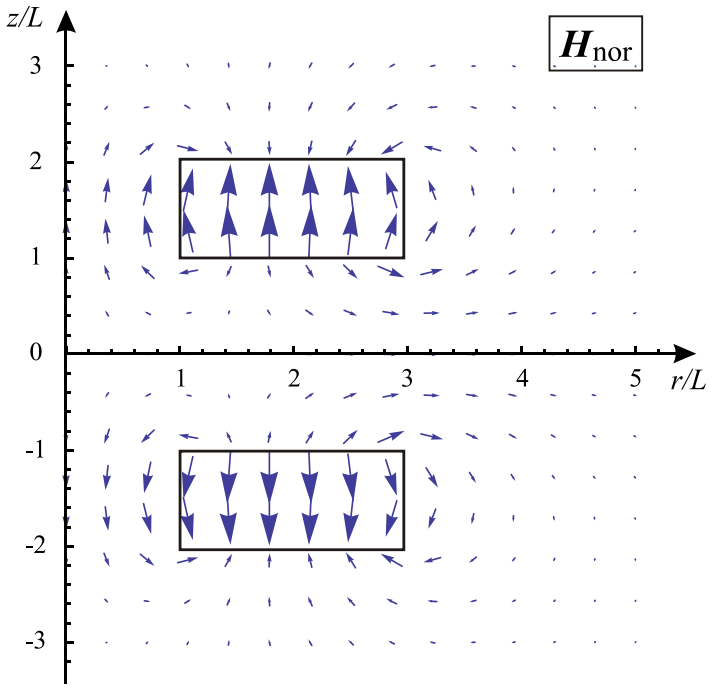
raspodele normalizovane magnetne indukcije, $\boldsymbol{B}_{\text{nor}} = \boldsymbol{B}/\mu_0 M$, i normalizovanog magnetnog polja, $\boldsymbol{H}_{\text{nor}} = \boldsymbol{H}/M$, za parametre magneta: $a/L = b/L = 3$, $c/L = 1$ i $h/L = 1$.



Slika 6.18. *Sila levitacije u funkciji* a/L.



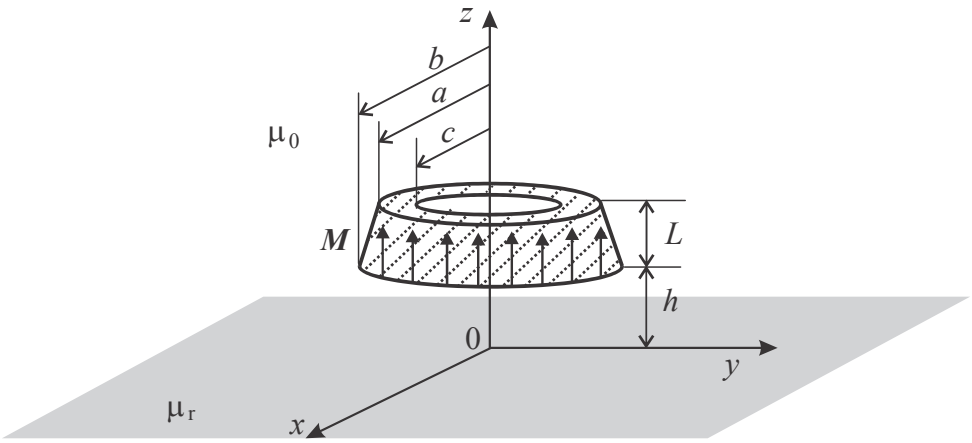
Slika 6.19. *Raspodela normalizovanog vektora magnetne indukcije.*



Slika 6.20. *Raspodela normalizovanog vektora magnetnog polja.*

6.3. Stalni magnet oblika torusa trapezoidnog poprečnog preseka iznad neograničene magnetne ravni

Sledeći analizirani sistem čini stalni magnet oblika prstena trapezoidnog poprečnog preseka postavljen iznad neograničene linearne magnetne ravni, relativne magnetne permeabilnosti μ_r, (slika 6.21).



Slika 6.21. *Stalni magnet iznad neograničene linarne magnetne ravni.*

Za određivanje magnetne sile između stalnog magneta i beskonačne magnetne ravni, korišćena je teorema lika u ravnom ogledalu. Uticaj beskonačne magnetne ravni može se zameniti likom stalnog magneta postavljenim u vakuumu ili vazduhu. Ekivalentan model je prikazan na slici 6.22, pri čemu je magnetizacija stalnog magneta

$$\boldsymbol{M}_1 = M\hat{z}\,, \tag{6.55}$$

a magnetizacija lika

$$\boldsymbol{M}_2 = \alpha M\hat{z}\,, \tag{6.56}$$

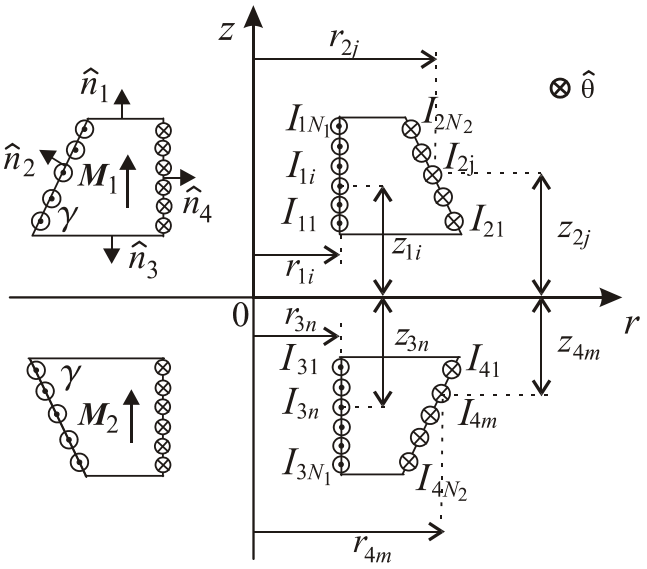
gde je

$$\alpha = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}\,. \tag{6.57}$$

S obzirom da je već pokazano da se primenom metode zasnovane na Amperovim mikroskopskim strujama, stalni magnet oblika prstena može zameniti sistemom strujnih kružnih kontura, i njegov lik se može diskretizovati i svesti na sistem strujnih kružnih kontura, slika 6.22. Prema tome, u cilju određivanja privlačne magnetne sile između stalnog magneta i beskonačne magnetne ravni, ($\boldsymbol{F} = F_z\hat{z},\ F_z < 0$) primenjuje se sličan postupak kao u prethodnom primeru. Konačni oblik sile je

$$F_z = \sum_{i=1}^{N_1}\Delta F_{zi} + \sum_{j=1}^{N_2}\Delta F_{zj} = \alpha\left(F_{z32} + F_{z41} - F_{z31} - F_{z42}\right), \tag{6.58}$$

gde su sabirci F_{z42}, F_{z32}, F_{z41}, F_{z31} isti kao u jednačinama (6.51), (6.52), (6.53) i (6.54).

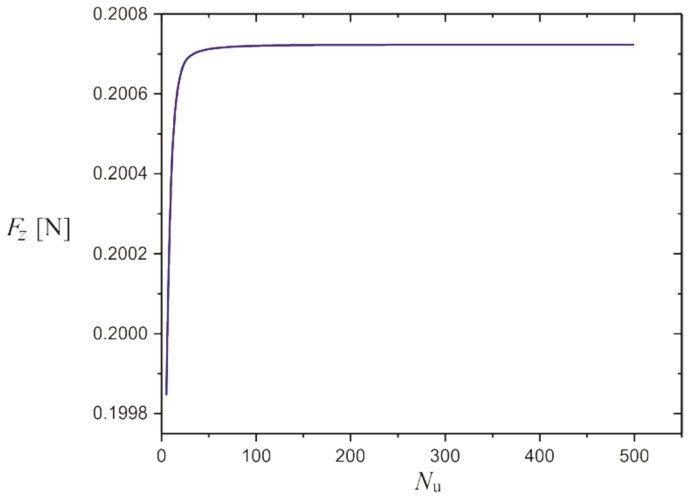


Slika 6.22. *Diskretizacioni model za sistem stalnog magneta oblika torusa i lineare magnetne ravni.*

Rezultati dobijeni za analizirani sistem prikazani su grafički, dok su uporedni rezultati primenjenog metoda i metoda konačnih elemenata (FEMM 4.2 software) dati tabelarno. Konvergencija rezultata za privlačnu sile data je u Tabeli 6.5 za parametre magneta $a/L=3, b/L=4, c/L=2,\ L=1\text{mm},\ M=900\text{kA/m}$ i relativnu magnetnu permeabilnost ravni $\mu_r=3$. Na osnovu prikazanih vrednosti u tabeli 6.5 i grafika prikazanog na slici 6.23, utvrđeno je da je, za postizanje zadovoljavajuće tačnosti, dovoljno uzeti po $N_u=N_1=N_2=100$ segmenata na unutrašnjem i na spoljašnjem omotaču magneta.

***Tabela 6.5**. Konvergencija rezultata.*

$N_1=N_2$	F_z[N]
5	-0.199846
10	-0.200504
20	-0.200669
30	-0.200699
50	-0.200715
100	-0.200721
200	-0.200723
500	-0.200723



***Slika 6.23.** Zavisnost intenziteta magnetne sile od broja segmenata.*

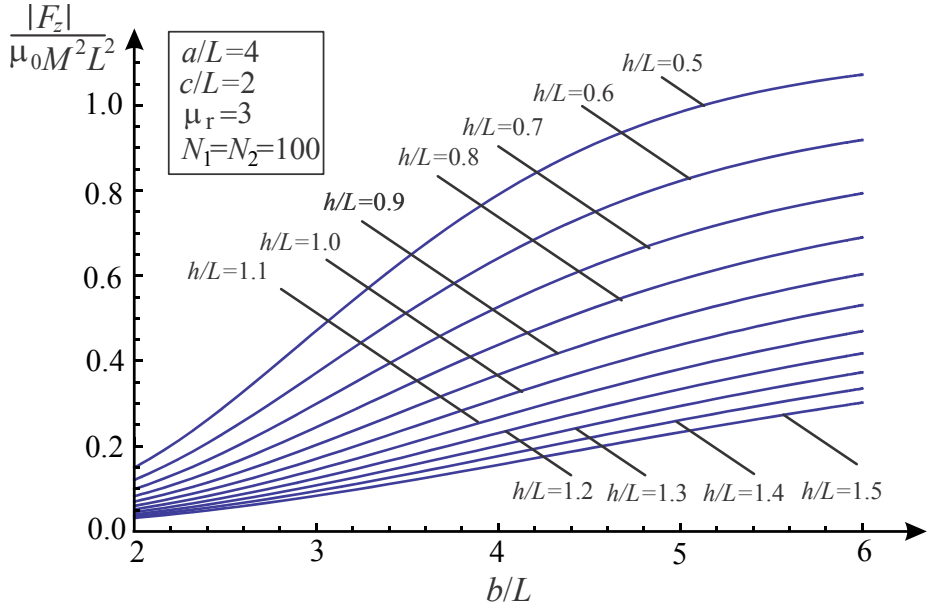
***Table 6.6.** Uporedni rezultati za privlačnu magnetnu silu u funkciji normalizovanog rastojanja h/L.*

h/L	F_z[N]	F_z^{FEM} [N]
0.5	-0.549755	-0.550230
0.6	-0.437758	-0.438152
0.7	-0.353520	-0.353875
0.8	-0.289242	-0.289550
0.9	-0.239567	-0.239870
1.0	-0.200721	-0.201039
1.1	-0.170000	-0.170331
1.2	-0.145441	-0.145767
1.3	-0.125599	-0.125960
1.4	-0.109402	-0.109783
1.5	-0.096049	-0.096491

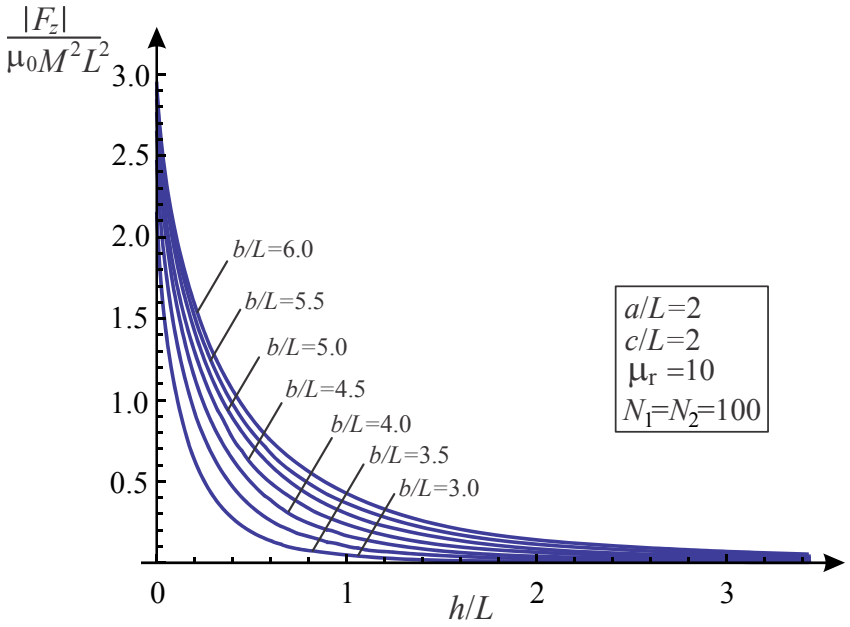
Uporedni rezultati za privlačnu silu između stalnog magneta oblika prstena i linearne magnetne ravni ($\mu_r=3$), dobijeni primenom polunumeričkog pristupa i metoda konačnih elemenata (FEM) u funkciji normalizovanog rastojanja između magneta i ravni h/L, prikazani

su u Tabeli 6.6. Parametri magneta su: $a/L=3,\ b/L=4, c/L=2,\ L=1\,\text{mm}$ i $M=900\,\text{kA/m}$.

Intenzitet privlačne magnetne sile u zavisnosti od spoljašnjeg poluprečnika donjeg bazisa magneta b/L, prikazan je na slici 6.24 za različita rastojanja između magneta i ravni. Parametri magneta i ravni korišćeni za ovaj proračun su: $a/L=4,\ c/L=2,\ \mu_r=3$ i $N_1=N_2=100$.



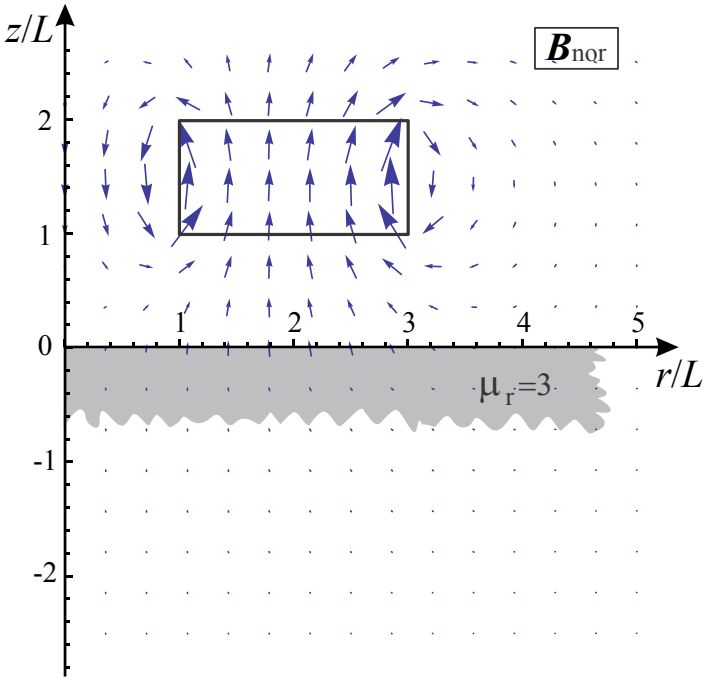
Slika 6.24. *Privlačna magnetna sila u funkciji* b/L.



Slika 6.25. *Privlačna magnetna sila u funkciji* h/L.

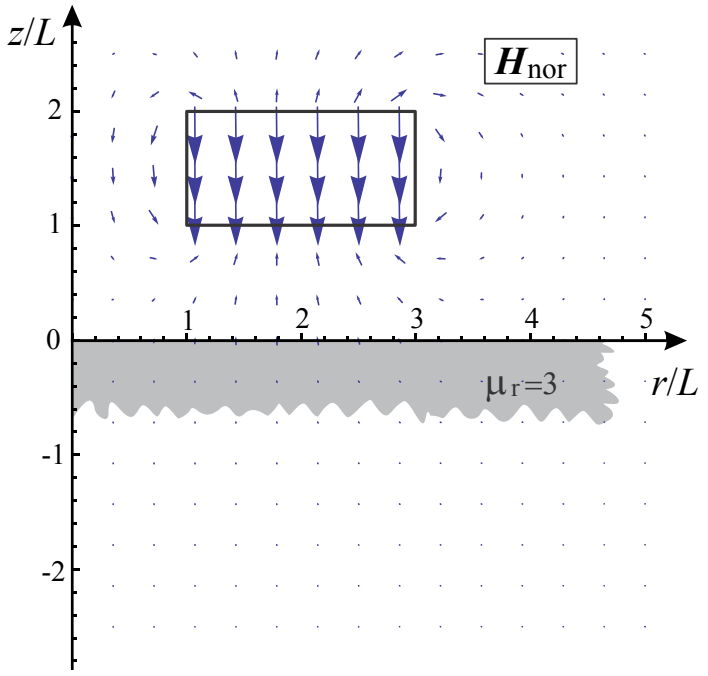
Na slici 6.25 je prikazana privlačna sila u funkciji rastojanja između magneta i ravni za različite dimenzije poluprečnika donjeg bazisa magneta, b/L. Ova zavisnost je data za

parametre magneta i ravni: $a/L=2$, $c/L=2$, $\mu_r=10$ i $N_1=N_2=100$.



Slika 6.26. *Raspodela normalizovanog vektora magnetne indukcije.*

Raspodele normalizovanog vektora magnetne indukcije, $\boldsymbol{B}_{\text{nor}}=\boldsymbol{B}/\mu_0 M$, i normalizovanog vektora magnetnog polja, $\boldsymbol{H}_{\text{nor}}=\boldsymbol{H}/M$, za parametre magneta: $a/L=b/L=3$, $c/L=1$, $h/L=1$, i relativnu magnetnu permeablinost ravni $\mu_r=3$, prikazane su na slikama 6.26 i 6.27.

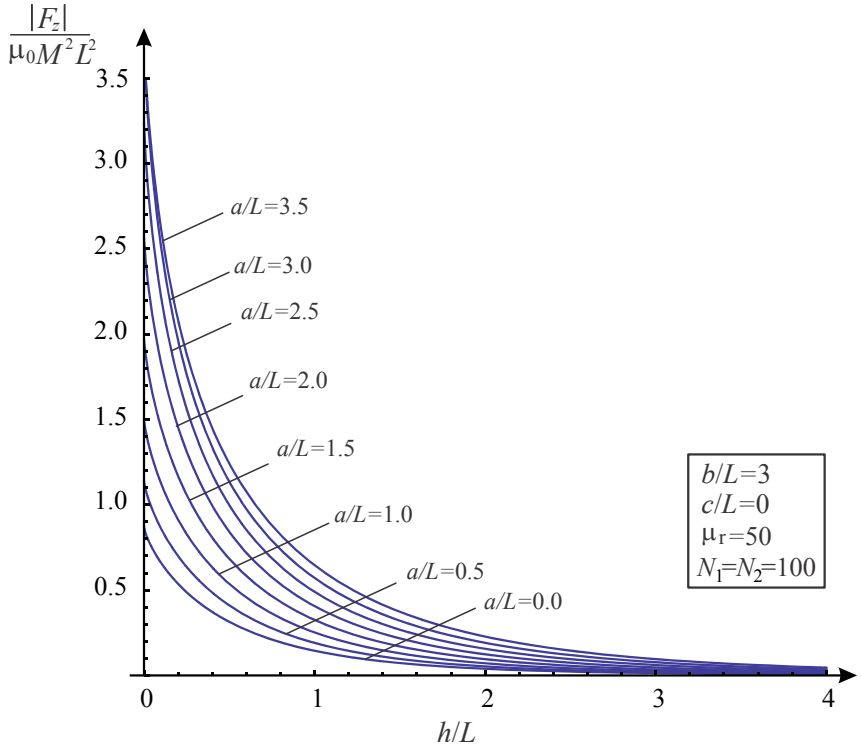


Slika 6.27. *Raspodela normalizovanog vektora magnetnog polja.*

Rezultati polunumeričkog pristupa su upoređeni sa rezultatima metode konačnih elemenata za slučaj kada je unutrašnji poluprečnik prstena jednak nuli, $c = 0$. Tada se sistem svodi na stalni magnet oblika zarubljene kupe postavljen iznad beskonačne ravni. Privlačna sila je izračunata za različita rastojanja između magneta i ravni h/L, za parametre $a/L = 2, b/L = 3,\ \ L = 1\,\text{mm}$, $M = 900\,\text{kA/m}$ i $\mu_r = 5$, i prikazana je u Tabeli 6.7.

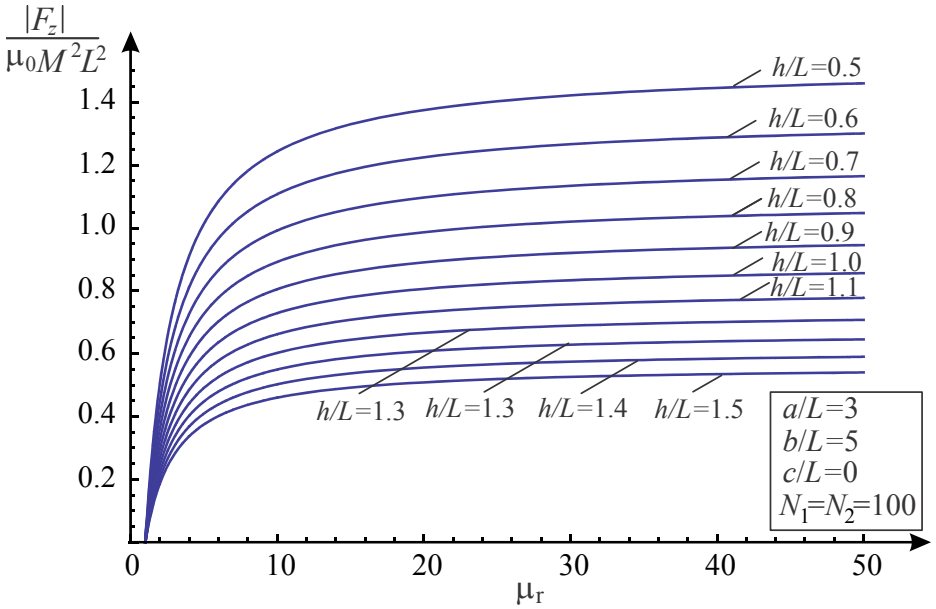
Tabela 6.7. *Uporedni rezultati za privlačnu magnetnu silu u funkciji rastojanja* h/L *(slučaj kada je* $c = 0$*).*

h/L	F_z[N]	F_z^{FEM} [N]
0.5	-0.594577	-0.594806
0.6	-0.507554	-0.507714
0.7	-0.436473	-0.436633
0.8	-0.377604	-0.377764
0.9	-0.328323	-0.328465
1.0	-0.286712	-0.286872
1.1	-0.251332	-0.251489
1.2	-0.221071	-0.221249
1.3	-0.195059	-0.195243
1.4	-0.172603	-0.172804
1.5	-0.153142	-0.153351

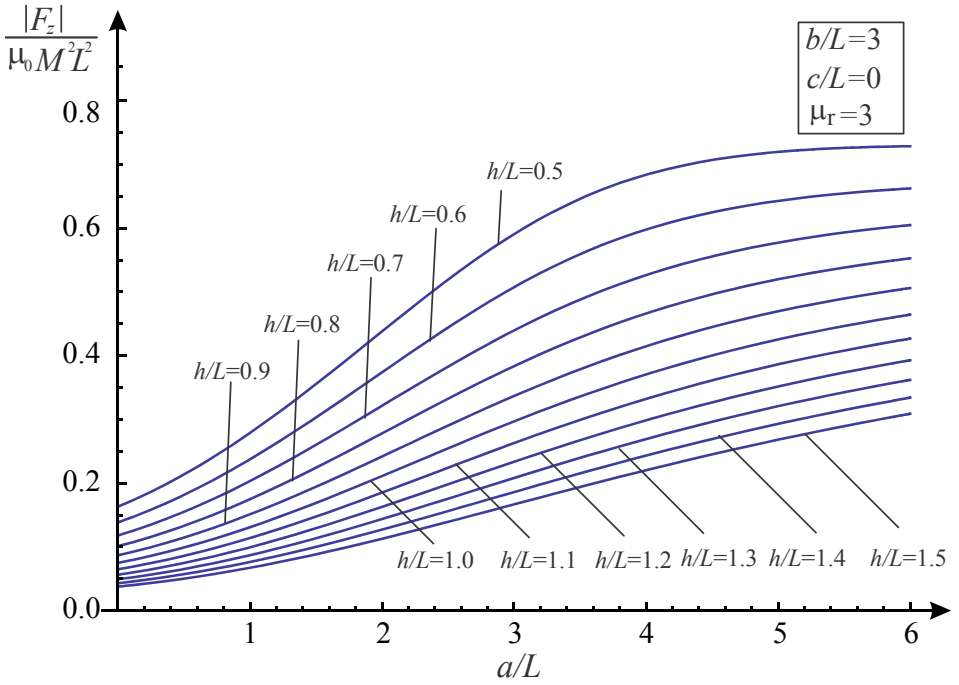


Slika 6.28. *Privlačna magnetna sila u funkciji* h/L *u slučaju kada je* $c = 0$.

Privlačna sila u funkciji rastojanja između magneta i ravni, h/L, za parametre: $b/L=3, c/L=0, \mu_r=50$ i $N_1=100$, prikazana je na slici 6.28. Zavisnost magnetne sile od relativne magnetne permeabilnosti ravni (μ_r), za parametre magneta: $a/L=3, b/L=5, c/L=0$, prikazana je na slici 6.29. Zavisnost sile je data za različita rastojanja između magneta i ravni.

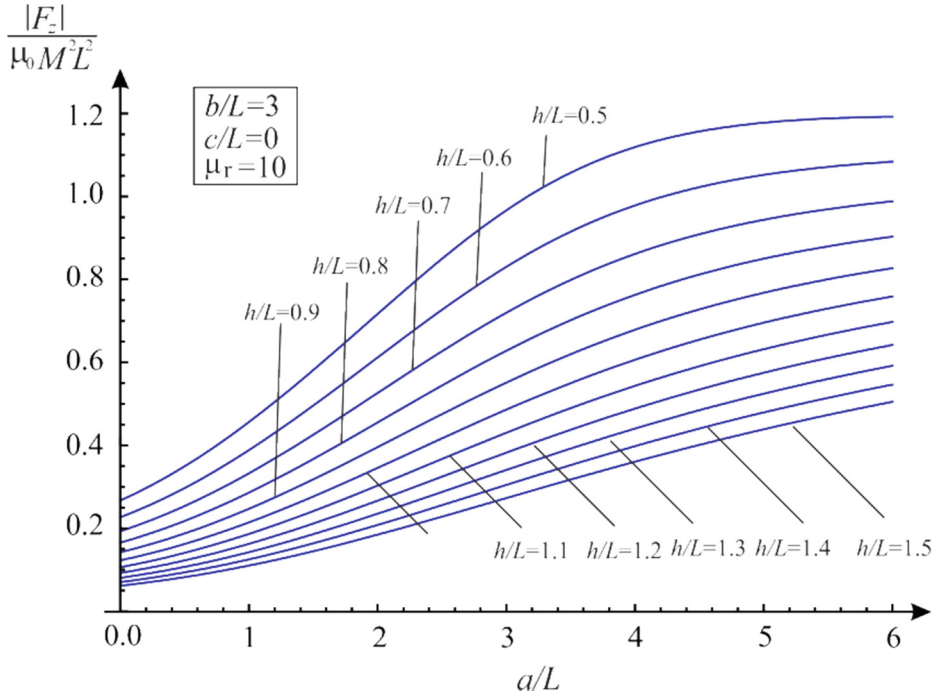


Slika 6.29. *Privlačna sila u funkciji relativne magnetne permeabilnosti ravni,* μ_r.

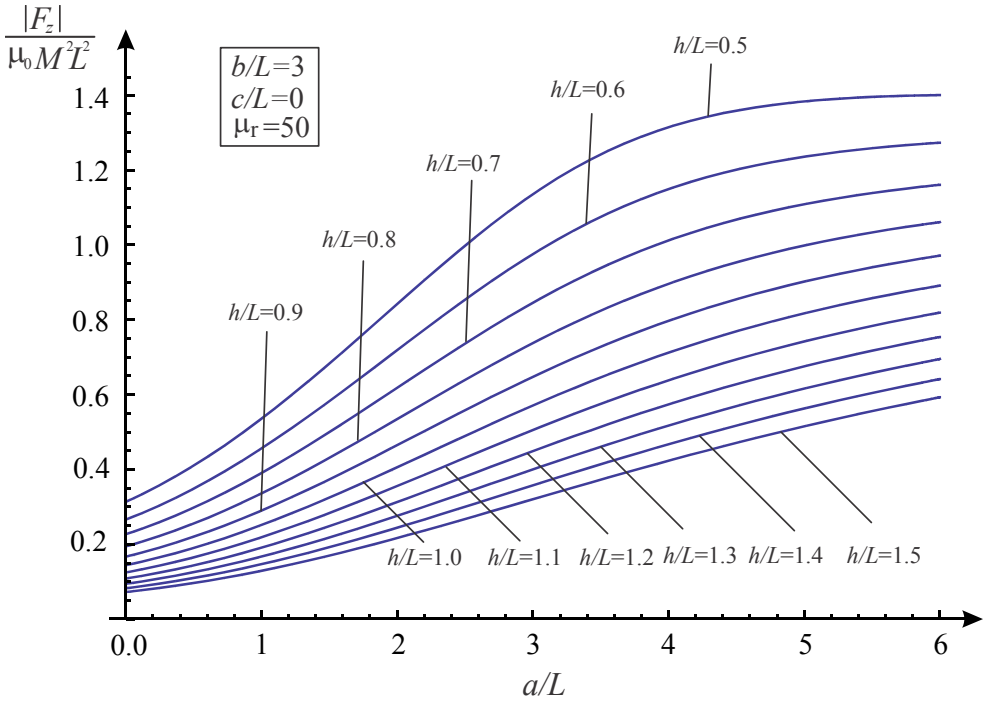


Slika 6.30. *Magnetna sila u funkciji poluprečnika* a/L *za magnetnu permeabilnost ravni* $\mu_r=3$.

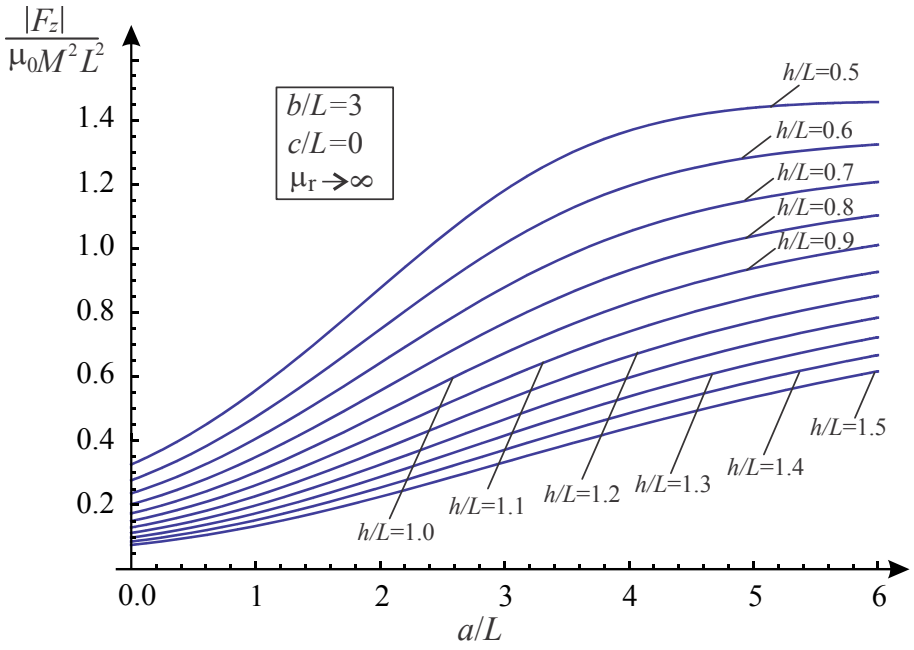
Magnetna sila u funkciji poluprečnika a/L, pri različitim rastojanjima između magneta i ravni, prikazana je na slikama od 6.30 do 6.33 za parametre magneta $b/L=3, c/L=0$ i magnetne permeabilnosti ravni: $\mu_r=3$, $\mu_r=10$, $\mu_r=50$, $\mu_r\to\infty$, respektivno.



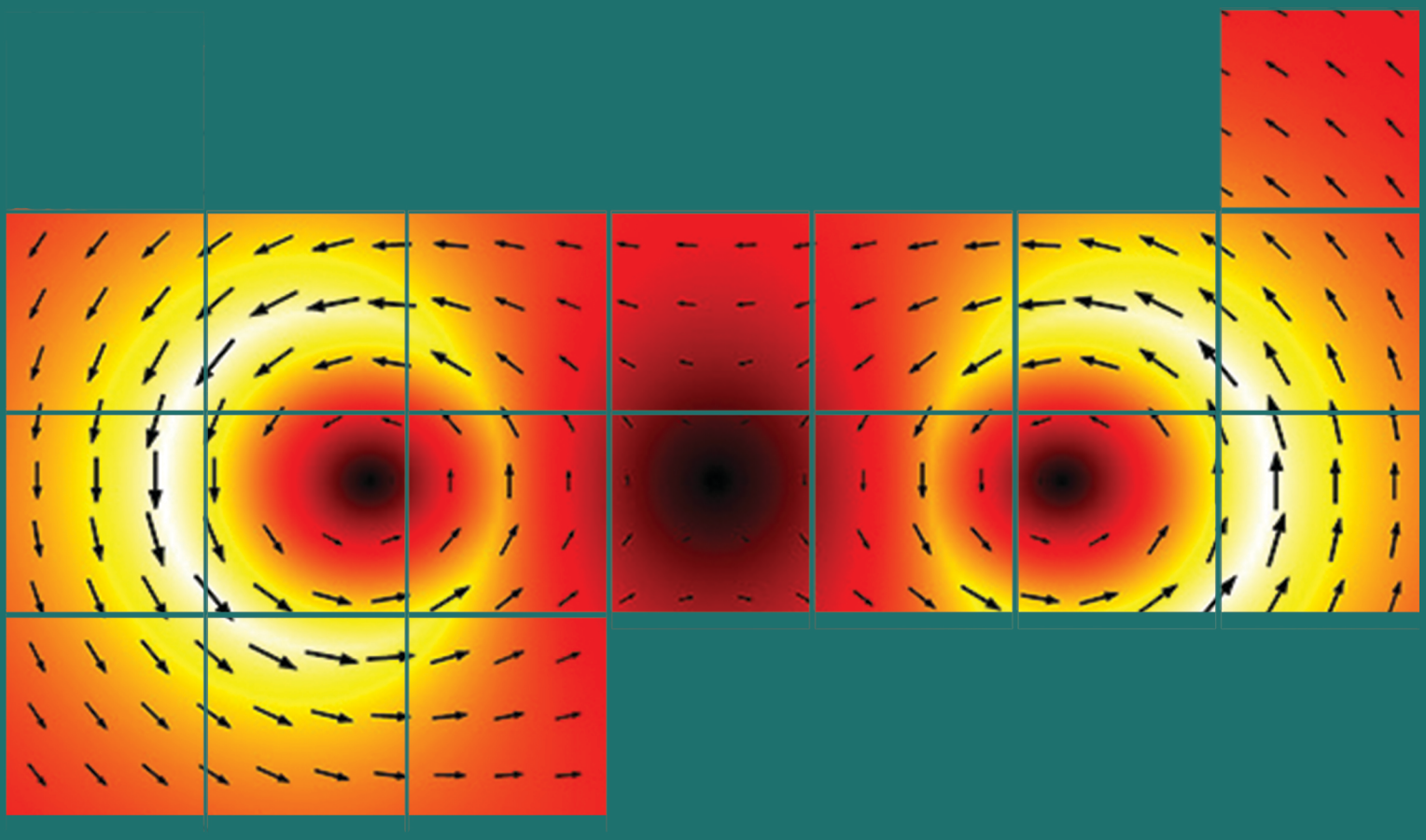
Slika 6.31. *Magnetna sila u funkciji poluprečnika a/L za magnetnu permeabilnost ravni $\mu_r=10$.*



Slika 6.32. *Magnetna sila u funkciji poluprečnika a/L za magnetnu permeabilnost ravni $\mu_r=50$.*



Slika 6.33. *Magnetna sila u funkciji poluprečnika* a/L *za magnetnu permeabilnost ravni* $\mu_r \to \infty$.

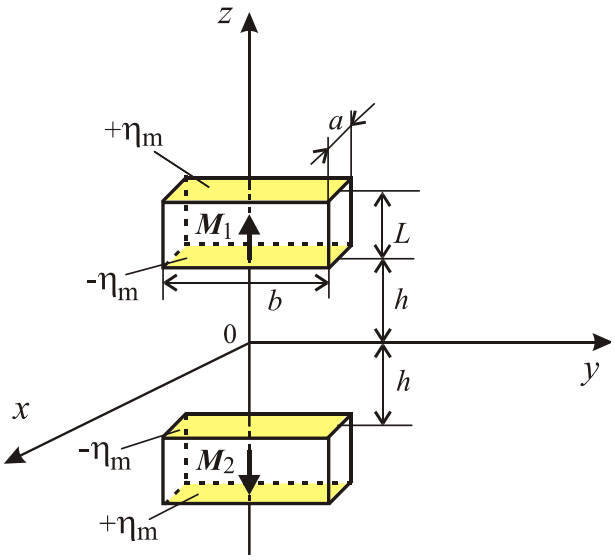


7. Primeri modelovanja sistema stalnih magneta primenom raspodele fiktivnih magnetnih opterećenja

7. Primeri modelovanja sistema stalnih magneta primenom raspodele fiktivnih magnetnih opterećenja

7.1. Sistem blok magneta

Suština modelovanja magneta primenom polunumeričkog metoda zasnovanog na raspodeli fiktivnih magnetnih opterećenja objašnjena je u poglavlju 5.2.2. Postupak određivanja polja, odnosno sile, biće najpre prikazan na jednostavnom primeru sistema dva stalna magneta paralelopipednog oblika (blok magneti) koji su homogeno namagnetisani u aksijalnom pravcu, suprotnog smera, (slika 7.1) [150].



Slika 7.1. *Sistem blok magneta.*

Cilj ovog pristupa je da se odredi magnetna indukcija koju stvara donji stalni magnet u bilo kojoj tački, a zatim sila na gornji magnet. S obzirom da su stalni magneti homogeno namagnetisani u aksijalnom pravcu, suprotnog smera a istog intenziteta, vektori gustine magnetnog momenta za gornji, odnosno donji magnet zadovoljavaju relacije:

$$\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{M} = M\hat{z} \tag{7.1}$$

$$\boldsymbol{M}_2 = -\boldsymbol{M} = M(-\hat{z}) \tag{7.2}$$

Magnetno polje koje potiče od namagnetisanog tela je ekvivalentno polju koje potiče od fiktivnih magnetnih opterećenja zapreminske gustine

$$\rho_m = -\operatorname{div} \boldsymbol{M} \quad \text{i} \tag{7.3}$$

površinske gustine na površinama diskontinuiteta

$$\eta_{\mathrm{m}} = \hat{n} \cdot (\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}_0). \tag{7.4}$$

U posmatranom slučaju fiktivna magnetna opterećenja postoje samo na stranama koje su normalne na pravac vektora gustine magnetnog momenta, odnosno na donjem i gornjem bazisu oba magneta, dok na omotačima magneta i unutar njih magnetnih opterećenja nema. Kako se sistem magneta nalazi u vazduhu $(\mu \approx \mu_0)$, važi da je $\boldsymbol{M}_0 = 0$, tako da su površinske gustine naelektrisanja koja postoje na bazisima oba magnta intenziteta $\eta_{\mathrm{m}} = \hat{n} \cdot \boldsymbol{M}$, a znaka kao što je prikazano na slici 7.1.

Magnetni scalar potencijal koji stvara donji blok magnet je

$$\varphi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{ext}} = \sum_{k=1}^{N_a N_b} \frac{Q_{\mathrm{k}}^{\mathrm{m}}}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 + (z+h+L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 + (z+h)^2}} \right). \tag{7.5}$$

Na osnovu poznate površinske gustine opterećenja, magnetno opterećenje se može odrediti i iznosi

$$Q_{\mathrm{k}}^{\mathrm{m}} = M \frac{ab}{N_{\mathrm{u}}}, \tag{7.6}$$

gde je $N_{\mathrm{u}} = N_a N_b$ ukupan broj segmenata svakog od bazisa magneta, a N_a i N_b su brojevi segmenata bazisa duž stranice a i b.

Na osnovu poznate funkcije magnetnog scalar potencijala vektor magnetnog polja se može odrediti iz relacije

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{ext}} = -\mathrm{grad}\left(\varphi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{ext}}\right), \tag{7.7}$$

a vektor magnetne indukcije

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{ext}} = \mu_0 \boldsymbol{H}^{\mathrm{ext}}. \tag{7.8}$$

Konačno, kada je određen vektor magnete indukcije koju stvara donji magnet, magnetna sila koja deluje između magneta je

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{N_a N_b} Q_{\mathrm{i}}^{\mathrm{m}} \boldsymbol{B}^{\mathrm{ext}}. \tag{7.9}$$

S obzirom da su magneti identičnog oblika i istog intenziteta vektora gustine magnetnog momenta, magnetna opterećenja na bazisima magneta će po intenzitetu biti ista

$$Q_{\mathrm{i}}^{\mathrm{m}} = Q_{\mathrm{k}}^{\mathrm{m}}. \tag{7.10}$$

Na donjem bazisu donjeg magneta i gornjem bazisu gornjeg magneta magnetna opterećenja su pozitivna, dok su na gornjem bazisu donjeg magneta i donjem bazisu gornjeg magneta negativna.

Smenom izraza (7.6) i (7.8) u jednačinu (7.9) dobija se konačan izraz za silu

$$\boldsymbol{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z}\,, \tag{7.11}$$

čije su komponente

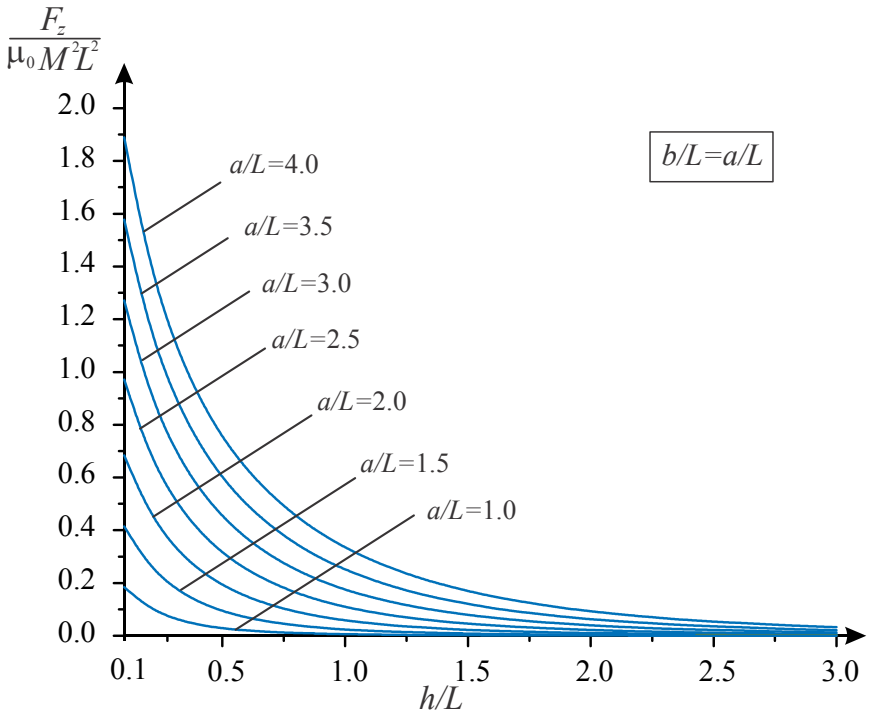
$$F_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{Mab}{N_aN_b}\right)^2 \times \sum_{i=1}^{N_aN_b}\sum_{k=1}^{N_aN_b}\left(\frac{x_i - x_k}{\left((x_i-x_k)^2 + (y_i-y_k)^2 + 4(h+L)^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \right.$$
$$\left. - \frac{2(x_i - x_k)}{\left((x_i-x_k)^2 + (y_i-y_k)^2 + (2h+L)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x_i - x_k}{\left((x_i-x_k)^2 + (y_i-y_k)^2 + 4h^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{7.12}$$

$$F_y = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{Mab}{N_aN_b}\right)^2 \times \sum_{i=1}^{N_aN_b}\sum_{k=1}^{N_aN_b}\left(\frac{y_i - y_k}{\left((x_i-x_k)^2 + (y_i-y_k)^2 + 4(h+L)^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \right.$$
$$\left. - \frac{2(y_i - y_k)}{\left((x_i-x_k)^2 + (y_i-y_k)^2 + (2h+L)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y_i - y_k}{\left((x_i-x_k)^2 + (y_i-y_k)^2 + 4h^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{7.13}$$

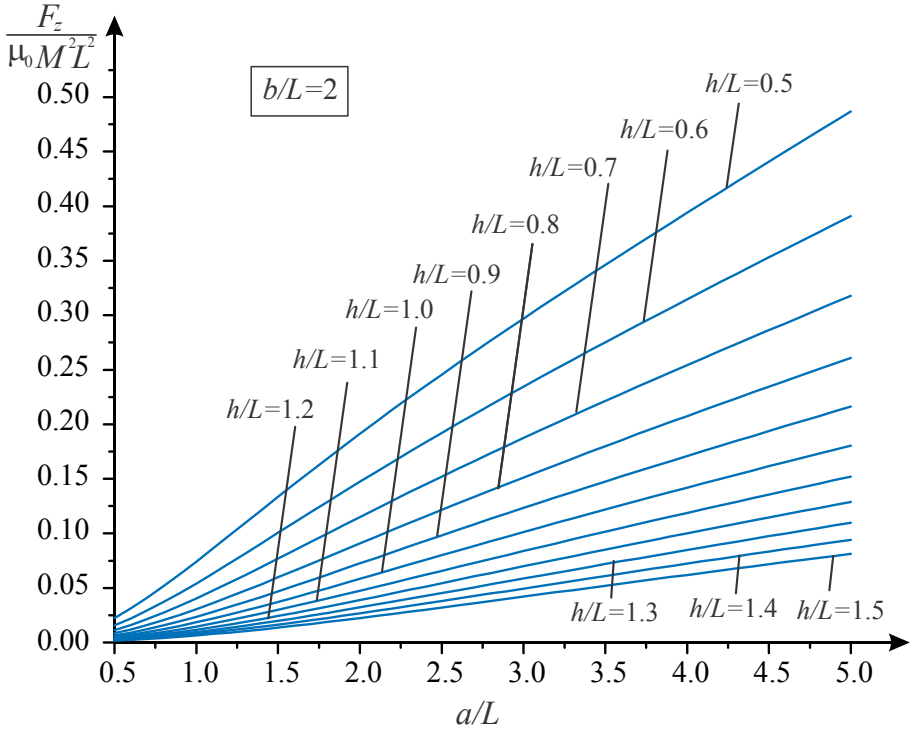
$$F_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{Mab}{N_aN_b}\right)^2 \times \sum_{i=1}^{N_aN_b}\sum_{k=1}^{N_aN_b}\left(\frac{2(h+L)}{\left((x_i-x_k)^2 + (y_i-y_k)^2 + 4(h+L)^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \right.$$
$$\left. - \frac{2(2h+L)}{\left((x_i-x_k)^2 + (y_i-y_k)^2 + (2h+L)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2h}{\left((x_i-x_k)^2 + (y_i-y_k)^2 + 4h^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right). \tag{7.14}$$

x i *y* komponente sile su jednake nuli i nemaju nikakvog uticaja na rezultujuću silu. Dakle, u slučaju posmatrane konfiguracije postoji samo *z* komponenta sile.

Na osnovu dobijenog izraza za silu jasno je da ona zavisi od geometrije magneta, njihovih magnetnih karakteristika kao i rastojanja između njih. Rezultujući izraz za silu dat je u zavisnosti od elementarnih funkcija tako da je program za proračun sile moguće veoma jednostavno napisati u bilo kom programskom jeziku.



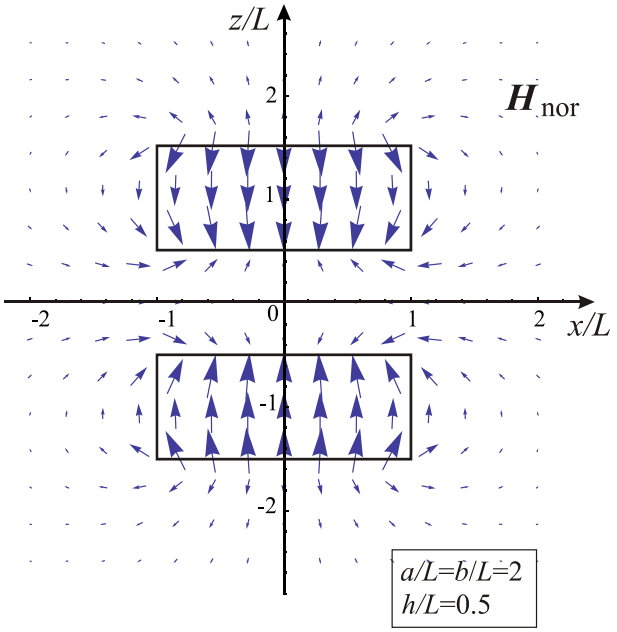
Slika 7.2. *Sila levitacije u funkciji rastojanja između magneta.*



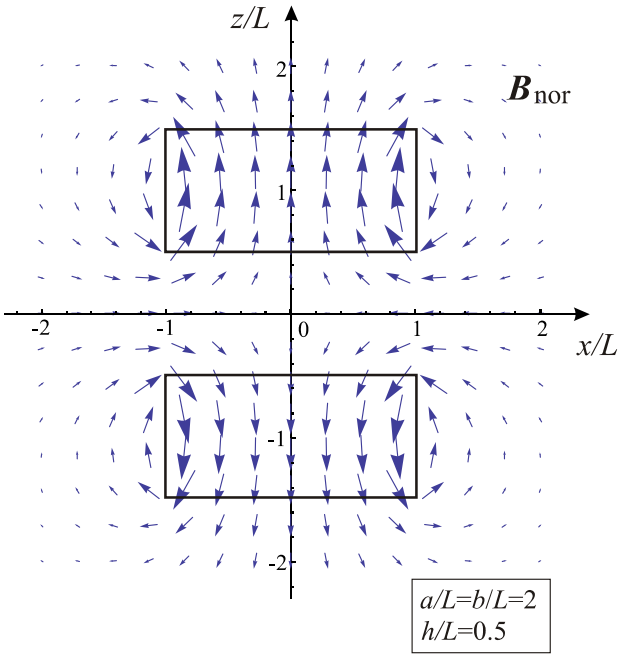
Slika 7.3. *Sila levitacije u funkciji* a/L .

Rezultati prikazanog pristupa dati su grafički za slučaj kada je broj elementa, tj. fiktivnih magnetnih opterećenja, $N_{\mathrm{u}} = 900$, za svaki bazis oba blok magneta. Intenzitet vektora gustine magnetnog momenta je $M = 900\,\mathrm{kA/m}$.

Na slici 7.2 prikazana je normalizovana magnetna sila u funkciji rastojanja između stalnih magnet za različite dimenzije bazisa magneta. Sila levitacije u zavisnosti od odnosa a/L, za različite vrednosti rastojanja između magneta, data je na slici 7.3. Raspodele normalizovanog vektora jačine magnetnog polja, $\boldsymbol{H}_{\text{nor}} = \boldsymbol{H}/M$, i vektora magnetne indukcije, $\boldsymbol{B}_{\text{nor}} = \boldsymbol{B}/\mu_0 M$, za sistem dva blok magneta, prikazane su na slikama 7.4 i 7.5, respektivno.



Slika 7.4. *Raspodela vektora jačine magnetnog polja.*



Slika 7.5. *Raspodela vektora magnetne indukcije.*

7.2. Blok magnet iznad neograničene magnetne ravni

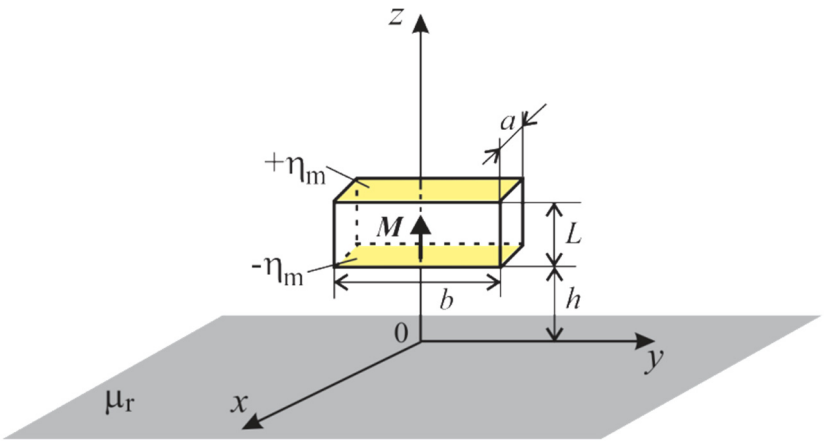
Posmatra se stalni magnet oblika paralelopipeda postavljen iznad neograničeno duge ravni koja je načinjena od linearnog magnetnog materijala relativne magnetne permeabilnsti μ_r, slika 7.6 [150]. Za određivanje privlačne sile između magneta i beskonačne ravni koristi se teorema lika u ravnom ogledalu. Na taj način se posmatran sistem može zameniti sistemom koji je prikazan na slici 7.1 (u prethodnom primeru) pri čemu će vektor gustine magnetnog momenta magneta biti

$$\boldsymbol{M}_1 = M\,\hat{z}\ , \tag{7.15}$$

a vektor gustine magnetnog momenta lika

$$\boldsymbol{M}_2 = \alpha M(-\hat{z}), \tag{7.16}$$

gde je $\alpha = \dfrac{1-\mu_r}{1+\mu_r}, (\alpha < 0)$.

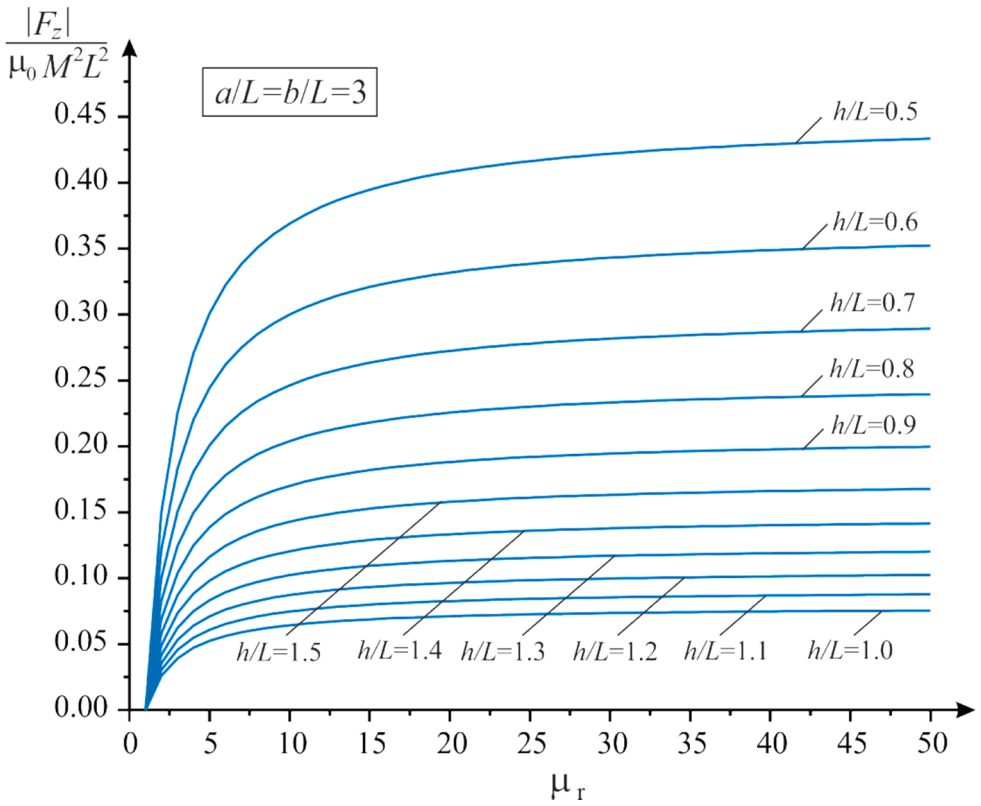


Slika 7.6. *Stalni magnet iznad neograničene magnetne ravni.*

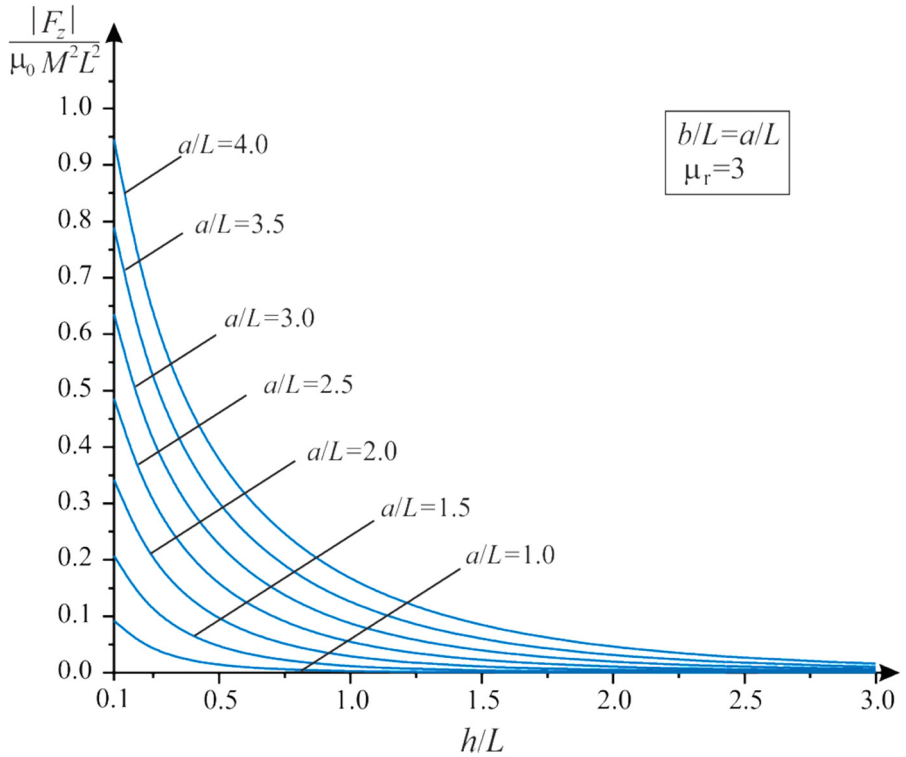
Dakle, intenzitet magnetne sile koja deluje između magneta i neograničene ravni može da se dobije množenjem izraza za silu iz prethodnog primera (7.14) sa α.

Normalizovana vrednost intenziteta privlačne magnetne sile koja deluje između stalnog magneta i magnetne ravni u zavisnosti od relativne magnetne permeabilnosti magnetne ravni, μ_r, za različita međusobna rastojanja h/L, prikazana je na slici 7.7. Na slici 7.8 je data zavisnost intenziteta magnetne sile od rastojanja između magneta i ravni za različite dimenzije magneta a/L.

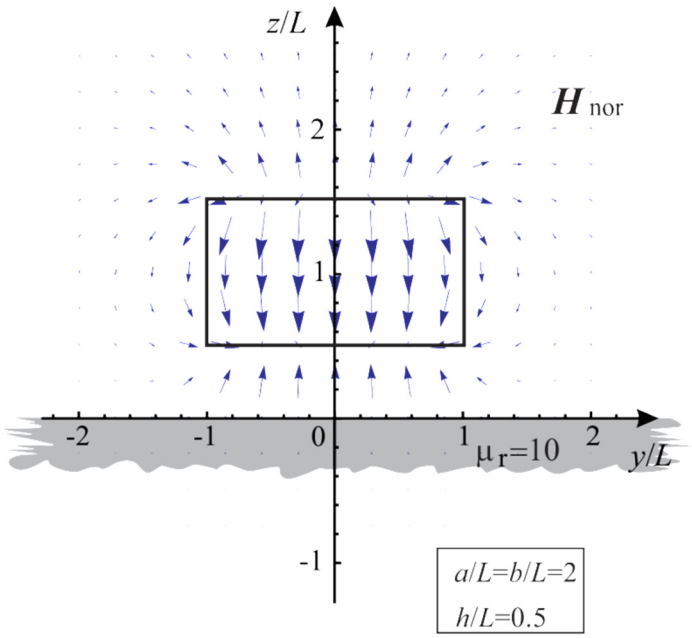
Raspodele normalizovanog vektora jačine magnetnog polja, $\boldsymbol{H}_{\text{nor}} = \boldsymbol{H}/M$, i normalizovanog vektora magnetne indukcije $\boldsymbol{B}_{\text{nor}} = \boldsymbol{B}/\mu_0 M$, u slučaju posmatrane konfiguracije, prikazane su na slikama 7.9 i 7.10, respektivno.



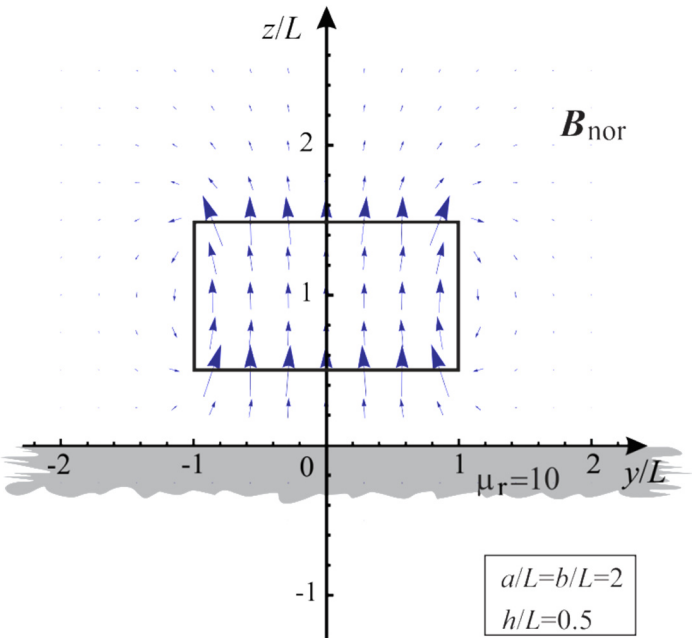
Slika 7.7. *Intenzitet privlačne magnetne sile u zavisnosti od relativne magnetne permeabilnosti magnetne ravni,* μ_r.



Slika 7.8. *Intenzitet magnetne sile u zavisnosti od rastojanja između magneta i ravni.*



Slika 7.9. *Raspodela normalizovanog magnetnog polja stalnog magneta i neograničene magnetne ravni.*



Slika 7.10. *Raspodela normalizovane magnetne indukcije stalnog magneta i neograničene magnetne ravni.*

Korišćenjem dobijenih grafika, magnetna sila, bilo ona odbojna (u slučaju dva blok magnet, poglavlje 7.1) ili privlačna (u slučaju blok magneta i magnetne ravni), može se odrediti za bilo koje vrednosti vektora gustine magnetnog momenta, dimenzije magneta, i rastojanja koje zadovoljavaju relacije prikazane na slikama 7.7 i 7.8.

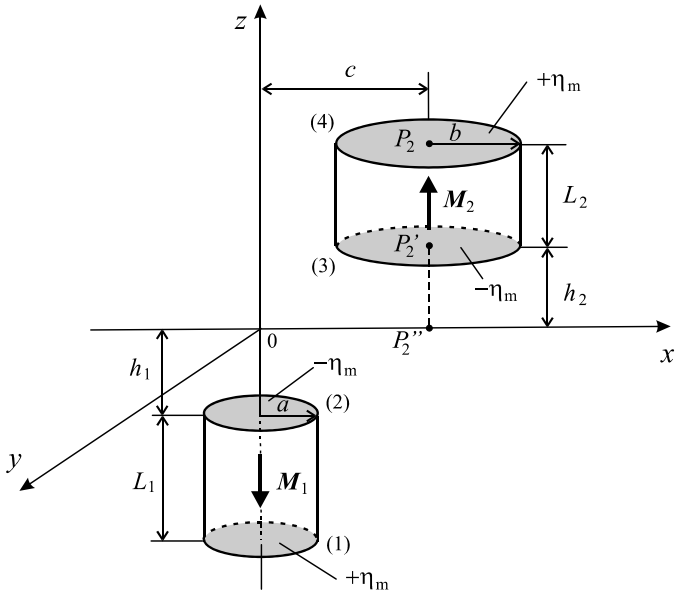
7.3. Sistem lateralno pomerenih stalnih magneta oblika cilindra

Posmatra se sistem dva stalna magneta oblika cilindra lateralno pomerena jedan u odnosu na drugi, načinjena od istog materijala i homogeno namagnetisana u aksijalnom pravcu, a suprotnog smera, (slika 7.11) [148]. Magnetna sila koja deluje između dva cilindrična magneta zavisi od magnetnih karakteristika materijala, odnosno vektora gustine magnetnog momenta magneta, rastojanja između njih 2*h*, lateralnog pomeraja *c*, i dimenzija magneta.

Kako granični uslovi za fiktivna magnetna opterećenja moraju biti zadovoljeni

$$\eta_{m1} = \hat{n} \cdot \boldsymbol{M}_1 \ , \ \eta_{m2} = \hat{n} \cdot \boldsymbol{M}_2 \ , \rho_{m1} = -\operatorname{div} \boldsymbol{M}_1 = 0 \ , \ \rho_{m2} = -\operatorname{div} \boldsymbol{M}_2 = 0 \, . \qquad (7.17)$$

Može se zaključiti da fiktivna magnetna opterećenja postoje samo na bazisima oba magneta, dok je zapreminska gustina magnetnih opterećenja jednaka nuli, s obzirom da su magneti homogeno namagnetisani u aksijalnom pravcu. $\hat{n}$ je jedinični vektor izlazne normale.
Najjednostavniji način za proračun magnetne sile koja deluje između cilindričnih magneta je primeniti pristup koji se zasniva se na raspodeli fiktivnih magnetnih opterećenja i diskretizacionoj tehnici. Svaki od bazisa magneta može da se diskretizuje, odnosno posmatra kao sistem kružnih kontura opterećenih fiktivnim magnetnim opterećenjem [153]. N_1 je broj diskretizacionih segmenata svakog bazisa donjeg magneta, dok je N_2 broj segmenata za svaki od bazisa gornjeg stalnog magneta.



Slika 7.11. *Sistem dva lateralno pomerena stalna magneta oblika cilindra.*

Diskretizacioni model za posmatrani sistem je prikazan na slici 7.12. Uzimajući u obzir geometriju magneta, poluprečnik svakog segmenta (kružne konture) bazisa donjeg stalnog magneta iznosi

$$r_n = \frac{2n-1}{2N_1} a, \;\; n = 1, 2, \ldots, N_1, \tag{7.18}$$

a magnetno opterećenje kojim je ravnomerno opterećena kružna kontura poluprečnika r_n je

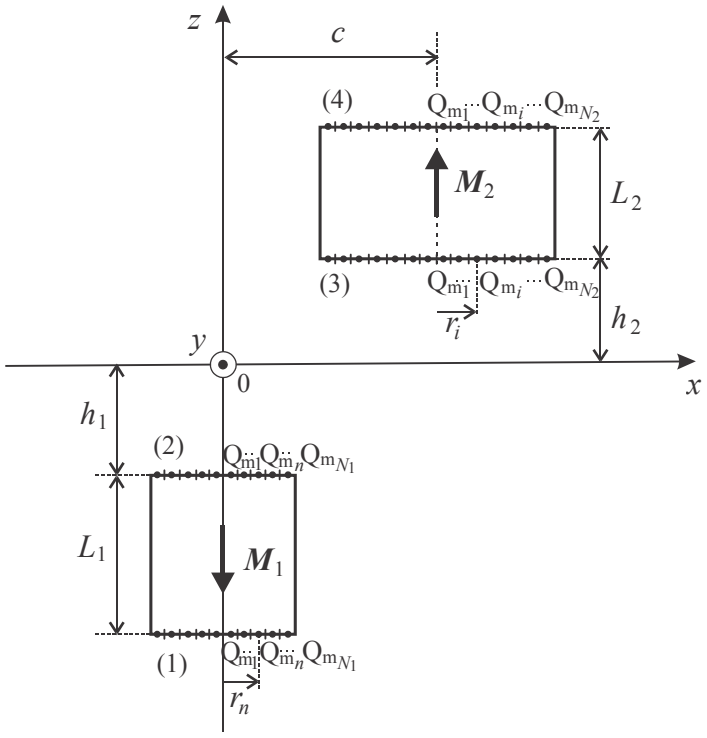
$$Q_{\mathrm{m}n} = M_1 2\pi r_n \frac{a}{N_1}, \; n = 1,2,..., N_1 . \tag{7.19}$$

Za bazise gornjeg magneta poluprečnici segmenata su

$$r_i = \frac{2i-1}{2N_2} b, \;\; i = 1, 2, \ldots, N_2, \tag{7.20}$$

dok magnetna opterećenja kojim su opterećene kružne konture iznose

$$Q_{\mathrm{m}i} = M_2 2\pi r_i \frac{b}{N_2}, \; i = 1,2,..., N_2 . \tag{7.21}$$



Slika 7.12. *Diskretizacioni model za sistem dva lateralno pomerena stalna magneta oblika cilindra.*

Koristeći izraz za silu koja deluje između dve lateralno pomerene opterećene kružne konture (jednačine (5.69), (5.70), (5.71)), može se odrediti konačni izraz za silu između dva cilindrična magneta. To se postiže sumiranjem udela svih segmenata (kružnih kontura) kojim su diskretizovani bazisi oba cilindrična magneta korišćenjem uniformne diskretozacione tehnike,

$$F_x = F_{x13} + F_{x14} + F_{x23} + F_{x24}, \tag{7.22}$$

$$F_y = F_{y_{13}} + F_{y_{14}} + F_{y_{23}} + F_{y_{24}}, \tag{7.23}$$

$$F_z = F_{z13} + F_{z14} + F_{z23} + F_{z24}. \tag{7.24}$$

Dakle, uzimajući u obzir da sila deluje između svih segmenata oba bazisa donjeg magneta i oba bazisa gornjeg cilindra, konačno se dobijaju komponete sile u obliku

$$\begin{aligned} F_x = \frac{\mu_0 M_1 M_2 \pi}{4 N_1 N_2} ab \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{i=1}^{N_2} r_n r_i \Big\{ & - F_{x\mathrm{p}}(r_n, r_i, 0, h_1 + L_1, c, h_2) + F_{x\mathrm{p}}(r_n, r_i, 0, h_1 + L_1, c, h_2 + L_2) + \\ & + F_{x\mathrm{p}}(r_n, r_i, 0, h_1, c, h_2) - F_{x\mathrm{p}}(r_n, r_i, 0, h_1, c, h_2 + L_2) \Big\}, \end{aligned} \tag{7.25}$$

$$\begin{aligned} F_y = \frac{\mu_0 M_1 M_2 \pi}{4 N_1 N_2} ab \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{i=1}^{N_2} r_n r_i \Big\{ & - F_{y\mathrm{p}}(r_n, r_i, 0, h_1 + L_1, c, h_2) + F_{y\mathrm{p}}(r_n, r_i, 0, h_1 + L_1, c, h_2 + L_2) + \\ & + F_{y\mathrm{p}}(r_n, r_i, 0, h_1, c, h_2) - F_{y\mathrm{p}}(r_n, r_i, 0, h_1, c, h_2 + L_2) \Big\} = 0, \end{aligned} \tag{7.26}$$

$$\begin{aligned} F_z = \frac{\mu_0 M_1 M_2 \pi}{4 N_1 N_2} ab \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{i=1}^{N_2} r_n r_i \Big\{ & - F_{z\mathrm{p}}(r_n, r_i, 0, h_1 + L_1, c, h_2) + F_{z\mathrm{p}}(r_n, r_i, 0, h_1 + L_1, c, h_2 + L_2) + \\ & + F_{z\mathrm{p}}(r_n, r_i, 0, h_1, c, h_2) - F_{z\mathrm{p}}(r_n, r_i, 0, h_1, c, h_2 + L_2) \Big\}, \end{aligned} \tag{7.27}$$

pri čemu su sile $F_{x\mathrm{p}}(a, b, c_1, h_1, c_2, h_2)$, $F_{y\mathrm{p}}(a, b, c_1, h_1, c_2, h_2)$ i $F_{z\mathrm{p}}(a, b, c_1, h_1, c_2, h_2)$ definisene izrazima (5.69), (5.70), (5.71).

U ovom slučaju se dobija da je y komponenta sile jednaka nuli, $F_y = 0$, dok x komponenta sile, F_x, predstavlja lateralnu silu, a z komponenta, F_z, aksijalnu silu koja deluje između dva cilindrična magneta.

Na osnovu izraza (7.25), (7.26) i (7.27), omogućena je veoma brza analiza magnetne sile u funkciji magnetnih karakteristika magneta, njihovih dimenzija i njihovog međusobnog položaja. Pretpostavka je da su stalni magneti oblika cilindra načinjena od istog materijala i

homogeno namagnetisana u aksijalnom pravcu, suprotnog smer, $M_1 = M_2 = M$. Konvergencija rezultata za normalizovanu silu levitacije, $F_z^{\text{nor}} = F_z \big/ \mu_0 M^2 L_2^2$, dobijena primenom polunumeričkog pristupa za parametre magneta $a/L_2 = 1.5, b/L_2 = 2, h_1/L_2 = 0.25, h_2/L_2 = 0.5,$ $c/L_2 = 0$ i $L_1/L_2 = 2$, prikazana je u Tabeli 7.1.

Table 7.1. *Konvergencija rezultata za sistem lateralno pomerenih cilindričnih magneta.*

N_{tot}	F_z^{nor}
10	0.777164
20	0.768245
30	0.766526
50	0.765665
100	0.765306
200	0.765216
300	0.765199
500	0.765191

Tabela 7.2. *Uporedni rezultati za silu levitacije u zavisnosti od* L_1/L_2 *i* b/L_2.

		F_z^{nor}	
L_1/L_2	b/L_2	Predloženi metod	FEM
1.0	1	0.141346	0.141247
	2	0.612050	0.611834
	3	1.181765	1.181352
	4	1.048618	1.047927
	5	0.665396	0.664395
	6	0.408481	0.406808
1.5	1	0.193370	0.193258
	2	0.807096	0.806795
	3	1.524023	1.523290
	4	1.413005	1.412038
	5	0.954951	0.953698
	6	0.614760	0.612824
2.0	1	0.233500	0.233402
	2	0.951773	0.951456
	3	1.775868	1.774853
	4	1.699237	1.698163
	5	1.205462	1.203762
	6	0.808468	0.805752

Kako bi vreme proračuna bilo što kraće, a pritom se dobio rezultat sa zadovoljavajućom tačnošću, ukupan broj segmenata je ograničen na $N_{\text{tot}} = N_1 + N_2 = 200$.

Uporedni rezultati za silu levitacije, $F_z^{\text{nor}} = F_z \big/ \mu_0 M^2 L_2^2$, koja deluje između dva cilindrična magneta (za slučaj $c = 0$), prikazani su u Tabeli 7.2. Rezultati polunumeričkog pristupa su upoređeni sa metodom konačnih elemenata primenom Femm softvera, pri čemu je normalizovana sila data u funkciji odnosa L_1/L_2 i b/L_2, za parametre magneta: $a/L_2 = 3$, $h_1/L_2 = 0.5$ i $h_2/L_2 = 0.5$.

Zavisnost sile levitacije od odnosa h_2/L_2 i b/L_2, prikazana je u Tabeli 7.3 za parametre magneta: $a/L_2 = 3$, $c = 0$, $h_1/L_2 = 0.25$ i $L_1/L_2 = 2$.

Komponente vektora magnetne sile (za slučaj kada je $c \neq 0$), $F_x^{\text{nor}} = F_x \big/ \mu_0 M^2 L_2^2$ i $F_z^{\text{nor}} = F_z \big/ \mu_0 M^2 L_2^2$, u zavisnosti od L_1/L_2 i b/L_2 date su u Tabeli 7.4 za parametre magneta: $a/L_2 = 3$, $h_1/L_2 = 0.5$, $h_2/L_2 = 0.5$ i $c/L_2 = 1$.

Tabela 7.3. *Uporedni rezultati za silu levitacije u zavisnosti od* h_2/L_2 *i* b/L_2.

		F_z^{nor}	
h_2/L_2	b/L_2	Predloženi pristup	FEM
0.5	1	0.254517	0.254410
	2	1.092837	1.092510
	3	2.149098	2.148120
	4	1.901021	1.899603
	5	1.251259	1.249406
	6	0.802525	0.800023
1.0	1	0.210706	0.210685
	2	0.823654	0.823367
	3	1.489211	1.488541
	4	1.511106	1.510204
	5	1.145428	1.143646
	6	0.802265	0.799491
1.5	1	0.165978	0.165944
	2	0.613116	0.612893
	3	1.078481	1.077970
	4	1.189879	1.188878
	5	1.005231	1.003403
	6	0.763054	0.760077

Tabela 7.4. *Komponente vektora magnetne sile u zavisnosti od* L_1/L_2 *i* b/L_2.

L_1/L_2	b/L_2	F_x^{nor}	F_z^{nor}
1.0	1	0.027993	0.149887
	2	0.181341	0.573645
	3	0.376275	0.968376
	4	0.255803	1.007980
	5	0.052803	0.715166
	6	-0.017247	0.444278
1.5	1	0.041581	0.199914
	2	0.237696	0.750527
	3	0.474662	1.270006
	4	0.342189	1.349537
	5	0.095026	1.007106
	6	-0.005675	0.659079
2.0	1	0.011619	0.237473
	2	0.135546	0.881717
	3	0.408257	1.496529
	4	0.543296	1.617941
	5	0.278386	1.254896
	6	0.052430	0.856848

Tabela 7.5. *Komponente vektora magnetne sile u zavisnosti od* c/L_2 *i* b/L_2.

c/L_2	b/L_2	F_x^{nor}	F_z^{nor}
1.0	1	0.049842	0.267991
	2	0.321187	1.034570
	3	0.678953	1.748611
	4	0.459028	1.841714
	5	0.107105	1.332038
	6	-0.015340	0.861745
1.5	1	0.096012	0.273983
	2	0.481521	0.904033
	3	0.833211	1.427547
	4	0.698842	1.683409
	5	0.229427	1.408519
	6	-0.000350	0.936980
2.0	1	0.160593	0.253687
	2	0.583665	0.710523
	3	0.900981	1.117174
	4	0.868316	1.441784
	5	0.424581	1.446427
	6	0.050407	1.040321

Komponente vektora magnetne sile (za slučaj kada je $c \neq 0$), $F_x^{\text{nor}} = F_x \big/ \mu_0 M^2 L_2^2$ i $F_z^{\text{nor}} = F_z \big/ \mu_0 M^2 L_2^2$, u zavisnosti od c/L_2 i b/L_2, za parametre magneta: $a/L_2 = 3$, $h_1/L_2 = 0.25$, $h_2/L_2 = 0.5$ i $L_1/L_2 = 2$, prikazane su u Tabeli 7.5.

U Tabeli 7.6 prikazane su normalizovane komponente magnetne sile (za slučaj kada je $c \neq 0$), $F_x^{\text{nor}} = F_x \big/ \mu_0 M^2 L_2^2$ i $F_z^{\text{nor}} = F_z \big/ \mu_0 M^2 L_2^2$, u zavisnosti od odnosa h_2/L_2 i b/L_2, za parametre magneta: $a/L_2 = 3$, $h_1/L_2 = 0.25$, $L_1/L_2 = 1$ i $c/L_2 = 1$.

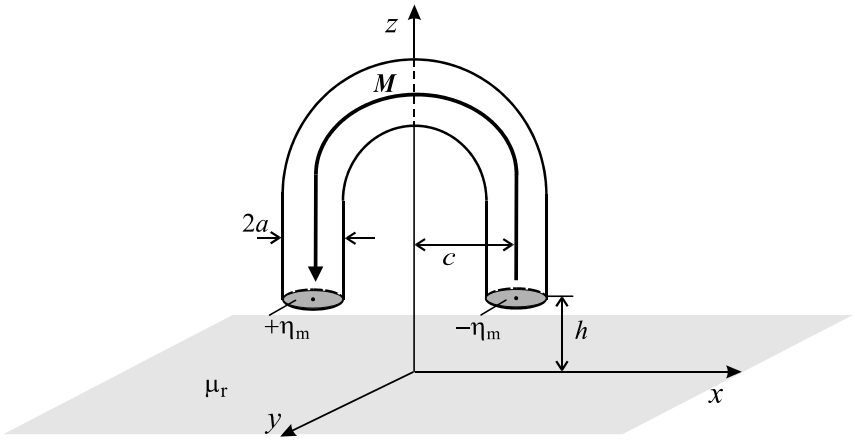
Tabela 7.6. *Komponente vektora magnetne sile u zavisnosti od* h_2/L_2 *i* b/L_2.

h_2/L_2	b/L_2	F_x^{nor}	F_z^{nor}
0.5	1	0.022902	0.167059
	2	0.207080	0.676239
	3	0.477743	1.137653
	4	0.284755	1.152719
	5	0.024348	0.747613
	6	-0.037132	0.433955
1	1	0.029527	0.132452
	2	0.156456	0.488805
	3	0.301346	0.827250
	4	0.226434	0.885298
	5	0.069987	0.674417
	6	-0.000888	0.445340
1.5	1	0.026939	0.100932
	2	0.114107	0.358331
	3	0.201210	0.610957
	4	0.174273	0.688996
	5	0.082757	0.584425
	6	0.021792	0.427789
2	1	0.021746	0.075896
	2	0.082484	0.265564
	3	0.139782	0.458250
	4	0.133379	0.541098
	5	0.080405	0.496825
	6	0.033705	0.394821

7.4. Stalni magnet oblika potkovice iznad neograničene magnetne ravni

Posmatra se stalni magnet oblika potkovice kružnog poprečnog preseka, postavljen iznad linearne magnetne ravni, relativne magnetne permeabilnosti μ_r, slika 7.13. Za proračun

privlačne sile koja deluje između magneta i ravni korišćen je polunumerički pristup zasnovan na fiktivnim magnetnim opterećenjima zajedno sa teoremom lika u ravnom ogledalu.



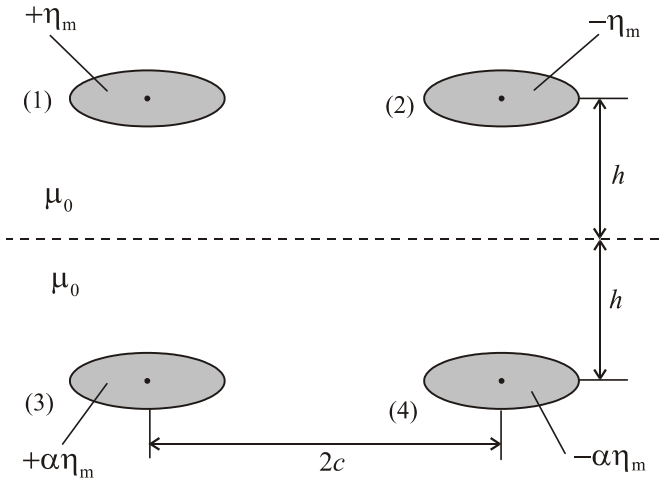
Slika 7.13. *Stalni magnet oblika potkovice postavljen iznad linearne magnetne ravni.*

S obzirom da granični uslovi mora da budu zadovoljeni, na osnovu jednačina (5.26) i (5.32), jasno je da fiktivna magnetna opterećenja postoje samo na bazisima stalnog magneta površinske gustine

$$\eta_{\mathrm{m}} = \hat{n} \cdot \boldsymbol{M}, \tag{7.28}$$

dok zapremiska magnetna opterećenja ne postoje.

Primenom teoreme lika u ravnom ogledalu posmatrani sistem se može zameniti sa sistemom prikazanim na slici 7.14, pri čemu je $\alpha = \dfrac{1-\mu_{\mathrm{r}}}{1+\mu_{\mathrm{r}}}, (\alpha < 0)$.



Slika 7.14. *Ekvivalentan model za sistem stalnog magneta oblika potkovice i beskonačne magnetne ravni.*

Dakle, sistem stalnog magneta i beskonačne ravni se svodi na sistem koji čine dva bazisa potkovice i dva lika. Sledeći korak u određivanju magnetne sile, $\boldsymbol{F} = F_z \hat{z}, F_z < 0$, između

potkovice i magneta je diskretizacija bazisa i likova, tako da se oni mogu posmatrati kao sistemi kružnih kontura opterećenih magnetnim opterećenjima. Poluprečnici kontura kojim se zamenjuju bazisi stalnog magneta oblika potkovice i njihovi likovi određuju se iz relacije

$$r_n = \frac{2n-1}{2N} a,\ n = 1,2,\ldots,N\,, \tag{7.29}$$

pri čemu je N broj diskretizacionih segmenata.

Magnetno opterećenje svakog segmenta lika je

$$Q_{\mathrm{m}n} = \alpha M 2\pi r_n \frac{a}{N},\ n = 1,2,...,N\,, \tag{7.30}$$

a magnetno opterećenje segmenta bazisa magneta iznosi

$$Q_{\mathrm{m}i} = M 2\pi r_i \frac{a}{N}\ i = 1,2,...,N\,. \tag{7.31}$$

Na osnovu izraza za silu između dve kružne konture opterećene različitim magnetnim opterećenjem, jednačine (5.69), (5.70), (5.71), privlačna magnetna sila između magneta oblika potkovice i beskonačne magnetne ravni se može odrediti sumiranjem udela svih segmenta oba bazisa magneta i njegovog lika primenom uniformne diskretizacione tehnike:

$$F_x = F_{x31} + F_{x41} + F_{x32} + F_{x42}\,, \tag{7.32}$$

$$F_y = F_{y31} + F_{y41} + F_{y32} + F_{y42}\,, \tag{7.33}$$

$$F_z = F_{z31} + F_{z41} + F_{z32} + F_{z42}\,. \tag{7.34}$$

Postoji samo *z* komponenta magnetne sile, F_z, dok su lateralne komponente sile , F_x i F_y , u slučaju ovakve konfiguracije jednake nuli,

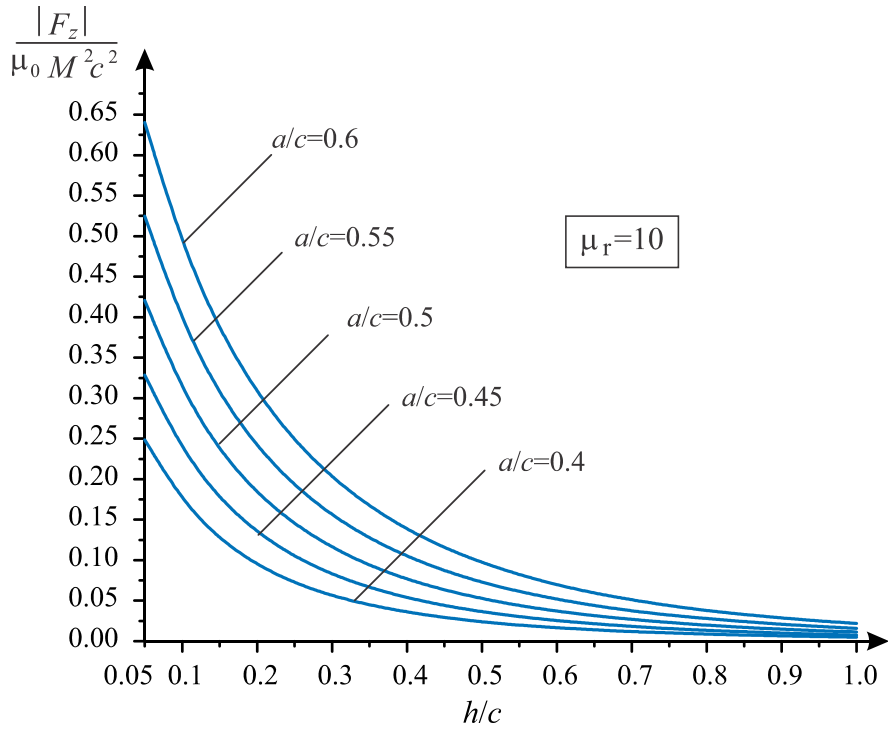
$$F_x = \frac{\mu_0 M^2 \pi}{4N^2} a^2 \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} r_n r_i \{F_x(r_n, r_i, c, h, -c, h) - F_x(r_n, r_i, -c, h, -c, h) + \\ - F_x(r_n, r_i, c, h, c, h) + F_x(r_n, r_i, -c, h, c, h)\} = 0\,, \tag{7.35}$$

$$F_y = \frac{\mu_0 M^2 \pi}{4N^2} a^2 \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} r_n r_i \{F_y(r_n, r_i, c, h, -c, h) - F_y(r_n, r_i, -c, h, -c, h) + \\ - F_y(r_n, r_i, c, h, c, h) + F_y(r_n, r_i, -c, h, c, h)\} = 0\,, \tag{7.36}$$

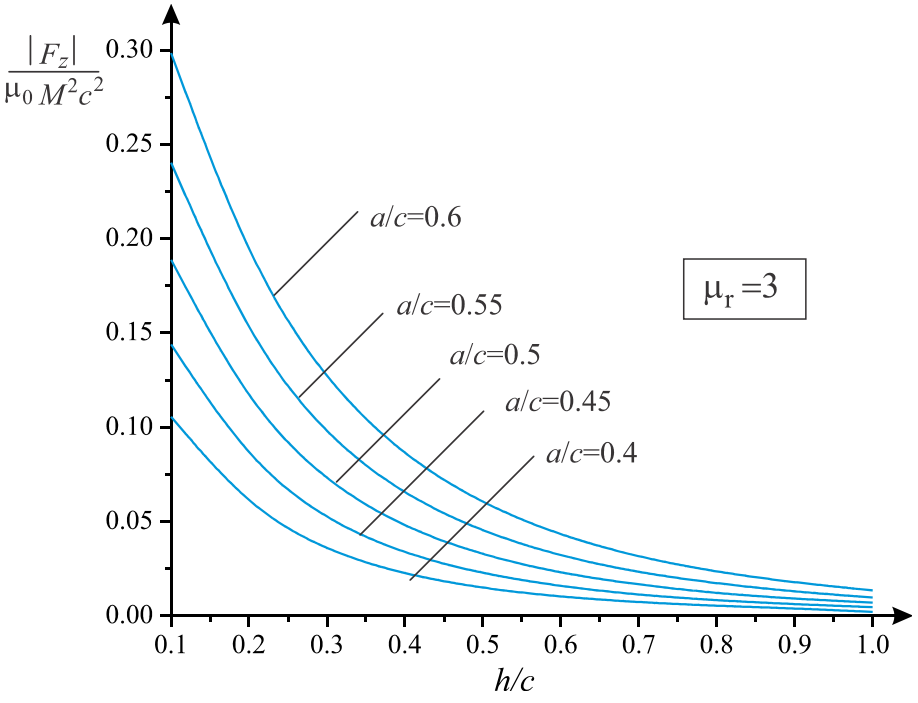
$$F_z = \frac{\mu_0 M^2 \pi}{4N^2} a^2 \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} r_n r_i \{F_z(r_n, r_i, c, h, -c, h) - F_z(r_n, r_i, -c, h, -c, h) + \\ - F_z(r_n, r_i, c, h, c, h) + F_z(r_n, r_i, -c, h, c, h)\}\,. \tag{7.37}$$

Rezultati za silu koja deluje između stalnog magneta oblika potkovice i beskonačne magnetne ravni, relativne magnetne permeabilnosti μ_r, prikazani su grafički.

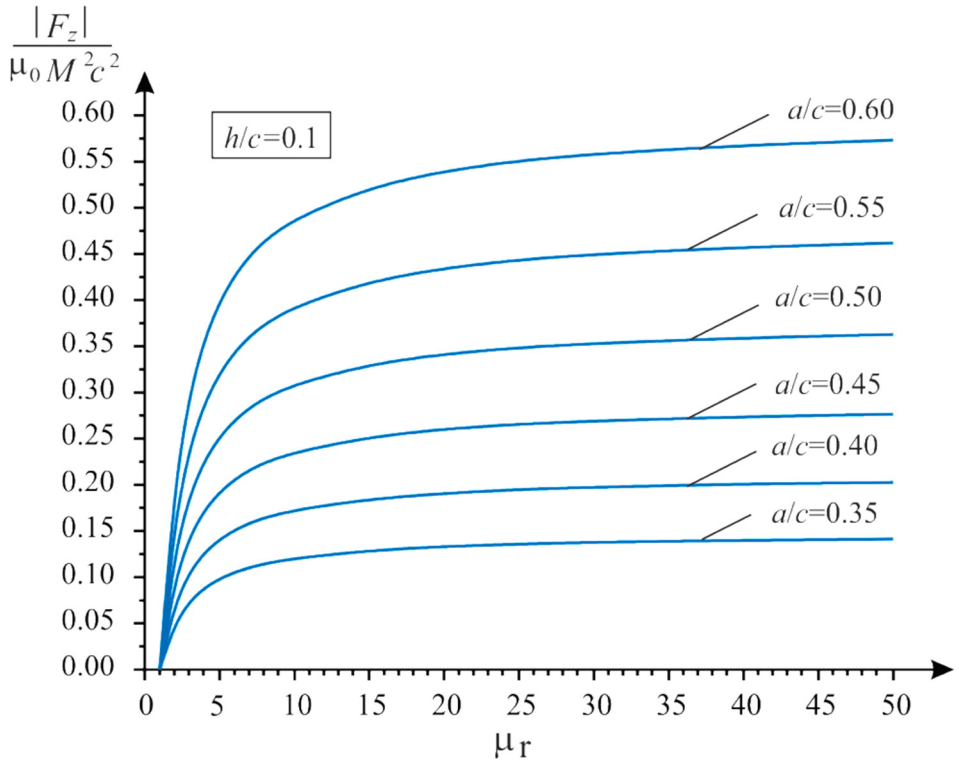
Privlačna sila u zavisnosti od odnosa h/c prikazana je na slici 7.15 u slučaju kada je relativna magetna permeabilnost ravni $\mu_r = 10$ i na slici 7.16 za $\mu_r = 3$.



Slika 7.15. *Privlačna sila u zavisnosti od odnosa h/c, za $\mu_r = 10$.*

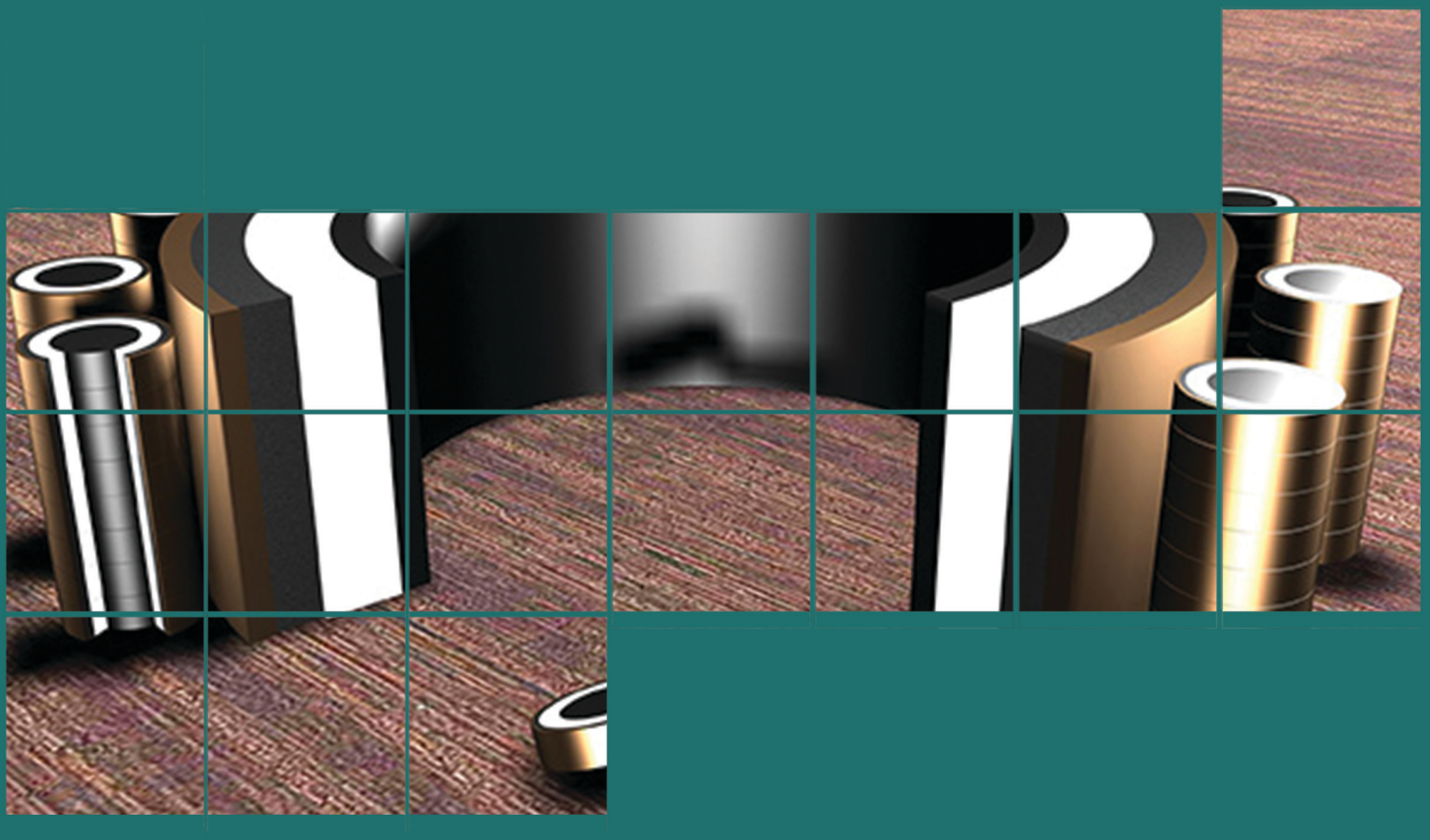


Slika 7.16. *Privlačna sila u zavisnosti od odnosa h/c, za $\mu_r = 3$.*



Slika 7.17. *Zavisnost privlačne sile od relativne magnetne permeabilnosti ravni,* μ_r.

Zavisnost privlačne sile od relativne magnetne permeabilnosti ravni μ_r, za parametre magneta $h / c = 0.1$ i $N = 100$, prikazana je na slici 7.17.



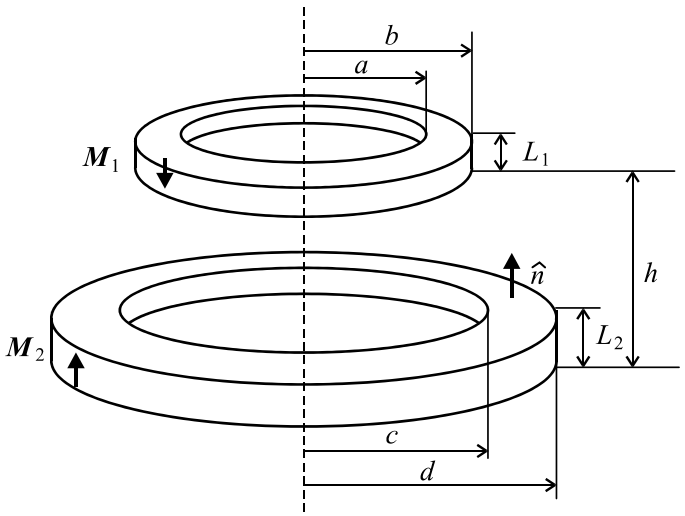
8. Modelovanje pasivnih magnetnih ležaja

8. Modelovanje pasivnih magnetnih ležaja

8.1. Pasivni magnetni ležaj - aksijalna magnetizacija stalnih magneta

U ovom poglavlju je posebna pažnja posvećena određivanju magnetne sile između stalnih magneta oblika prstena homogeno namagnetisanih u aksijalnom i radijalnom pravcu. Takva konfiguracija magneta predstavlja pasivni magnetni ležaj. U zavisnosti od toga kakav je pravac magnetizacije magneta i u zavisnosti od međusobnog položaja magneta, pasivni magetni ležaji se dele na radijalne i aksijalne magnetne ležaje. Jednostavan i veoma brz način određivanja sile između magneta pasivnog magnetnog ležaja je korišćenje metoda koji se zasniva na raspodeli fiktivnih magnetnih opterećenja i diskretizacionoj tehnici. Rezultati ovog pristupa su upoređeni sa metodom konačnih elemenata i Kulombijskim pristupom. Prednost pomenutog metoda u poređenju sa drugim pristupima je njegova jednostavnost. Takođe, vremenski su znatno efikasniji s obzirom da u konačnom izrazu za silu, pored elementarnih matematičkih operacija, figurišu samo eliptički integrali druge vrste i bilo kakve druge dodatne integracije su eliminisane ovim pristupom.

Najjednostavniji način za određivanje magnetne sile koja deluje između magneta je, kao što je objašnjeno u prethodnom odeljku, diskretizacija magneta, tako da se cela konfiguracija može svesti na sistem kružnih kontura, opterećenih fiktivnim magnetnim opterećenjima.



Slika 8.1. *Pasivni magnetni ležaj – aksijalna magnetizacija magneta.*

Posmatra se pasivni magnetni ležaj koji se satoji iz dva koaksijalna stalna magneta oblika torusa (prstena), pravouglog poprečnog preseka, slika 8.1 [50]. Magneti su homogeno namagnetisani u aksijalnom pravcu, suprotnog smera, tako da će između njih delovati odbojna sila. Na osnovu graničnih uslova za fiktivna magnetna opterećenja, zaključujemo da

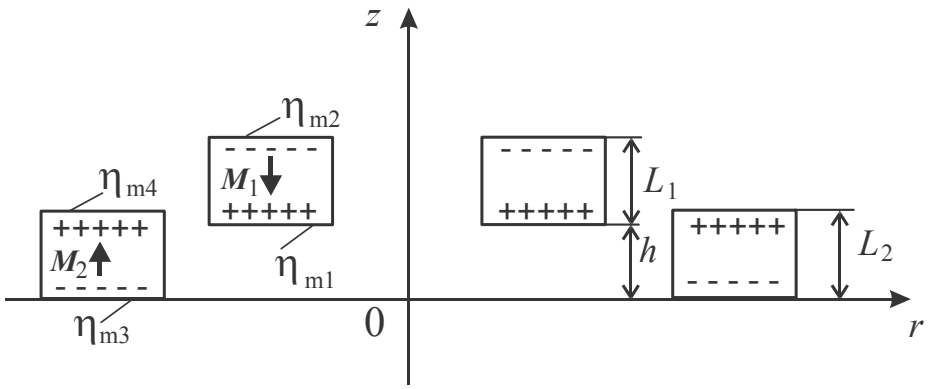
postoje samo površinska magnetna opterećenja na bazisima oba stalna magneta, dok su zapreminska magnetna opterećenja jednaka nuli jer su stalni magneti homogeno namagnetisani u aksijalnom pravcu.

Na slici 8.2 je prikazana raspodela fiktivnih magnetnih opterećenja, pri čemu su sledeće relacije zadovoljene

$$\eta_{m1} = \hat{n}_1 \cdot \boldsymbol{M}_1 = M_1,\ \eta_{m2} = \hat{n}_2 \cdot \boldsymbol{M}_1 = -M_1,\ \eta_{m3} = \hat{n}_3 \cdot \boldsymbol{M}_2 = -M_2,\ \eta_{m4} = \hat{n}_4 \cdot \boldsymbol{M}_2 = M_2$$

$$\rho_{m_1} = -\mathrm{div}\boldsymbol{M}_1 = 0 \text{ i } \rho_{m_2} = -\mathrm{div}\boldsymbol{M}_2 = 0. \tag{8.1}$$

Svaki od bazisa oba magneta može da se diskretizuje, odnosno predstavi sistemom kružnih kontura opterećenih određenom količinom magnetnog opterećenja, pri čemu je N_1 broj diskretizacionih segmenata (kružnih kontura) bazisa gornjig stalnog magneta, a N_2 je broj segmenata bazisa donjeg stalnog magneta.



Slika 8.2. *Raspodela površinskih magnetnih opterećenja.*

Uzimajući u obzir geometriju stalnih magneta (slika 8.3) i intenzitete vektora gustine magnetnog momenta, mogu se odrediti parametri svakog segmenta oba magneta. Parametri segmenata bazisa gornjeg magneta se određuje iz relacija

$$r_i = a + \frac{2n-1}{2N_1}(b-a),\ \ i = 1, 2, \ldots, N_1, \tag{8.2}$$

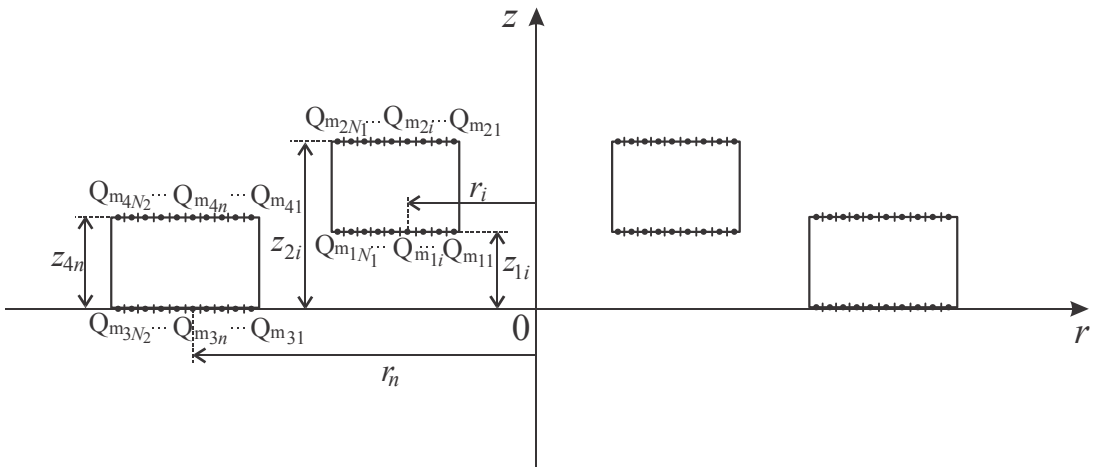
$$z_{1i} = h,\ i = 1,2,\ldots,N_1, \tag{8.3}$$

$$z_{2i} = h + L_1,\ \ i = 1,2,\ldots,N_1, \tag{8.4}$$

a magnetna opterećenja kružnih kontura donjeg i gornjeg bazisa su

$$Q_{m_1 i} = M_1 2\pi r_i \frac{b-a}{N_1},\ i = 1,2,\ldots,N_1, \tag{8.5}$$

$$Q_{\mathrm{m}2i} = -M_1 2\pi r_i \frac{b-a}{N_1},\ i = 1,2,...,N_1\,. \tag{8.6}$$



Slika 8.3. *Diskretizacioni model za aksijalni magnetni ležaj.*

Parametri diskretizacionih segmenata bazisa donjeg magneta su

$$r_n = c + \frac{2n-1}{2N_2}(d-c),\ \ n = 1,2,\ldots,N_2\,, \tag{8.7}$$

$$z_{3n} = 0,\ \ n = 1,2,\ldots,N_2\,, \tag{8.8}$$

$$z_{4n} = L_2\,,\ \ n = 1,2,\ldots,N_2\,, \tag{8.9}$$

a magnetna opterećenja segmenata se određuju iz relacije

$$Q_{\mathrm{m}3n} = -M_2 2\pi r_n \frac{d-c}{N_2},\ n = 1,2,...,N_2\,, \tag{8.10}$$

$$Q_{\mathrm{m}4n} = M_2 2\pi r_n \frac{d-c}{N_2},\ n = 1,2,...,N_2\,. \tag{8.11}$$

Na osnovu poznatog izraza za silu koja deluje između dve kružne konture opterećene različitim količinama magnetnog opterećenja, jednačina (5.82), može se odrediti sila između dva aksijalno namagnetisana stalna magneta oblika prstena. Sumiranjem udela svih segmenata bazisa oba magneta primenom uniformne diskretizacione tehnike dobija se:

$$F_z = F_{z13} + F_{z23} + F_{z14} + F_{z24};$$

$$F_z = \frac{\mu_0}{2\pi^2}\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{n=1}^{N_2}\Big(Q_{\mathrm{m}1i}Q_{\mathrm{m}3n}F_{z_\mathrm{p}}(r_n,r_i,z_{3n},z_{1i}) + Q_{\mathrm{m}2i}Q_{\mathrm{m}3n}F_{z_\mathrm{p}}(r_n,r_i,z_{3n},z_{2i}) + \\ + Q_{\mathrm{m}1i}Q_{\mathrm{m}4n}F_{z_\mathrm{p}}(r_n,r_i,z_{4n},z_{1i}) + Q_{\mathrm{m}2i}Q_{\mathrm{m}4n}F_{z_\mathrm{p}}(r_n,r_i,z_{4n},z_{2i})\Big). \tag{8.12}$$

Smenom jednačine (5.82) u poslednji izraz, dobija se konačni izraz za magnetnu silu između aksijalno namagnetisanih stalnih magneta oblika prstena

$$F_z=\frac{2\mu_0 M_1 M_2}{N_1 N_2}(b-a)(d-c)\times\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{n=1}^{N_2} r_n r_i\left(-\frac{(z_{1i}-z_{3n})E\left(\frac{\pi}{2},k_1\right)}{\left((r_i-r_n)^2+(z_{1i}-z_{3n})^2\right)\sqrt{(r_i+r_n)^2+(z_{1i}-z_{3n})^2}}+\right.$$
$$+\frac{(z_{2i}-z_{3n})E\left(\frac{\pi}{2},k_2\right)}{\left((r_i-r_n)^2+(z_{2i}-z_{3n})^2\right)\sqrt{(r_i+r_n)^2+(z_{2i}-z_{3n})^2}}$$
$$+\frac{(z_{1i}-z_{4n})E\left(\frac{\pi}{2},k_3\right)}{\left((r_i-r_n)^2+(z_{1i}-z_{3n})^2\right)\sqrt{(r_i+r_n)^2+(z_{1i}-z_{3n})^2}}$$
$$\left.-\frac{(z_{2i}-z_{4n})E\left(\frac{\pi}{2},k_4\right)}{\left((r_i-r_n)^2+(z_{2i}-z_{4n})^2\right)\sqrt{(r_i+r_n)^2+(z_{2i}-z_{4n})^2}}\right) \tag{8.13}$$

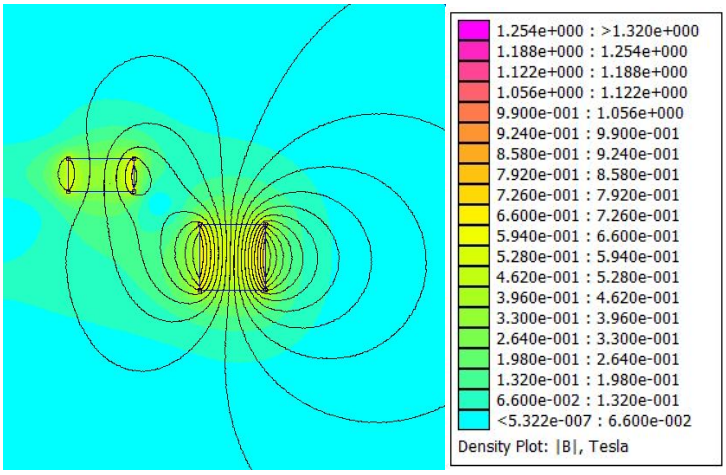
gde je

$$k_1^2=\frac{4r_n r_i}{(r_i+r_n)^2+(z_{1i}-z_{3n})^2},\ k_2^2=\frac{4r_n r_i}{(r_i+r_n)^2+(z_{2i}-z_{3n})^2},$$

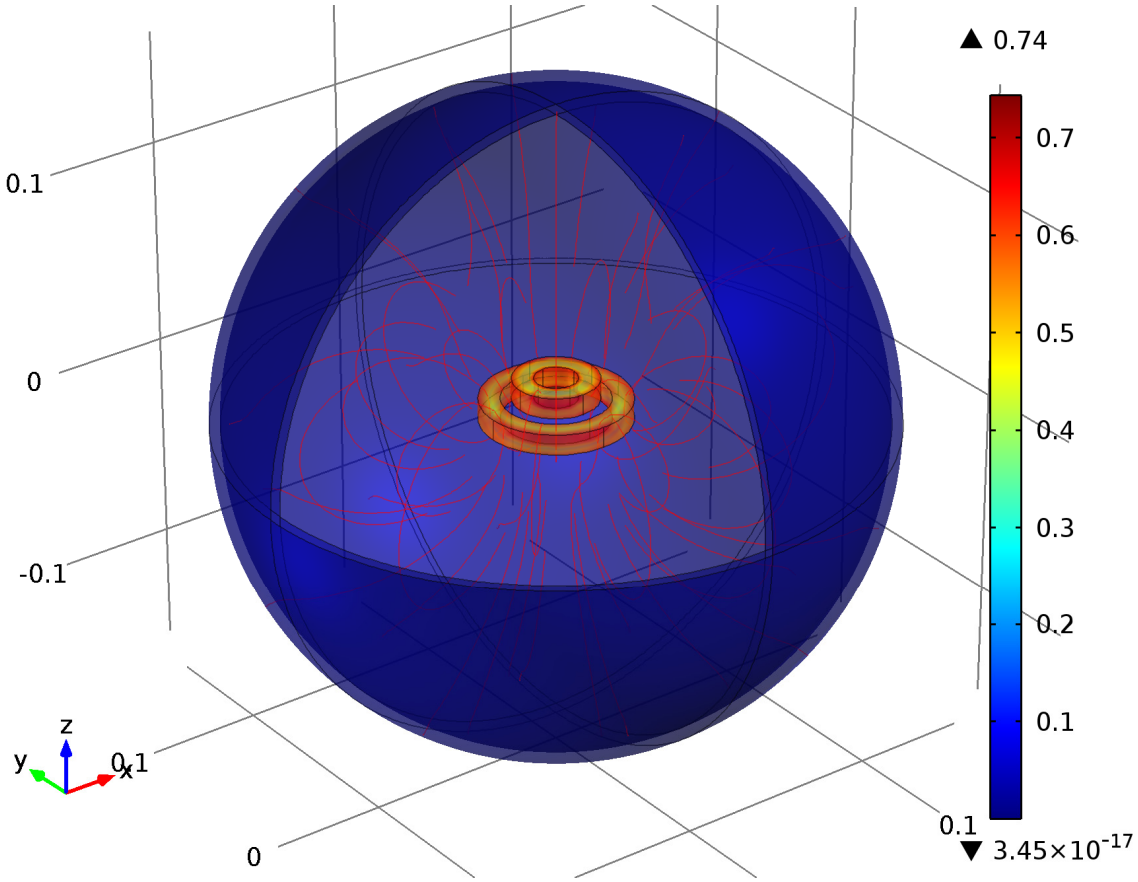
$$k_3^2=\frac{4r_n r_i}{(r_i+r_n)^2+(z_{1i}-z_{3n})^2},\ k_4^2=\frac{4r_n r_i}{(r_i+r_n)^2+(z_{2i}-z_{4n})^2}.$$

Numerički rezultati za silu između magneta aksijalnog magnetnog ležaja dobijeni su polazeći od pretpostavke da su oba stalna magneta načinjena od istog materijala i homogeno namagnetisana u aksijalnom pravcu pri čemu je intenzitet vektora gustine magnetnog momenta oba magneta $M_1=M_2=M$. Najpre će biti prikazani numerički rezultati u slučaju kada su magneti namagnetisani u suprotnom smeru.

Raspodela magnetne indukcije dobijena primenom FEMM 4.2 softvera prikazana je na slici 8.4 za parametre magneta: $a/L_2=1,\ b/L_2=2,\ c/L_2=3,\ d/L_2=4,\ L_1/L_2=0.5,$ $h/L_2=1.5,\ L_2=1\text{mm}$ i intenzitet vektora gustine magnetnog momenta $M=900$ kA/m. Prostorna raspodela vektora magnetne indukcije za ovaj tip magnetnog ležaja, dobijena primenom Comsol Multiphysics softvera, prikazana je na slici 8.5 [30], za parametre magneta $a=10\text{mm},\ b=20\text{mm},\ c=25\text{mm},\ d=35\text{mm},\ L_1=L_2=h=10\text{mm}$, $M=900$ kA/m.



Slika 8.4. *Raspodela magnetne indukcije za aksijalni magnetni ležaj (FEMM 4.2 software).*



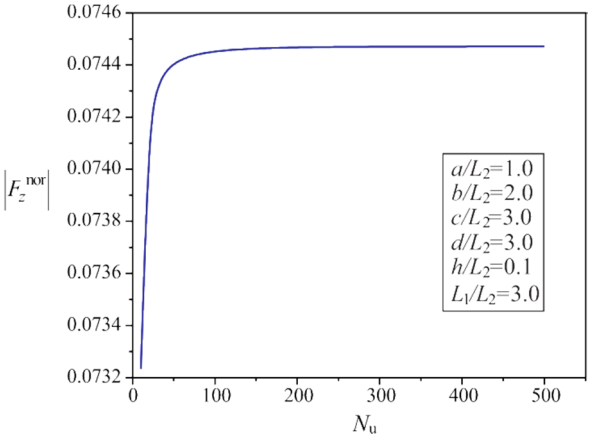
Slika 8.5. *Prostorna raspodela vektora magnetne indukcije magnetnog ležaja za slučaj aksijalne magnetizacije magneta (Comsol Multiphysics softver).*

Konvergencija rezultata je prilazana u Tabeli 8.1. Normalizovana magnetna sila, $F_z^{\text{nor}} = F_z / \mu_0 M^2 L_2^2$, dobijena primenom polunumeričkog pristupa data je za parametre magnetnog ležaja: $a/L_2 = 1$, $b/L_2 = 2$, $c/L_2 = 3$, $d/L_2 = 4$, $L_1/L_2 = 0.5$, $h/L_2 = 0.1$. U cilju

što kraćeg vremena proračuna, broj segmenata je ograničen na $N_{\text{tot}} = N_1 + N_2 = 200$, zato što nije neophodno uzeti veoma veliki broj segmenata da bi se dobila zadovoljavajuća tačnost, što potvrđuje i slika 8.6 na kojoj je grafički prikazana zavisnost magnetne sile od ukupnog broja segmenata.

Tabela 8.1. *Konvergencija rezultata.*

N_{tot}	F_z^{nor}	F_z^{nor} (FEM)
10	-0.0732327	
20	-0.0741579	
30	-0.0743319	
50	-0.0744213	-0.07491167
100	-0.0744591	
200	-0.0744685	
300	-0.0744703	
500	-0.0744712	



Slika 8.6. *Zavisnost intenziteta normalizovane magnetne sile od ukupnog broja segmenata.*

Tabela 8.2. *Uporedni rezultati za normalizovanu magnetnu silu u zavisnosti od rastojanja između magneta* h/L_2.

h/L_2	F_z^{nor}	F_z^{nor} (FEM)
0	-0.120071	-0.120515
0.1	-0.074469	-0.074911
0.2	-0.025238	-0.025659
0.3	0.025238	0.024873
0.4	0.074469	0.074099
0.5	0.120071	0.119765
0.6	0.159974	0.159691
0.7	0.192597	0.192327
0.8	0.216978	0.216771
0.9	0.232821	0.232627
1.0	0.240465	0.240293
1.1	0.240766	0.240654
1.2	0.234930	0.234829
1.3	0.224326	0.224240
1.4	0.210322	0.210279
1.5	0.194163	0.194138

Dobijeni rezulatati upoređeni su sa rezultatima metoda konačnih elemenata (FEMM softver). Uporedne vrednosti za normalizovanu magnetnu silu u zavisnosti od normalizovanog rastojanja između magneta, h/L_2, prikazane su u Tabeli 8.2, za parametre magneta: $a/L_2 = 1,\ b/L_2 = 2,\ c/L_2 = 3, d/L_2 = 4$ i $L_1/L_2 = 0.5$.

U Tabeli 8.3 su dati uporedni rezultati za magnetnu silu u zavisnosti od poluprečnika magneta a/L_2 i b/L_2, za slučaj kada je: $c/L_2 = 3,\ d/L_2 = 4,\ L_1/L_2 = 0.5$ i $h/L_2 = 1.5$. Vrednosti prikazane u ovim tabelama potvrđuju tačnost primenjenog polunumeričkog pristupa.

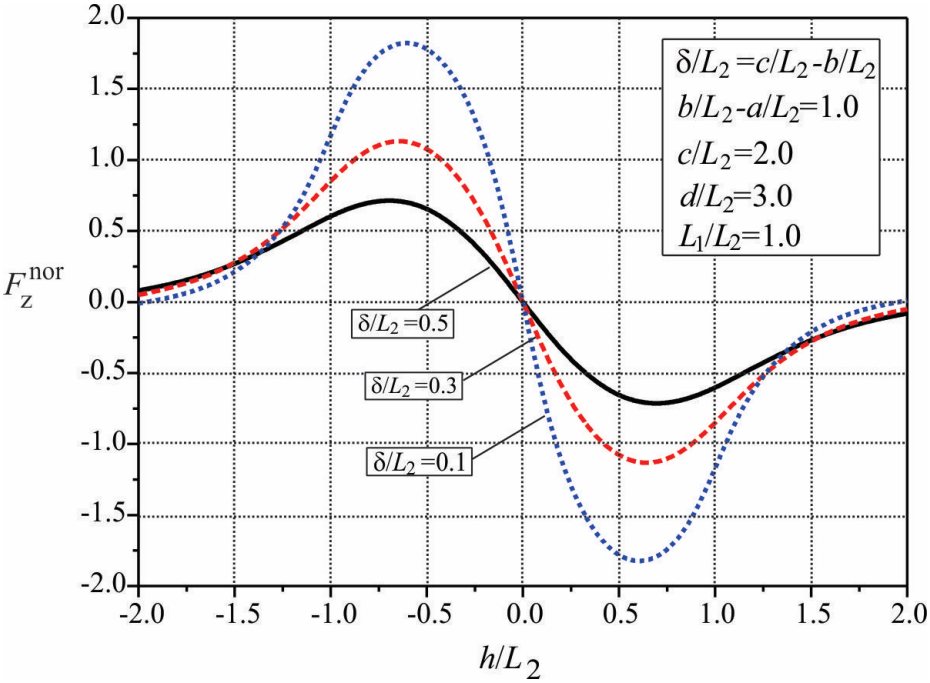
Tabela 8.3. *Uporedni rezultati za magnetnu silu u zavisnosti poluprečnika magneta* a/L_2 *i* b/L_2.

a/L_2	b/L_2	F_z^{nor}	F_z^{nor} (FEM)
1.0	2.0	0.194163	0.194138
1.5	2.5	0.320992	0.321208
2.0	3.0	0.209864	0.210493
2.5	3.5	-0.614301	-0.613222
3.0	4.0	-1.341280	-1.339868
3.5	4.5	-0.714116	-0.712579
4.0	5.0	0.272002	0.273619
4.5	5.5	0.491236	0.492676
5.0	6.0	0.352195	0.353756

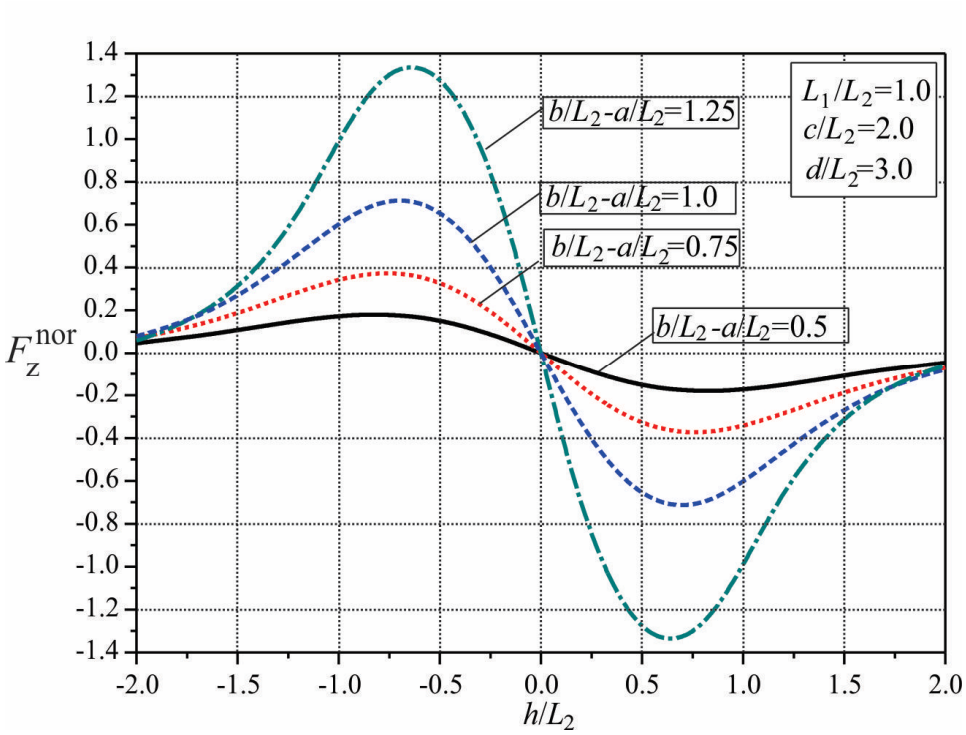
U cilju što veće mogućnosti analiziranja magnetnih ležaja, grafički je prikazana zavisnost normalizovane sile od parametara magneta. Na slici 8.7 data je magnetna sila, $F_z^{\text{nor}} = F_z/\left(\mu_0 M^2 L_2^2\right)$, u zavisnosti od rastojanja između magneta h/L_2, za različite dimenzije vazdušnog procepa, $\delta/L_2 = c/L_2 - b/L_2$, kada su parametri magneta: $b/L_2 - a/L_2 = 1.0$, $c/L_2 = 2, d/L_2 = 3,\ L_1/L_2 = 1$. Očigledno, ako se zahteva veća magnetna sila, neophodno je da vazdušni procep bude što manji.

Zavisnost magnetne sile, F_z^{nor}, od rastojanja između magneta, h/L_2, za različite širine gornjeg stalnog magneta, $b/L_2 - a/L_2$, prikazana je na slici 8.8 za parametre magneta $c/L_2 = 2, d/L_2 = 3,\ L_1/L_2 = 1$.

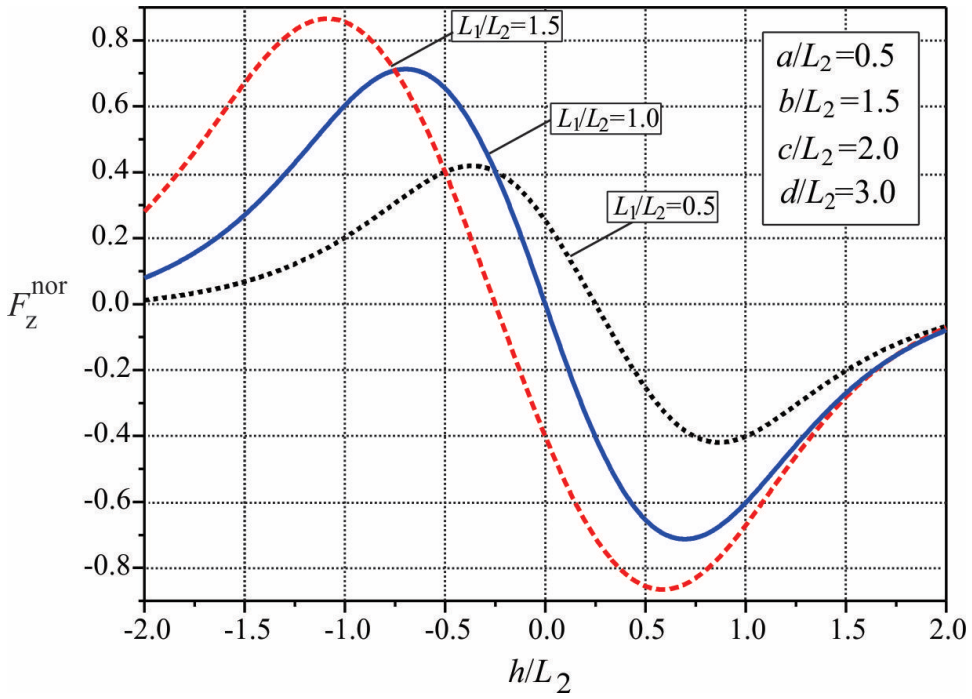
Magnetna sila u zavisnosti od rastojanja između magneta, h/L_2, za različite visine stalnih magneta, L_1/L_2 prikazana je na slici 8.9 za dimenzije magneta $a/L_2 = 0.5, b/L_2 = 1.5$ $c/L_2 = 2, d/L_2 = 3$.



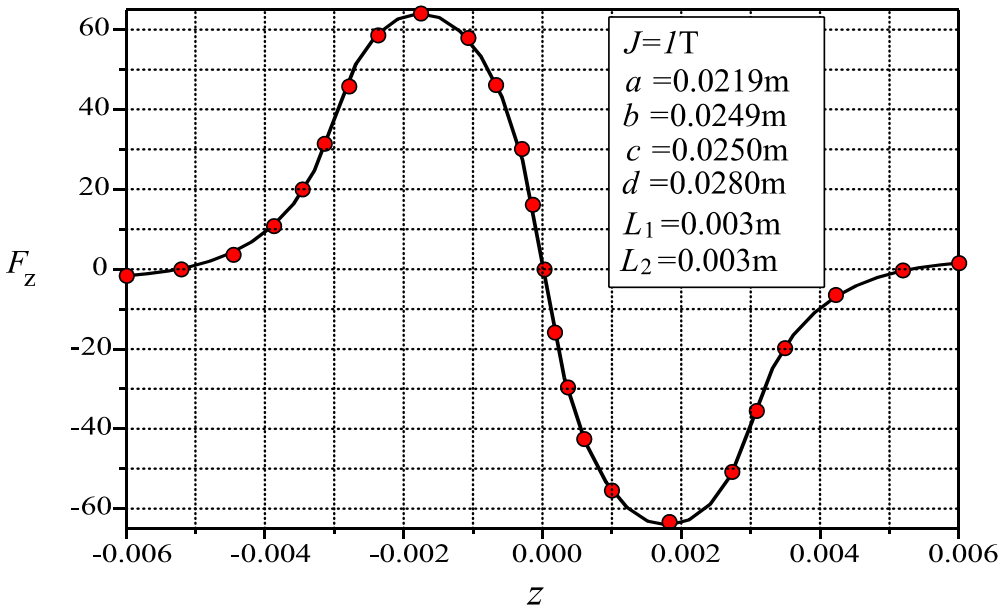
Slika 8.7. *Magnetna sila u zavisnosti od rastojanja između magneta,* h/L_2 *, za različite dimenzije vazdušnog procepa.*



Slika 8.8. *Magnetna sila u zavisnosti od rastojanja između magneta* h/L_2 *, za različite širine gornjeg stalnog magneta.*



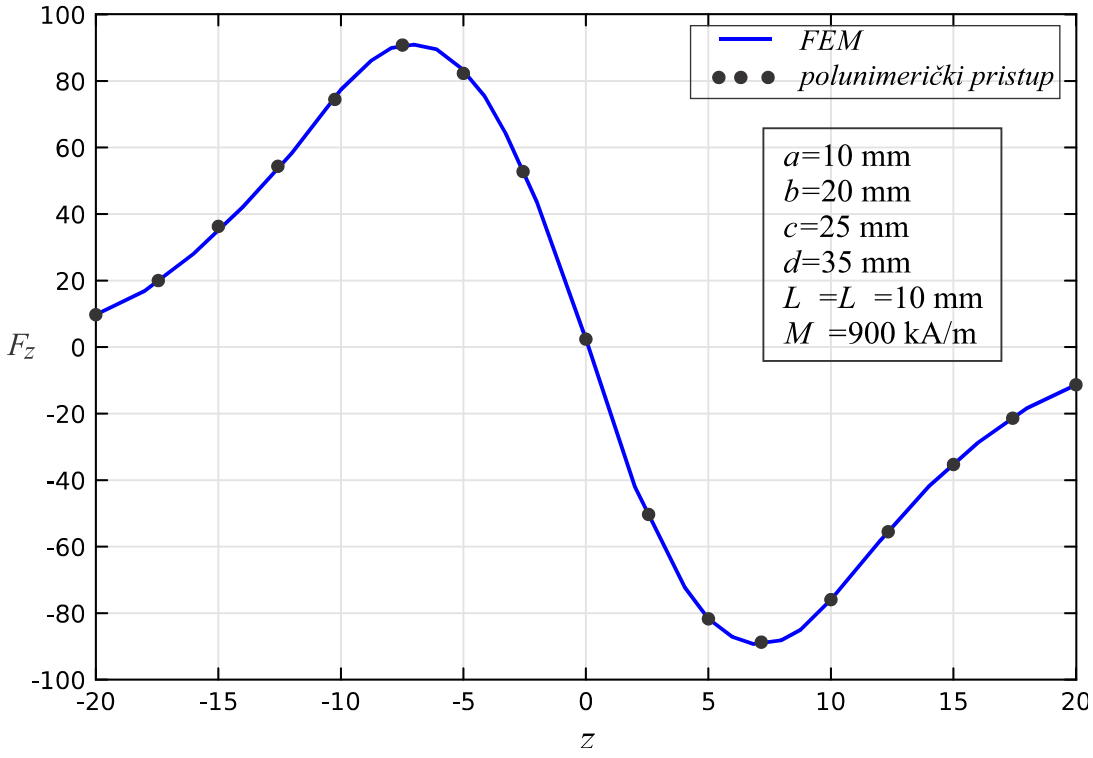
Slika 8.9. *Magnetna sila u zavisnosti od rastojanja između magneta,* h/L_2*, za različite visine stalnih magneta.*



Slika 8.10. *Uporedni rezultati za aksijalnu silu u funkciji rastojanja između magneta.*

U cilju potvrde tačnosti i pogodnosti korišćenja primenjenog polunumeričkog pristupa, rezultati su upoređeni sa vrednostima dobijenim u referenci [124]. Autori u pomenutoj refernci su koristili Kulombijski pristup za proračun magnetne sile aksijalnog ležaja. Na slici 8.10 su prikazani uporedni rezultati za aksijalnu silu u funkciji rastojanja između magneta kada su parametri magneta $a = 0.0219\,\text{m}$, $b = 0.0249\,\text{m}$, $c = 0.025\,\text{m}$, $d = 0.0280\,\text{m}$,

$L_1 = L_2 = 0.003\,\mathrm{m}$ i intenzitet vektora jačine magnetne polarizacije $J = 1\,\mathrm{T}$. Evidentno je poklapanje metoda, a prednost korišćenog pristupa je jednostavnost i vremanska efikasnost. Tačnost rezultata pomenutnog pristupa potvrđena je i na slici 8.11 na kojoj je data uporedna raspodela aksijalne sile u funkciji rastojanja magneta dobijena primenom polunumeričkog pristupa i primenom metoda konačnih elemenata (COMSOL Multiphysics softver) kada su dimenzije magneta $a = 10\,\mathrm{mm}$, $b = 20\,\mathrm{mm}$, $c = 25\,\mathrm{mm}$, $d = 35\,\mathrm{mm}$, $L_1 = L_2 = 10\,\mathrm{mm}$, $M = 900$ kA/m. Veoma dobro slaganje rezultata je očigledno, a prednost pomenutog pristupa u odnosu na FEM je brzina izvršenja i znatno veća mogućnost analize polja i sile posmatrane konfiguracije magneta u funkciji dimenzija magneta.



Slika 8.11. *Uporedni rezultati za silu u funkciji rastojanja između magneta.*

Jedna od veoma važnih veličina, koja određuje stabilnost magnetnog ležaja, naziva se krutost (eng. Stiffness), $\boldsymbol{K}$. Određuje se kao gradient sile:

$$\boldsymbol{K} = -\mathrm{grad}\boldsymbol{F}\,,$$

$$\boldsymbol{K} = -\left(\frac{dF_x}{dx}\hat{x} + \frac{dF_y}{dy}\hat{y} + \frac{dF_z}{dz}\hat{z}\right), \tag{8.14}$$

odnosno

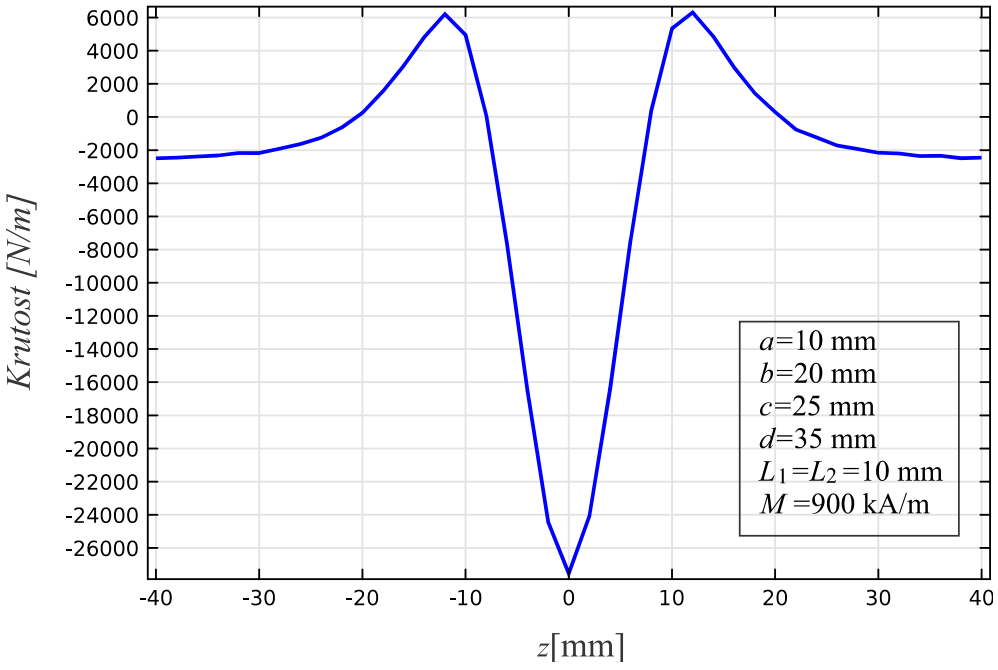
$$\boldsymbol{K} = -\left(K_x\hat{x} + K_y\hat{y} + K_z\hat{z}\right). \tag{8.15}$$

Kod magnetnih ležaja koji su načinjeni isključivo od stalnih magneta, prema Earnshaw-oj teoremi [137], mora da bude zadovoljena relacija

$$K_x + K_y + K_z = 0\,. \tag{8.16}$$

S obzirom da se magnetni ležaj uglavnom sastoji od dva magneta oblika prstena, usled aksijalne simetrije važi da je $K_x = K_y = K_r$, tako da je za potpuno određivanje krutosti magnetnog ležaja dovoljno odrediti njegovu z komponentu, s obzirom da je $K_z = -2K_r$. Kada je komponenta K_z pozitivna, radi se o aksijalnom ležaju, a u slučaju da je $K_z < 0$ reč je o radijalnom ležaju.

Na slici 8.12 je prikazana krutost u funkciji rastojanja između magneta dobijena primenom metoda konačnih elemenata za gore pomenute parametre magneta magnetnog ležaja.



Slika 8.12. *Zavisnost krutosti od rastojanja između magneta.*

Na identičan način kao što je prethodno objašnjeno, može da se odredi sila između stalnih magneta oblika prstena homogeno namagnetisanih u aksijalnom pravcu, istog smera. Uporedni rezultati za normalizovanu privlačnu magnetnu silu koja deluje između dva stalna magneta namagnetisana u istom smeru, dobijeni primenom polunumeričkog pristupa i metoda konačnih elemenata, prikazani su u tabelama 8.4 i 8.5.

Tabela 8.4. *Uporedni rezultati za magnetnu silu u zavisnosti od rastojanja između magneta* h/L_2.

h/L_2	F_z^{nor}	F_z^{nor} (FEM)
0	0	0.0000755
0.1	0.085505	0.086280
0.2	0.167360	0.168159
0.3	0.242216	0.243078
0.4	0.307290	0.308201
0.5	0.360536	0.361493
0.6	0.400740	0.401757
0.7	0.427527	0.428568
0.8	0.441304	0.442424
0.9	0.443143	0.444323
1.0	0.434627	0.435849
1.1	0.417663	0.418920
1.2	0.394286	0.395669
1.3	0.36648	0.367846
1.4	0.336043	0.337446
1.5	0.304492	0.306003

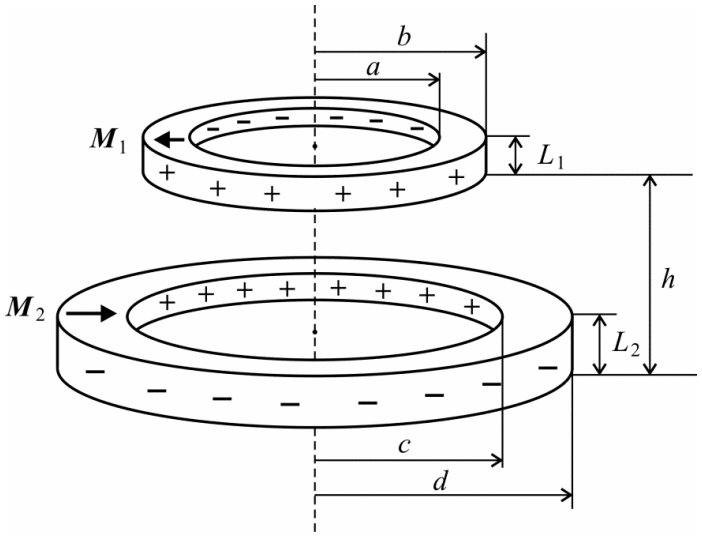
Tabela 8.5. *Uporedni rezultati za magnetnu silu u zavisnosti od dimenzija poluprečnika magneta* a/L_2 *i* b/L_2.

a/L_2	b/L_2	F_z^{nor}	F_z^{nor} (FEM)
1.0	2.0	0.304492	0.306003
1.5	2.5	0.432860	0.434672
2.0	3.0	0.185029	0.186999
2.5	3.5	-0.950759	-0.948785
3.0	4.0	-1.89600	-1.894140
3.5	4.5	-1.105990	-1.103435
4.0	5.0	0.232132	0.235702
4.5	5.5	0.657816	0.662357
5.0	6.0	0.550606	0.555822

Zavisnost privlačne sile od rastojanja između magneta, h/L_2, za parametre magneta: $a/L_2 = 1,\ b/L_2 = 2,\ c/L_2 = 3, d/L_2 = 4$ i $L_1/L_2 = 1$, prikazana je u Tabeli 8.4. U Tabeli 8.5 je data zavisnost privlačne sile od poluprečnika gornjeg mageneta a/L_2 i b/L_2, za parametre: $c/L_2 = 3,\ d/L_2 = 4,\ L_1/L_2 = 1$ i $h/L_2 = 1.5$.

8.2. Pasivni magneti ležaj - radijalna magnetizacija magneta

Pored magnetnih ležaja koje čine aksijalno namagnetisani stalni magneti, veliku primenu imaju magnetni ležaji koji se sastoje od dva stalna magneta oblika prstena, pravougaonog poprečnog preseka namagnetisani u radijalnom pravcu. Na slici 8.13 je prikazan radijalni magnetni ležaj u slučaju kada su magneti namagnetisani u radijalnom pravcu, suprotnog smera. Od veoma velikog značaja za pouzdansost uređaja u čiji sastav ulaze magnetni ležaji je poznavanje sile koja deluje između magneta magnetnog ležaja. Magnetna sila je određena primenom polunumeričkog pristupa i upoređena sa rezultatima dobijenim metodom konačnih elemenata i Kulombijskim pristupom, [125].



Slika 8.13. *Pasivni magnetni ležaj u slučaju radijalne magnetizacije magneta.*

Kao i u svim prethodnim primerima koji su rešeni primenom pristupa zasnovanog na fiktivnim magnetnim opterećenjima, granični uslovi moraju biti zadovoljeni. S obzirom da su magneti homogeno namagnetisani u radialnom pravcu, postojeće magnetna opterećenja i po površini i po zapremini magneta. Na osnovu graničnog uslova za površinska magnetna opterećenja

$$\eta_{\mathrm{m}} = \hat{n} \cdot \boldsymbol{M}, \tag{8.17}$$

jasno je da fiktivna magnetna opterećenja postoje na unutrašnjem i spoljašnjem omotaču oba magneta. Postoje i zapreminska fiktivna magnetna opterećenja gustine

$$\rho_{\mathrm{m}} = -\operatorname{div} \boldsymbol{M} = -\frac{M}{r}. \tag{8.18}$$

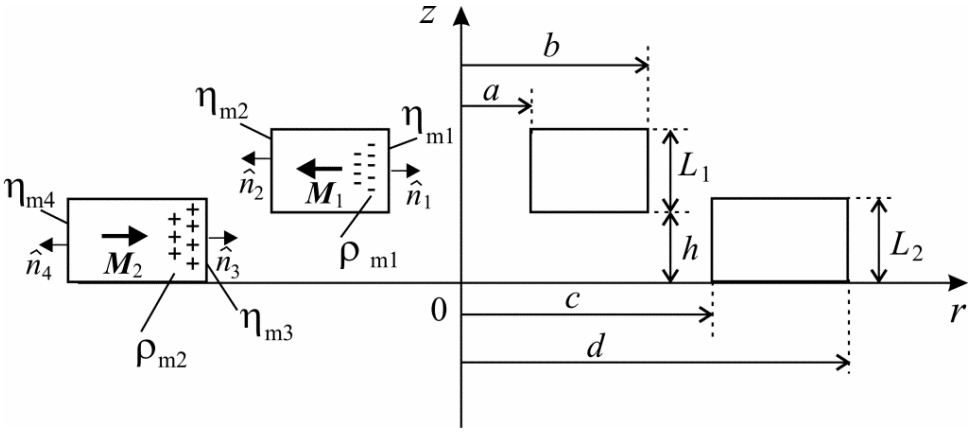
Najjednostavniji način za određivanje sile između magneta radialnog magnetnog ležaja je da se svaki omotač oba magneta i njihove zapremine diskretizuju i posmatraju kao sistemi

kružnih kontura opterećenih određenim količinama magnetnog opterećenja. Sa $N_{\mathrm{s}}^{\mathrm{tot}}$ je označen ukupan broj segmenata svih omotača magneta, a sa $N_{\mathrm{v}}^{\mathrm{tot}}$ ukupan broj segmenata kojim su diskretizovane zapremine oba magneta.

Na slici 8.14 su prikazane raspodele fiktivnih magnetnih opterećenja i granični uslovi koji su zadovoljeni za oba magneta su

$$\eta_{\mathrm{m1}} = \hat{n}_1 \cdot \boldsymbol{M}_1 = -M_1,\ \eta_{\mathrm{m2}} = \hat{n}_2 \cdot \boldsymbol{M}_1 = M_1,\ \eta_{\mathrm{m3}} = \hat{n}_3 \cdot \boldsymbol{M}_2 = M_2,\ \eta_{\mathrm{m4}} = \hat{n}_4 \cdot \boldsymbol{M}_2 = -M_2$$

$$\rho_{\mathrm{m}_1} = -\mathrm{div}\boldsymbol{M}_1 = -\frac{M_1}{r} \text{ i } \rho_{\mathrm{m}_2} = -\mathrm{div}\boldsymbol{M}_2 = \frac{M_2}{r}. \tag{8.19}$$



Slika 8.14. *Raspodela fiktivnih površinskih i zapreminskih magnetnih opterećenja.*

Uzimajući u obzir geometriju stalnih magneta i njihov međusobni položaj, slika 8.15, mogu se definisati sledeći parametri segmenata unutrašnjeg i spoljašnjeg omotača gornjeg stalnog magneta:

$$z_i = h + \frac{2i-1}{2N_{\mathrm{s1}}} L_1,\ i = 1,2,\ldots,N_{\mathrm{s1}}, \tag{8.20}$$

$$r_{1i} = a,\ i = 1,2,\ldots,N_{\mathrm{s1}}, \tag{8.21}$$

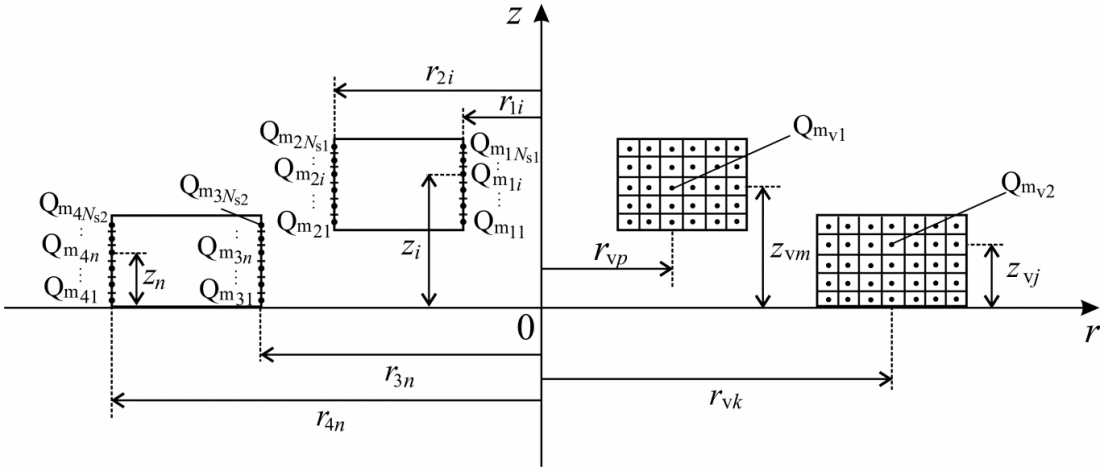
$$r_{2i} = b,\ i = 1,2,\ldots,N_{\mathrm{s1}}, \tag{8.22}$$

dok se magneta opterećenja segmenata unutrašnjeg i spoljašnjeg omotača određuju iz relacije

$$Q_{\mathrm{m}1i} = -M_1 2\pi a \frac{L_1}{N_{\mathrm{s1}}},\ i = 1,2,...,N_{\mathrm{s1}}, \tag{8.23}$$

$$Q_{\mathrm{m}2i} = M_1 2\pi b \frac{L_1}{N_{\mathrm{s1}}},\ i = 1,2,...,N_{\mathrm{s1}}. \tag{8.24}$$

N_{s1} je ukupan broj segmenata (kružnih kontura) omotača gornjeg stalnog magneta.



Slika 8.15. *Diskretizacioni model za magnetni ležaj u slučaju radijalne magnetizacije.*

Za segmente omotača donjeg stalnog magneta mogu se definisati sledeći parametri

$$z_n = \frac{2n-1}{2N_{\mathrm{s}2}} L_2, \;\; n = 1,2,\ldots,N_{\mathrm{s}2}, \tag{8.25}$$

$$r_{3n} = c, \;\; n = 1,2,\ldots,N_{\mathrm{s}2}, \tag{8.26}$$

$$r_{4n} = d, \;\; n = 1,2,\ldots,N_{\mathrm{s}2}, \tag{8.27}$$

a magnetna opterećnja segmenata su za unutrašnji omotač

$$Q_{\mathrm{m}3n} = M_2 \, 2\pi c \frac{L_2}{N_{\mathrm{s}2}}, \; n = 1,2,...,N_{\mathrm{s}2}, \tag{8.28}$$

i spoljašnji omotač

$$Q_{\mathrm{m}4n} = -M_2 \, 2\pi d \frac{L_2}{N_{\mathrm{s}2}}, \; n = 1,2,...,N_{\mathrm{s}2}. \tag{8.29}$$

Sa $N_{\mathrm{s}2}$ je označen ukupan broj segmenata donjeg stalnog magneta, pri čemu je $N_{\mathrm{s}}^{\mathrm{tot}} = N_{\mathrm{s}1} + N_{\mathrm{s}2}$.

S obzirom da za razmatranu konfiguraciju magneta postoje i zapreminska fiktivna magnetna opterećenja, zapremine oba magneta se mogu diskretizovati i posmatrati kao sistemi kružnih kontura opterećenih odgovarajućim magnetnim opterećenjem, pa se za gornji magnet mogu definisati parametri:

$$z_{\mathrm{v}m} = h + \frac{2m-1}{2N_{\mathrm{v}1}} L_1, \; m = 1,2,\ldots,N_{\mathrm{v}1}, \tag{8.30}$$

$$r_{\mathrm{v}p} = a + \frac{2p-1}{2N_{\mathrm{v}2}}(b-a), \;\; p = 1,2,\ldots,N_{\mathrm{v}2}, \tag{8.31}$$

a magnetna opterećenja kontura su

$$Q_{\mathrm{m}\,\mathrm{v}1} = Q_{\mathrm{m}\,\mathrm{v}i} = -M_1 2\pi L_1 \frac{b-a}{N_{\mathrm{v}1} N_{\mathrm{v}2}},\ i = 1,2,\ldots, N_{\mathrm{v}1} N_{\mathrm{v}2}\,. \tag{8.32}$$

Za donji magnet se parametri zapreminskih segmenata određuju iz relacija

$$z_{\mathrm{v}\,j} = \frac{2j-1}{2N_{\mathrm{v}3}} L_2,\ \ j = 1,2,\ldots, N_{\mathrm{v}3}\,, \tag{8.33}$$

$$r_{\mathrm{v}\,k} = c + \frac{2k-1}{2N_{\mathrm{v}4}}(d-c),\ \ k = 1,2,\ldots, N_{\mathrm{v}4}\,, \tag{8.34}$$

a njihova magnetna opterećenja su

$$Q_{\mathrm{m}\,\mathrm{v}2} = Q_{\mathrm{m}\,\mathrm{v}n} = M_2 2\pi L_2 \frac{d-c}{N_{\mathrm{v}3} N_{\mathrm{v}4}},\ n = 1,2,\ldots, N_{\mathrm{v}3} N_{\mathrm{v}4}\,. \tag{8.35}$$

$N_{\mathrm{v}1} \cdot N_{\mathrm{v}2}$ je ukupan broj segmenata kojim je diskretizovana zapremina gornjeg stalnog magneta, dok je $N_{\mathrm{v}3} \cdot N_{\mathrm{v}4}$ je ukupan broj segmenata zapremine donjeg stalnog magneta pri čemu je ukupan broj zapreminskih segmenata $N_{\mathrm{v}}^{\mathrm{tot}} = N_{\mathrm{v}1} \cdot N_{\mathrm{v}2} + N_{\mathrm{v}3} \cdot N_{\mathrm{v}4}$.

Korišćenjem rezultata za silu između dve kružne konture opterećene različitim količinama fiktivnog magnetnog opterećenja, jednačina (5.82), može se odrediti magnetna sila između stalnih magneta radijalnog magnetnog ležaja. To se postiže sumiranjem udela sile koja je posledica postojanja fiktivnih magnetnih opterećenja na omotačima stalnih magneta i njihovoj zapremini korišćenjem uniformne diskretizacione tehnike:

$$F_z = F_{z13} + F_{z23} + F_{z14} + F_{z24} + F_{z3\mathrm{v}1} + F_{z4\mathrm{v}1} + F_{z1\mathrm{v}2} + F_{z2\mathrm{v}2} + F_{\mathrm{v}1\mathrm{v}2}\,, \tag{8.36}$$

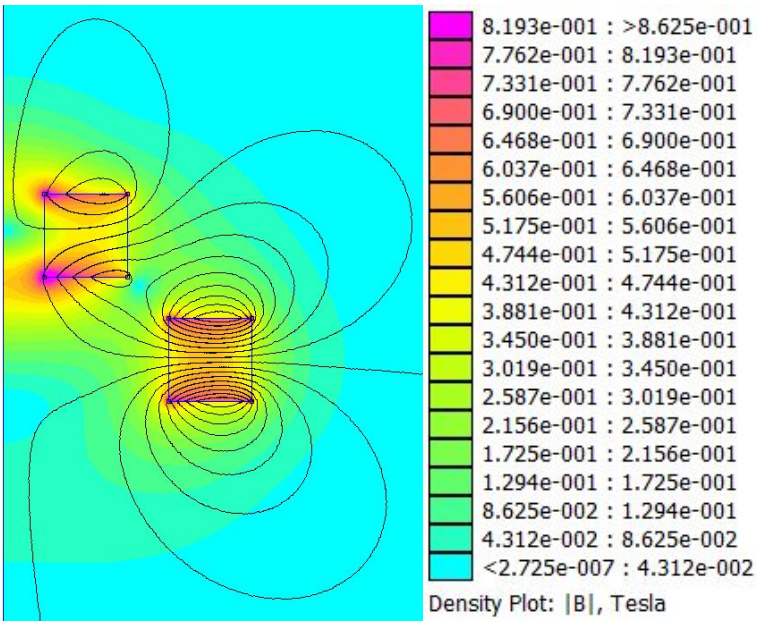
pri čemu je:

- $F_{z13} + F_{z23} + F_{z14} + F_{z24}$ - sila između kružnih kontura (segmenata) unutrašnjeg i spoljašnjeg omotača gornjeg magneta i unutrašnjeg i spoljašnjeg omotača donjeg magneta (sila između površinskih segmenata);
- $F_{z3\mathrm{v}1} + F_{z4\mathrm{v}1}$ - sila između površinskih segmenata donjeg magneta i zapreminskih segmenata gornjeg magneta;
- $F_{z1\mathrm{v}2} + F_{z2\mathrm{v}2}$ - sila između površinskih segmenata gornjeg magneta i zapreminskih segmenata donjeg magneta i
- $F_{\mathrm{v}1\mathrm{v}2}$ - sila između zapreminskih segmenata donjeg magneta i zapreminskih segmenata gornjeg magneta.

Konačno, magnetna sila između stalnih magneta oblika prstena homogeno namagnetisanih u radijalnom pravcu je

$$
\begin{aligned}
F_z = \frac{\mu_0}{2\pi^2}\Bigg(& \sum_{i=1}^{N_{s1}}\sum_{n=1}^{N_{s2}}\big(Q_{m1i}Q_{m3n}F_{z_p}(r_{3n},r_{1i},z_n,z_i)+Q_{m2i}Q_{m3n}F_{z_p}(r_{3n},r_{2i},z_n,z_i)+ \\
& +Q_{m1i}Q_{m4n}F_{z_p}(r_{4n},r_{1i},z_n,z_i)+Q_{m2i}Q_{m4n}F_{z_p}(r_{4n},r_{2i},z_n,z_i)\big)+ \\
& +\sum_{n=1}^{N_{s2}}\sum_{m=1}^{N_{v1}}\sum_{p=1}^{N_{v2}}\big(Q_{mv1}Q_{m3n}F_{z_p}(r_{3n},r_{v\,p},z_n,z_{v\,m})+Q_{mv1}Q_{m4n}F_{z_p}(r_{4n},r_{v\,p},z_n,z_{v\,m})\big)+ \\
& +\sum_{i=1}^{N_{s1}}\sum_{j=1}^{N_{v3}}\sum_{k=1}^{N_{v4}}\big(Q_{mv2}Q_{m1i}F_{z_p}(r_{v\,k},r_{1i},z_{v\,j},z_i)+Q_{mv2}Q_{m2i}F_{z_p}(r_{v\,k},r_{2i},z_{v\,j},z_i)\big)+ \\
& +\sum_{m=1}^{N_{v1}}\sum_{p=1}^{N_{v2}}\sum_{j=1}^{N_{v3}}\sum_{k=1}^{N_{v4}}Q_{mv2}Q_{mv1}F_{z_p}(r_{v\,k},r_{v\,p},z_{v\,j},z_{v\,m})\Bigg).
\end{aligned}
\tag{8.37}
$$

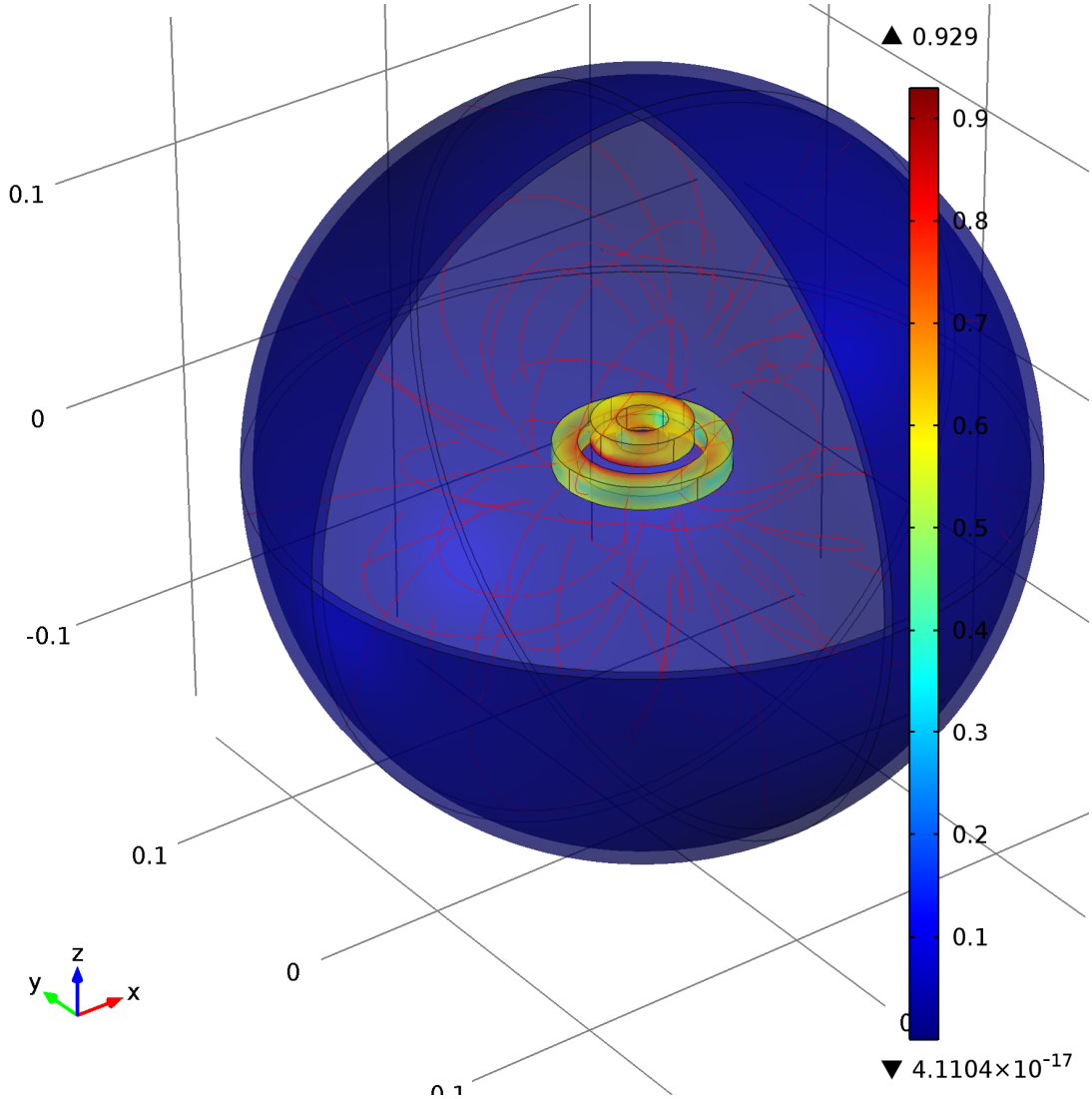
Na osnovu poslednjeg izraza veoma je jednostavno, u bilo kom programskom jeziku, dobiti rezultujuću silu između magneta za manje od 2 sekunde. Rezultati za magnetnu silu dati su grafički i tabelarno i upoređeni su sa rezultatima metoda konačnih elemenata (FEMM 4.2 software) i rezultatima Kulombijskog pristupa [125]. Polazi se od pretpostavke da su stalni magneti homogeno namagnetisani u radijalnom pravcu, suprotnog smera i istog intenziteta vektora gustine magnetnog momenta, $M_1 = M_2 = M$.



Slika 8.16. *Raspodela vektora magnetne indukcije u slučaju radijalne magnetizacije magneta (FEMM 4.2 softver).*

Raspodela magnetne indukcije dobijena primenom FEMM 4.2 softvera prikazana je na slici 8.16 za parametre magneta: $a/L_2 = 0.5$, $b/L_2 = 1.5$, $c/L_2 = 2$, $d/L_2 = 3$, $h/L_2 = 1.5$, $L_1/L_2 = 1$, $L_2 = 1\,\text{mm}$ i $M = 900$ kA/m .

Prostorna raspodela vektora magnetne indukcije za magnetni ležaj u slučaju radijalne magnetizacije stalnih magneta, dobijena primenom Comsol Multiphysics softvera, prikazana je na slici 8.17 za parametre magneta $a = 10\,\text{mm}$, $b = 20\,\text{mm}$, $c = 25\,\text{mm}$, $d = 35\,\text{mm}$, $L_1 = L_2 = h = 10\,\text{mm}$, $M_1 = M_2 = 900$ kA/m .



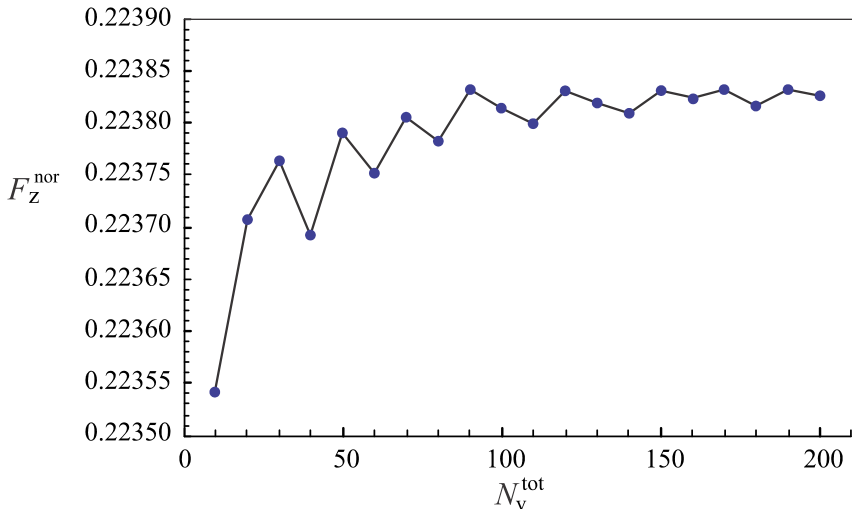
Slika 8.17. *Raspodela vektora magnetne indukcije u prostoru za magnetni ležaj u slučaju radijalne magnetizacije magneta.*

Konvergencija normalizovane aksijalne sile, $F_z^{\text{nor}} = F_z / \mu_0 M^2 L_2^2$, dobijena primenom polunumeričkog pristupa prikazana je u Tabeli 8.6 kada su parametri magneta $a/L_2 = 1.0$,

$b/L_2 = 2.0,\ \ c/L_2 = 2.5,\ \ d/L_2 = 3.0,\ \ L_1/L_2 = 0.5,\ \ h/L_2 = 0.5$. Magnetna sila je izračunata za različiti broj segmenata omotača magneta N_s^{tot} i zapremina magneta N_v^{tot}. Na osnovu vrednosti u tabeli 8.6 i grafika prikazanog na slici 8.18 uočljivo je da je konvergencija oscilatorna. U cilju postizanja što kraćeg vremena proračuna, broj površinskih i zapreminskih segmenata je ograničen na $N_s^{tot} = N_v^{tot} = 100$, zato što nije neophodno uzeti preveliki broj segmenata da bi se postigla zadovoljavajuća tačnost.

Tabela 8.6. *Konvergencija rezultata za normalizovanu magnetnu silu.*

N_v^{tot} \ N_s^{tot}	20	40	60	80	100	120	140	160
20	0.22436	0.22375	0.22362	0.22358	0.22356	0.22355	0.22354	0.22354
40	0.22452	0.22391	0.22379	0.22375	0.22373	0.22372	0.22371	0.22370
60	0.22458	0.22397	0.22384	0.22380	0.22378	0.22377	0.22377	0.22376
80	0.22451	0.22390	0.22377	0.22373	0.22371	0.22370	0.22369	0.22369
100	0.22461	0.22399	0.22387	0.22383	0.22381	0.22380	0.22379	0.22379
120	0.22457	0.22396	0.22383	0.22379	0.22377	0.22376	0.22375	0.22375
140	0.22462	0.22401	0.22389	0.22384	0.22382	0.22381	0.22381	0.22380
160	0.22460	0.22399	0.22386	0.22382	0.22380	0.22379	0.22378	0.22378



Slika 8.18. *Zavisnost normalizovane sile od broja zapreminskih segmenata kada je* $N_s^{tot} = 100$.

Uporedni rezultati za normalizovanu aksijalnu silu između magneta radijalnog magnetnog ležaja, $F_z^{nor} = F_z/\mu_0 M^2 L_2^2$, u zavisnosti od poluprečnika gornjeg magneta a/L_2 i b/L_2, dobijeni primenom polunumeričkog pristupa i metoda konačnih elemenata (FEMM 4.2

softver) prikazani su u Tabeli 8.7 za parametre magneta: $c/L_2 = 2,\ d/L_2 = 3,\ L_1/L_2 = 1.0$ i rastojanje između njih $h/L_2 = 1.5$ kao i u Tabeli 8.8 za parametre $c/L_2 = 2.5,\ d/L_2 = 3,$ $L_1/L_2 = 0.5$ i njihovo međusobno rastojanje $h/L_2 = 1.5$.

Tabela 8.7. *Uporedni rezultati za aksijalnu silu u zavisnosti od poluprečnika a/L_2 i b/L_2 za parametre magneta $c/L_2 = 2, d/L_2 = 3,\ L_1/L_2 = 1.0$ i $h/L_2 = 1.5$*

a/L_2	b/L_2	F_z^{nor}	Vreme proračuna [s]	F_z^{nor} (FEM)	Prosečno vreme proračuna FEM [min]
0.5	1.5	0.111398	$0.71 \div 0.81$	0.111372	5.6
1.0	2.0	-0.046574		-0.0469829	
1.5	2.5	-0.817334		-0.818442	
2.0	3.0	-1.499130		-1.500339	
2.5	3.5	-0.946663		-0.947765	
3.0	4.0	0.050397		0.049648	
3.5	4.5	0.398905		0.398781	
4.0	5.0	0.345845		0.345862	
4.5	5.5	0.240167		0.240182	
5.0	6.0	0.158792		0.158850	

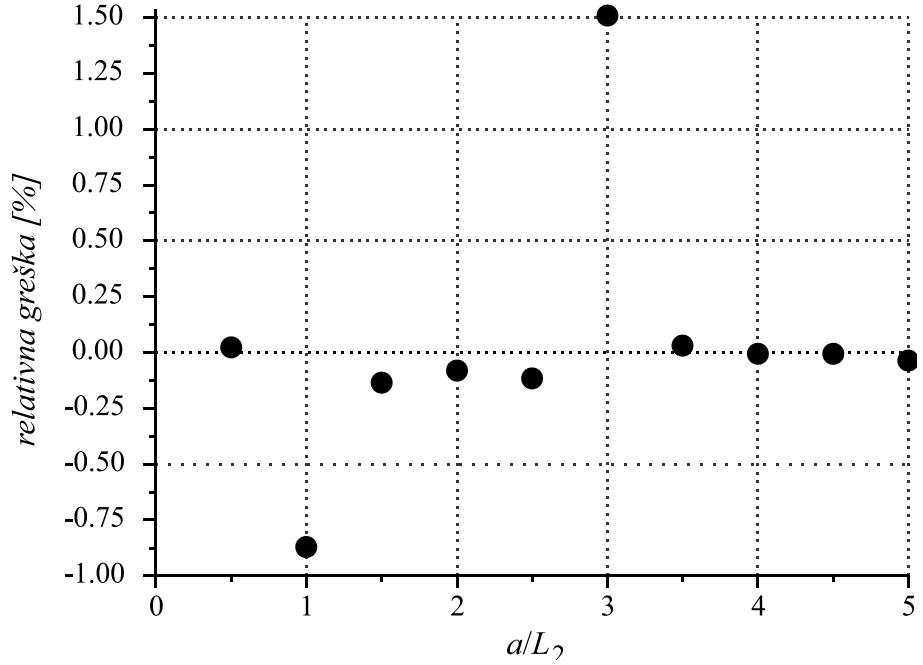
Tabela 8.8. *Uporedni rezultati za aksijalnu silu u zavisnosti od poluprečnika a/L_2 i b/L_2 za parametre magneta $c/L_2 = 2.5, d/L_2 = 3, L_1/L_2 = 0.5$ i $h/L_2 = 1.5$*

a/L_2	b/L_2	F_z^{nor}	F_z^{nor} (FEM)
0.5	1.5	0.052373	0.052410
1.0	2.0	0.097343	0.097345
1.5	2.5	-0.050659	-0.051024
2.0	3.0	-0.560725	-0.561381
2.5	3.5	-0.575492	-0.576252
3.0	4.0	-0.023255	-0.023807
3.5	4.5	0.193792	0.193689
4.0	5.0	0.152888	0.152856
4.5	5.5	0.095571	0.095572
5.0	6.0	0.058019	0.058022

Vreme proračuna u slučaju kada je korišćen polunumerički pristup baziran na fiktivnim magnetnim opterećenjima varira od 0.71 sekundi do 0.81 sekundi, zavisno od parametra stalnih magneta i njihovog međusobnog položaja. Dakle, prosečno vreme proračuna je 0.76 sekundi kada je broj površinskih i zapreminskih segmenata $N_{\text{s}}^{\text{tot}} = N_{\text{v}}^{\text{tot}} = 100$. Proračun je

izvršen na računaru Intel Core i5-2320 CPU Quad Core na 3GHz i 8GB RAM memorije na 64-bit Windows operativnom sistemu. Proračun sile primenom FEMM 4.2 softvera je izvršen na istoj platformi i prosečno vreme izračunavanja je 5.6 minuta za 2 miliona konačnih elemenata. Očigledno je da je prednost primenjenog pulunumeričkog pristupa vremenska efikasnost, s obzirom da je u tom slučaju vreme izvršenja programa 440 puta kraće u poređenju sa FEMM softverom.

Na osnovu vrednosti za silu prikazanih u Tabeli 8.7, uočljivo je veoma dobro slaganje pulunumeričkog pristupa sa metodom konačnih elemenata (FEMM 4.2 softver). Relativna greška proračuna je prikazana na slici 8.19 za različite vrednosti normalizovanog poluprečnika a/L_2, za parametre magneta $b/L_2 - a/L_2 = 1$, $c/L_2 = 2$, $d/L_2 = 3$, $L_1/L_2 = 1.0$ i međusobno rastojanje $h/L_2 = 1.5$.

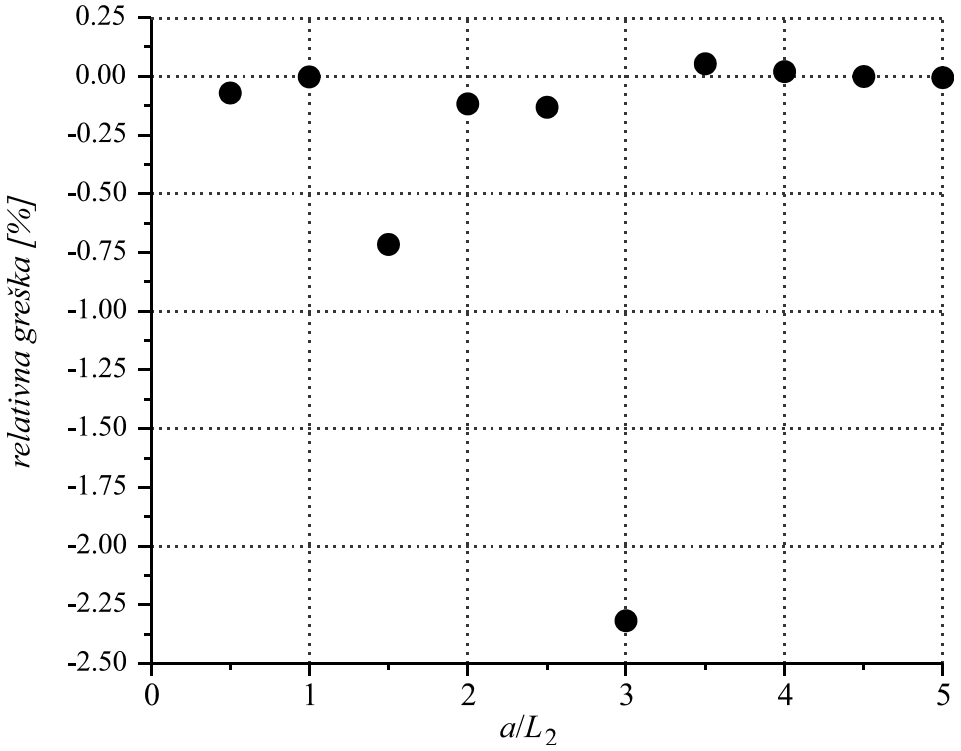


Slika 8.19. *Relativna greška za rezultate prikazane u Tabeli 8.7.*

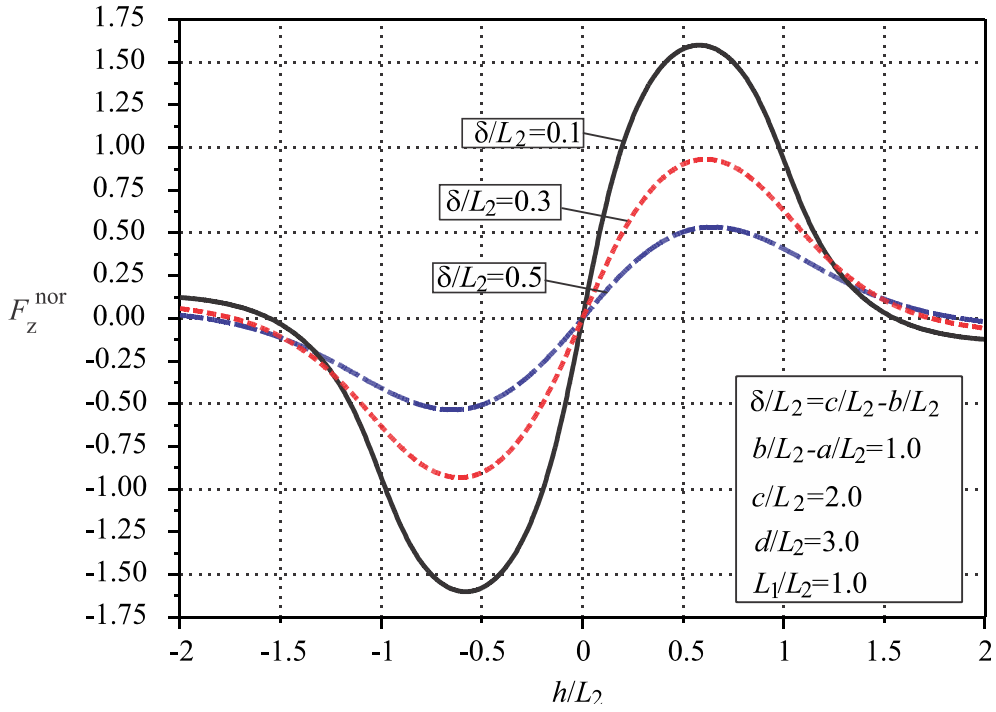
Na osnovu rezultata prikazanih u Tabeli 8.8, relativna greška proračuna je prikazana na slici 8.20 za različite vrednosti poluprečnika magneta a/L_2 kada su parametri magnetnog ležaja $b/L_2 - a/L_2 = 1$, $c/L_2 = 2.5$, $d/L_2 = 3$, $L_1/L_2 = 0.5$, $h/L_2 = 1.5$. Analizom slika 8.19 i 8.20, može se zaključiti da je relativna greška najveća kada je unutrašnji poluprečnik gornjeg magneta jednak spoljašnjem poluprečniku donjeg magneta.

Na Slici 8.21 je prikazana aksijalna magnetna sila, $F_z^{\text{nor}} = F_z/\left(\mu_0 M^2 L_2^2\right)$, u zavisnosti od rastojanja između magneta, h/L_2, za različite dimenzije vazdušnog procepa,

$\delta / L_2 = c/L_2 - b/L_2$, kada su parametri stalnih magneta: $b/L_2 - a/L_2 = 1.0$, $c/L_2 = 2$, $d/L_2 = 3$, $L_1/L_2 = 1$.

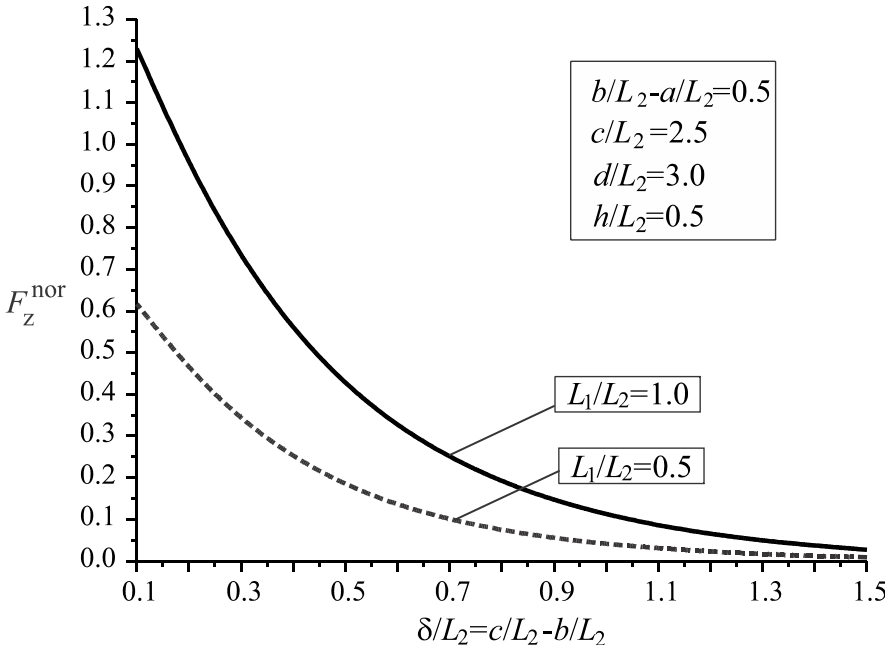


Slika 8.20. *Relativna greška za rezultate prikazane u Tabeli 8.8.*

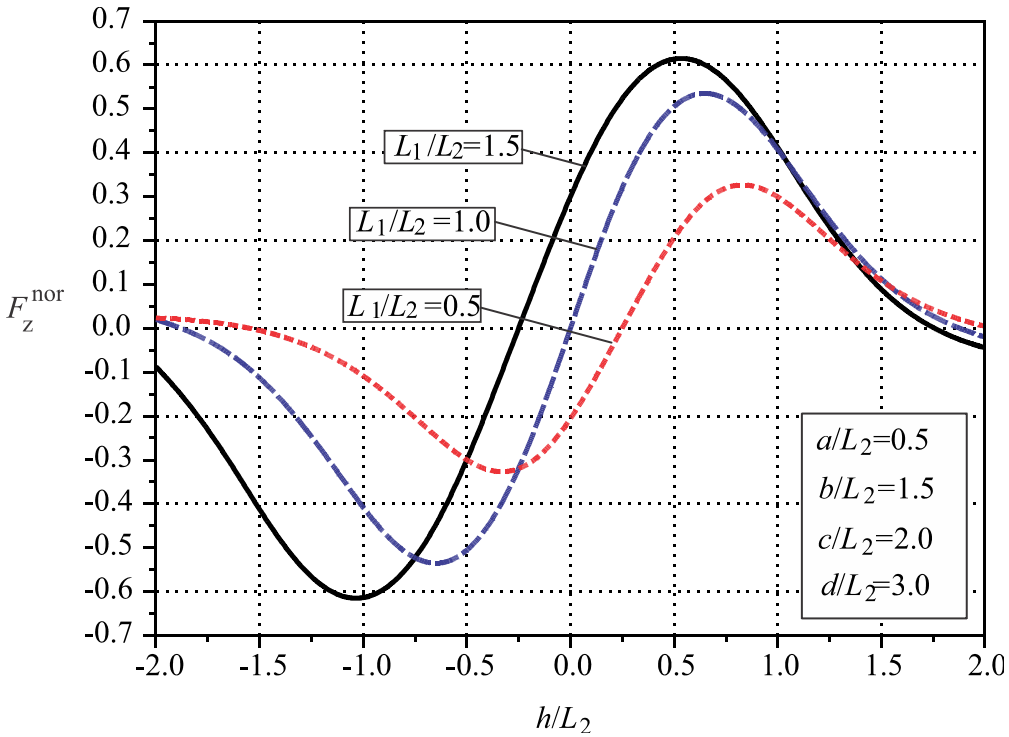


Slika 8.21. *Aksijalna magnetna sila u zavisnosti od rastojanja h/L_2 za različite dimenzije vazdušnog procepa.*

Očigledno je da, ako se zahteva što veća sila, neophodno je da vazdušni procep između magneta bude što manji. To je takođe potvrđeno grafički (slika 8.22), gde je prikazana magnetna sila u zavisnosti od dimenzija vazdušnog procepa za različite visine magneta kada su dimenzije magnet $b/L_2 - a/L_2 = 0.5,\ c/L_2 = 2.5, d/L_2 = 3.0,\ h/L_2 = 0.5$.



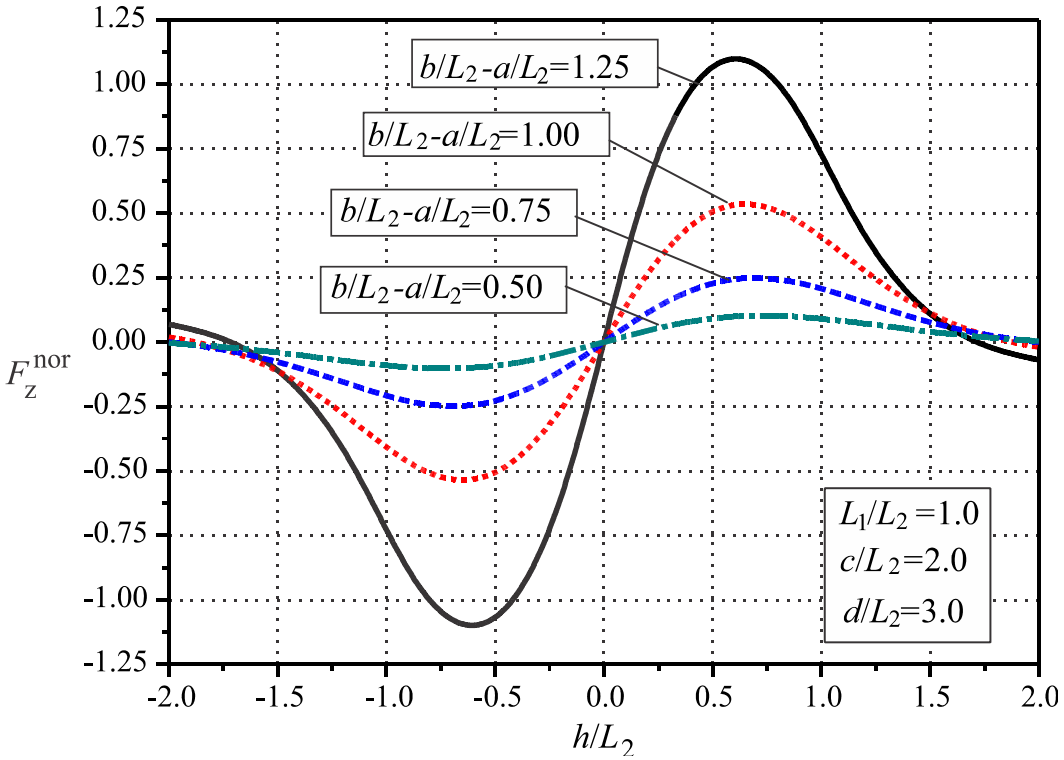
Slika 8.22. *Zavisnost aksijalne sile od dimenzija vazdušnog procepa.*



Slika 8.23. *Aksijalna magnetna sila u zavisnosti od odnosa h/L_2 za različite visine stalnih magneta.*

Aksijalna magnetna sila u zavisnosti od rastojanja između magneta, h/L_2, za različite visine magneta, prikazana je na slici 8.23, kada su parametri magneta $a/L_2=0.5$, $b/L_2=1.5$, $c/L_2=2.0$, $d/L_2=3.0$.

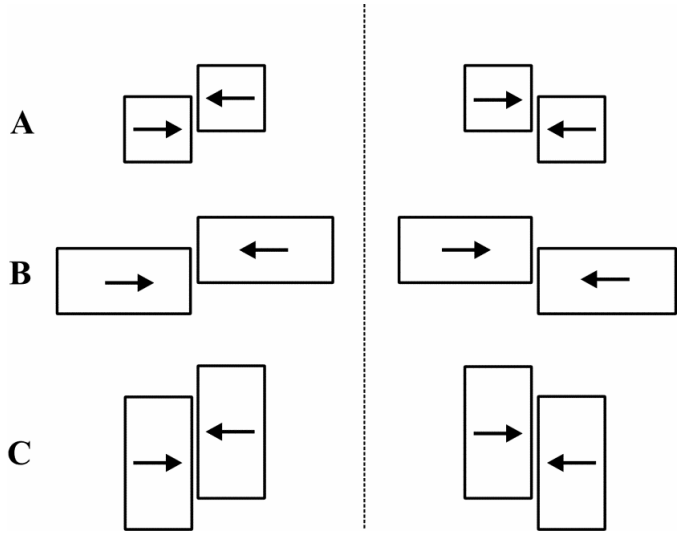
Na slici 8.24 prikazana je magnetna sila u funkciji rastojanja između magneta za različite debljine gornjeg stalnog magneta kada su dimenzije stalnih magnet: $c/L_2=2.0$, $d/L_2=3.0$, $L_1/L_2=1$. Na osnovu prethodne dve slike može se zaključiti da, sa porastom širine i visine gornjeg magneta, aksijalna magnetna sila raste. Ipak, mora se naći kompromis kada su dimenzije magneta u pitanju jer se, takođe, mora uzeti u obzir najoptimalnije dimenzije magneta u zavisnosti od uređaja u čiji sastav oni ulaze, kao i cena stalnih magneta.



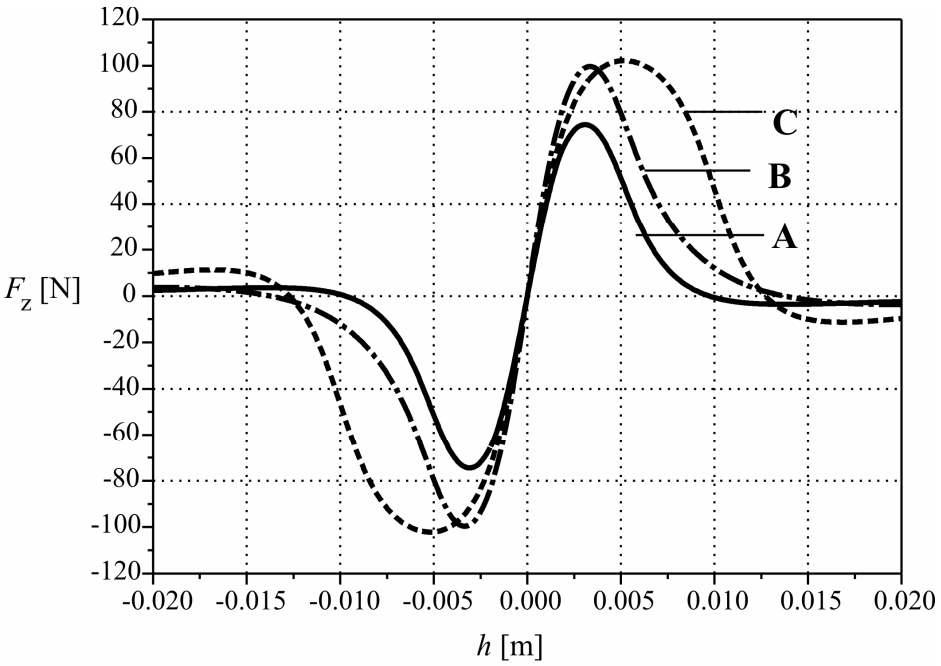
Slika 8.24. *Aksijalna magnetna sila u zavisnosti od odnosa h/L_2 za različite debljine gornjeg stalnog magneta.*

U cilju pronalaženja optimalnih dimenzija magneta za slučaj radijalne magnetizacije magnetnog ležaja, razmatrane su tri različite konfiguracije, slika 8.25. Prva se sastoji od dva stalna magneta kvadratnog poprečnog preseka (A). Drugu čine dva magneta pravougaonog poprečnog preseka, čije su širine dva puta veće od njihovih visina (B), i treću čine dva magneta pravougaonog poprečnog preseka pri čemu je visina dva puta veća od širine magneta (C). Na slici 8.26 je prikazana aksijalna magnetna sila u funkciji rastojanja između magneta, h za sve tri konfiguracije. Dimenzije magneta u svakoj konfiguraciji su prikazani

na slici 8.26, dok su intenziteti vektora gustine magnetnog momenta oba magneta isti i iznose $M_1 = M_2 = 900$ kA/m. Za prikazane dimenzije magneta, maksimalna magnetna sila se dobija za magnetni ležaj dat konfiguracijom (C).



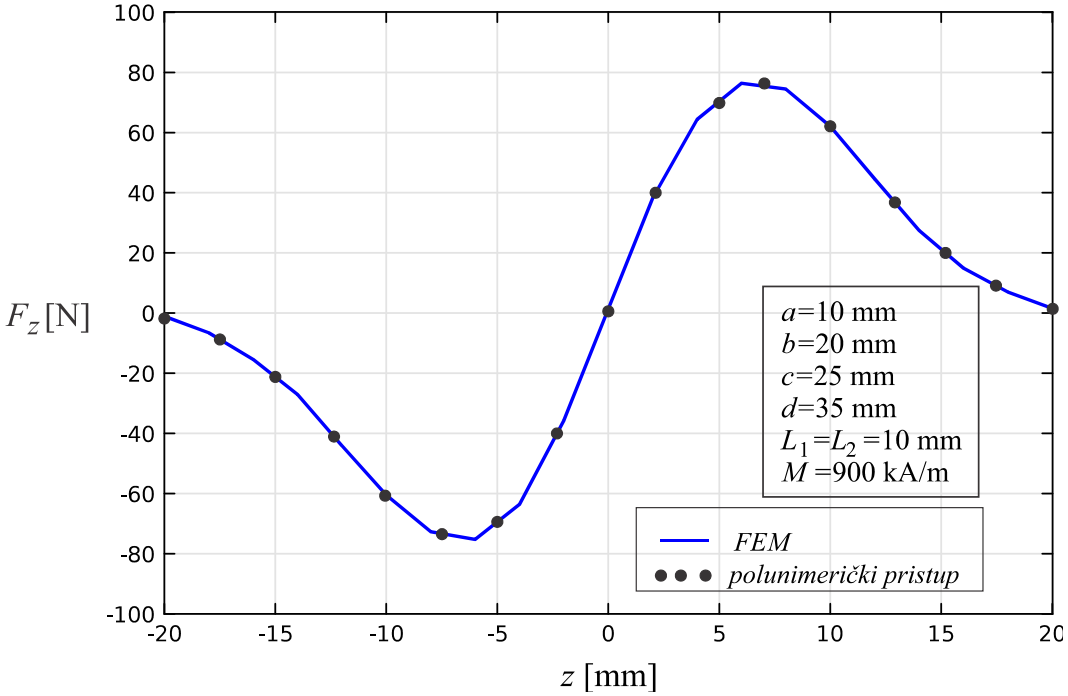
Slika 8.25. *Tri različite konfiguracije magnetnog ležaja za slučaj radijalne magnetizacije.*



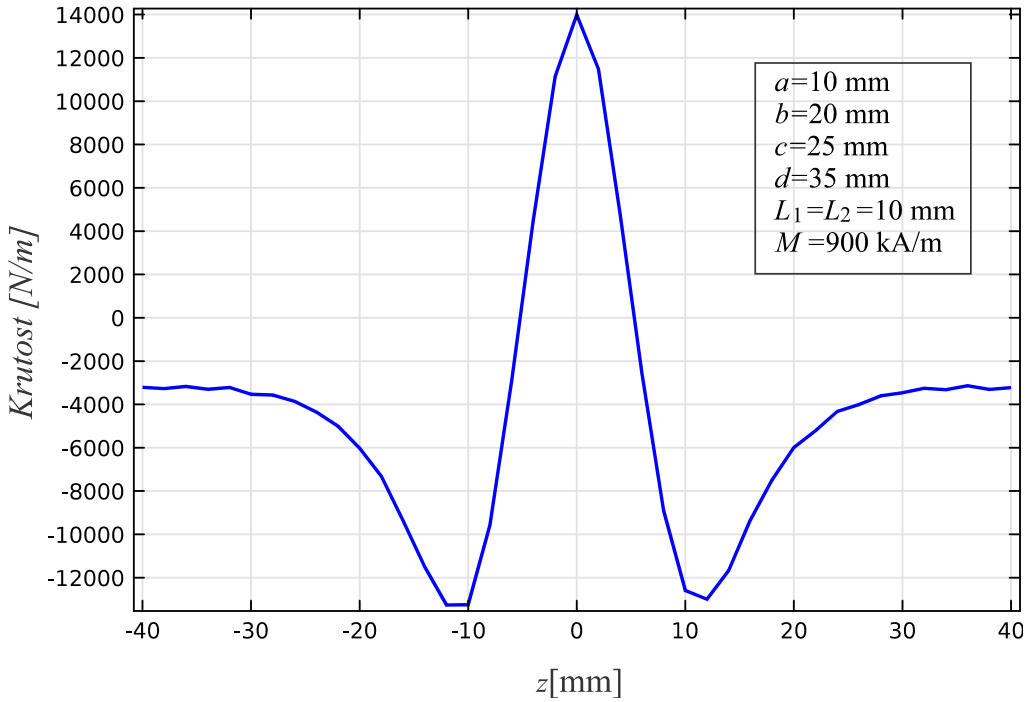
A	a=1.5cm, b=2.0cm, c=2.1cm, d=2.6cm , L_1=L_2=0.5cm
B	a=1.0cm, b=2.0cm, c=2.1cm, d=3.1cm , L_1=L_2=0.5cm
C	a=1.5cm, b=2.0cm, c=2.1cm, d=2.6cm , L_1=L_2=1.0cm
M_1=M_2=900kA/m	

Slika 8.26. *Aksijalna magnetna sila u funkciji rastojanja između magneta za različite konfiguracije magnetnog ležaja.*

Rezultati primenjenog pristupa su potvrđeni sa rezultatima metoda konačnih elemenata dobijenih COMSOL Multiphysics softverom, (slika 8.27), dok je krutost u funkciji rastojanja između magneta prikazan na slici 8.28 za parametre magneta $a=10\,\text{mm}$, $b=20\,\text{mm}$, $c=25\,\text{mm}$, $d=35\,\text{mm}$, $L_1=L_2=10\,\text{mm}$.

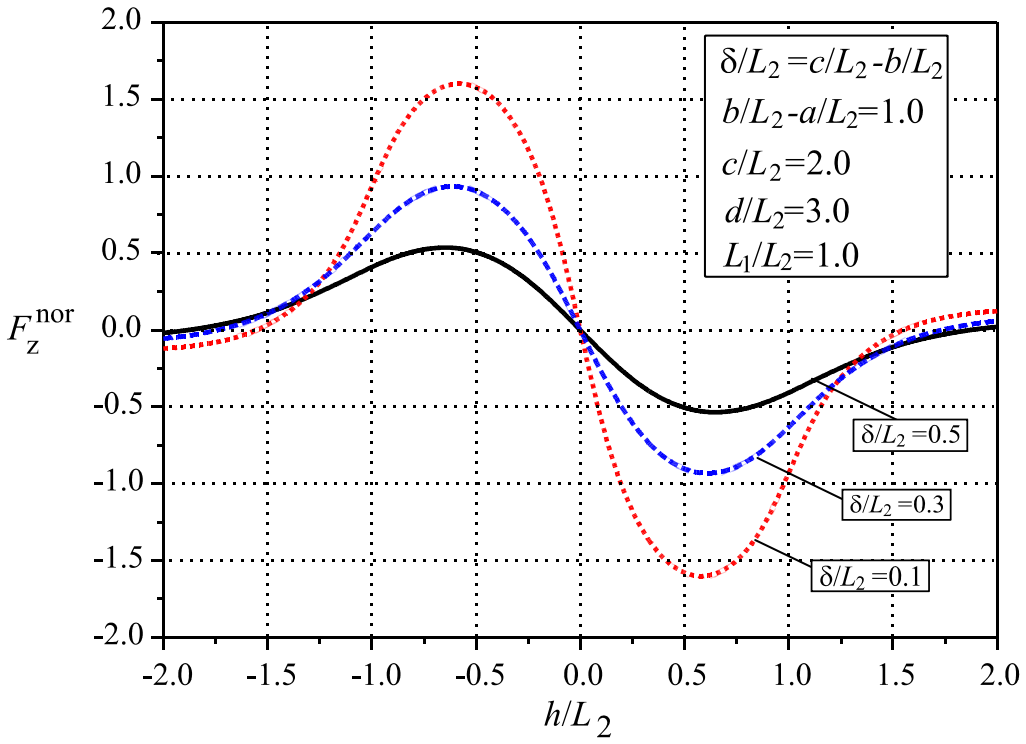


Slika 8.27. *Uporedni rezultati za aksijalnu silu između radijalno namagnetisanih magneta pasivnog magnetnog ležaja.*

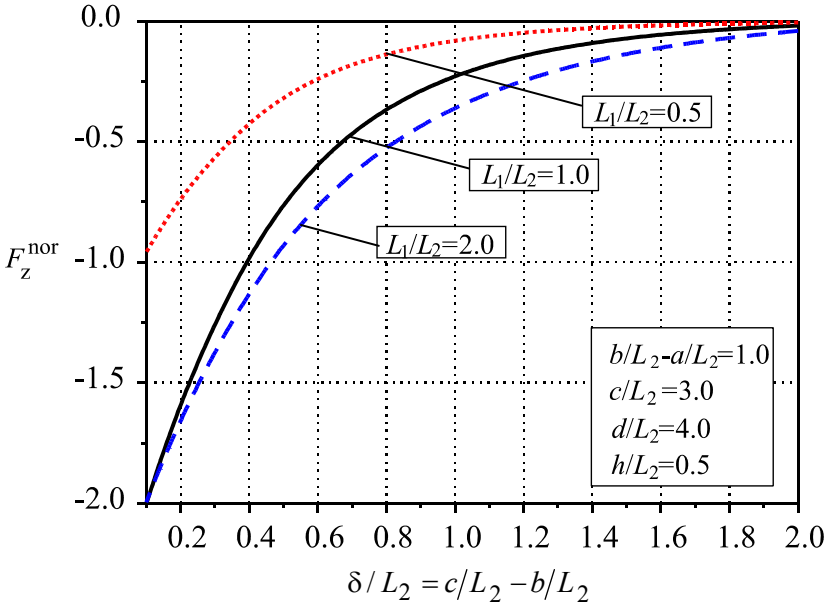


Slika 8.28. *Zavisnost krutosti od rastojanja između magneta.*

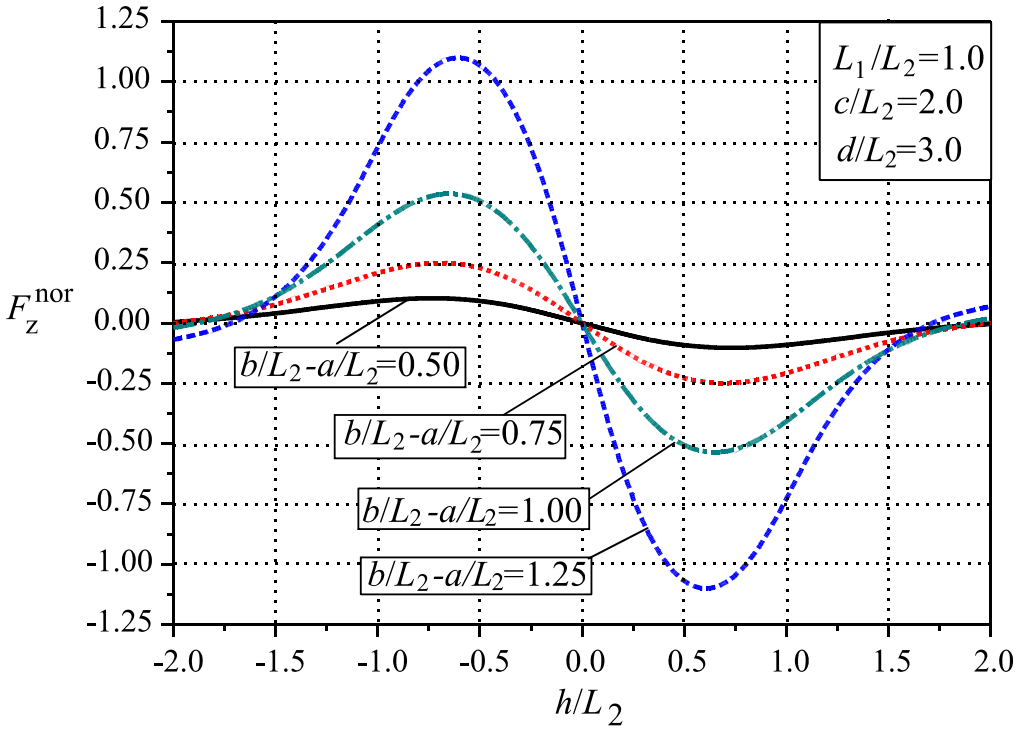
Zavisnost magnete sile od rastojanja između magneta za različite parametre magneta u slučaju kada su magneti homogeno namagnetisani u radijalnom pravcu ali istog smera ($\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{M}_2 = -M \cdot \hat{z}$) prikazana je na slikama od 8.29 do 8.33. U proračunima je uzeto da je broj površinskih i zapreminskih segmenata $N_{\mathrm{s}}^{\mathrm{tot}} = N_{\mathrm{v}}^{\mathrm{tot}} = 100$.



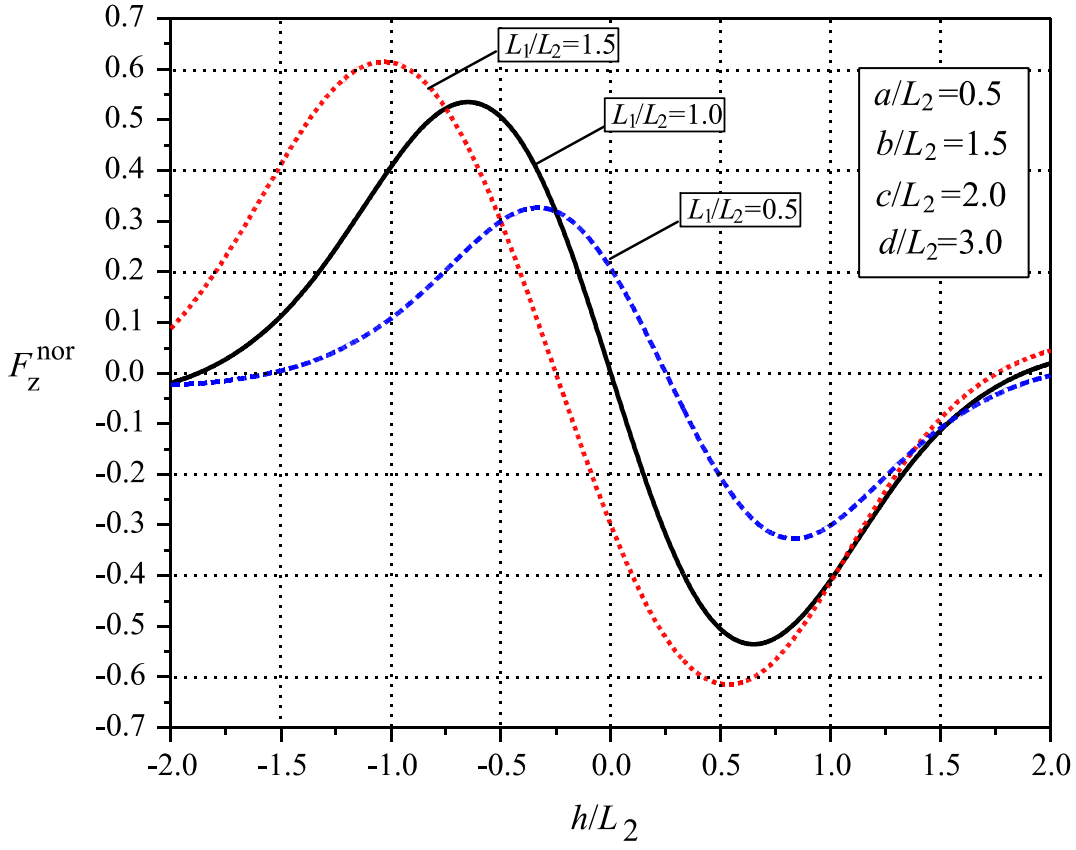
Slika 8.29. *Normalizovana aksijalna sila u funkciji normalizovanog rastojanja* h/L_2 *za različite dimenzije vazdušnog procepa,* $\delta / L_2 = c/L_2 - b/L_2$.



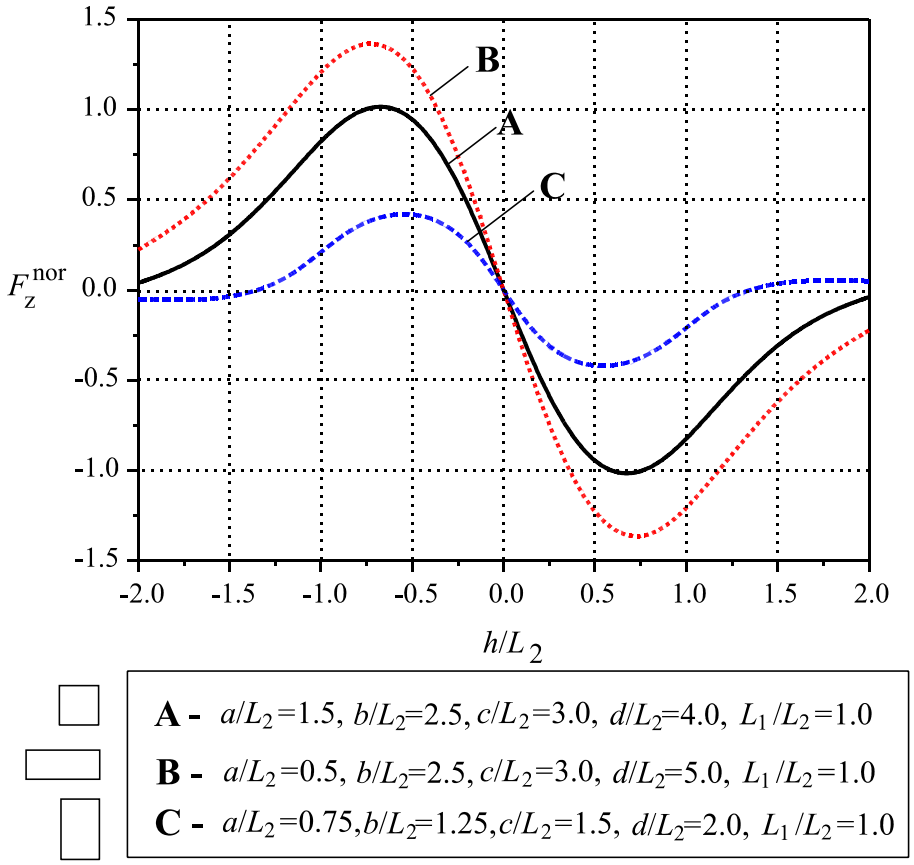
Slika 8.30. *Zavisnost akijalne sile od dimenzija vazdušnog procepa,* $\delta / L_2 = c/L_2 - b/L_2$.



Slika 8.31. *Magnetna sila u zavisnosti od rastojanja, h/L_2 , za različite debljine gornjeg stalnog magneta.*



Slika 8.32. *Magnetna sila u zavisnosti od rastojanja, h/L_2 , za različite visine stalnih magneta.*



Slika 8.33. *Aksijala sila u funkciji rastojanja* h/L_2 *za različite poprečne preseke magneta.*

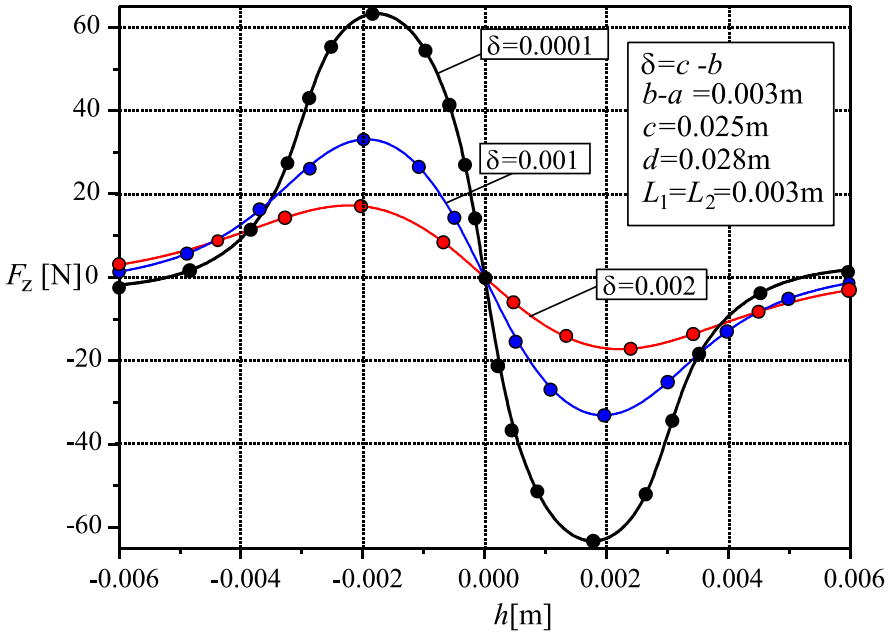
Dobijeni rezultati za silu između stalnih magneta, $F_z^{\,nor} = F_z/\left(\mu_0 M^2 L_2^2\right)$, čiji su parametri $c/L_2 = 2$, $d/L_2 = 3$, $L_1/L_2 = 1.0$ i $h/L_2 = 1.5$, za različite dimenzije poluprečnika gornjeg magneta, a/L_2 i b/L_2, upoređeni su rezultatima metoda konačnih elemenata (FEM), Tabela 8.9.

Tabela 8.9. *Uporedni rezultati za magnetnu silu u funkciji poluprečnika torusa* a/L_2 *i* b/L_2

a/L_2	b/L_2	F_z^{nor}	F_z^{nor} (FEM)
0.5	1.5	-0.111398	-0.111609
1.0	2.0	0.046574	0.046183
1.5	2.5	0.817334	0.816931
2.0	3.0	1.499130	1.498061
2.5	3.5	0.946663	0.945968
3.0	4.0	-0.050398	-0.051031
3.5	4.5	-0.398905	-0.399117
4.0	5.0	-0.345845	-0.345966

Rezultati primenjenog polunumeričkog metoda su upoređeni sa rezultatima dobijenim Kulombijskim pristupom, publikovanim u referenci [125] (na slici 8.34 prikazani punom

linijom). Zavisnost aksijalne sile od rastojanja magneta za različite vazdušne procepe je data za parametre magneta: $b-a=0.003\,\mathrm{m}$, $c=0.025\,\mathrm{m}$, $d=0.028\,\mathrm{m}$, $L_1=L_2=0.003\,\mathrm{m}$ i intenzitet vektora jačine magnetne polarizacije $J=1\,\mathrm{T}$. Na osnovu prikazane zavisnosti sile od rastojanja između magneta, slika 8.34, očigledno je da se primenjeni metodi veoma dobro slažu a prednost pristupa korišćenog u ovoj disertaciji je što je rezultujući izraz za polje i silu koja deluje između magneta pasivnog magnetnog ležaja znatno jednostavniji od onog datog u pomenutoj referenci. U rezultujućem izrazu za polje figurišu potpuni eliptički integrali prve i druge vrste, a u izrazu za silu figurišu samo potpuni eliptički integrali druge vrste i bilo kakva dodatna integracija je izbegnuta ovim pristupom. Dakle, prednost pomenutog pristupa je jednostavnost i vremensaka efikasnost.

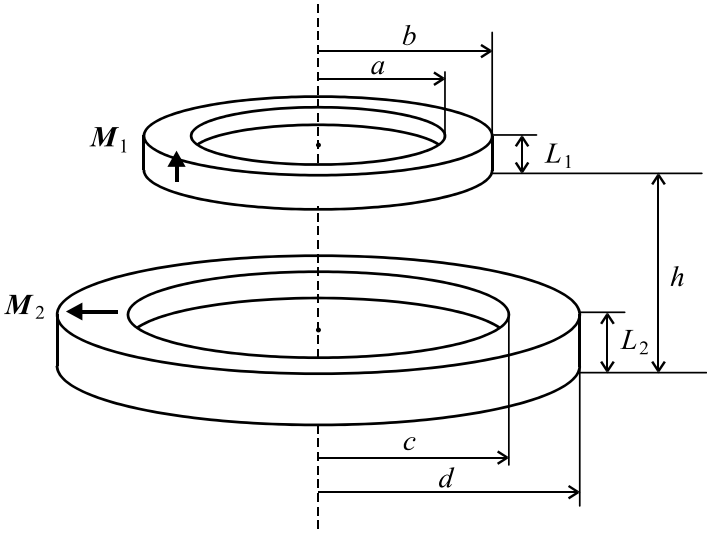


Slika 8.34. *Uporedni rezultati za aksijalnu silu u funkciji rastojanja između magneta, za različite dimenzije vazdušnog procepa.*

8.3. Pasivni magnetni ležaj - aksijalna i radijalna magnetizacija magneta

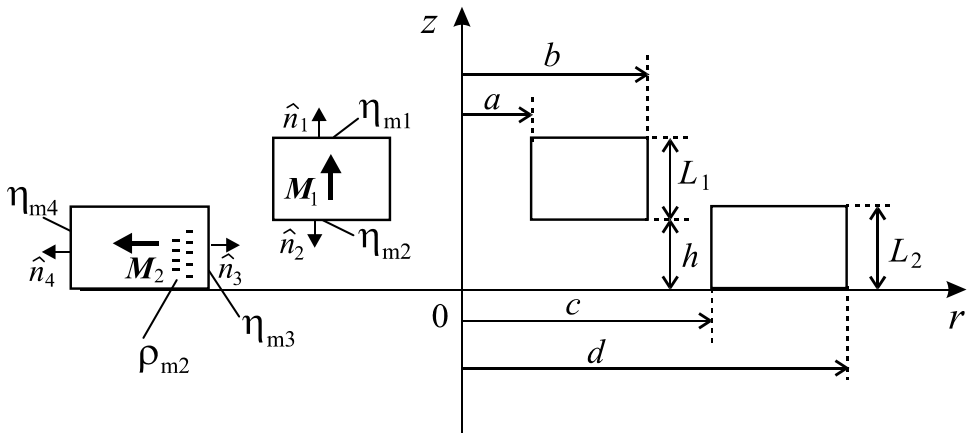
Još jedan tip pasivnog magnetnog ležaja, koji do sada nije modelovan od strane drugih istraživača u svetu, je analiziran i prikazan je na slici 8.35. Čine ga dva stalna magneta oblika prstena pravouglog poprečnog preseka. Gornji magnet je homogeno namagnetisan u aksijalnom pravcu, $\boldsymbol{M}_1=M\hat{z}$, pa se, s obzirom na granične uslove koji moraju biti zadovoljeni, (5.26, 5.32), može zaključiti da postoje samo površinska magnetna opterećenja na bazisima magneta. Donji magnet je homogeno namagnetisan u radijalnom pravcu,

$\boldsymbol{M}_2 = M\hat{r}$, tako da će postojati površinska magnetna opterećenja na unutrašnjem i spoljašnjem omotaču magneta i zapreminska fiktivna magnetna opterećenja.



Slika 8.35. *Pasivni magnetni ležaj.*

Kao u slučaju prethodna dva tipa magnetnih ležaja koji su analizirani i rešavani pomoću polunumeričkog pristupa baziranog na fiktivnim magnetnim opterećenjima i ovaj magnetni ležaj je najjednostavnije rešiti primenom uniformne diskretizacione tehnike. Gornji magnet može da se posmatra kao sistem kružnih kontura (segmenata) opterećenih određenim količinama magnetnih opterećenja kojim su diskretizovani njegovi bazisi. Sa $N_{\mathrm{s}1}$ je označen ukupan broj segmenata bazisa magneta. Donji magnet se može diskretizovati i posmatrati kao sistem kontura kojim je zamenjeni uticaji i površinskih i zapreminskih magnetnih opterećenja. Pri tom je broj površinskih segmenata omotača $N_{\mathrm{s}2}$, dok je broj segmenata zapremine magneta $N_{\mathrm{v}}^{\mathrm{tot}}$. Ukupan broj površinskih segmenata analiziranog sistema je $N_{\mathrm{s}}^{\mathrm{tot}} = N_{\mathrm{s}1} + N_{\mathrm{s}2}$.



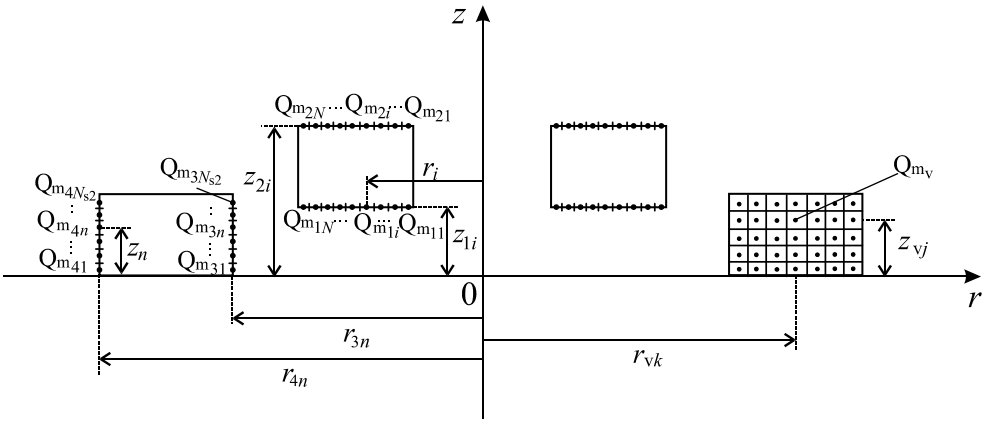
Slika 8.36. *Raspodela fiktivnih magnetnih opterećenja.*

S obzirom na granične uslove koji mora da budu zadovoljeni, određuju se površinske i zapreminske gustine fiktivnih magnetnih opterećenja, za oba magneta, iz relacija:

$$\eta_{m1} = \hat{n}_1 \cdot \boldsymbol{M}_1 = M_1,\ \eta_{m2} = \hat{n}_2 \cdot \boldsymbol{M}_1 = -M_1,\ \eta_{m3} = \hat{n}_3 \cdot \boldsymbol{M}_2 = -M_2,\ \eta_{m4} = \hat{n}_4 \cdot \boldsymbol{M}_2 = M_2 \text{ i}$$

$$\rho_m = -\mathrm{div}\boldsymbol{M}_2 = -\frac{M_2}{r}, \tag{8.38}$$

a njihova raspodela je prikazana na slici 8.36.



Slika 8.37. *Diskretizacioni model.*

Uzimajući u obzir geometriju stalnih magneta koji čine magnetni ležaj, slika 8.37, mogu se definisati sledeći parametri za segmente bazisa gornjeg stalnog magneta:

$$r_i = a + \frac{2i-1}{2N_{s1}}(b-a),\ i = 1,2,\ldots,N_{s1}, \tag{8.39}$$

$$z_{1i} = h,\ \ i = 1,2,\ldots,N_{s1}, \tag{8.40}$$

$$z_{2i} = h + L_1,\ \ i = 1,2,\ldots,N_{s1}, \tag{8.41}$$

dok su magnetna opterećenja segmenata

$$Q_{m1i} = -M_1 2\pi r_i \frac{b-a}{N_{s1}},\ i = 1,2,...,N_{s1}, \tag{8.42}$$

$$Q_{m2i} = M_1 2\pi r_i \frac{b-a}{N_{s1}},\ i = 1,2,...,N_{s1}. \tag{8.43}$$

Za donji magnet, parametri segmenata omotača se određuju iz relacija

$$z_n = \frac{2n-1}{2N_{s2}}L_2,\ \ n = 1,2,\ldots,N_{s2}, \tag{8.44}$$

$$r_{3n} = c,\ \ n = 1,2,\ldots,N_{s2}, \tag{8.45}$$

$$r_{4n} = d,\ \ n = 1,2,\ldots,N_{s2}, \tag{8.46}$$

a magnetna opterećenja kontura su

$$Q_{\mathrm{m}3n} = -M_2 2\pi c \frac{L_2}{N_{\mathrm{s}2}},\ n = 1,2,...,N_{\mathrm{s}2}, \tag{8.47}$$

$$Q_{\mathrm{m}4n} = M_2 2\pi d \frac{L_2}{N_{\mathrm{s}2}},\ n = 1,2,...,N_{\mathrm{s}2}. \tag{8.48}$$

S obzirom da magnetna opterećenja postoje unutar donjeg magneta, parametri zapreminskih segmenata su

$$z_{\mathrm{v}j} = \frac{2j-1}{2N_{\mathrm{v}3}} L_2,\ j = 1,2,\ldots,N_{\mathrm{v}1}, \tag{8.49}$$

$$r_{\mathrm{v}k} = c + \frac{2k-1}{2N_{\mathrm{v}4}}(d-c),\ k = 1,2,\ldots,N_{\mathrm{v}2}, \tag{8.50}$$

a njihova magneta opterećenja

$$Q_{\mathrm{mv}} = Q_{\mathrm{mv}n} = -M_2 2\pi L_2 \frac{d-c}{N_{\mathrm{v}1}N_{\mathrm{v}2}},\ n = 1,2,...,N_{\mathrm{v}1}N_{\mathrm{v}2}. \tag{8.51}$$

$N_{\mathrm{v}}^{\mathrm{tot}} = N_{\mathrm{v}1} \cdot N_{\mathrm{v}2}$ je ukupan broj zapreminskih segmenata donjeg magneta.

Na osnovu poznatog izraza za silu između dve kružne konture, jednačina (5.82) može se odrediti sila magnetnog ležaja. To se postiže sumiranjem udela svih segmenata gornjeg i svih segmenata donjeg magneta

$$F_z = F_{z13} + F_{z23} + F_{z14} + F_{z24} + F_{z1\mathrm{v}} + F_{z2\mathrm{v}}, \tag{8.52}$$

pri čemu je:

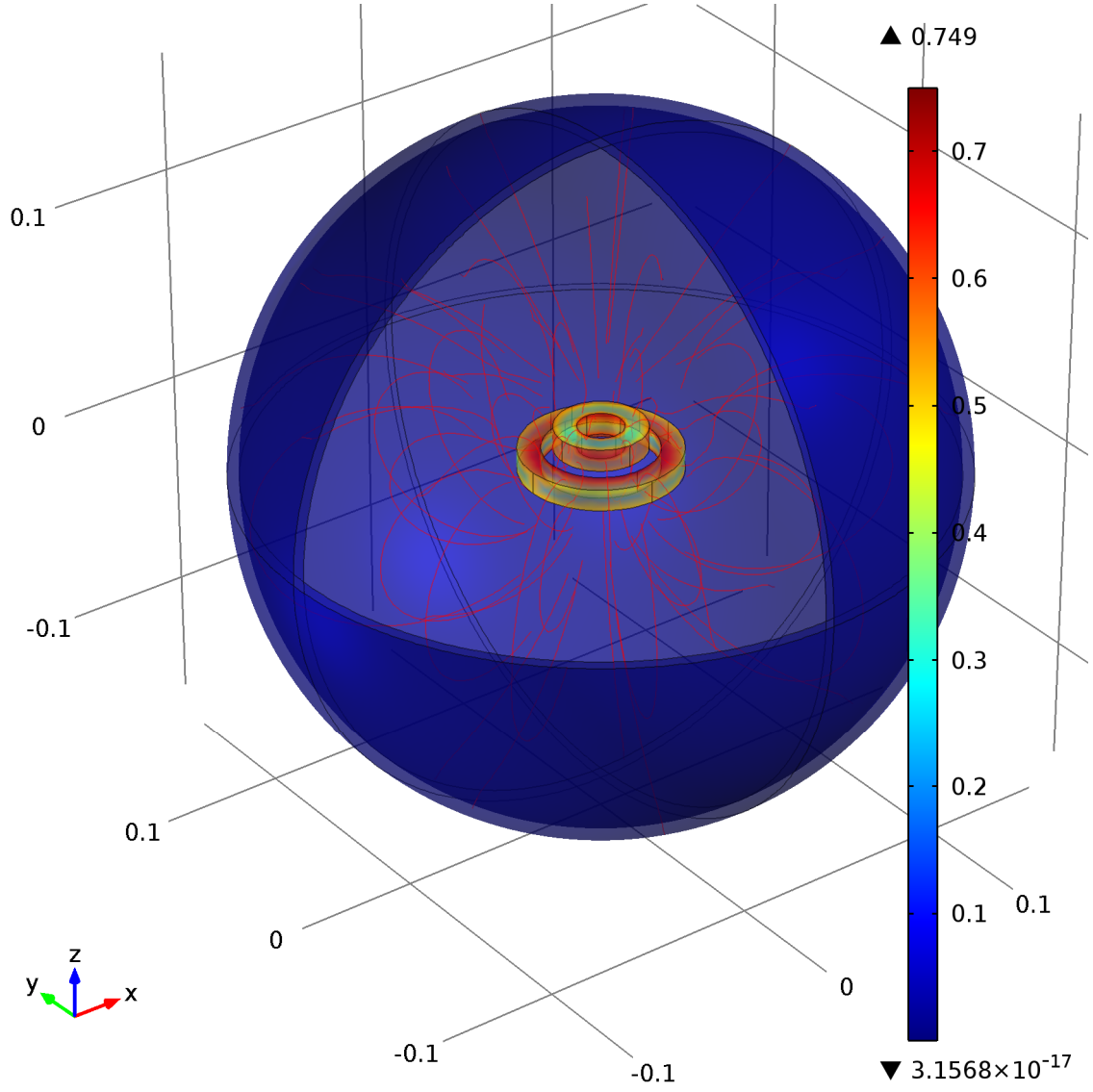
- $F_{z13} + F_{z23} + F_{z14} + F_{z24}$ - sila između površinskih segmenata radijalno namagnetisanog magneta i segmenata aksijalno namagnetisanog magneta.
- $F_{z1\mathrm{v}} + F_{z2\mathrm{v}}$ - sila između zapreminskih segmenata radijalnog magneta i segmenata aksijalnog magneta.

Konačno, intenzitet sile između magneta pasivnog magnetnog ležaja je

$$\begin{aligned} F_z = \frac{\mu_0}{2\pi^2}\Bigg(& \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{s}1}}\sum_{n=1}^{N_{\mathrm{s}2}} \Big(Q_{\mathrm{m}1i}Q_{\mathrm{m}3n}F_{z_{\mathrm{p}}}(r_{3n},r_i,z_n,z_{1i}) + Q_{\mathrm{m}2i}Q_{\mathrm{m}3n}F_{z_{\mathrm{p}}}(r_{3n},r_i,z_n,z_{2i}) + \\ & Q_{\mathrm{m}1i}Q_{\mathrm{m}4n}F_{z_{\mathrm{p}}}(r_{4n},r_i,z_n,z_{1i}) + Q_{\mathrm{m}2i}Q_{\mathrm{m}4n}F_{z_{\mathrm{p}}}(r_{4n},r_i,z_n,z_{2i})\Big) + \\ & \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{s}1}}\sum_{j=1}^{N_{\mathrm{v}1}}\sum_{k=1}^{N_{\mathrm{v}2}} \Big(Q_{\mathrm{mv}}Q_{\mathrm{m}1i}F_{z_{\mathrm{p}}}(r_{\mathrm{v}k},r_i,z_{\mathrm{v}j},z_{1i}) + Q_{\mathrm{mv}}Q_{\mathrm{m}2i}F_{z_{\mathrm{p}}}(r_{\mathrm{v}k},r_i,z_{\mathrm{v}j},z_{2i})\Big)\Bigg). \end{aligned} \tag{8.53}$$

Raspodela vektora magnetne indukcije za magnetni ležaj koji čini jedan aksijalno i jedan radijalno namagnetisan magnet oblika prstena, dobijena primenom COMSOL Multiphysics softvera, data je na slici 8.38.

Polazeći od pretpostavke da su intenziteti vektora gustine magnetnog momenta istog intenziteta, $M_1 = M_2 = M$, na osnovu izraza (8.53), izračunata je magnetna sila za različit broj segmenata i u Tabeli 8.10 je prikazana konvergencija rezultata. S obzirom na vrednosti u Tabeli 8.10, očigledno je da nije neophodno uzeti veliki broj elemenata da bi se dobila zadovoljavajuća tačnost, kao što je slučaj u prethodnim konfiguracijama rešavanim polunumeričkim pristupom baziranim na fiktivnim magnetnim opterećenjima. U cilju postizanja sto kraćeg vremena proračuna, broj segmenata je ograničen na $N_{\mathrm{s}}^{\mathrm{tot}} = N_{\mathrm{v}}^{\mathrm{tot}} = 100$.



Slika 8.38. *Prostorna raspodela vektora magnetne indukcije za magnetni ležaj u slučaju kada je gornji magnet aksijalne magnetizacije a donji radijalne magnetizacije.*

Tabela 8.10. *Konvergencija rezultata za normalizovanu aksijalnu silu.*

N_v^{tot} \ N_s^{tot}	25	50	75	100	150	200	300
25	-0.486486	-0.486566	-0.486580	-0.486584	-0.486588	-0.486589	-0.486590
50	-0.486521	-0.486601	-0.486614	-0.486619	-0.486622	-0.486623	-0.486624
75	-0.486535	-0.486615	-0.486628	-0.486633	-0.486636	-0.486637	-0.486638
100	-0.486539	-0.486619	-0.486633	-0.486637	-0.486640	-0.486641	-0.486642
150	-0.486544	-0.486624	-0.486638	-0.486642	-0.486646	-0.486647	-0.486648
200	-0.486548	-0.486628	-0.486641	-0.486646	-0.486649	-0.486647	-0.486651
300	-0.486551	-0.486631	-0.486644	-0.486649	-0.486652	-0.486653	-0.486654

Rezultati za silu dobijeni primenom polunumeričkog pristupa su upoređeni za onim dobijenim primenom metoda konačnih elemenata (FEMM 4.2 softver). U Tabeli 8.11 prikazana je normalizovana sila, $F_z^{\mathrm{nor}} = F_z / \left(\mu_0 M^2 L_2^2\right)$, u funkciji poluprečnika aksijalnog magneta kao i relativna greška za parametre magneta: $c/L_2 = 3,\ d/L_2 = 4,\ L_1/L_2 = 1.0$ i njihovo međusobno rastojanje $h/L_2 = 1.5$.

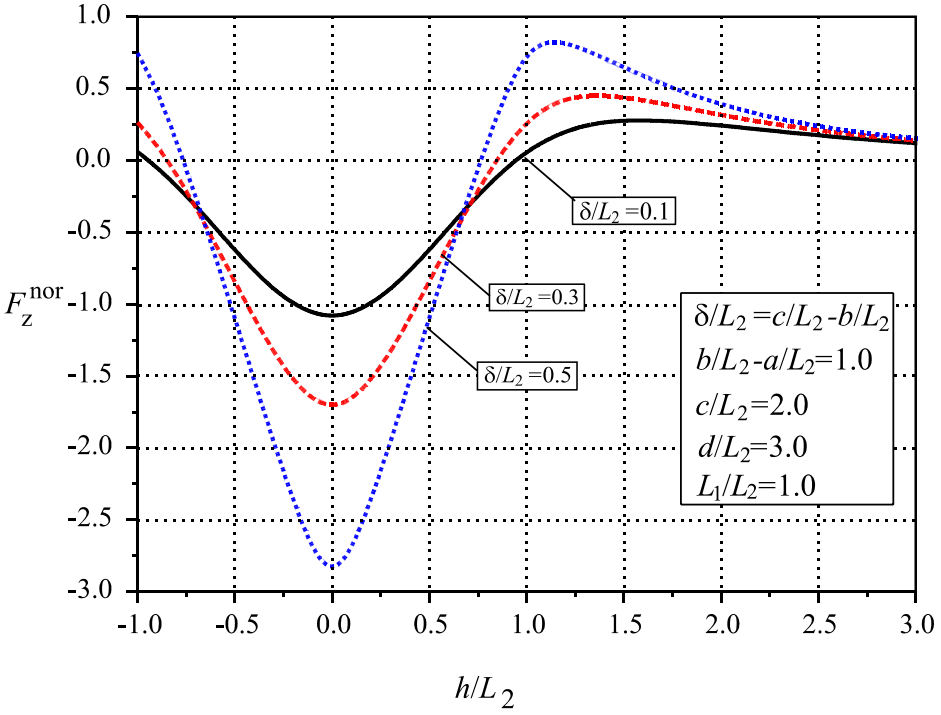
Tabela 8.11. *Uporedni rezultati za magnetnu silu u funkciji poluprečnika* a/L_2 *i* b/L_2.

a/L_2	b/L_2	F_z^{nor}	F_z^{nor} (FEM)	Relativna greška [%]
1.0	2.0	0.095805	0.095665	-0.1463
1.5	2.5	0.414182	0.413885	-0.0717
2.0	3.0	1.096810	1.095936	-0.0797
2.5	3.5	1.398870	1.397204	-0.1192
3.0	4.0	0.217268	0.214446	-1.3159
3.5	4.5	-1.268150	-0.127006	0.1504
4.0	5.0	-1.324010	-1.325731	0.1298
4.5	5.5	-0.644149	-0.644430	0.0436
5.0	6.0	-0.227007	-0.227140	0.0585

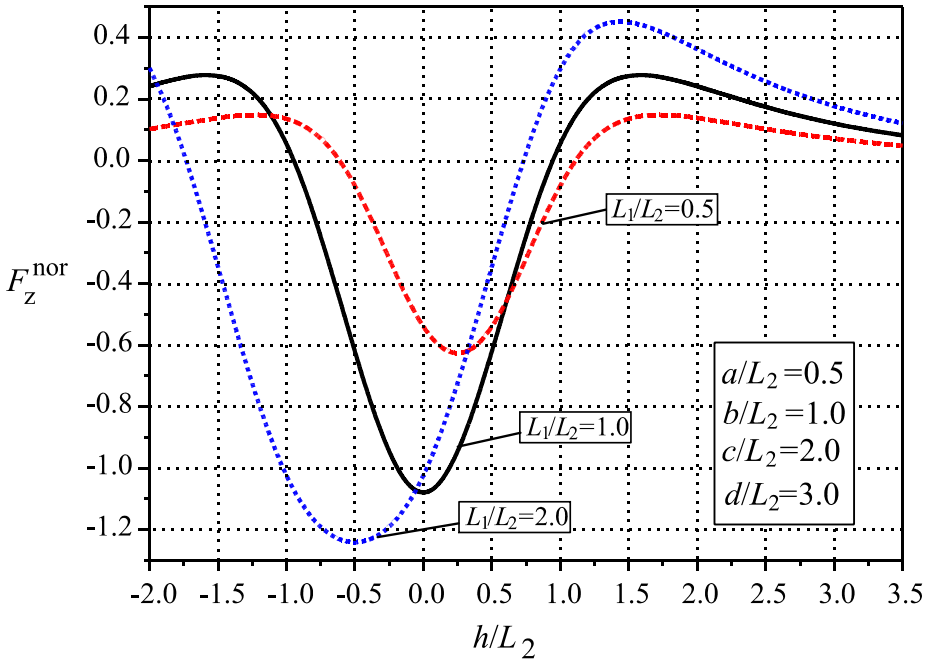
Aksijalna sila je prikazana na slici 8.39 u funkciji rastojanja između magneta, h/L_2, za različite dimenzije vazdušnog procepa, $\delta/L_2 = c/L_2 - b/L_2$ i parametre magneta: $b/L_2 - a/L_2 = 1.0,\ c/L_2 = 2.0,\ d/L_2 = 3.0,\ L_1/L_2 = 1.0$.

Kako bi se povećala mogućnost analize sile u zavisnosti od parametara, aksijalna sila u

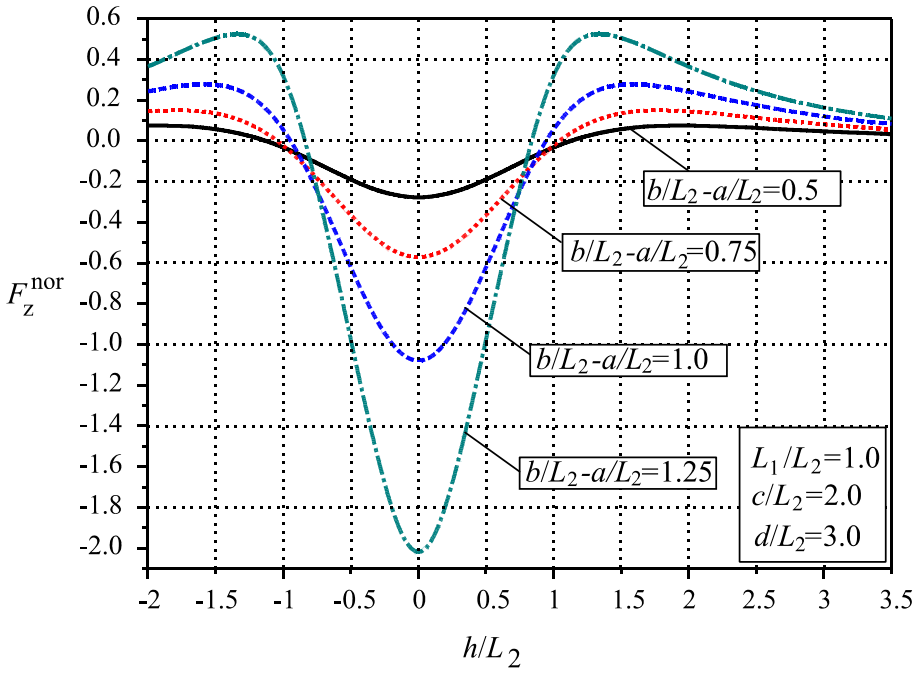
funkciji rastojanja h/L_2, za različite visine magneta je prikazana na slici 8.40 (za parametre $a/L_2=0.5, b/L_2=1.0, c/L_2=2.0, d/L_2=3.0$) dok je na slici 8.41 data zavisnost sile za različite debljine aksijalno namagnetisanog magneta kada je: $c/L_2=2.0$, $d/L_2=3.0$, $L_1/L_2=1.0$.



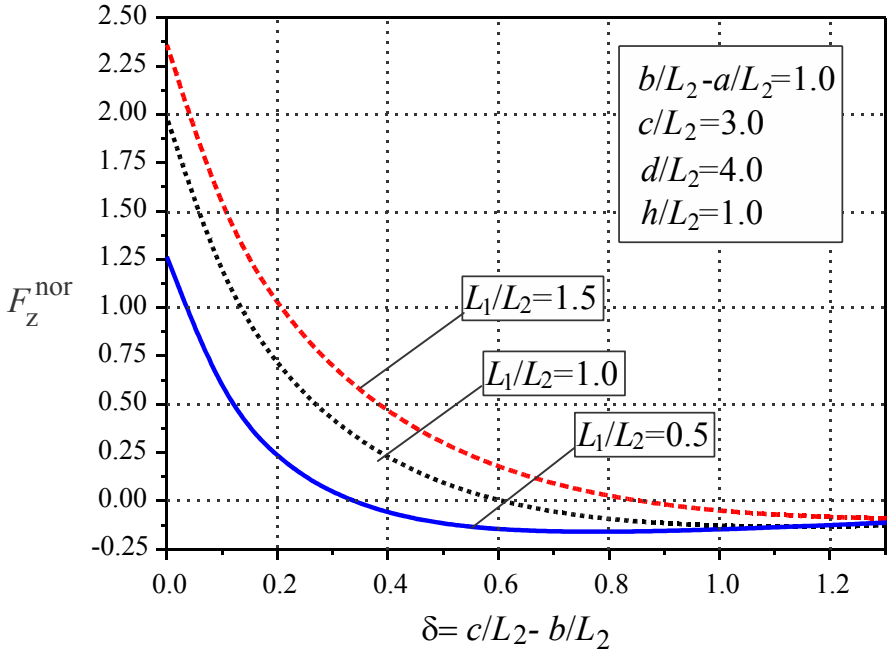
Slika 8.39. *Magnetna sila u funkciji rastojanja između magneta, h/L_2, za različite dimenzije vazdušnog procepa.*



Slika 8.40. *Zavisnost magnetne sile od rastojanja između magneta, h/L_2, za različite visine magneta.*



Slika 8.41. *Magnetna sila u funkciji rastojanja između magneta, h/L_2, za različite debljine aksijalno namagnetisanog magneta.*

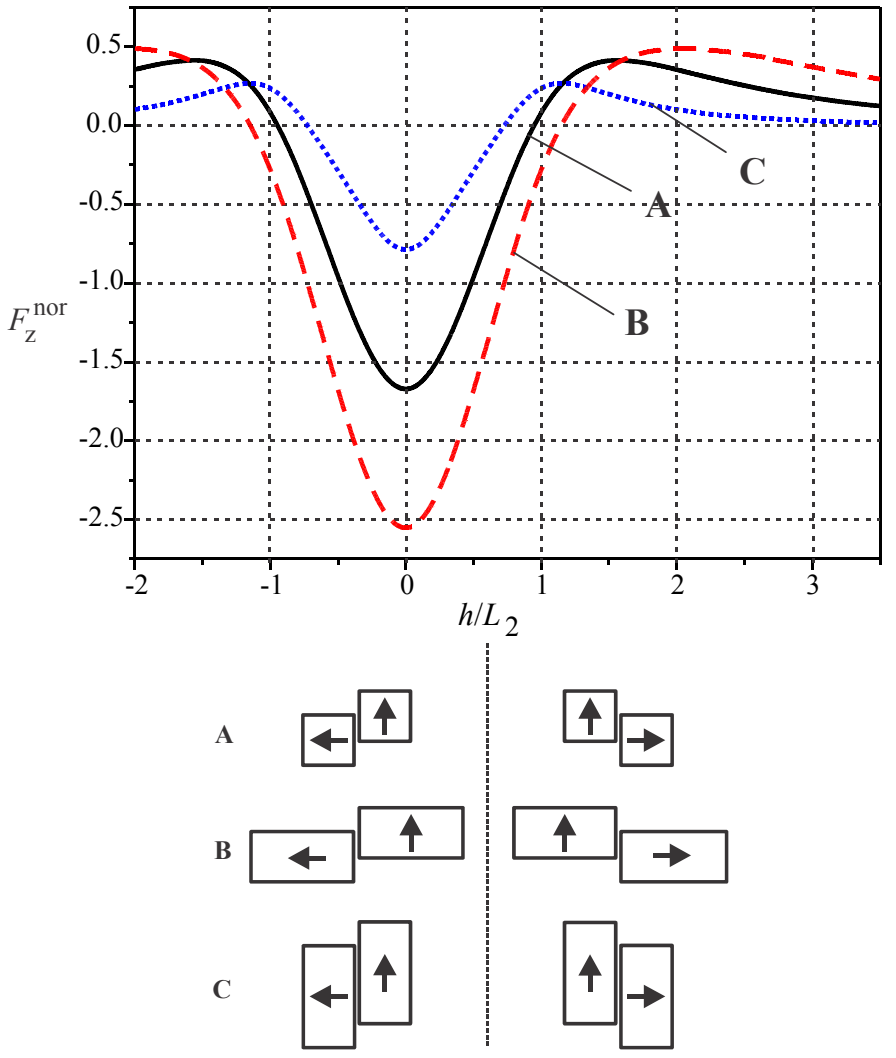


Slika 8.42. *Zavisnost aksijalne sile od dimenzija vazdušnog procepa.*

Zavisnost aksijalne sile od dimenzija vazdušnog procepa pri različitim visinama magneta je prikazana na slici 8.42 za parametre magneta $b/L_2 - a/L_2 = 1.0, c/L_2 = 3.0, d/L_2 = 4.0$, $h/L_2 = 1.0$.

Analizom prikazanih grafika uočljivo je da se, sa porastom debljine i visine aksijalno namagnetisanog magneta i sa smanjenjem vazdušnog procepa, povećava i intenzitet sile.

U cilju određivanja konfiguracije magneta pri kojoj se dobija maksimalna sila razmatrana su tri različita slučaja. Poprečni preseci analiziranih konfiguracija i dimenzije magneta su prikazani na slici 8.43. Na istoj slici ja data zavisnost magnetne sile od rastojanja između magneta, h/L_2, za sve tri konfiguracije. Uočljivo je da se za ovaj tip magnetnog ležaja i dimenzije prikazane na slici, maksimalna vrednost normalizovane sile ostvaruje u slučaju kada su magneti pravougaonog poprečnog preseka i kada je širina magneta dva puta veća od njegove visine. Intezitet vektora gustine magnetnog momenta za oba magneta je isti i iznosi $M_1 = M_2 = 900$ kA/m.



A	a=1.5cm, b=2.0cm, c=3.0cm, d=4.0cm , L_1=L_2=1.0cm
B	a=1.0cm, b=2.0cm, c=3.0cm, d=5.0cm , L_1=L_2=1.0cm
C	a=1.5cm, b=2.0cm, c=3.0cm, d=4.0cm , L_1 =L_2=2.0cm

Slika 8.43. *Aksijalna sila u funkciji h/L_2 za tri različite konfiguracije magnetnog ležaja.*



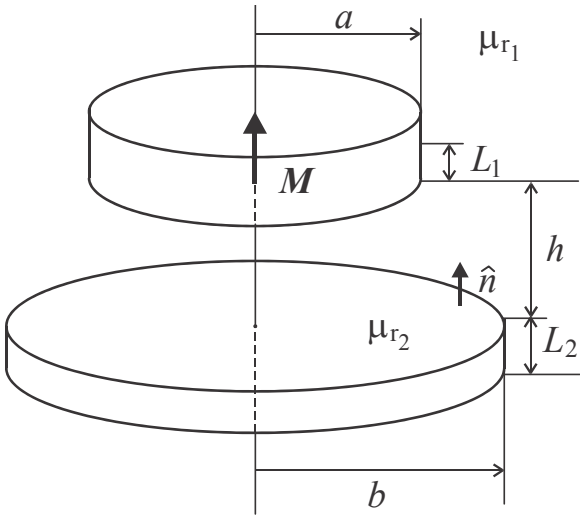
9. Stalni magneti u prisustvu tela od magnetnog materijala

9. Stalni magneti u prisustvu tela od magnetnog materijala

9.1. Stalni magnet oblika cilindra i cilindar od linearnog magnetnog materijala

Iako postoji veliki broj metoda za određivanje polja i sile kod stalnih magneta, do sada je određivana samo sila između stalnih magneta, stalnog magneta i linearne magnetne ravni i sila između magneta i provodnika. Sila između stalnog magneta i linearne magnetne ravni je određivana primenom teoreme lika u ravnom ogledalu. U ovoj disertaciji biće prvi put primenjen Hibridni metod graničnih elemenata (HBEM) za proračun magnetnog polja i sile stalnih magneta, u prisustvu tela načinjenih od linearnih magnetnih materijala. U poglavlju 5.2.3 je dat detaljan opis ovog metoda.

Posmatra se stalni magnet oblika cilindra homogeno namagnetisan u aksijalnom pravcu postavljen iznad cilindra načinjenog od linearnog magnetnog materijala, relativne magnetne permeabilnosti μ_{r2}, slika 9.1. S obzirom da je cilindar homogeno namagnetisan u aksijalnom pravcu, fiktivna magnetna opterećenja postoje samo na bazisima magneta, površinske gustine, $\eta_m = \hat{n} \cdot \boldsymbol{M}$, pa se bazisi mogu diskretizovati i posmatrati kao sistemi kružnih kontura, opterećenih određenim količinama fiktivnog magnetnog opterećenja. S obzirom da je cilindar načinjen od linearnog magnetnog materijala i zajedno sa magnetom se nalazi u sredini magnetne permeabilnosti μ_{r1}, ekvivalentni toroidalni magnetni izvori postoje na oba bazisa i omotaču cilindra.



Slika 9.1. *Stalni magnet oblika cilindra i cilindar od linearnog magnetnog materijala.*

Na slici 9.2 prikazan je diskretizacioni model i raspodela magnetnih opterećenja stalnog

magneta i toroidalnih magnetnih izvora na cilindru od magnetnog materijala.

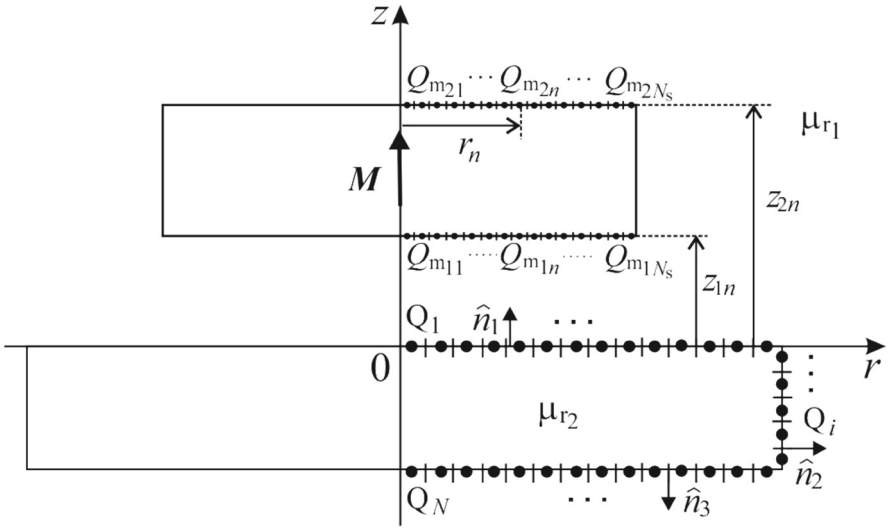
Magnetni skalar potencijal posmatranog sistema je

$$\varphi_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2\pi^2}\left(\sum_{n=1}^{N_{\mathrm{s}}} \left(Q_{\mathrm{m}1} \frac{K\left(\frac{\pi}{2}, k_{1n}\right)}{\sqrt{(r+r_n)^2 + (z-z_{1n})^2}} + Q_{\mathrm{m}2} \frac{K\left(\frac{\pi}{2}, k_{2n}\right)}{\sqrt{(r+r_n)^2 + (z-z_{2n})^2}} \right) + \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{tot}}} Q_i \frac{K\left(\frac{\pi}{2}, k_i\right)}{\sqrt{(r+r_i)^2 + (z-z_i)^2}} \right), \tag{9.1}$$

pri čemu je $k_{1n}^2 = \dfrac{4rr_n}{(r+r_n)^2 + (z-z_{1n})^2}$, $k_{2n}^2 = \dfrac{4rr_n}{(r+r_n)^2 + (z-z_{2n})^2}$, $k_i^2 = \dfrac{4rr_i}{(r+r_i)^2 + (z-z_i)^2}$.

Prva suma u izrazu za potencijal predstavlja magnetni skalar potencijal koji stvara stalni magnet, dok je druga suma magnetni skalar potencijal koji potiče od cilindra načinjenog od linearnog magnetnog materijala.

Sa N_{s} je označen ukupan broj segmenata (kružnih kontura) kojim je diskretizovan svaki od bazisa stalnog magneta.



Slika 9.2. *Diskretizacioni model.*

Parametri diskretizacionih segmenata bazisa magneta se određuje iz relacija

$$r_n = \frac{2n-1}{2N_1} a,\ n = 1, 2, \ldots, N_{\mathrm{s}}, \tag{9.2}$$

$$z_{1n} = h,\ n = 1, 2, \ldots, N_{\mathrm{s}}, \tag{9.3}$$

$$z_{2n} = h + L_1,\ n = 1, 2, \ldots, N_{\mathrm{s}}, \tag{9.4}$$

dok su magnetna opterećenja kružnih kontura donjeg i gornjeg bazisa

$$Q_{\mathrm{m}1\,n} = -M\,2\pi r_n \frac{a}{N_s},\ n = 1,2,...,N_{\mathrm{s}}\,, \tag{9.5}$$

$$Q_{\mathrm{m}2\,n} = M\,2\pi r_n \frac{a}{N_s},\ n = 1,2,...,N_{\mathrm{s}}\,. \tag{9.6}$$

Sa (r_i, z_i) su označene pozicija toroidalnih magnetnih izvora na bazisima i omotaču cilindra. Za izvore gornjeg bazisa cilindra važi: $r_i = \dfrac{2i-1}{2N_1} b,\ z_i = 0,\ \ i = 1,2,\ldots,N_1$, dok su poluprečnici toroidalnih elektroda $a_{\mathrm{e}1} = \dfrac{\Delta r_1}{\pi},\ \Delta r_1 = \dfrac{b}{N_1}$.

Koordinate pozicija izvora omotača cilindra su:

$r_i = b,\ z_i = \dfrac{2N_1 - 2i + 1}{2N_2} L_2,\ \ i = N_1 + 1,\ \ldots,\ N_1 + N_2$, a poluprečnici toroidalnih elektroda $a_{\mathrm{e}2} = \dfrac{\Delta z_2}{\pi},\ \Delta z_2 = \dfrac{L_2}{N_2}$.

Za donji bazis su zadovoljene relacije:

$r_i = \dfrac{2i - 2N_1 - 2N_2 - 1}{2N_2} b,\ z_i = -L2,\quad i = N_1 + N_2,\ldots,2N_1 + N_2$ i $a_{\mathrm{e}3} = a_{\mathrm{e}1}$.

Na osnovu zadatog početnog broja izvora, N_{p}, određuje se broj izvora na omotaču i bazisima cilindra. Broj toroidalnih izvora na svakom od bazisa cilindra označen je sa N_1, a sa N_2 broj izvora na omotaču cilindra, tako da je ukupan broj toroidalnih magnetnih izvora cilindra $N_{\mathrm{tot}} = 2N_1 + N_2$.

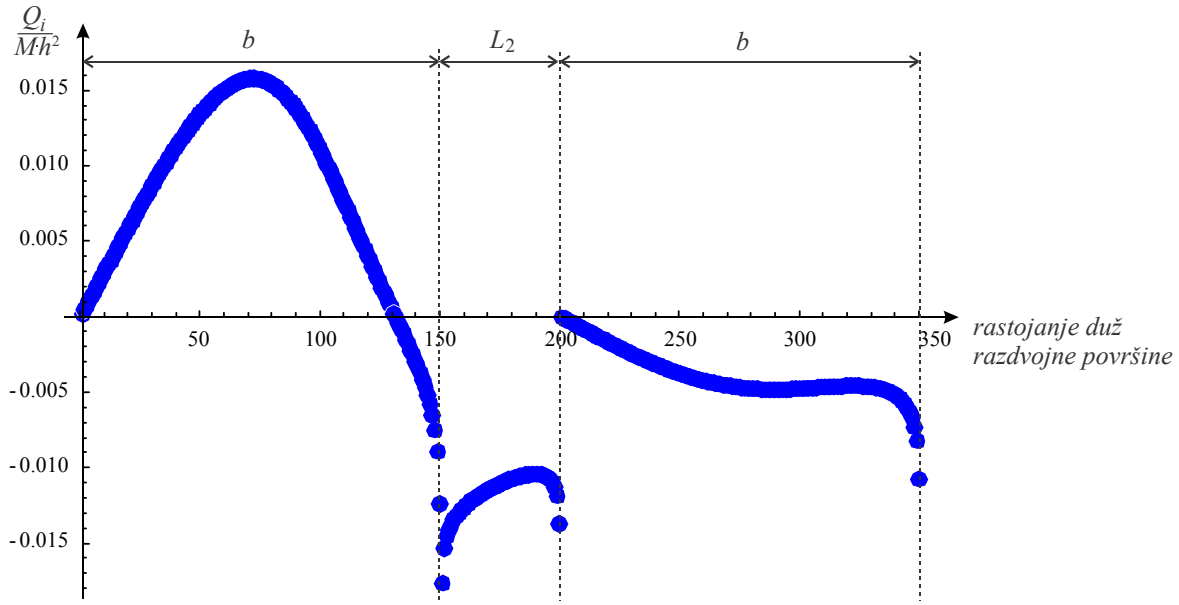
Vektor jačine magnetnog polja je $\boldsymbol{H} = -\mathrm{grad}(\varphi_{\mathrm{m}})$.

Veza između normalne komponente vektora magnetnog polja i ukupnog površinskog magnetnog opterećenja cilindra data je izrazom:

$$\hat{\boldsymbol{n}}_k \cdot \boldsymbol{H}_k^{(0+)} = \frac{-\mu_{\mathrm{r}2}}{\mu_{\mathrm{r}1} - \mu_{\mathrm{r}2}} \eta_{\mathrm{m}}\ ,\ \ \eta_{\mathrm{m}} = \frac{Q_i}{2r_i \pi \Delta r_i},\ i = 1,2,\ldots,N_{\mathrm{tot}},\ k = 1,2,3.\,, \tag{9.7}$$

gde su $\hat{\boldsymbol{n}}_k$ jedinični vektori normale orijentisani od sloja μ_2 ka sloju μ_1, odnosno $\hat{\boldsymbol{n}}_1 = \hat{\boldsymbol{z}}$, $\hat{\boldsymbol{n}}_2 = \hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{n}}_3 = -\hat{\boldsymbol{z}}$. Korišćenjem metoda podešavanja u tačkama za normalnu komponentu vektora magnetnog polja (9.7), formira se sistem linearnih jednačina i određuju se magnetna opterećenja toroidalnih magnetnih izvora, Q_i, raspoređenih na razdvojnim površinama dva magnetna sloja.

Na slici 9.3 je prikazana je raspodela normalizovanih magnetnih opterećenja, $Q_{i\,\mathrm{nor}} = Q_i \big/ Mh^2$, duž razdvojne površine dva različita magnetna materijala, odnosno duž bazisa i omotača cilindra. Raspodela je data za parametre sistema: $a/L_1 = 2.0$, $b/L_1 = 3.0$, $L_2/L_1 = 1.0$, $h/L_1 = 1.0$, $\mu_{\mathrm{r}1} = 1$, $\mu_{\mathrm{r}2} = 3$, $N_s = 100$, $N_{\mathrm{p}} = 200$.



Slika 9.3. *Raspodela normalizovanog magnetnog opterećenja duž razdvojne površine.*

Nakon rešavanje sistema linearnih jednačina i određivanja magnetnih opterećenja toroidalnih izvora, magnetni skalar potencijal koji potiče od magnetnog cilindra se može izraziti relaciom

$$\varphi_{\mathrm{mc}} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{tot}}} Q_i \frac{K\left(\frac{\pi}{2}, k_i\right)}{\sqrt{(r + r_i)^2 + (z - z_i)^2}}, \tag{9.8}$$

a na osnovu njega se može odrediti i vektor magnetnog polja, kao i magnetna indukcija u proizvoljnoj tački u okolini cilindra.

Konačno, korišćenjem izraza (5.63), određuje se sila između stalnog magneta oblika cilindra i cilindra načinjenog od magnetnog materijala relativne magnetne permeabilnosti $\mu_{\mathrm{r}2}$. Ako se sistem nalazi u sredini magnetne permeabilnosti $\mu_1 = \mu_0$, sumiranjem udela cilindra i oba bazisa magneta dobija se konačni izraz za silu

$$F_z = \frac{\mu_0}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{N_{\mathrm{s}}} \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{tot}}} \left(Q_{\mathrm{m}1} Q_i \frac{(z_{1n} - z_i) E\left(\frac{\pi}{2}, k_1\right)}{\left((r_n - r_i)^2 + (z_{1n} - z_i)^2\right)\sqrt{(r_n + r_i)^2 + (z_{1n} - z_i)^2}} + \right.$$

$$+Q_{\mathrm{m}2}Q_i\frac{(z_{2n}-z_i)E\left(\frac{\pi}{2},k_2\right)}{\left((r_n-r_i)^2+(z_{2n}-z_i)^2\right)\sqrt{(r_n+r_i)^2+(z_{2n}-z_i)^2}}\Bigg), \quad (9.9)$$

gde je $k_1^2=\frac{4r_nr_i}{(r_n+r_i)^2+(z_{1n}-z_i)^2}$ i $k_2^2=\frac{4r_nr_i}{(r_n+r_i)^2+(z_{2n}-z_i)^2}$.

S obzirom da je kod rešavanja prethodnih primera, kod kojih je korišćenjen metod zasnovan na fiktivnim magnetnim opterećenjima, ustanovljeno da se zadovoljavajuća tačnost postiže sa $N_{\mathrm{s}}=100$ segmenata za svaki od bazisa stalnog magneta, ovde će biti testirana samo konvergencija rezultata za različit broj toroidalnih izvora cilindra, Tabela 9.1. Sila je određena i primenom Femm softvera za oko 2 miliona elemenata. Na osnovu prikazanih vrednosti očigledno je da je dovoljno uzeti $N_{\mathrm{p}}=200$ ekvivalentnih izvora s obzirom da se u tom slučaju dobijaju rezultati za silu sa tačnošću manjom od 0.02%. Sila je proračunata za parametre magneta i cilindra: $a/L_1=2.0,\quad b/L_1=3.0,\quad L_2/L_1=0.5,\quad h/L_1=0.75,\quad \mu_{\mathrm{r}1}=1,$ $\mu_{\mathrm{r}2}=3.$

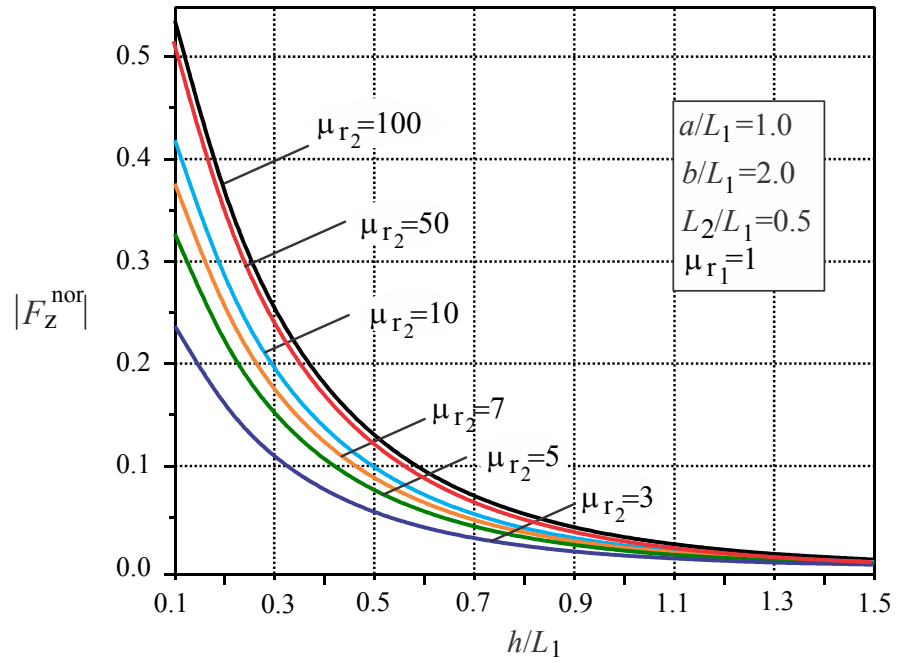
Tabela 9.1. *Konvergencija rezultata.*

N_{p}	N_{tot}	F_z^{nor}	F_z^{nor} (FEM)
50	93	-0.113705	-0.113625
100	186	-0.113661	
200	371	-0.113643	
300	557	-0.113637	
400	743	-0.113635	
500	929	-0.113633	

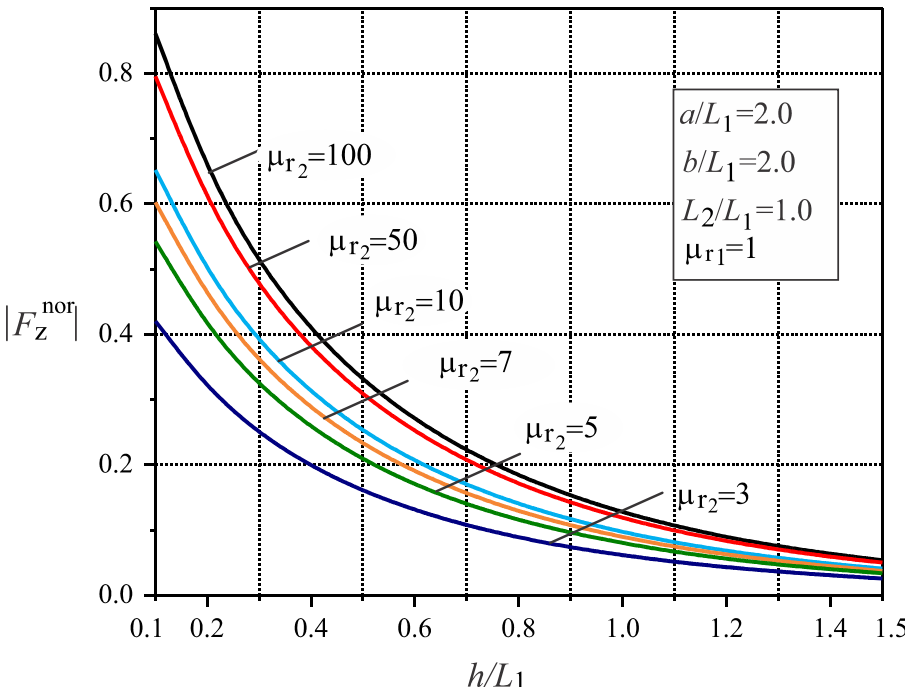
Zavisnost intenziteta normalizovane sile, $F_z^{\mathrm{nor}}=F_z/\left(\mu_0M^2L_1^2\right)$, od normalizovanog rastojanja između magneta i cilindra, h/L_1, za različite relativne permeabilnosti cilindara prikazana je na slici 9.4 za parametre $a/L_1=1.0,\ b/L_1=2.0,\ L_2/L_1=0.5$ i slici 9.5 za $a/L_1=2.0,\ b/L_1=2.0,\ \ L_2/L_1=1.0$.

Intenzitet sile, $F_z^{\mathrm{nor}}=F_z/\left(\mu_0M^2L_1^2\right)$ u funkciji relativne magnetne permeabilnosti cilindra, $\mu_{\mathrm{r}2}$, za različita rastojanja između magneta i cilindra od magnetnog materijala je prikazana na slikama 9.6 i 9.7, a na slici 9.8 za različite visine magneta i cilindra. Parametri stalnog magneta i cilindra od magnetnog materijala, za koje je data raspodela, prikazani su na slici.

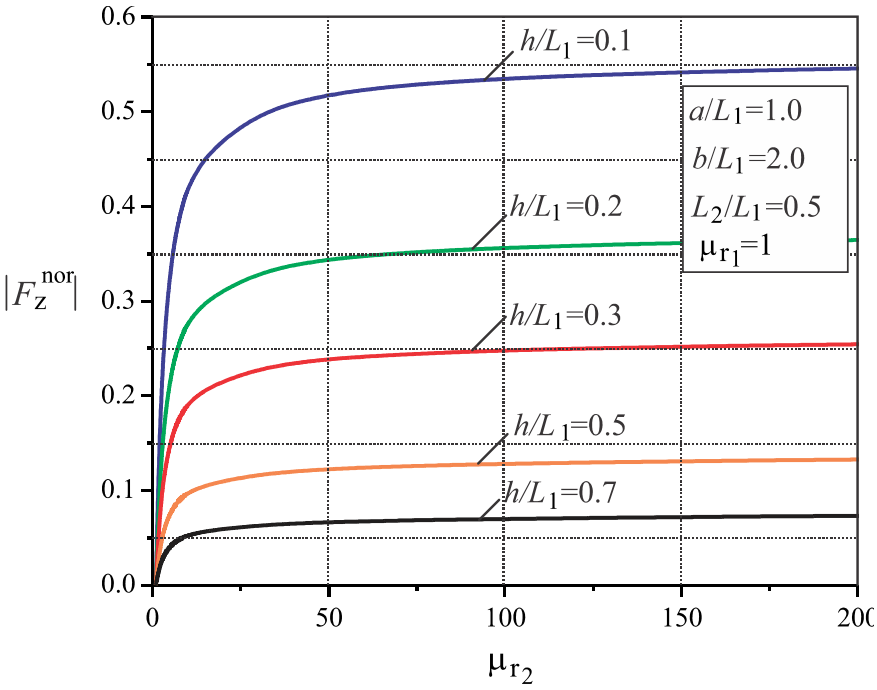
Grafik zavisnosti sile $F_z^{\text{nor}} = F_z / \left(\mu_0 M^2 L_1^2\right)$ od poluprečnika cilindra, b/L_1, je prikazan na slici 9.9 za različita rastojanja h/L_1 i parametre $a/L_1 = 1.0$, $L_2/L_1 = 1.0$, $\mu_{r1} = 1$, $\mu_{r2} = 4$.



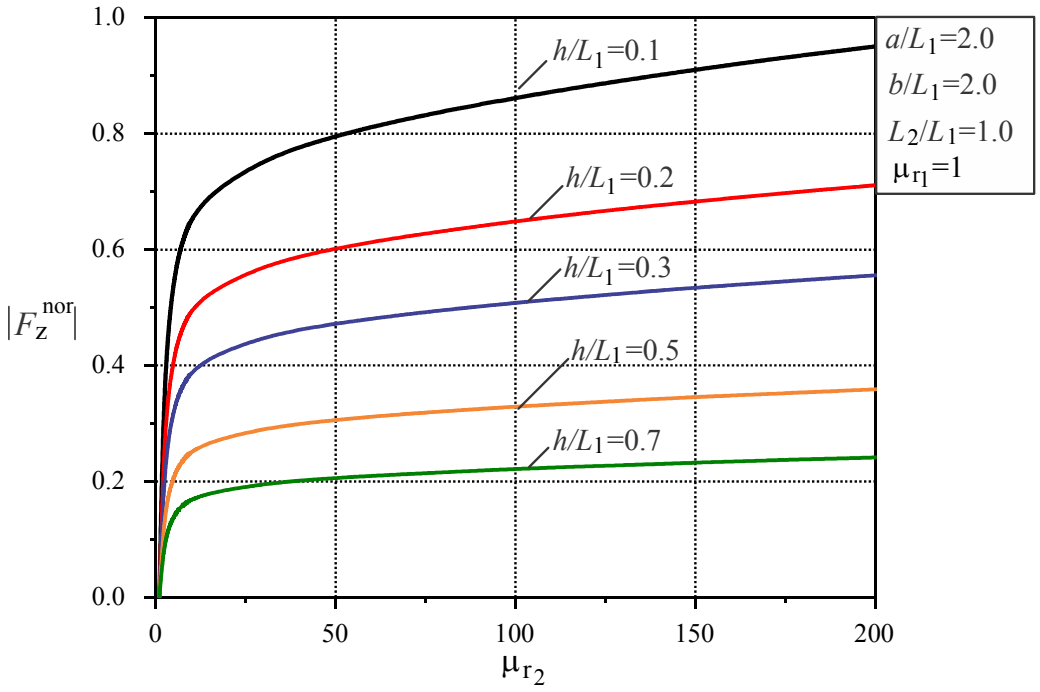
Slika 9.4. *Sila u funkciji rastojanja h/L_1 za različite vrednosti relativne magnetne permeabilnosti cilindra.*



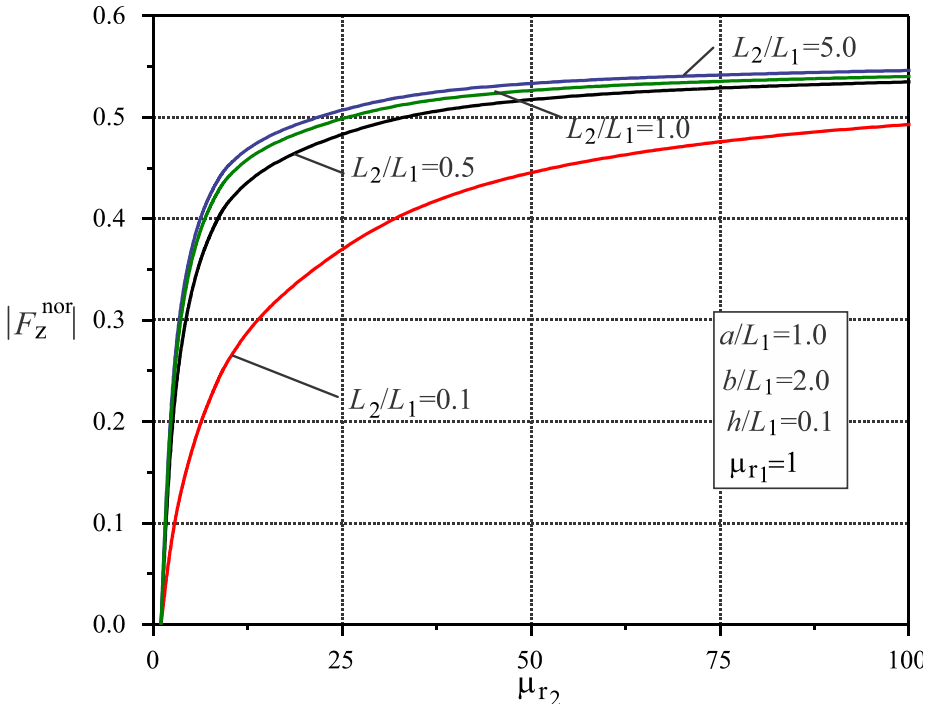
Slika 9.5. *Zavisnost sile od rastojanja h/L_1 za različite vrednosti relativne magnetne permeabilnosti cilindra.*



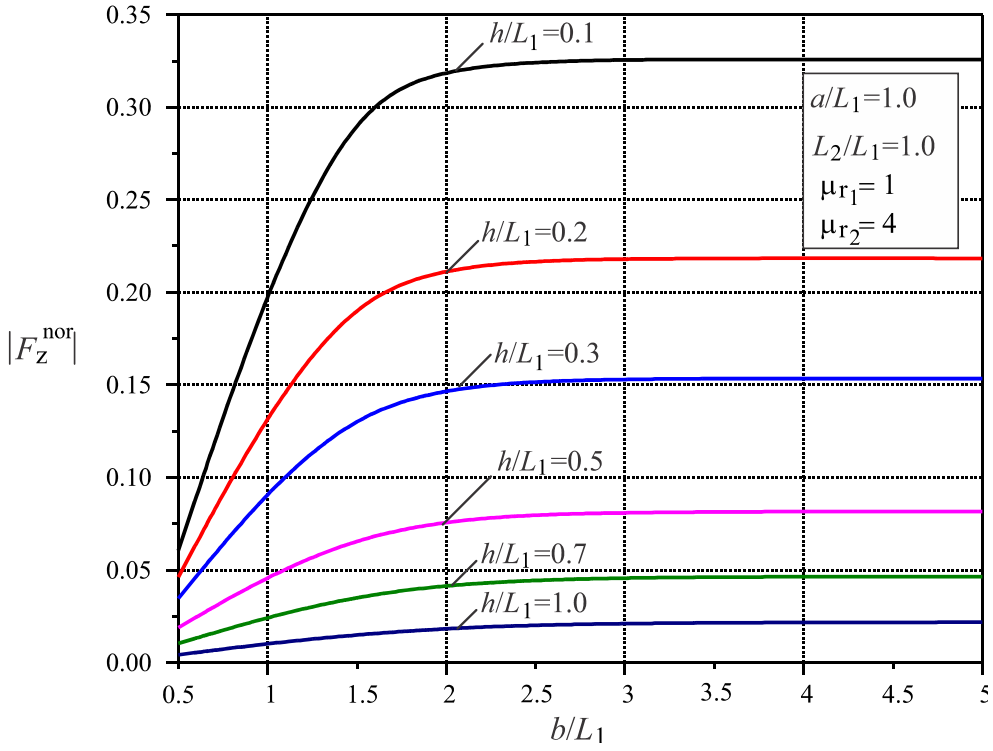
Slika 9.6. *Zavisnost sile u funkciji relativne magnetne permeabilnosti cilindra,* μ_{r2} *za različita rastojanja* h/L_1 .



Slika 9.7. *Zavisnost sile u funkciji relativne magnetne permeabilnosti cilindra,* μ_{r2} *za različita rastojanja* h/L_1 .



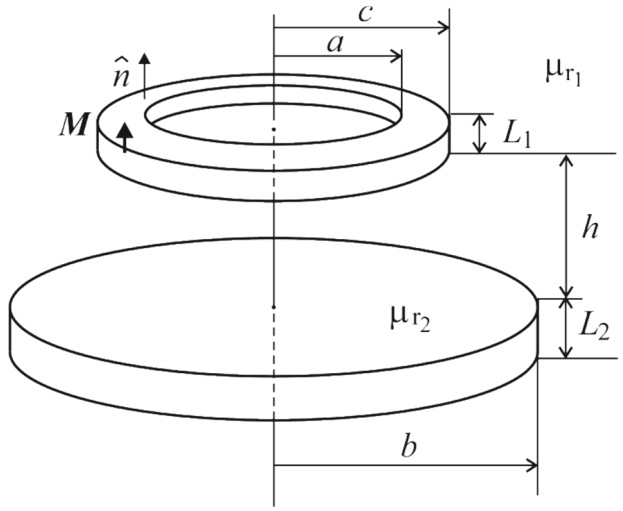
Slika 9.8. *Zavisnost sile u funkciji relativne magnetne permeabilnosti cilindra,* μ_{r2} *za različite visine magneta i cilindra.*



Slika 9.9. *Intenzitet sile u zavisnosti od poluprečnika cilindra,* b/L_1.

9.2. Aksijalno namagnetisan stalni magnet oblika torusa iznad cilindra od magnetnog materijala

Posmatra se stalni magnet toroidalnog oblika, pravougaonog poprečnog preseka, homogeno namagnetisan u aksijalnom pravcu, postavljen iznad cilindra načinjenog od linearnog magnetnog materijala, relativne magnetne permeabilnosti μ_{r2}, slika 9.10.



Slika 9.10. *Aksijalno namagnetisan stalni magnet oblika torusa i cilindar od linearnog magnetnog materijala.*

S obzirom da je torus homogeno namagnetisan u aksijalnom pravcu, kao i u prethodnom primeru, fiktivna magnetna opterećenja postoje samo na bazisima magneta, pa se oni mogu diskretizovati i posmatrati kao sistemi kružnih kontura opterećenih određenim količinama fiktivnog magnetnog opterećenja. Kako je cilindar načinjen od linearnog magnetnog materijala relativne magnetne permeabilnosti μ_{r2} i zajedno sa magnetom se nalazi u sredini magnetne permeabilnosti μ_{r1}, ekvivalentni toroidalni magnetni izvori postoje na razdvojim površinama dva magnetna sloja, odnosno na bazisama i omotaču cilindra.

Na slici 9.11 je prikazan diskretizacioni model i raspodela magnetnih opterećenja stalnog magneta oblika torusa i toroidalnih magnetnih izvora na cilindru od magnetnog materijala. Ovaj sistem se može modelovati na sličan način kao prethodni. Razlika je u parametrima diskretizacionih segmenata magneta koji su u ovom slučaju:

$$r_n = a + \frac{2n-1}{2N_1}(c-a),\ n = 1,2,\ldots,N_s, \tag{9.10}$$

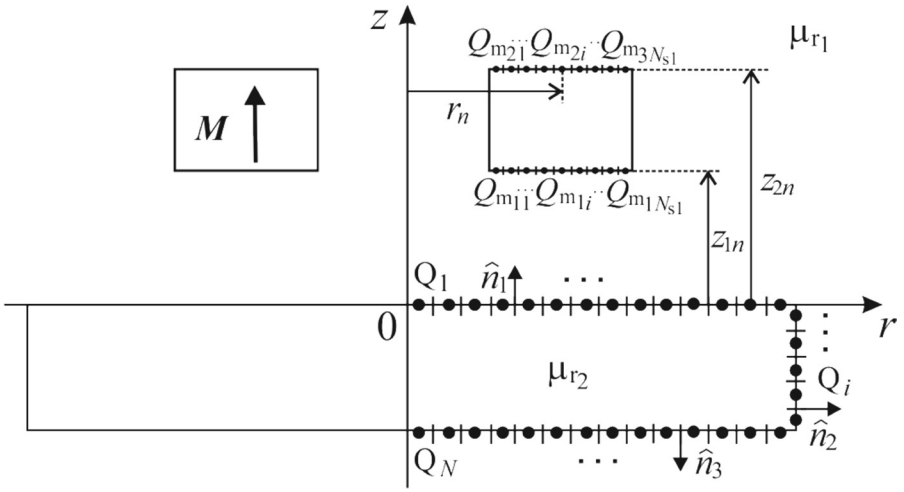
$$z_{1n} = h, \tag{9.11}$$

$$z_{2n} = h + L_1, \tag{9.12}$$

dok su magnetna opterećenja kružnih kontura donjeg i gornjeg bazisa

$$Q_{\mathrm{m}1\,n} = -M\,2\pi r_n \frac{c-a}{N_s},\ n = 1,2,...,N_{\mathrm{s}}, \tag{9.13}$$

$$Q_{\mathrm{m}2\,n} = M\,2\pi r_n \frac{c-a}{N_s},\ n = 1,2,...,N_{\mathrm{s}}. \tag{9.14}$$



Slika 9.11. *Diskretizacioni model.*

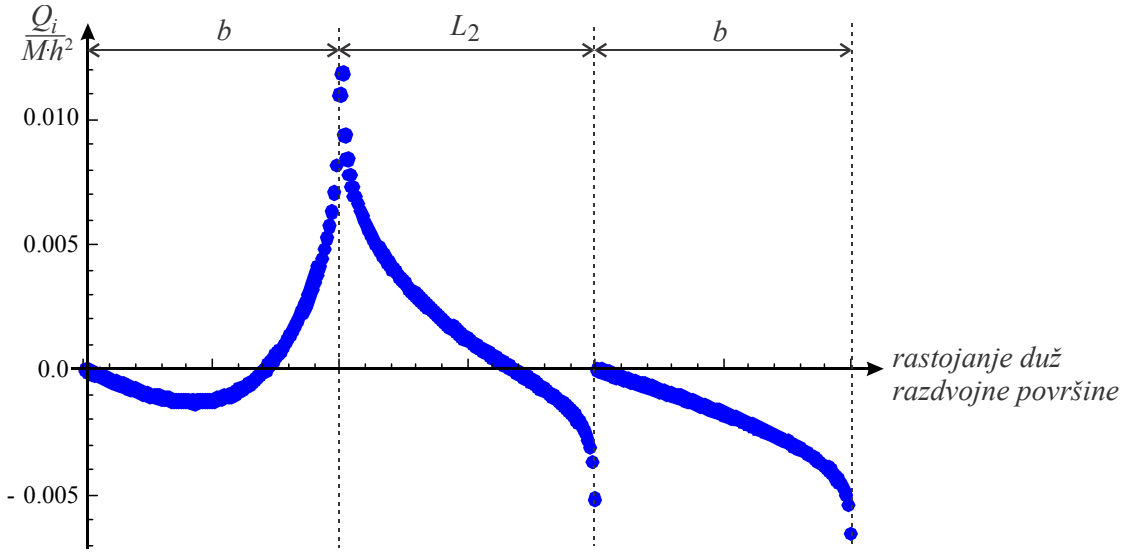
Magnetni skalar potencijal posmatranog sistema je identičan kao u primeru 9.1, jednačina (9.1), pri čemu su parametri stalnog magneta koji figurišu u izrazu definisani jednačinama (9.10 - 9.14). Primenom HBEMa, na način opisan u odeljku 9.1, određuju se magnetna opterećenja toroidalnih magnetnih izvora, potom i sila koja deluje između aksijalno namagnetisanog magneta oblika torusa i cilindra od linearnog magnetnog materijala, jednačina (9.9).

U Tabeli 9.2 je data konvergencija rezultata za parametre sistema: $a/L_1 = 1.0,\ c/L_1 = 3.0,$ $b/L_1 = 3.0,\ L_2/L_1 = 0.5,\ h/L_1 = 0.5,\ \mu_{\mathrm{r}1} = 1,\ \mu_{\mathrm{r}2} = 4$ i $N_s = 100.$ Očigledno je, kao i u prethodnom primeru, da se rezultati primenjenog metoda veoma dobro slažu sa vrednostima dobijenim metodom konačnih elemenata (za oko 1.5 miliona elemenata) i da nije neophodno uzeti suviše veliki broj elemenata da bi se postigla zadovoljavajuća tačnost. U daljim proračunima će početni broj toroidalnih magnetnih izvora biti ograničen na $N_{\mathrm{p}} = 200$, i u tom slučaju je relativna greška ispod 0.35%.

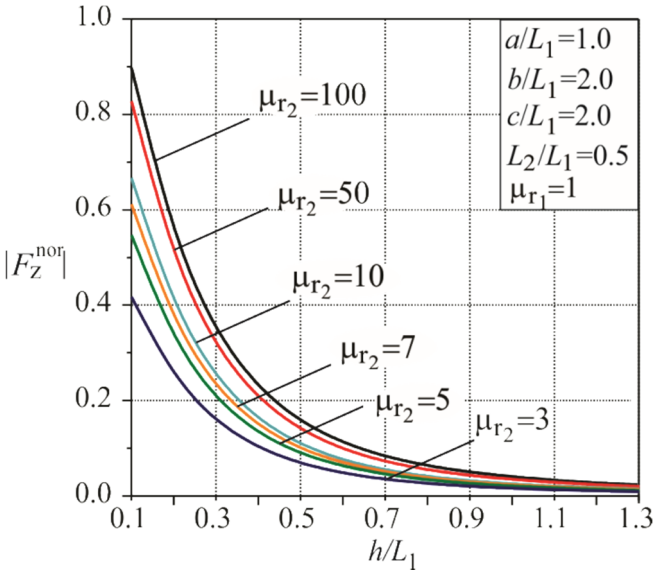
Na slici 9.12 prikazana je raspodela magnetnih opterećenja, $Q_{i\,\mathrm{nor}} = Q_i \big/ Mh^2$, duž bazisa i omotača cilindra. Raspodela je data za parametre sistema: $a/L_1 = 1.0,$ $b/L_1 = 1.0,\ c/L_1 = 3.0,\ L_2/L_1 = 1.0,\ h/L_1 = 0.5,\ \mu_{\mathrm{r}1} = 1,\ \mu_{\mathrm{r}2} = 4,\ N_s = 100,\ N\mathrm{p} = 200.$

Tabela 9.2. *Konvergencija rezultata.*

N_p	N_{tot}	F_z^{nor}	F_z^{nor} (FEM)
50	93	-0.236432	-0.233637
100	186	-0.235148	
200	371	-0.23445	
300	557	-0.234191	
400	743	-0.234056	
500	929	-0.233971	

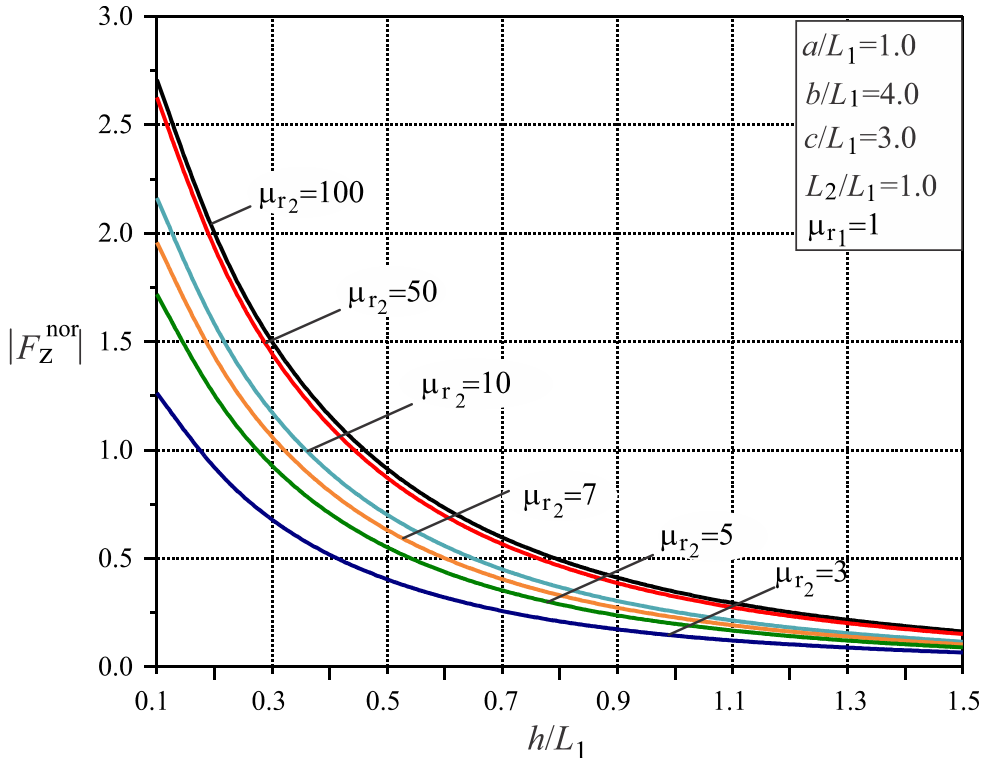


Slika 9.12. *Raspodela normalizovanog magnetnog opterećenja duž razdvojne površine.*

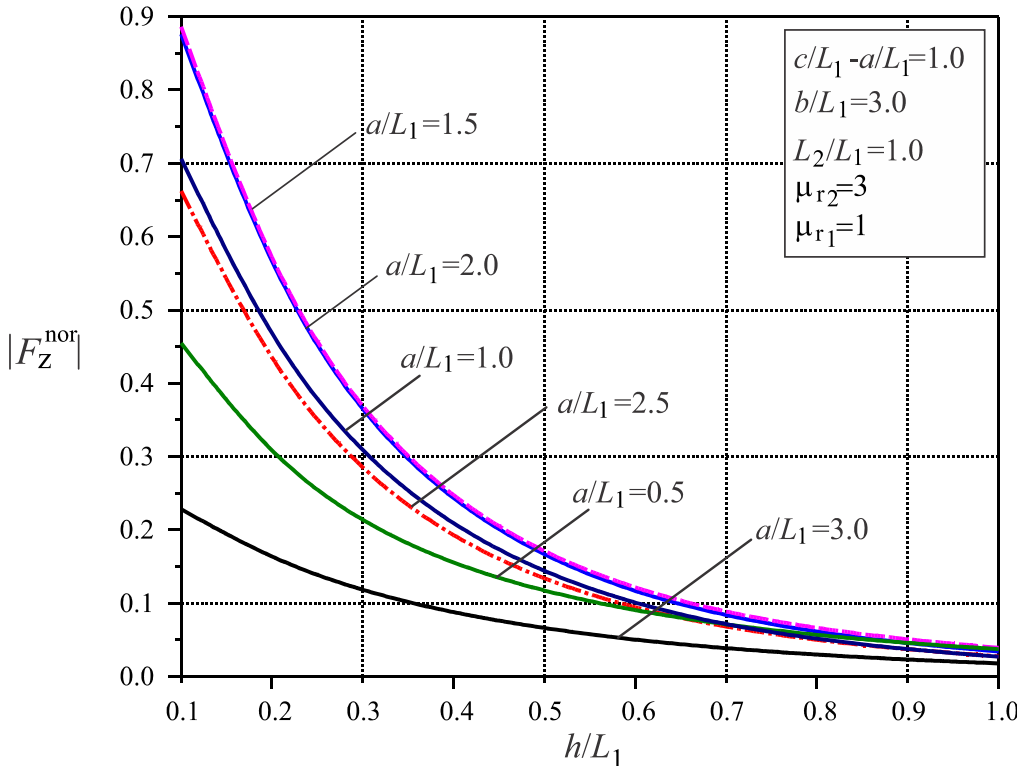


Slika 9.13. *Zavisnost intenziteta normalizovane sile u funkciji normalizovanog rastojanja* h/L_1.

Intenzitet normalizovane sile, $F_z^{nor} = F_z/\left(\mu_0 M^2 L_1^2\right)$, u funkciji normalizovanog međusobnog rastojanja, h/L_1, za različite relativne permeabilnosti magnetnog materijala cilindra prikazana je na slici 9.13 za parametre $a/L_1 = 1.0$, $b/L_1 = 2.0$, $c/L_1 = 2.0$, $L_2/L_1 = 0.5$, $\mu_{r1} = 1$ i na slici 9.14 za $a/L_1 = 1.0$, $b/L_1 = 4.0$, $c/L_1 = 3.0$, $L_2/L_1 = 1.0$, $\mu_{r1} = 1$.



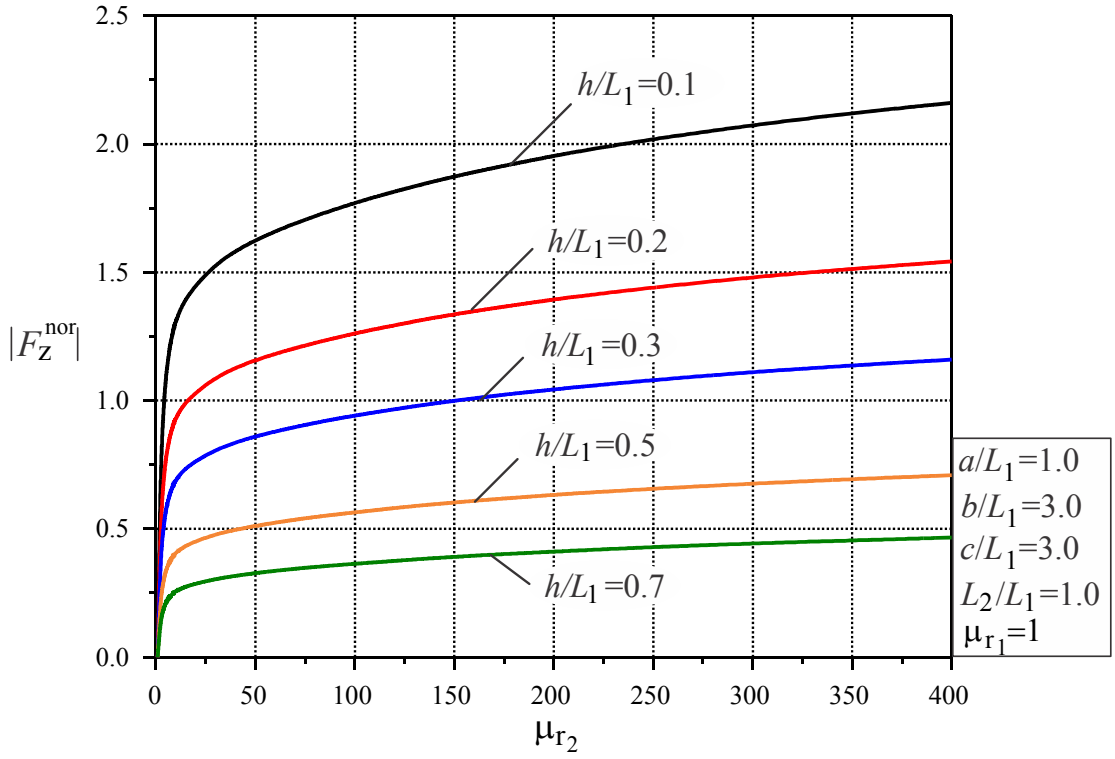
Slika 9.14. *Intenzitet sile u funkciji rastojanja* h/L_1 *za različite vrednosti relativne magnetne permeabilnosti* μ_{r2}.



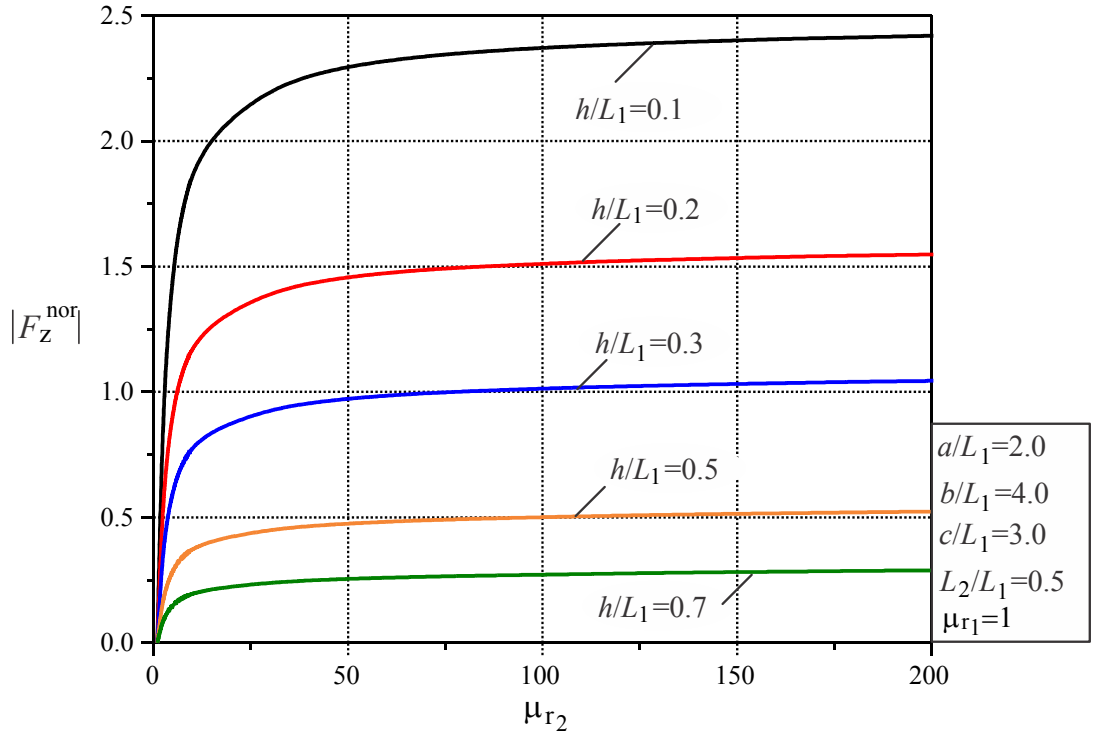
Slika 9.15. *Zavisnost sile od rastojanja* h/L_1 *za različite poluprečnike torusnog magneta.*

Uticaj dimenzija poluprečnika magneta na intenzitet sile može se videti na slici 9.15 gde je dat grafik zavisnosti sila od međusobnog rastojanja pri različitim dimenzijama unutrašnjeg poluprečnika torusa a/L_1, kada je debljina magneta $c/L_1 - a/L_1 = 1.0$.

Zavisnost sile između magneta i cilindra od magnetnog materijala, $F_z^{\text{nor}} = F_z/\left(\mu_0 M^2 L_1^2\right)$, od relativne magnetne permeabilnosti cilindra, μ_{r2}, za različita međusobna rastojanja, data je na slikama 9.16, 9.17 i 9.18. Zavisnost uticaja visine torusa i cilindra na magnetnu silu je prikazana na slici 9.19 za parametre sistema $a/L_1 = 1.0, b/L_1 = 3.0, c/L_1 = 3.0, h/L_1 = 0.1, \mu_{r1} = 1$. Sila, $F_z^{\text{nor}} = F_z/\left(\mu_0 M^2 L_1^2\right)$, u funkciji poluprečnika cilindra, b/L_1, prikazana je na slici 9.20 za različita rastojanja h/L_1 i parametre $a/L_1 = 1.0,\ c/L_1 = 3.0,\ \ L_2/L_1 = 1.0, \mu_{r1} = 1, \mu_{r2} = 4$.

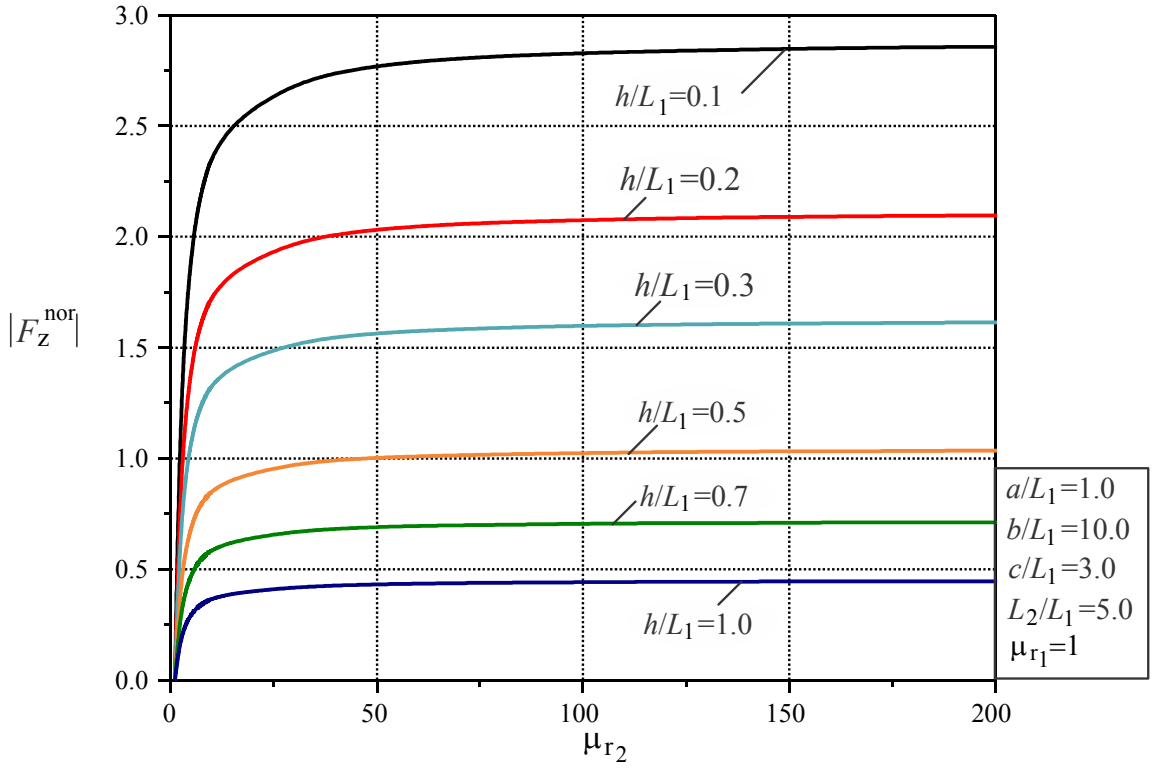


Slika 9.16. *Zavisnost intenziteta sile od relativne magnetne permeabilnosti cilindra,* μ_{r2}, *za različita rastojanja* h/L_1 .



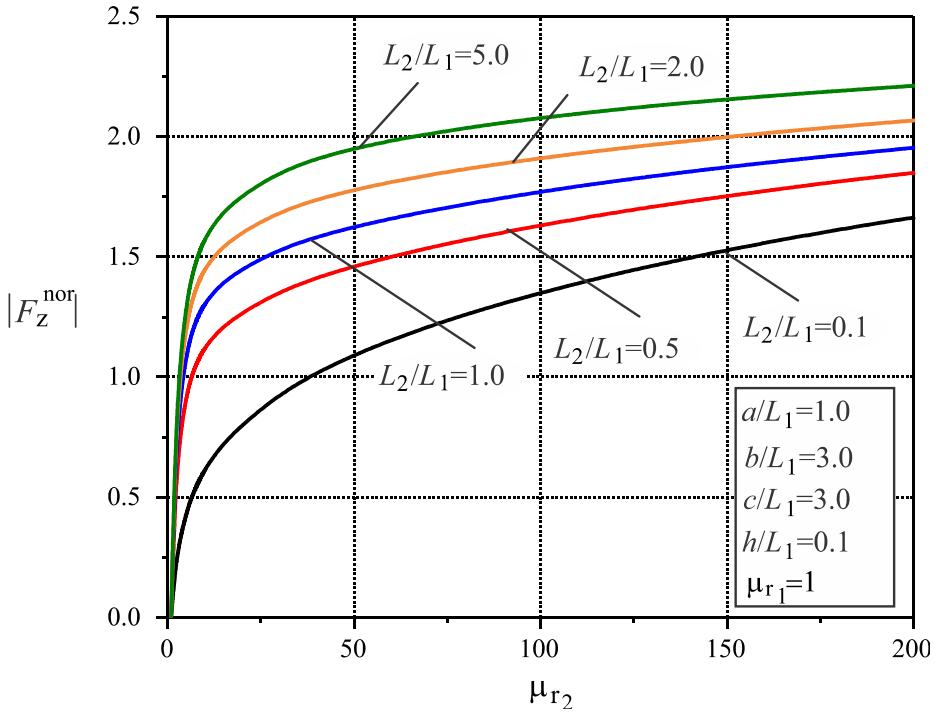
Slika 9.17. *Zavisnost intenziteta sile u funkciji relativne magnetne permeabilnosti cilindra,* μ_{r2}*,*

za različita rastojanja h/L_1.

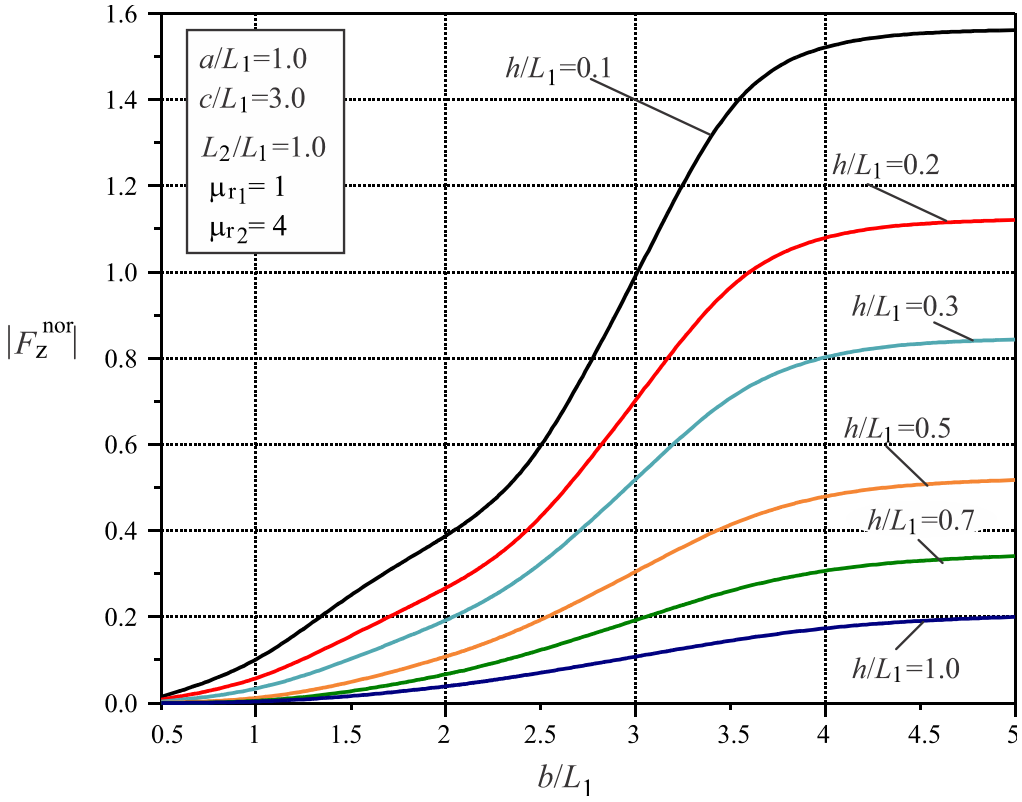


Slika 9.18. *Sila u funkciji relativne magnetne permeabilnosti cilindra,* μ_{r2}*,*

za različita rastojanja h/L_1 .



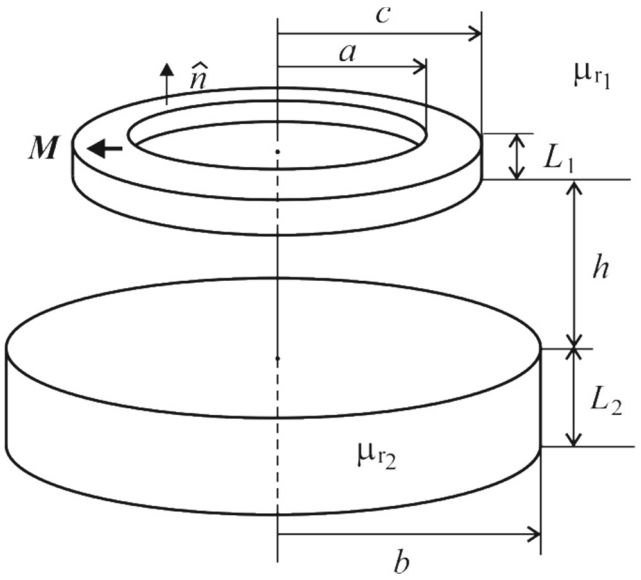
Slika 9.19. *Zavisnost intenziteta sile u funkciji relativne magnetne permeabilnosti cilindra,* μ_{r2} *za različit odnos visina cilindra i stalnog magneta,* L_2/L_1 .



Slika 9.20. *Intenzitet sile u zavisnosti od poluprečnika cilindra,* b/L_1.

9.3. Radijalno namagnetisan stalni magnet u prisustvu cilindra od magnetnog materijala

Stalni magnet oblika torusa, pravougaonog poprečnog preseka, homogeno namagentisan u radijalnom pravcu, nalazi se iznad cilindra načinjenog od linearnog magnetnog materijala relativne magnetne peremeabilnosti μ_{r2} u sredini magnetne permeabilnosti μ_{r1}, slika 9.21.



Slika 9.21. *Radijalno namagnetisan stalni magnet oblika torusa i cilindar od linearnog magnetnog materijala.*

Kao u slučaju prethodne dve razmatrane konfiguracije, za rešavanje ovog sistema biće primenjen HBEM zajedno sa pristupom zasnovanim na fiktivnim magnetnim opterećenjima i diskretizacionoj tehnici. S obzirom na to da je magnet homogeno namagnetisan u radijalnom pravcu, [155], postoje površinska opterećenja na omotačima cilindra i zapreminska opterećenja unutar magneta. Pored toga, kako je cilindar načinjen od magnetnog materijala relativne magnetne permeabilnosti μ_{r2}, na razdvojnim površinama, omotaču i bazisima cilindra, postoje toroidalni magnetni izvori.

Primenom diskretizacione tehnike, kao što je već objašnjeno u primeru 8.2, radijalno namagnetisan stalni magnet se može posmatrati kao sistem kružnih kontura raspoređenih na omotačima magneta i unutar njega. Na slici 9.22 je prikazan diskretizacioni model i raspodela površinskih i zapreminskih magnetnih opterećenja stalnog magneta i toroidalnih magnetnih izvora na cilindru od magnetnog materijala.

Magnetni skalar potencijal posmatranog sistema u tom slučaju je:

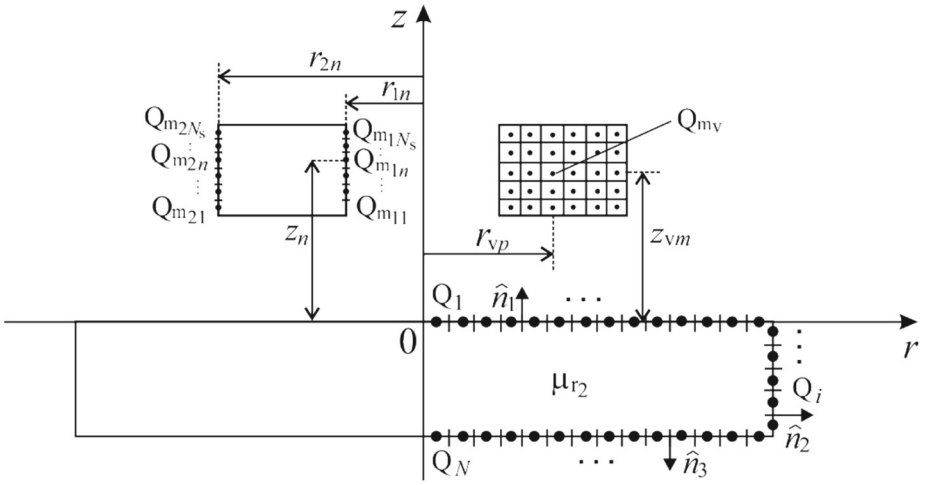
$$\varphi_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2\pi^2}\left(\sum_{n=1}^{N_{\mathrm{s}}}\left(Q_{\mathrm{m}1n}\frac{K\left(\frac{\pi}{2},k_{1n}\right)}{\sqrt{(r+r_{1n})^2+(z-z_n)^2}}+Q_{\mathrm{m}2n}\frac{K\left(\frac{\pi}{2},k_{2n}\right)}{\sqrt{(r+r_{2n})^2+(z-z_n)^2}}\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{N_{\mathrm{v}1}}\sum_{j=1}^{N_{\mathrm{v}2}}Q_{\mathrm{mv}}\frac{K\left(\frac{\pi}{2},k_{\mathrm{v}}\right)}{\sqrt{(r+r_{\mathrm{v}j})^2+(z-z_{\mathrm{v}k})^2}}+\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{tot}}}Q_i\frac{K\left(\frac{\pi}{2},k_i\right)}{\sqrt{(r+r_i)^2+(z-z_i)^2}}\right), \tag{9.15}$$

gde je

$$k_{1n}^2=\frac{4rr_{1n}}{(r+r_{1n})^2+(z-z_n)^2},\ k_{2n}^2=\frac{4rr_{2n}}{(r+r_{2n})^2+(z-z_n)^2},$$

$$k_{\mathrm{v}}^2=\frac{4rr_{\mathrm{v}j}}{(r+r_{\mathrm{v}j})^2+(z-z_{\mathrm{v}k})^2},\ k_i^2=\frac{4rr_i}{(r+r_i)^2+(z-z_i)^2}.$$

Prva suma u izrazu za potencijal predstavlja magnetni skalar potencijal koji potiče od površinskih fiktivnih magnetnih opterećenja stalnog magneta, druga suma je potencijal koji je posledica postojanja zapreminskih magnetnih opterećenja, dok je treća suma magnetni skalar potencijal koji potiče od cilindra načinjenog od linearnog magnetnog materijala.



Slika 9.22. *Diskretizacioni model.*

Parametri diskretizacionih segmenata omotača magneta su

$$z_n=h+\frac{2n-1}{2N_{\mathrm{s}}}L_1,\ n=1,2,\ldots,N_{\mathrm{s}}, \tag{9.16}$$

$$r_{1n}=a,\ n=1,2,\ldots,N_{\mathrm{s}}, \tag{9.17}$$

$$r_{2n}=c,\ n=1,2,\ldots,N_{\mathrm{s}}, \tag{9.18}$$

dok su magnetna opterećenja kružnih kontura unutrašnjeg i spoljašnjeg omotača

$$Q_{\mathrm{m1}\,n} = -M\,2\pi r_{1n}\frac{L_1}{N_\mathrm{s}},\ n=1,2,...,N_\mathrm{s}, \tag{9.19}$$

$$Q_{\mathrm{m2}\,n} = M\,2\pi r_{2n}\frac{L_1}{N_\mathrm{s}},\ n=1,2,...,N_\mathrm{s}. \tag{9.20}$$

Za zapreminske segmente stalnog magneta važi:

$$z_{\mathrm{v}\,k} = h+\frac{2k-1}{2N_{\mathrm{v}1}}L_1,\ k=1,2,\ldots,N_{\mathrm{v}1}, \tag{9.21}$$

$$r_{\mathrm{v}\,j} = a+\frac{2j-1}{2N_{\mathrm{v}2}}(c-a),\ \ j=1,2,\ldots,N_{\mathrm{v}2}, \tag{9.22}$$

a magnetna opterećenja kontura su

$$Q_{\mathrm{mv}} = Q_{\mathrm{mv}\,m} = -M\,2\pi L_1\frac{c-a}{N_{\mathrm{v}1}N_{\mathrm{v}2}},\ m=1,2,...,N_\mathrm{v}. \tag{9.23}$$

Sa N_s je označen ukupan broj segmenata kojim je diskretizovan svaki od omotača stalnog magneta.

$N_\mathrm{v}=N_{\mathrm{v}1}\cdot N_{\mathrm{v}2}$ je ukupan broj zapreminskih segmenata stalnog magneta.

Pozicije toroidalnih magnetnih izvora na bazisima i omotaču cilindra, kao i njihovi poluprečnici, dati su u odeljku 9.1. Primenom istog postupka kao u prethodna dva primera, korišćenjem metoda podešavanja u tačkama za normalnu komponentu vektora magnetnog polja (9.7), formira se sistem linearnih jednačina i određuju se magnetna opterećenja toroidalnih magnetnih izvora, Q_i, raspoređenih na razdvojnim površinama dva magnetna sloja. Nakon određivanja nepoznatih naelektrisanja toroidalnih magnetnih izvora, može se odrediti magnetni skalar potencijal, polje u okolini sistema kao i sila koja deluje između radijalno namagnetisanog magneta i cilindra od magnetnog materijala:

$$\begin{aligned}F_z = \frac{\mu_0}{2\pi^2}\Bigg(&\sum_{n=1}^{N_\mathrm{s}}\sum_{i=1}^{N_\mathrm{tot}}\Bigg(Q_{\mathrm{m}1n}Q_i\frac{(z_n-z_i)E\left(\frac{\pi}{2},k_1\right)}{\left((r_{1n}-r_i)^2+(z_n-z_i)^2\right)\sqrt{(r_{1n}+r_i)^2+(z_n-z_i)^2}}+\\&+Q_{\mathrm{m}2n}Q_i\frac{(z_n-z_i)E\left(\frac{\pi}{2},k_2\right)}{\left((r_{2n}-r_i)^2+(z_n-z_i)^2\right)\sqrt{(r_{2n}+r_i)^2+(z_n-z_i)^2}}\Bigg)+\\&+\sum_{k=1}^{N_{\mathrm{v}1}}\sum_{j=1}^{N_{\mathrm{v}1}}\sum_{i=1}^{N_\mathrm{tot}}\left(Q_{\mathrm{mv}}Q_i\frac{(z_{\mathrm{v}\,k}-z_i)E\left(\frac{\pi}{2},k_\mathrm{v}\right)}{\left((r_{\mathrm{v}\,j}-r_i)^2+(z_{\mathrm{v}\,k}-z_i)^2\right)\sqrt{(r_{\mathrm{v}\,j}+r_i)^2+(z_{\mathrm{v}\,k}-z_i)^2}}\right)\Bigg)\end{aligned} \tag{9.24}$$

gde je $k_1^2 = \dfrac{4r_{1n}r_i}{(r_{1n}+r_i)^2+(z_n-z_i)^2}$, $k_2^2 = \dfrac{4r_{2n}r_i}{(r_{2n}+r_i)^2+(z_n-z_i)^2}$, $k_{\mathrm{v}}^2 = \dfrac{4r_{\mathrm{v}j}r_i}{(r_{\mathrm{v}j}+r_i)^2+(z_{\mathrm{v}k}-z_i)^2}$

U Tabeli 9.3 je data konvergencija rezultata za parametre sistema: $a/L_1 = 1.0$, $c/L_1 = 3.0$, $b/L_1 = 3.0$, $L_2/L_1 = 0.5$, $h/L_1 = 0.5$, $\mu_{\mathrm{r}1} = 1$, $\mu_{\mathrm{r}1} = 4$. S obzirom da je, kod konfiguracije koju čine radijalno namagnetisani stalni magneti oblika torusa (poglavlje 8.2), ustanovljeno da je kod primene metoda zasnovanog na fiktivnim magnetnim opterećenjima dovoljno uzeti $N_{\mathrm{s}} = 100$ površinskih i $N_{\mathrm{v}} = 100$ zapreminskih segmenata kako bi se dobila zadovoljavajuća tačnost, ovde će biti ispitan samo uticaj ukupnog broja izvora koji postoje na površini cilindra na silu koja deluje između magneta i cilindra od magnetnog materijala.

Tabela 9.3. *Konvergencija rezultata.*

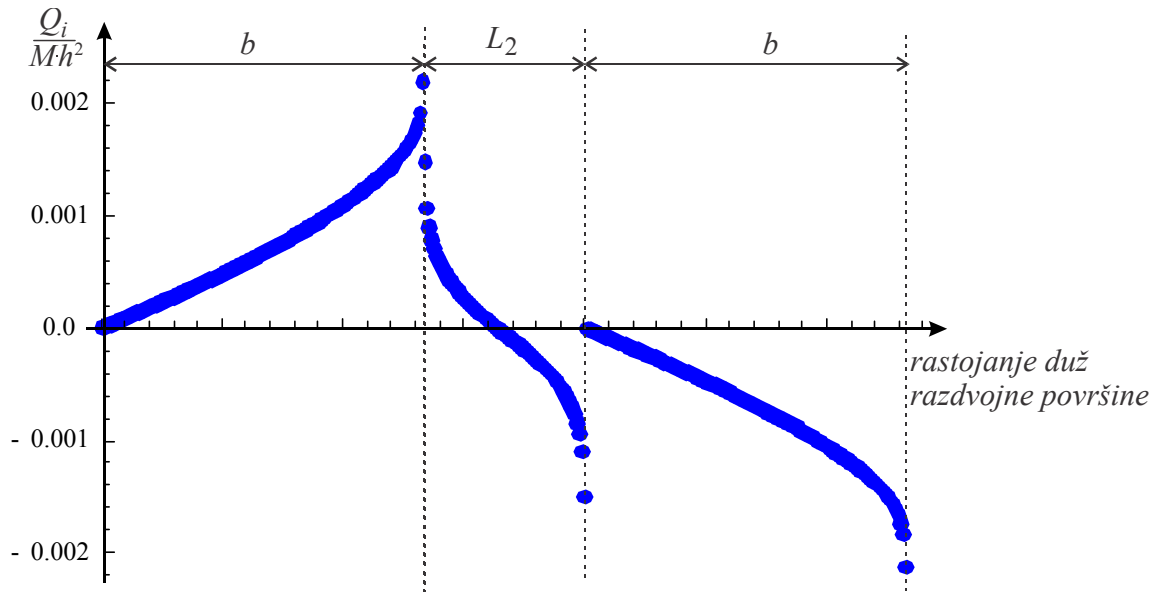
N_{p}	N_{tot}	F_z^{nor}	F_z^{nor} (FEM)	Relativna greška [%]
50	93	-0.583406	-0.586005	0.44
100	186	-0.584359		0.28
200	371	-0.584861		0.19
300	557	-0.585028		0.17
400	743	-0.585115		0.15
500	929	-0.585170		0.14

Na osnovu vrednosti iz tabele 9.3, jasno je da se rezultati primenjenog metoda veoma dobro slazu sa onim dobijenim metodom konačnih elemenata. U cilju što kraćeg vremena proračuna, broj toroidalnih magnetnih izvora je i ovde ograničen na $N_{\mathrm{p}} = 200$, i u tom slučaju je relativna greška ispod 0.2%.

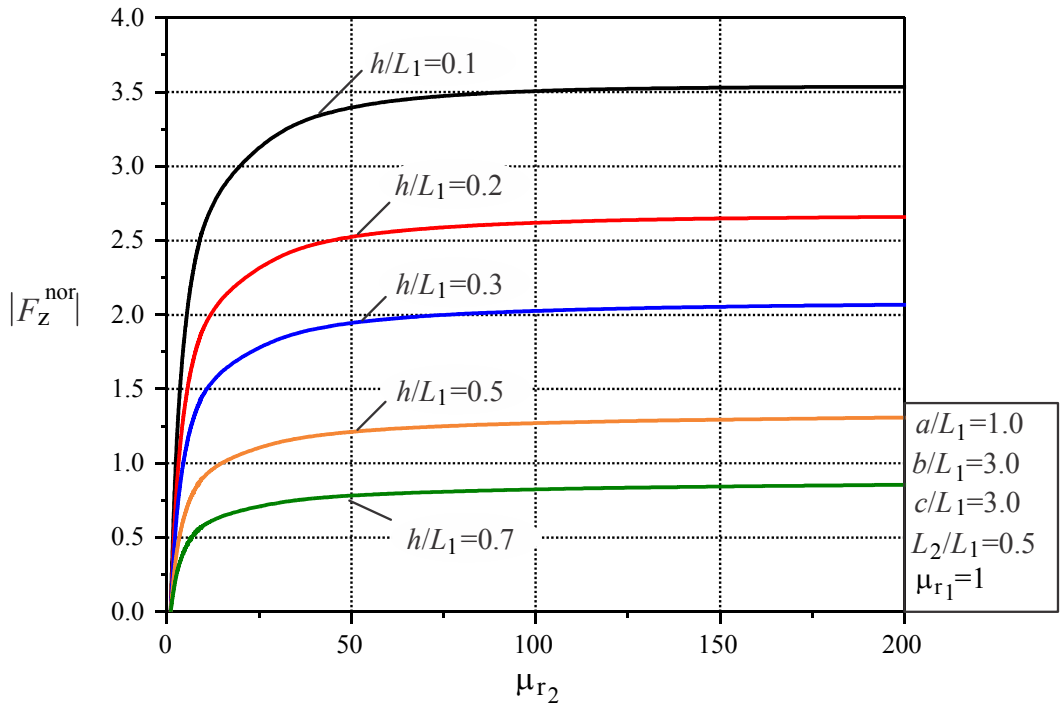
Raspodela normalizovanih magnetnih opterećenja, $Q_{i\,\mathrm{nor}} = Q_i / Mh^2$, duž bazisa i omotača cilindra prikazana je na slici 9.23 za parametre sistema: $a/L_1 = 3.0$, $b/L_1 = 1.0$, $c/L_1 = 4.0$, $L_2/L_1 = 0.5$, $h/L_1 = 1.0$, $\mu_{\mathrm{r}1} = 1$, $\mu_{\mathrm{r}2} = 3$, $N_{\mathrm{s}} = 100$, $N_{\mathrm{v}} = 100$, $N_{\mathrm{p}} = 200$.

Kako bi se izvršila analiza uticaja parametara magneta i cilindra na privlačnu silu koja deluje između njih, izvršen je proračun sile i rezultati su prikazani grafički na slikama od 9.24 do 9.28. Na osnovu grafika 9.26, na kom je data zavisnost sile od poluprečnika torusa, može se zaključiti da sila sa porastom poluprečnika magneta raste do trenutka kada se spoljašnji poluprečnik torusa izjednači sa poluprečnikom cilindra, a nakon toga se intenzitet sile smanjuje. Na slikama 9.27 i 9.28 je prikazana zavisnost sile od relativne magnetne

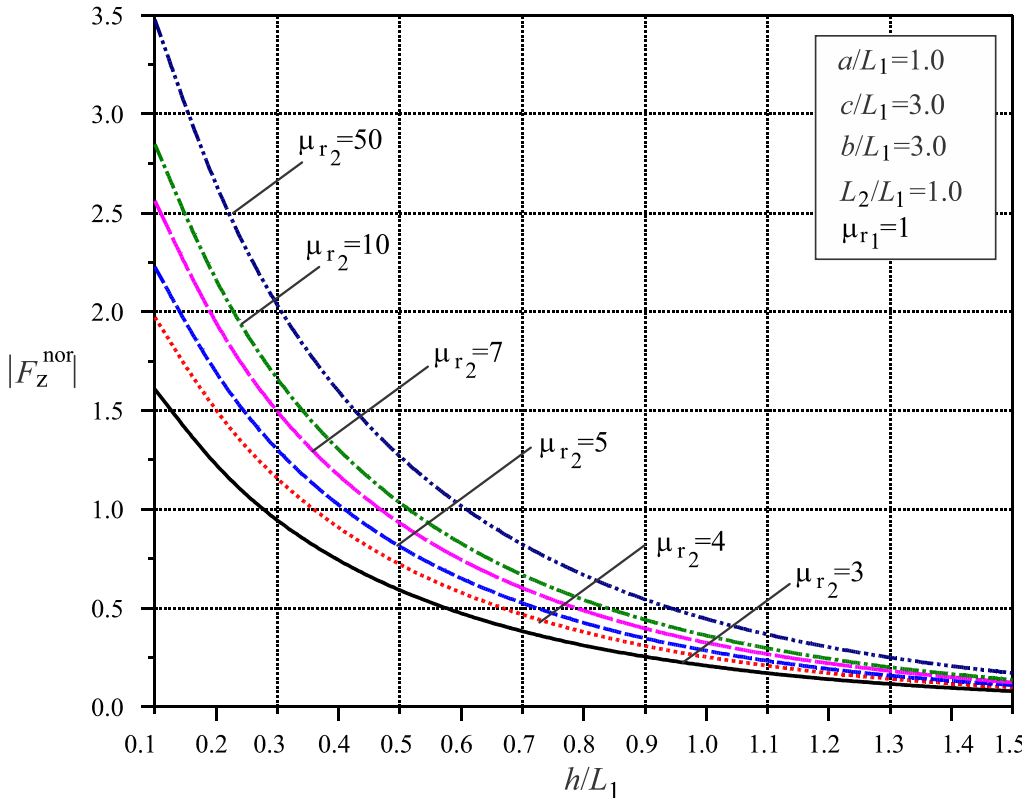
permeabilnosti cilindra za različite odnose visina torusa i cilindra, L_2/L_1. Očigledno je da nakon vrednosti $L_2/L_1=1.0$, uticaj porasta odnosa L_2/L_1 na magnetnu silu postaje veoma mali.



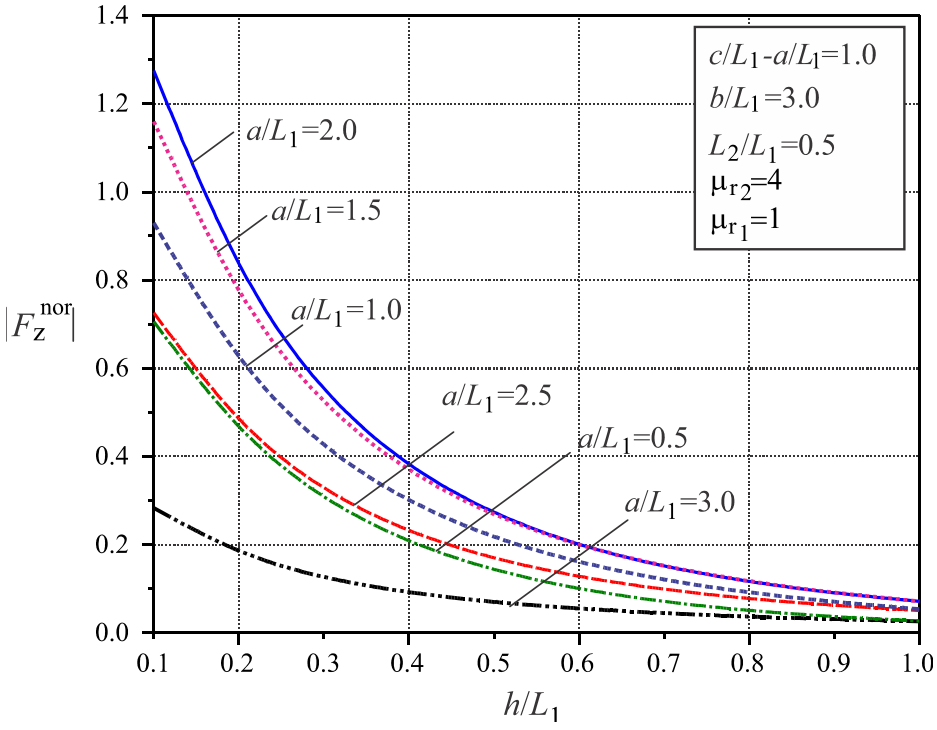
Slika 9.23. *Raspodela normalizovanog magnetnog opterećenja duž razdvojne površine.*



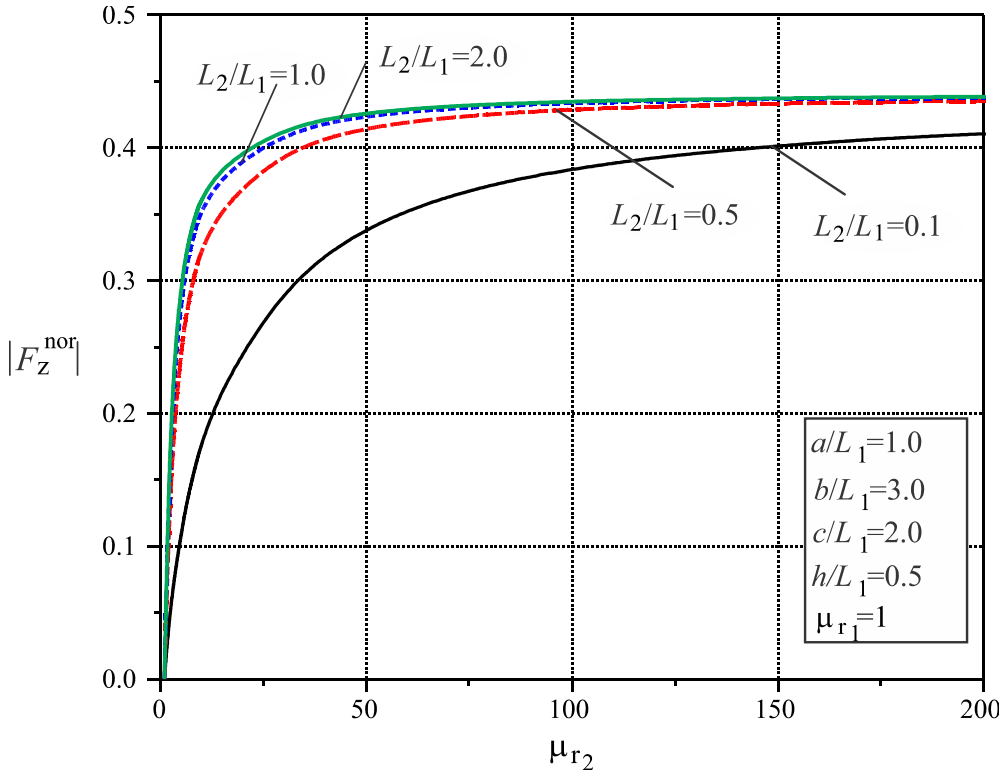
Slika 9.24. *Intenzitet magnetne sile u funkciji relativne magnetne permeabilnosti cilindra, μ_{r_2}, za različita rastojanja između torusa i cilindra.*



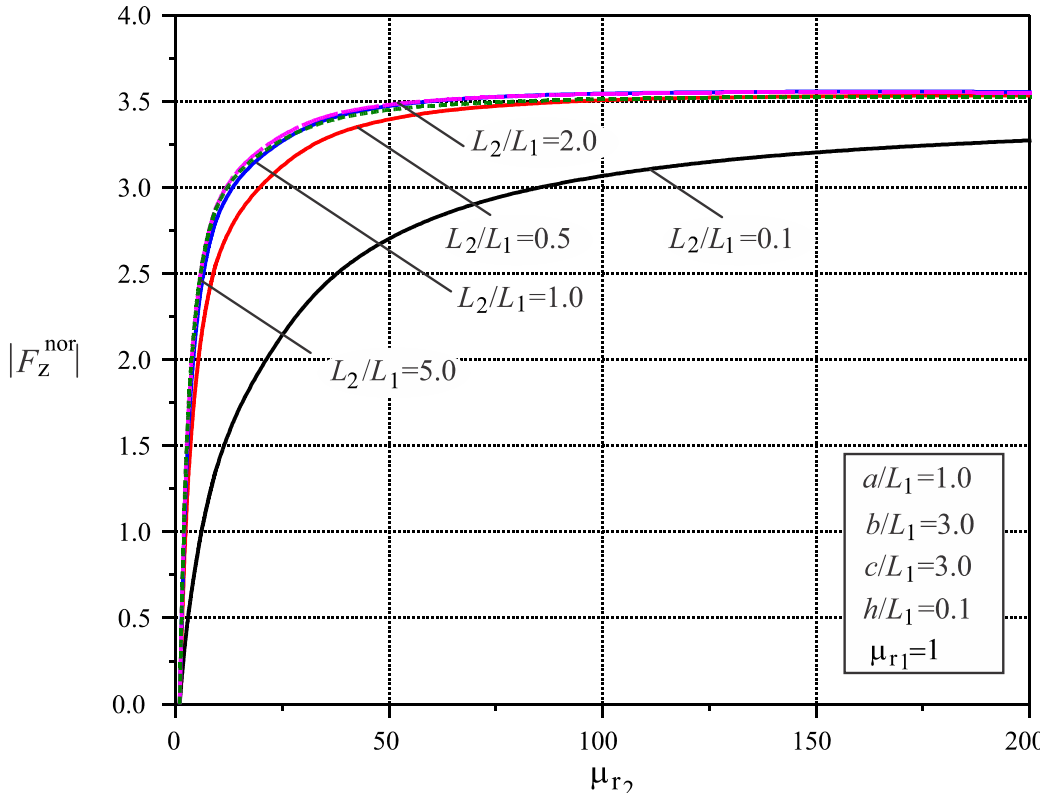
Slika 9.25. *Intenzitet magnetne sile u funkciji rastojanja između torusa i cilindra za različite relativne magnetne permeabilnosti cilindra,* μ_{r_2} .



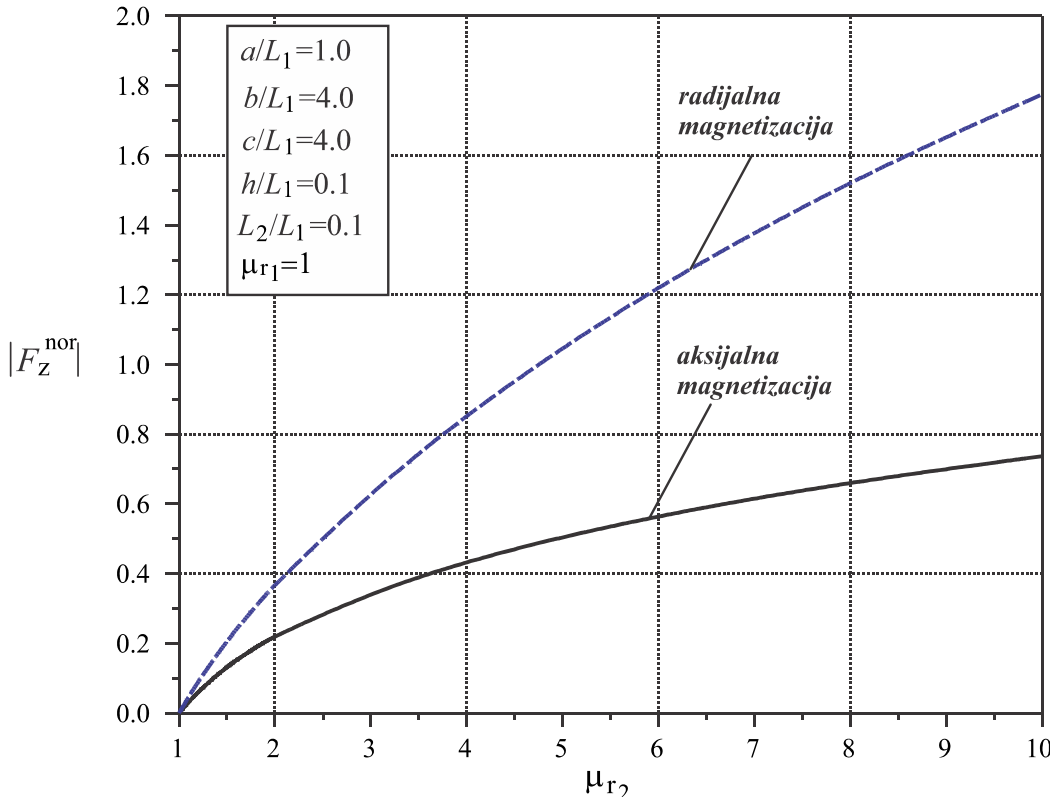
Slika 9.26. *Zavisnost magnetne sile od međusobnog rastojanja,* h/L_1 *, za različite poluprečnike torusa.*



Slika 9.27. *Zavisnost intenziteta sile u funkciji relativne magnetne permeabilnosti cilindra,* μ_{r2}*, za različit odnos visina cilindra i torusa,* L_2/L_1 .



Slika 9.28. *Zavisnost intenziteta sile u funkciji relativne magnetne permeabilnosti cilindra,* μ_{r2}*, za različit odnos visina cilindra i torusa,* L_2/L_1 .



Slika 9.29. *Uporedni rezultati za silu u funkciji relativne magnetne permeabilnosti za slučaj aksijalne i radijalne magnetizacije magneta.*

Na slici 9.29 prikazana je zavisnost sile od relativne magnetne permeabilnosti cilindra, u slučaju kada se iznad njega nalazi stalni magnet oblika prstena aksijalno i radijalno namagnetisan. Očigledno je da je privlačna sila između magneta i cilindra od magnetnog materijala veća u slučaju kada je magnet homogeno namagnetisan u radijalnom pravcu.



10. Nepreciznosti u procesu modelovanja i proizvodnji stalnih magneta

10. Nepreciznosti u procesu modelovanja i proizvodnji stalnih magneta

Svaka tehnika modelovanja polazi od pretpostavke koja unosi izvesnu grešku. Takođe je i sam proces proizvodnje podložan oscilacijama u granicama tolerancije. U ovom poglavlju razmatraju se one nepreciznosti koje imaju najveći uticaj na funkcionisanje uređaja u čijem su sastavu stalni magneti.

10. 1. Globalni efekti

Globalni efekti su oni koji se odnose na jedan stalni magnet ili seriju stalnih magneta proizvedenih u jednoj grupi. Analizom malog broja uzoraka iz serije, mogu se predvideti nepreciznosti i uticaj koje one imaju za celu proizvedenu seriju sa razumnom tačnošću.

10.1.1. Varijacije u remanentnoj indukciji

Kao što je poznato, remanentna magnetna indukcija stalnog magneta, B_r može biti promenljive prirode i kao takva je prikazana svojom tipičnom i minimalnom vrednošću. Najčešće se ove oscilacije u vrednostima javljaju kod magneta koji izađu iz proizvodnje u različitim grupama. Kod magneta iz iste grupe, proizvedenim istovremeno, ove varijacije su znatno manje. Tolerancija u sastavu i presovanju magnetnih materijala za vreme procesa magnetizacije ima uticaj na remanentnu magnetnu indukciju i teško ju je proveriti pre procesa proizvodnje ali se jednostavno može izmeriti nakon ili za vreme procesa proizvodnje. Uređaj koji se u tu svrhu koristi naziva se histograf ili histerigraf i on daje *B*-*H* karakteristiku materijala.

Uticaj varijacije remanentne indukcije može biti uključen u sve metode za modelovanje polja. Analizom izraza za silu koja deluje između stalnih magneta, jasno se vidi da bilo koja promena u remanentnoj indukciji utiče na promenu sile, promenu krutosti ili obrtnog momenta za vrednost kvadrata remanentne indukcije,

$$F \sim B_r^2 , K \sim B_r^2 , \; T \sim B_r^2 .$$

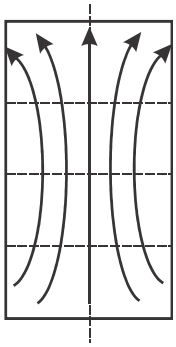
10.1.2. Relativna magnetna permeabilnost

Pretpostavka na kojoj se bazira veliki broj tehnika modelovanja stalnih magneta, bilo da se one zasnivaju na raspodeli fiktivnih magnetnih opterećenja ili Amperovih mikroskopskih

struja, je ta da je relativna magnetna permeabilnost svuda ista i jednaka je jedinici, $\mu_r = 1$. U realnom slučaju ta vrednost nije jednaka jedinici, ni kod najboljih magneta, kod kojih iznosi $\mu_r = 1.03$, ili više. Veoma je teško utvrditi precizno grešku koju ova pretpostavka unosi. Zbog toga je neophodno sprovesti eksperimentalna merenja i simulacije različitim tehnikama modelovanja kako bi se ona utvrdila. Često su simulacije značajnije od eksperimentalnih rezultata jer je kod vrednosti dobijenih eksperimentalnim putem nemoguće izdvojiti samo uticaj relativne magnetne permeabilnosti jer veliki uticaj na dobijene merene vrednosti ima i geometrija magneta i druga magnetna svojstva.

U [59] interakcija između kalema i niza stalnih magneta je simulirana modelom površinskih naelektrisanja i modelom harmonika koji uključuje relativnu magnetnu permeabilnost $\mu_r = 1.03$. Utvrđeno je da ova razlika u relativnoj magnetnoj permeabilnosti unosi grešku od 2%. To praktično znači da gruba aproksimacija greške kod proračuna sile može biti $F_{err} \approx |1-\mu_r| F$. Ipak, najbolji način da se dobije što tačniji rezultat je primeniti tehnike modelovanja koje uključuju permeabilnost materijala.

10.1.3. Loše poravnanje ugla magnetizacije



Slika 10.1. *Magnetisanje magnetnog materijala.*

Stalni magneti se magnetišu upotrebom velikih kalemova. Ako, iz nekog razloga, geometrijska osa stalnog magneta nije precizno poravnata sa magnetnom osom domena stalnog magneta, rezultujuća magnetizacija će imati mali otklon u odnosu na geometriju. Pored toga, magnetno polje magnetizujućeg kalema nije homogeno. Pod pretpostavkom da se materijal koji se magnetiše seče na osam delova, kako slika 10.1 prikazuje, magnetizacija u njima je uniformna ali je u svakom od delu je različita, odnosno javlja se loše poravnanje vektora magnetizacije. Greška koja se javlja usled lošeg poravnanja vektora magnetizacije prevazilazi se uključivanjem superpozicije u tehnike modelovanja.

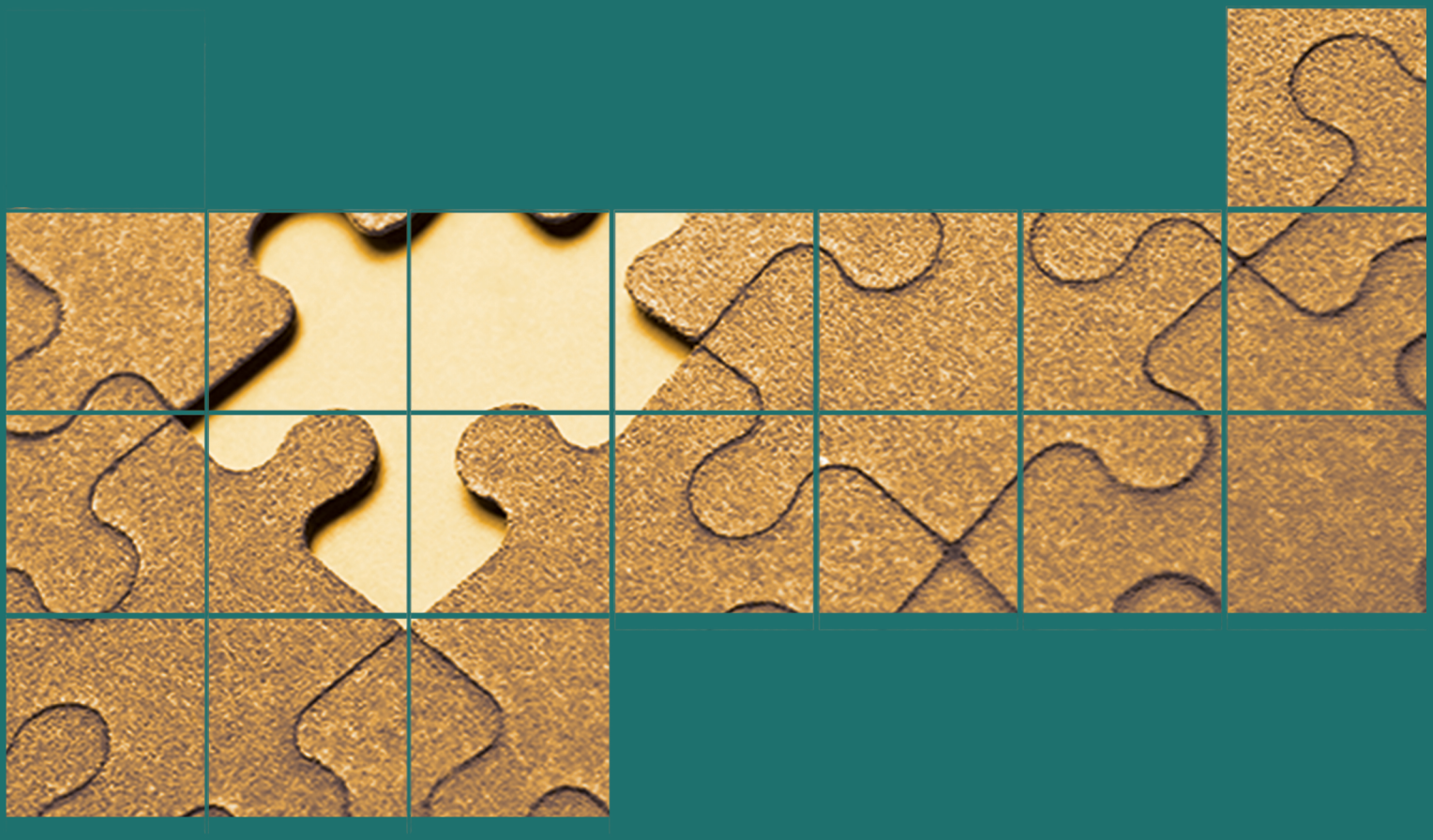
10.2. Lokalni efekti

Lokalni efekti su oni koji se javljaju unutar zapremine stalnog magneta i jedinstveni su za sve magnete. Zbog toga ih je još teže predvideti i izmeriti.

10.2.1. Geometrijske tolerancije

Kao i za svaki drugi proizvod tako važi i za stalne magnete da su njihove dimenzije u granicama tolerancije mašina koje ih proizvode. Doduše, pomenuta tolerancija je reda veličine desetog dela mikrometra što u poređenju sa dimenzijama magneta nema velikog uticaja. Pored toga, ivice magneta su sklone lomljenju. S obzirom da su magnetni materijali krti i često imaju oštre ivice, mali delići materijala se mogu lako odlomiti. Kako su dimenzije odlomljenih delova u granicama tolerancije, smatra se da je njihov uticaj na karakteristike magneta minimalan.

Položaj stalnog magneta je unutar tolerancije manje od jednog milimetra. Smatra se da, kao i u slučaju tolerancije dimenzija i tolerancija položaja magneta ima minimalan uticaj na finalni proizvod kao posledica razlike u celom redu veličine između tolerancije i veličine magneta. Oba efekta se lako mogu proveriti primenom metoda fiktivnih magnetnih opterećenja.



Zaključak

11. Zaključak

Stalni magneti su sastavni deo širokog spektra uređaja koji imaju uticaj na naš svakodnevni život a da toga nismo ni svesni. Ima ih u audio i video plejerima, telekomunikacionoj opremi, personalnim računarima, štampačima, mašinama za kopiranje, automobilima, uređajima za skladištenje podataka. Pored ove upotrebe stalnih magneta koja se ističe po značaju i obimu proizvodnje, postoje i drugi primeri gde je produkcija magneta znatno manja, ali je veličina magneta znatno veća. Takve primene su, recimo, kod levitirajućih vozova koji dostižu brzine i do 540km/h. Zatim, veoma značajna primena stalnih magneta je u izradi uređaja za magnetne rezonance (MRI), koja ima široku primenu u medicini. Sa druge strane, poslednjih godina je od velikog značaja razvoj savremenih magneta na bazi retke zemlje koji je fokusirao pažnju naučne javnosti na određene elektromehaničke i elektronske uređaje u kojima su ovi materijali u upotrebi. Iz tog razloga motori na bazi semarium-kobalta ili neodimium-čelik-borona bez četkica nalaze sve veću primenu. Najbolji primeri primene ovih magneta su hard diskovi računara. Osim toga, korišćenje ovih stalnih magneta na bazi retke zemlje, sa znatno boljim osobinama i niskom cenom, dalo je povoda za nova istraživanja i projektovanja novih proizvoda sa što boljim performansama.

Stalni magneti su predmet proučavanja velikog broja istraživača u svetu već duži niz godina, o čemu svedoči niz publikacija koje su delimično navedene u prvoj glavi. Predlagani su različiti metodi za proračun polja koje stvaraju stalni magneti u cilju pronalaženja onog koji će omogućiti najjednostavniju analizu magnetnih struktura u funkciji parametara. Takođe, cilj primenjenih tehnika je i dobijanje što tačnijih rezultata za najkraće moguće vreme. Postoji niz numeričkih metoda koji su sa svojim prednostima i manama navedeni u poglavlju 3. Sa druge strane postoje i analitički pristupi za proračun polja stalnih magneta koji su tačniji od numeričkih ali imaju mogućnost primene samo kod jednostavnijih struktura. Tradicionalne analitičke metode proračuna polja kod stalnih magneta bazirane na raspodeli površinskih magnetnih opterećenja i raspodeli Amperovih mikroskopskih struja su uglavnom ograničene na paralelopipedne i cilindrične strukture. U cilju prevazilaženja nedostataka postojećih analitičkih i numeričkih metoda u disertaciji su predložena dva polunumerička pristupa kojima su delom prevaziđeni nedostaci postojećih. Kako bi se stekao bolji uvid u 3D magnetne strukture i odredilo polje koje one stvaraju, od suštinske važnosti je imati metod koji omogućava modelovanje netipičnih magnetnih struktura.

Metodi koji su korišćeni u disertaciji za proračun polja i sile kod različitih konfiguracija u čiji sastav ulaze stalni magneti zasnovani su na dobro poznatim jednačinama na kojima se bazira Amperski pristup i metod fiktivnih magnetnih opterećenja. Uvođenjem diskretizacione tehnike u oba pristupa znatno je pojednostavljeno korišćenje pomenutih metoda i pružena je mogućnost primene istih na kompleksnije strukture. Pristup zasnovan na raspodeli površinskih i zapreminskih Amperovih mikroskopskih struja je korišćen za proračun polja i sile sistema stalnih magneta. Sistemi su oblika zarubljene kupe, torusa trapezoidnog poprečnog preseka i magneta pomenutih oblika postavljenih iznad linearne magnetne ravni. Magnetno polje i sila za pomenute strukture je prvi put određena od strane autora ove disertacije, i od velikog je značaja s obzirom da pruža mogućnost korišćenja magneta netipičnog oblika kod projektovanja novih uređaja u čiji sastav ulaze stalni magneti ili poboljšanja performansi postojećih. Tačnost rezultata pomenutog pristupa je potvrđena metodom konačnih elemenata. Aksijalna sila, za izabrane parametre, primenom polunumeričkog pristupa, dobijena je za manje od 10 sekundi dok je za iste parametre u FEMM 4.2 softveru rezultat dobijen za 1.7 miliona elemenata nakon 14 minuta. Očigledno, prednost ovog metoda je znatno kraće vreme proračuna. Pored toga, na osnovu dobijenih jednačina, veoma je jednostavno izvršiti analizu sile i polja u funkciji parametra, što nije slučaj kod numeričkog metoda kakav je metod konačnih elemenata.

Drugi metod koji je korišćen u disertaciji zasniva se na raspodeli fiktivnih magnetnih opterećenja i zajedno sa diskretizacionom tehnikom omogućava određivanje polja i sile kod različitih magnetnih struktura. Pored polja i sile koja deluje između dva blok magneta ovom tehnikom je određena i sila između dva lateralno pomerena cilindra, kao i privlačna sila između stalnog magneta oblika potkovice i beskonačne magnetne ravni. Posebna pažnja je posvećena analizi magnetnih ležaja i određivanja sile između različitih konfiguracija ležaja. Pored struktura koju čine dva aksijalno, odnosno dva radijalno namagnetisana stalna magneta, što je uobičajna konfiguracija ležaja, analiziran je i sistem koga čini jedan aksijalno i jedan radijalno namagnetisan magnet. Analizom rezultata utvrđeno je da je intenzitet sile najveći u slučaju ove konfiguracije. Rezultati ovog pristupa su upoređeni sa Kulombijskim pristupom i metodom konačnih elemenata. U konačnom izrazu za silu figuriše, pored elementarnih funkcija, samo elipitički integral druge vrste, tako da je prednost ovog metoda njegova jednostavnost, a samim tim i vremenska efikasnost. Rezultati za silu magnetnog ležaja dobijeni su za manje od jedne sekunde, dok je primenom metoda konačnih elemenata (za oko 2 miliona elemenata) potrebno više od pet minuta za rešavanje iste konfiguracije na

računaru Intel Core i5-2320 CPU Quad Core na 3GHz i 8GB RAM memorije, na 64-bitom Windows operativnom sistemu. Ovaj metod se pokazao boljim za analizu magnetnih struktura u odnosu na Amperski pristup s obzirom da se bazira na određivanju magnetnog skalar potencijala za razliku od Amperskog pristupa koji polazi od magnetnog vektor potencijala. Shodno tome i vreme izvršenja je kraće. I ovaj metod pruža veliku mogućnost analize polja i sile u funkciji parametara magneta što je od velikog značaja za projektovanje i kontrolu uređaja koji sadrže stalne magnete. Pored toga dobijeni izrazi za silu mogu biti od značaja za inverzne optimizacione probleme, koji nisu deo razmatranja ove disertacije ali mogu biti osnov daljim istaraživanjima.

Posebnu grupu problema koji su analizirani u disertaciji predstavljaju strukture koje čine stalni magneti u prisustvu tela načinjenog od magnetnog materijala. Do sada se u literarturi isključivo moglo naći rešenje za polje, odnosno silu koja deluje između stalnog magneta i beskonačne magnetne ravni. Problemi tog tipa su rešavani primenom najpre teoreme lika u ravnom ogledalu, a potom je dobijena konfiguracija modelovana Amperskim ili Kulombijskim pristupom. U ovoj disertaciji su prvi put modelovani sistemi stalnih magneta u prisustvu tela konačnih dimenzija načinjenih od magnetnih materijala primenom hibridnog metoda graničnih elemenata. Hibridni metod graničnih elemenata je relativno nov metod, i do sada je uspešno primenjen za analizu elektromagnetnih problema sa višeslojnim sredinama kao što su: određivanje raspodele elektromagnetnog polja u okolini kablovskih završnica i spojnica, kvazi TEM analiza mikrotalasnih oklopljenih ili neoklopljenih vodova sa konačnom širinom dielektrika, uzemljivački sistemi, analiza korona efekta, kod metamaterijala, određivanja raspodele temperaturnog polja. Takođe je korišćen za analizu 2D mikrotalasnih oklopljenih i neoklopljenih vodova, mikrostrip linije sa podlogom od dielektrika konačne širine, ali i u slučajevima kada je traka konačne debljine. Iako je pored pomenutih primena, HBEM u ovoj disertaciji korišćen za modelovanje aksijalno simetričnih sistema stalnih magneta, uspešno se može primeniti i za analizu 3D statičkih, stacionarnih i kvazistacionarnih elektromagnetnih problema.

U poslednjoj glavi je analiziran uticaj nepreciznosti u procesu proizvodnje i modelovanja stalnih magneta. Jedna od osnovnih pretpostavki na kojoj se bazira najveći broj metoda za modelovanje magnetnih struktura, pa i metodi korišćeni u ovoj disertaciji, je da je relativna magnetna permeabilnost stalnih magneta jednaka jedinici. Takođe se smatra da su stalni magneti homogeno namagnetisani, što nije apsolutno tačno, s obzirom da polje kalemova koji se koriste za magnetisanje magneta nije potpuno homogeno. Poređenje sa eksperimentalnim

rezultatima pokazalo je da ove pretpostavke unose grešku od oko 2%, što je prihvatljivo sa inženjerske tačke gledišta.

Iako je poslednjih godina u vodećim časopisima iz ove oblasti objavljen veliki broj radova na temu stalnih magneta, rezultati izloženi u ovoj disertaciji su iz gore pomenutih razloga, vrlo značajni i mogu se koristiti u procesu modelovanja i proizvodnje različitih uređaja sa stalnim magnetima. Prikazani rad kroz detaljnu analizu i mnoštvo prikazanih rezulata predstavlja osnovu daljim istraživanjima u ovoj oblasti.



12. Literatura

12. Literatura

[1] Agashe, J. S., D. P. Arnold, "A study of scaling and geometry effects on the forces between cuboidal and cylindrical magnets using analytical force solutions", *Journal of Physics D: Applied Physics*, 41(105001):1–9, 2008.

[2] Akoun, G., J.-P. Yonnet, "3D analytical calculation of the forces exerted between two cuboidal magnets", *IEEE Transactions on Magnetics,* vol. 20, no. 5, pp. 1962–1964, September 1984.

[3] Aleksić, S.R, A. N. Mladenović, "*Magnetic field determination of different shaped permanent magnets*", Discrete and Computational Mathematics, Nova Science Publisher, Inc, New York 2008, Chapter 3, pp. 31-43, 2008.

[4] Allag, H., J.-P. Yonnet, "3D analytical calculation of interactions between perpendicularly magnetized magnets: Application to any magnetization direction", *Sensor letters*, vol.7, no.4, pp. 486–491, August 2009.

[5] Allag, H., J.-P. Yonnet, "3-D analytical calculation of the torque and force exerted between two cuboidal magnets", *IEEE Transactions on Magnetics,* vol. 45, no. 10, pp. 3969 – 3972, October 2009.

[6] Allag, H., J.-P. Yonnet, M. E. H. Latreche, "Analytical calculation of the torque exerted between two perpendicularly magnetized magnets", *Journal of Applied Physics,* 109:07E701, March 2011.

[7] Anderson, C. G., S. H. Salter, "Optimum geometry analyses for rectangular hard magnet pairs", *IEEE Transactions on Magnetics,* vol. 23, no. 5, pp. 3836–3844, September 1987.

[8] Babic, S. I., M. M. Gavrilovic, "New expression for calculating magnetic fields due to current-carrying solid conductors", *IEEE Transactions on Magnetics,* vol. 33, no. 5, pp. 4134–4136, September 1997.

[9] Babic, S. I., C. Akyel, "Improvement in the analytical calculation of the magnetic field produced by permanent magnet rings", *Progress in Electromagnetics Research C*, vol. 5, pp. 71–82, 2008.

[10] Babic, S. I., C. Akyel, "Magnetic force calculation between thin coaxial circular coils in air", *IEEE Transactions on Magnetics,* vol. 44, no. 4, pp. 445 –452, April 2008.

[11] Bancel, F., "Magnetic nodes", *Journal of Applied Physics*, vol. 32, pp. 2155–2161, June 1999.

[12] Bachovchin, K. D., J. F. Hoburg, R. F. Post, "Magnetic field and force in permanent magnet levitated bearings", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol.48, no.7, pp. 2112–2120, July 2012.

[13] Bangcheng, H., Z. Shiqiang, W. Xi, Y. Qian, "Integral Design and Analysis of Passive Magnetic Bearing and Active Radial Magnetic Bearing for Agile Satellite Application", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol.48, no.6, pp. 1959–1966, June 2012.

[14] Baran W., "Analytical methods for the design calculation of p.m. synchronous couplings", *Acta Polytechnics Scandinavica, Applied Physics*, vol. 138, pp. 13–19, 1983.

[15] Beleggia, M., D. Vokoun, M. D. Graef, "Forces Between a Permanent Magnet and a Soft Magnetic Plate", *IEEE Magnetics Letters*, vol. 3, September 2012.

[16] Binns, K. J., P. J. Lawrenson, C.W. Trowbridge, *The analytical and numerical solution of electric and magnetic fields*, Wiley, Chichester, 1st edition, 1992.

[17] Bleuler, H., "A survey of magnetic levitation and magnetic bearing types", *JSME International Journal Series III*, vol. 35, no. 3, pp. 335–342, 1992.

[18] Boerdijk, A. H., "Technical aspects of levitation", *Philips Research Reports*, vol. 11, pp. 45– 56, 1956.

[19] Borgermann, F. J., R. Blank, G. W. Reppel, J. Bahrdt, J. Pfluger, "Improved homogeneity of permanent magnets for undulators and wigglers", *European Particle Accelerator Conference*, pp. 2234–2236, Genoa, Italy, June 2008.

[20] Braneshi, M., O. Zavalani, A. Pijetri, "The use of calculating function for the evaluation of axial force between two coaxial disk coils", *3rd International PhD Seminar Computational Electromagnetics and Technical Application*, pp. 21-30, 28 August - 1 September, Banja Luka, Bosnia and Hertzegovina.

[21] Cambel, P., *Permanent magnet materials and their application*, Cambridge University Press 1994.

[22] Chari, M. V. K., S. J. Salon. *Numerical methods in electromagnetism*, Academic Press, San Diego, 2000.

[23] Charpentier, J. F., G. Lemarquand, "Calculation of ironless permanent magnet couplings using semi-numerical magnetic pole theory method", *COMPEL*, vol. 20, no.1, pp. 72–89, January 2001.

[24] Choi, Y.-M., M. G. Lee, D.-G. Gweon, J. Jeong, "A new magnetic bearing using Halbach magnet arrays for a magnetic levitation stage", *Review of Scientific Instruments*, 80(045106):1–9, 2009.

[25] Coey, J. M. D., *Rare-earth iron permanent magnets*. Oxford Univ. Press, Oxford, UK, 1st edition, 1996.

[26] Coey, J. M. D., "Hard Magnetic Materials: A Perspective", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol.47, no.12, pp. 4671–4681, December 2011.

[27] Coffey M. W., "Magnetic levitation from negative permeability materials," *Phys. Lett. A*, vol. 376, pp. 2739–2742, 2012.

[28] Compter, J. C., J. L. G. Janssen, E.A. Lomonova, "Ampere's circuital 3-D model for non-cuboidal magnets", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 46, no.12, pp. 4009–4015, December 2010.

[29] Cooper, R., V. Neil, W. Woodruff, "Optimum permanent-magnet dimensions for repulsion applications", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 9, no.2, pp. 125 – 127, June 1973.

[30] Comsol Multiphysics software, "Model Gallery", The Magnetic Field from a Permanent Magnet. Accessed August 19, 2014. http://www.comsol.com/model/the-magnetic-field-from-a-permanent-magnet-78.

[31] Delinchant, B., F. Wurtz, J.-P. Yonnet, J.-L. Coulomb, "Interaction between ring-shaped permanent magnets with symbolic gradients: application to magnetic bearing system optimization", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 47, no. 5, pp. 1418– 1421, May 2011.

[32] Dolezel I., P. Karban, P. Solin, *Integral Methods in low-frequency electromagnetics*, Wiley, New York, 2009.

[33] Durand E., *Magnétostatique*, Masson, Paris, France, 1968.

[34] Elies P., G. Lemarquand, "Analytical optimization of the torque of a permanent-magnet coaxial synchronous coupling", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 34, no. 4, pp. 2267–2273, July 1998.

[35] Elies P., G. Lemarquand, "Comparison of the torque of flat air gap synchronous couplings versus the magnetization direction of the magnets", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 35, no. 1, pp. 548–556, January 1999.

[36] Furlani, E. P., "Formulas for the force and torque of axial couplings", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 29, no. 5, pp. 2295–2301, September 1993.

[37] Furlani, E. P., "Analysis and optimization of synchronous magnetic couplings", *Journal of Applied Physics* , vol. 79, no. 8, pp. 4692–4694, April 1996.

[38] Furlani, E. P., *Permanent Magnet and Electromechanical Devices: materials, analysis and applications*, Academic Press, London, 6th edition, 2001.

[39] Furlani, E. P., S. Reznik, W. Janson, "A three-dimensional field solution for bipolar cylinders", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 30, no. 5, pp. 2916–2919, September 1994.

[40] Furlani, E. P., "A formula for the levitation force between magnetic disks", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 29, no. 6, pp. 4165–4169, November 1993.

[41] Furlani, E. P., "A two-dimensional analysis for the coupling of magnetic gears", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 33, no. 3, pp. 2317 –2321, May 1997.

[42] Furlani, E. P., S. Reznik, A. Kroll, "A three-dimensional field solution for radially polarized cylinders", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 31, no. 1, pp. 844 –851, January 1995.

[43] Furlani, E. P., R. Wang, H. Kusnadi, "A three-dimensional model for computing the torque of radial couplings", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 31, no. 5, pp. 2522 –2526, September 1995.

[44] Greconici, M., Z. Cvetković, A. Mladenović, S. Aleksić, D. Vesa, "Analytical-numerical approach for levitation force calculation of a cylindrical bearing with permanent magnets used in an electric meter", 12th International Conference on Optimization of Electrical and Electronic Equipment (OPTIM 2010), Fullpaper on CD, pp. 197 – 201, May 20-22, Brasov, Romania, 2010.

[45] Gysen, B. L. J., K. J. Meessen, J. H. H. Paulides, E. A. Lomonova, "General formulation of the electromagnetic field distribution in machines and devices using Fourier analysis, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 46, no. 1, pp. 39 –52, January 2010.

[46] Hague, B. *The principles of electromagnetism, applied to electrical machines,* Dover Publications, New York, 1st edition, 1962.

[47] Halbach, K., "Design of permanent multipole magnets with oriented rare earth cobalt material", *Nuclear Instruments and Methods*, vol. 169, pp. 1–10, 1980.

[48] Hornreich, R., S. Shtrikman, "Optimal design of synchronous torque couplers", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 14, no. 5, pp. 800 – 802, September 1978.

[49] Hull, J. R., A. Cansiz, "Vertical and lateral forces between a permanent magnet and a high temperature superconductor," *J. Appl. Phys*., vol. 86, no. 11, pp. 6396–6404, Dec. 1999.

[50] Ilić, S. S., A. N. Vučković, S. R. Aleksić, "Interaction Magnetic Force Calculation of Axial Passive Magnetic Bearing Using Magnetization Charges and Discretization Technique", *Proceedings of Abstracts of the 15th International IGTE Symposium on Numerical Field Calculation in Electrical Engineering*, pp. 300-304, 17-19 September, Graz, Austria, 2012.

[51] Ilić, S. S., M. T. Perić, S. R. Aleksić, N. B. Raičević, "Hybrid Boundary Element Method and Quasi-TEM Analysis of Two-Dimensional Transmission Lines - Generalization", *Electromagnetics*, Taylor & Francis, Vol. 33, No. 4, pp. 292-310, 2013.

[52] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*. Wiley, Chichester, 3rd edition, 1999.

[53] Jin, J. M., *The Finite Element Method in Electromagnetics*, Wiley, New York, 2nd edition, 2002.

[54] Jansen, J.W., J. L. G. Janssen, J. M.M. Rovers, J. J.H. Paulides, E. A. Lomonova, "Semi-analytical models for the design of high-precision permanent magnet actuators", *Int. Compumag Soc. Newsletter*, vol. 16, no. 2, pp. 4–17, 2009.

[55] Janssen, J. L.G., J. J. H. Paulides, E. Lomonova, "Analytical modeling of permanent magnets on a soft magnetic support for a suspension system", *Int. Conf. on Electrical Machines and Systems (ICEMS)*, pp. 3825–3830, Wuhan, China, October 2008.

[56] Janssen, J. L.G., J. J. H. Paulides, E. A. Lomonova, "Three-dimensional analytical field calculation of pyramidal-frustum shaped permanent magnets", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 45, no. 10, pp. 4628–4631, October 2009.

[57] Janssen, J. L.G., J. J. H. Paulides, E. A. Lomonova, F. Bölöni, A. Tounzi, F. Piriou. "Analytical calculation of interaction force between orthogonally magnetized permanent magnets", *Sensor letters*, vol. 7, no. 3, pp. 442–445, August 2009.

[58] Janssen, J. L.G., J. J. H. Paulides, J. C. Compter, E. A. Lomonova, "Threedimensional analytical calculation of the torque between permanent magnets in magnetic bearings", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 46, no. 6, pp. 1748–1751, June 2010.

[59] Janssen, J. L. G., "Extended analytical charge modeling for permanent-magnet based devices - Practical application to the interactions in a vibration isolation system", PhD thesis, Eindhoven University of Technology, 2011.

[60] Janssen, J. L.G.,J. J. H. Paulides, E. Lomonova, "The developments in the analytical expressions of the interaction force between cuboidal permanent magnets", In *Proc. Electrimacs 2011*, pp. 2011S240224, Paris, France, June 2011.

[61] Janssen, J. L.G., J. J. H. Paulides, E. A. Lomonova, "Analytical calculation of the torque between perpendicular magnetized magnets in magnetic suspensions", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 47, no.10, pp. 4286 – 4289, October 2011.

[62] Jayawant, B. V., "Electromagnetic suspension and levitation", *Rep. Prog. Phys.*,vol. 44, pp. 411–472, 1981.

[63] Kremers, M., J. L. G. Janssen, J. J. H. Paulides, E. A. Lomonova, "3D analytical modeling of a double skewed linear magnet array", In *Proc. of Intermag 2011*, Taipei, Taiwan, April 2011.

[64] Kremers, M., J. Paulides, E. Ilhan, J. Janssen, E. Lomonova, "Relative permeability in a 3D analytical surface charge model of permanent magnets", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 49, no.5, pp. 2299 – 2302, May 2013.

[65] Krop, D. C. J., E. A. Lomonova, J. W. Jansen, J. J. H. Paulides, "A study on the integration of contactless energy transfer in the end teeth of a PM synchronous linear motor", *Journal of Applied Physics*, 105:07F115, 2009.

[66] Lemarquand, V., G. Lemarquand, "Passive Permanent Magnet Bearings for Rotating Shaft: Analytical Calculation", *Magnetic Bearings, Theory and Applications,* pp. 85-116, Croatia: Sciyo, October 2010.

[67] Lemarquand, V., J. F. Charpentier, G. Lemarquand, "Nonsinusoidal torque of permanent-magnet couplings," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 35, no. 5, pp. 4200–4205, 1999.

[68] Mallinson, J. C., "One-sided fluxes - a magnetic curiosity?", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 9, no. 4, pp. 678–682, December 1973.

[69] Marinescu M., N. Marinescu, "A new improved method for computation of radial stiffness of permanent magnet bearings", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 30, no. 5, pp. 3491–3494, September 1994.

[70] Maxwell J. C., *A treatise on electricity and magnetism*, volume 1,2. Clarendon, Oxford, 3rd edition, 1904.

[71] Mayergoyz, I. D., E. P. Furlani, S. Reznik, "The computation of magnetic fields of permanent magnet cylinders used in the electrophotographic process", *Journal of Applied Physics*, vol. 73, no. 10, pp. 5440–5442, May 1993.

[72] McCurrie, R. A., *Ferromagnetic Materials—Structure and Properties*. London, U.K.: Academic Press, 1994.

[73] Medeiros, L. H. D., G. Reyne, G. Meunier, “Comparison of global force calculations on permanent magnets”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 34, no. 5, pp. 3560–3563, September 1998.

[74] Medeiros, L. H. D., G. Reyne, G.Meunier, “About the distribution of forces in permanent magnets”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 35, no. 3, pp. 1215–1218, May 1999.

[75] Medeiros, L. H. D., G. Reyne, G. Meunier, “A unique distribution of forces in permanent magnets using scalar and vector potential formulations”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 36, no. 5, pp. 3345–3348, May 2000.

[76] Meeker, D. n.d. Software package FEMM 4.2. Available on-line at http://www.femm.info/wiki/ Download (accessed 2 March 2007).

[77] Meessen, K. J., B. L. J. Gysen, J. J. H. Paulides, E. A. Lomonova, “Three dimensional magnetic field modeling of a cylindrical Halbach array”, *IEEE Transactions on Magnetics,* vol. 46, no.6, pp. 1733–1736, 2010.

[78] Meessen, K. J., J. J. H. Paulides, E. A. Lomonova, ”Force calculations in 3-D cylindrical structures using Fourier analysis and the Maxwell stress tensor”, *IEEE Transactions on Magnetics,* vol. 49, no.1, pp. 1733–1736, January 2013.

[79] Mladenović, A. N., S. R. Aleksić, *"Stalni magnet oblika štapa"*, 48. Konferencija ETRAN-a, Sveska II, str. 233-236, 6 - 10. jun, Čačak, Srbija i Crna Gora, 2004.

[80] Mladenović, A. N., “Toroidal shaped permanent magnet”, International PhD-Seminar Computation of Electromagnetic Field, *Proceedings of Full Papers*, pp.125-130, 23-28 September, Budva, Serbia and Montenegro, 2004.

[81] Mladenović, A. N., S. R. Aleksić, “Toroidal shaped permanent magnet with air gap”, *Journal of Technical Sciences and mathematics*, Faculti of Technical Sciences Kosovska Mitrovica, Serbia and Montenegro, vol. 10, no 1, pp. 43-52, 2005.

[82] Mladenović, A. N., S. R. Aleksić, “Toroidal shaped permanent magnet with air gap”, 7th International conference on applied electromagnetics PES 2005, *Fullpaper proceedings on CD*, pp. 54-63, 23-25 May, Niš, Serbia and Montenegro, 2005.

[83] Mladenović, A. N., "Proračun polja stalnog magneta oblika torusa", 49. Konferencija ETRAN-a, Sveska II, str. 253-256, 05 - 10. Jun, Budva, Srbija i Crna Gora, 2005.

[84] Mladenović, A. N., S. R. Aleksić, ”Methods for magnetic field calculation”, 11th International Conference on Electrical Machines, Drives and Power Systems ELMA 2005, *Proceedings of Full Papers*, vol.2, pp. 350-354, 15-16 September, Sofia, Bulgaria, 2005.

[85] Mladenović, A. N., “Toroidal shaped permanent magnet with two air gaps”, International PhD-Seminar Numerical Field Computation and Optimization in Electrical Engineering, *Proceedings of Full Papers*, pp. 153-158, 20-25 September, Ohrid, Macedonia, 2005.

[86] Mladenović, A. N., M. T. Perić, "Proračun polja stalnog magneta oblika štapa", *XIII Telekomunikacioni forum TELFOR 2005*, Zbornik na CD-u, sekcija 7.7: PEL, Beograd, Srbija i Crna Gora, 2005.

[87] Mladenović, A. N., "Proračun magnetnog polja homogeno namagnetisanog stalnog magneta", 50. Konferencija ETRAN-a, Sveska II, str. 255-257, 06 - 08. jun, Beograd, Srbija i Crna Gora, 2006.

[88] Mladenović, A. N., “Permanent magnet homogeneously magnetized along its axes”, International PhD-Seminar “Computational Electromagnetics and Technical Application”, Proceedings of Full Papers, pp. 171-174, 28 August-01 September, Banja Luka, Bosna and Herzegovina, 2006.

[89] Mladenović, A. N., S. R. Aleksić, "Magnetic field calculation of permanent magnets", 51st Internationales Wissenschaftliches Kolloquium, CD-Proceedings (Session 3.3), Ilmenau, Germany 2006.

[90] Mladenović, A. N., S. R. Aleksić, ”Magnetic field determination of rod shaped permanent magnet system” XV-th International Symposium on Electrical Apparatus and Technologies SIELA 2007, vol. I, pp. 108-114, 31 May – 1 June, Plovdiv, Bulgaria, 2007.

[91] Mladenović, A. N., ”Magnetic field determination of toroidal shaped permanent magnet system”, 8th International Conference on applied electromagnetics PES 2007, CD-proceedings (Session O1-7), 3-5 September, Niš, Serbia and Montenegro 2007.

[92] Mladenović, A. N., S. R. Aleksić, “Determination for different shaped permanent magnets”, VII International Symposium on Electromagnetic Compatibility and Electromagnetic Ecology, CD-proceedings, pp. 84-87, 26 -29 June, St.Petersburg, Russia, 2007, DOI 10.1109/EMCECO.2007.4371720.

[93] Mladenović, A. N., “Proračun magnetnog polja stalnih magneta”, *Magistarska teza*, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, Niš, Srbija, 27. septembar 2008.

[94] Mladenović, A. N., S. R. Aleksić, "Magnetic field calculus for block permanent magnet system", 12th International Conference on Electrical Machines, Drives and Power Systems ELMA 2008, vol.1, pp. 228-231, 16-18 October, Sofia, Bulgaria, 2008, ISSN 1313-4965.

[95] Mladenović, A. N., S. R. Aleksić, "Magnetic field determination of block permanent magnet magnetized in arbitrary direction", XVI-th International Symposium on Electrical Apparatus and Technologies – SIELA 2009, vol. II, pp. 228-234, 4-6 June, Bourgas, Bulgaria, 2009, ISBN 978-954-323-560-5.

[96] Mladenović, A. N., "Magnetic field determination for block permanent magnet systems", 4th International PhD-Seminar on Computational electromagnetics and bioeffects of electromagnetic fields – CEMBEF 2009, pp. 63-67, 28 - 30 August, Niš, Serbia, 2009, ISBN 978-86-85195-82-2.

[97] Mladenović, A. N., S. R. Aleksić, "Block permanent magnet system magnetic field determination", 54th IWK – Internationales Wissenschaftliches Kolloquium (International Scientific Colloquium), CD Fullpaper proceedings, September 07-10, Ilmenau, Germany, 2009, ISBN 978-3-938843-45-1.

[98] Mladenović, A. N., S. R. Aleksić, S. S. Ilić, "Levitation force calculation for permanent magnet bearings using Ampere's currents", The 14th International IGTE Symposium on Numerical Field Calculation in Electrical Engineering, pp. 149-153, 20-22 September, Graz, Austria, 2010, ISBN: 978-3-85125-133-3.

[99] Mladenović, A. N., S. R. Aleksić, "Magnetic Field Determination for Different Block Permanent Magnet Systems", *Facta Universitatis, Series: Electronics and Energetics*, vol 23, no.3, pp. 259-271, December 2010.

[100] Mladenović, A. N., S.R. Aleksić, "Magnetic field determination of block permanent magnet magnetized in arbitrary direction", *Elektrotechnica and Elektronica,* The Union of Electronics, Electrical Engineering and Telecommunications/CEEC/Bulgaria, vol.45. no. 9-10, pp. 20-23, 2010.

[101] Muscia, R., "Computation of the magnetic field generated by helicoidal toroidal permanent magnets", *Electromagnetics,* vol.32, no.1, pp. 8-30, 2012.

[102] Nagaraj, H. S., "Investigation of magnetic fields and forces arising in open circuit-type magnetic bearings", *Tribology Transaction*, vol. 31, no.2, pp.192–201, April 1988.

[103] Nagaya, K., M. Sugiura, "A method for obtaining a linear spring for a permanent magnet levitation system using electromagnetic control", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 31, no. 3, pp. 2332 –2338, May 1995.

[104] Nagrial, M. H., "Design optimization of magnetic couplings using high energy magnets", *Electric Machines & Power Systems*, vol. 21, pp. 115–126, 1993.

[105] Nasar, S. A., G. Xiong, "Determination of the field of a permanent-magnet disk machine using the concept of magnetic charge", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 24, no. 3, pp. 2038–2044, March, 1988.

[106] Neville E., "The early history of the permanent magnet", *Endeavour*, vol. 17, no. 65, January 1958.

[107] Ninhuijs, B. v., T. E. Motoasca, B. L. J. Gysen, E. A. Lomonova, "Modeling of Spherical Magnet Arrays Using the Magnetic Charge Model", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 49, no. 7, 4109-4112, July 2013.

[108] Ohji, T., S. C. Mukhopadhyay, M. Iwahara, S. Yamada, "Performance of repulsive type magnetic bearing system under nonuniform magnetization of permanent magnet", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 36, no. 5, pp.3696 –3698, September 2000.

[109] Oome, A. J. A., J. L. G. Janssen, L. Encica, E. Lomonova, J. A. A. T. Dams. "Modeling of an electromagnetic geophone with passive magnetic spring", *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 153, pp. 142–154, 2009.

[110] Ostovic, V., *Dynamics of Saturated ElectricMachines*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[111] Parker, R. "Permanent magnets in audio devices", IRE Transactions on vol. 6, Issue 1, pp. 15 – 21, Jan. 1958.

[112] Peijnenburg, A. T. A., J. P. M. Vermeulen, J. van Eijk, "Magnetic levitation systems compared to conventional bearing systems, *Microelectronic Engineering*, 83(4-9), pp. 1372 – 1375, 2006.

[113] Perić, M. T., S. S. Ilić, S. R. Aleksić, N. B. Raičević, "Characteristic Parameters Determination of Different Striplines Configurations using HBEM", *ACES journal*, The Applied Computational Electromagnetic Society, Mississippi, USA, vol. 28, no. 9, pp. 858-865, 2013.

[114] Perić, M., S. S. Ilić, S. R. Aleksić, N. B. Raičević, "Application of Hybrid boundary element method to 2D microstrip lines analysis", *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, IOS Press, vol. 42, no. 2, pp. 179-190, 2013.

[115] Perigo, E.A., R.N. Faria, C.C.Motta, "General expressions for the magnetic flux density produced by axially magnetized toroidal permanent magnets", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 43, no. 10, pp. 3826 –3832, October 2007.

[116] Peterson, A. F., S. L. Ray, and R. Mittra, *Computational Methods for Electromagnetics*, IEEE Press, New York, 1998.

[117] Raičević, N. B., S. R. Aleksić, S. S. Ilić, "A hybrid boundary element method for multilayer electrostatic and magnetostatic problems", *Electromagnetics*, vol.30, no.6, pp. 507-524, Aug. 2010.

[118] Rakotoarison, H. L., J.-P. Yonnet, B.Delinchant, "Using coulombian approach for modeling scalar potential and magnetic field of a permanent magnet with radial polarization", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 43, no. 4, pp. 1261–1264, April 2007.

[119] Ravaud, R., G. Lemarquand, V. Lemarquand, C. Depollier, "The three exact components of the magnetic field created by a radially magnetized tile permanent magnet", *Prog. in Electromagnetics Res., PIER 88*, pp.307–319, 2008.

[120] Ravaud, R., G. Lemarquand, V. Lemarquand, C. Depollier, "Discussion about the analytical calculation of the magnetic field created by permanent magnets", *Prog. in Electromagnetics Res. B*, vol.11, pp.281–297, 2009.

[121] Ravaud R., G. Lemarquand. Comparison of the coulombian and amperian current models for calculating the magnetic field produced by radially magnetized arc-shaped permanent magnets. *Prog. in Electromagnetics Res.*, 95: 309–327, 2009.

[122] Ravaud, R., G. Lemarquand, V. Lemarquand, and C. Depollier, "Magnetic field produced by tile permanent magnet whose polarization is both uniform and tangential", *Prog. in Electromagnetics Res. B*, vol.13, pp.1–20, 2009.

[123] Ravaud, R., G. Lemarquand, V. Lemarquand, C. Depollie, "Analytical calculation of the magnetic field created by permanent-magnet rings", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 44, no. 8, pp. 1982–1989, Aug. 2008.

[124] Ravaud, R., G. Lemarquand, V. Lemarquand, "Force and stiffness of passive magnetic bearings using permanentmagnets. part 1: Axial magnetization", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 45, no. 7, pp. 2996 –3002, July 2009.

[125] Ravaud, R., G. Lemarquand, V. Lemarquand, "Force and Stiffness of Passive Magnetic Bearings Using Permanent Magnets. Part 2:Radial Magnetization", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 45, no. 9, pp. 3334-3342, 2009.

[126] Ravaud, R., G. Lemarquand, V. Lemarquand, C. Depollier, "Torque in permanent magnet couplings: Comparison of uniformand radial magnetization", *Journal of Applied Physics*, 105(5):053904, March 2009.

[127] Ravaud, R., G. Lemarquand, V. Lemarquand, and C. Depollier, "Permanent magnet couplings: Field and torque three-dimensional expressions based on the Coulombian model", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 45, no. 4, pp. 1950–1958, April 2009.

[128] Ravaud, R., G. Lemarquand, S. Babic, V. Lemarquand, C. Akyel, "Cylindrical magnets and coils: Fields, forces and inductances", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 46, no. 9, pp. 3585-3590, Sep.2010.

[129] Robertson, W. S., B. Cazzolato, A. Zander, "Amultipole array magnetic spring", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 41, no. 10, pp. 3826–3828, October 2005.

[130] Robertson, W. S., B. S. Cazzolato, A. C. Zander, "Parameters for optimizing the forces between linear multipole magnet arrays", *IEEE Magnetic Letters*, 1:0500304, May 2010.

[131] Robertson, W. S., B. S. Cazzolato, A. C. Zander, "Maximizing the force between two cuboid magnets", *IEEE Magnetic Letters*, 1:9000102, 2010.

[132] Robertson, W. S., B. S. Cazzolato, A. C. Zander, "A Simplified force equation for coaxial cylindrical magnets and thin coils", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 47, no. 8, pp. 2045–2049, Aug. 2011.

[133] Robertson, W. S., B. S. Cazzolato, A. C. Zander, "Axial force between a thick coil and a cylindrical permanent magnet: optimizing the geometry of an electromagnetic actuator", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 48, no. 9, pp. 2479-2487, Sept. 2012.

[134] Roters, H. C., *Electromagnetic Devices*.Wiley, Chichester, 6th edition, 1955.

[135] Rovers, J. M. M., J.W. Jansen, E. A. Lomonova, M. J. C. Ronde, "Calculation of the static forces among the permanent magnets in a halbach array", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 45, no. 10, pp. 4372–4375, October 2009.

[136] Rubeck, C., J.-P. Yonnet , H. Allag , B. Delinchant , O. Chadebec, "Analytical calculation of magnet systems: Magnetic field created by charged triangles and polyhedra", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 49, no. 1, pp. 144-147, Jan. 2013.

[137] Samanta, P., H. Hirani, "Magnetic bearing configurations: Theoretical and experimental studies", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 44, no. 2, pp. 292–300, Feb. 2008.

[138] Selvaggi, J. P., S. Salon,O.-M. Kwon, M. V. K. Chari, "Calculating the external magnetic field from permanent magnets in permanent-magnet motors – An alternative method", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 40, no. 5, pp. 3278 –3285, Sep. 2004.

[139] Selvaggi, J. P., S. Salon, O.-M. Kwon, M. V. K. Chari, "Computation of the threedimensional magnetic field from solid permanent-magnet bipolar cylinders by employing toroidal harmonics", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 43, no. 10, pp. 3833 – 3839, October 2007.

[140] Skomski, R., P. Manchanda, P. Kumar, B. Balamurugan, A. Kashyap, D. J. Sellmyer, "Predicting the future of permanent-magnet materials", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 49, no. 7, pp. 3215-3220, July 2013

[141] W. R. Smythe, *Static and dynamic electricity*, McGraw-Hill, New York, 3rd edition, 1968.

[142] Solovyev, I. N., A. N. Solovyev, R. V. Petrov, M.I.Bichurin, A. N. Vučković, N. B. Raičević, "Sensitivity of Magnetoelectic Current Sensor", *11th International Conference on Applied Electromagnetics – PES* 2013, Niš, Serbia, CD-proceedings, Poster Session P2, Sept. 2013

[143] Strnat, K. J., "Modern permanent magnets for applications in electro-technology", *Proc. of the IEEE*, vol. 78, no. 6, pp. 923–958, June 1990.

[144] Surutka J., *Elektromagnetika*, Građevinska knjiga, Beograd 1989.

[145] Tian, L. L., X. P. Ai , Y. Q. Tian, "Analytical model of magnetic force for axial stack permanent-magnet bearings", *IEEE Transactions on Magnetics,* vol.48, no.10, pp. 2592-2599, October 2012.

[146] Tsai, N. C., S. L. Hsu, "On sandwiched magnetic bearing design", *Electromagnetics,* vol. 27, no. 6, pp. 371-385, 2007.

[147] Urankar, L. K., "Vector potential and magnetic field of current-carrying finite arc segment in analytical form, part III: Exact computation for rectangular cross section", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 18, no. 6, pp. 1860–1867, November 1982.

[148] Vokoun, D., M. Beleggia, L. Heller, P. Sittner, "Magnetostatic Interactions and Forces between Cylindrical Permanent Magnets", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 321, no. 2, pp. 3758-3763. 2009.

[149] Vučković, A. N., S. S. Ilić, S. R. Aleksić, "Calculation of the attraction force between permanent magnet and infinite linear magnetic plane using Ampere's currents", *XLVI International Scientific Conference on Information, Communication and Energy Systems and Technologies - ICEST 2011,* Online proceedings, vol. 2, pp. 489-492, June, Niš, Serbia, 2011.

[150] Vučković, A. N., S S. Ilić, S. R. Aleksić, "Calculation of the attraction and levitation forces using magnetization charges", *10th International Conference on Applied Electromagnetics – PES 2011,* CD-proceedings, September, Niš, Serbia, 2011, ISBN 978-86-6125-042-2.

[151] Vučković, A. N., S. S. Ilić , S. R. Aleksić, "Interaction magnetic force calculation of ring permanent magnets using Ampere's microscopic surface currents and discretization technique", *Electromagnetics*, vol. 32, no. 2, pp. 117-134, 2012.

[152] Vučković, A. N., S.S. Ilić, S R. Aleksić, "Calculation of the attraction and levitation forces using magnetization charges", *Elektrotechnica and Elektronica*, The Union of Electronics, Electrical Engineering and Telecommunications/CEEC/Bulgaria, vol. 47. no 7-8/2012, pp. 12-16, 2012. ISSN 0861-4717.

[153] Vučković, A. N., S. S. Ilić, S. R. Aleksić, "Interaction magnetic force calculation of permanent magnets using magnetization charges and discretization technique", *Electromagnetics*, Taylor & Francis, vol.33, no.6, pp.421-436, 2013.

[154] Vučković, A. N., S. R. Aleksić, S.S. Ilić, A. Tatarenko, R. Petrov, M. Bichurin, "Attraction magnetic force calculation of axial passive magnetic bearing", *Electrical and Electronic Engineering , Scientific & Academic Publishing*; vol.3, no.2, pp.43-48, 2013.

[155] Vučković, A. N., N. B. Raičević, S. S. Ilić, S. R. Aleksić, "Interaction magnetic force calculation of radial passive magnetic bearing using magnetization charges and discretization technique", *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, IOS Press, vol. 43, no. 4/2013, pp. 311-323, 2013.

[156] Vučković, A. N., S. S. Ilić, N. B. Raičević, M. Bichurin, A. Tatarenko, "Axial force calculation of Passive Magnetic Bearing in case of Radial Magnetization", *11th International*

Conference on Applied Electromagnetics – PES 2013, CD-proceedings, Oral Session O2, Niš, Serbia, Sept. 2013.

[157] Vučković, A. N., S.S. Ilić, N. B. Raičević, S. R. Aleksić, "Axial force calculation for different permanent magnet configurations", *7th International PhD-Seminar on Computational electromagnetics and bioeffects of electromagnetic fields – CEMBEF 2013*, pp. 45-48, 28 - 30 August, Niš, Serbia, 2013.

[158] Vučković, A. N., N. B. Raičević, M. T. Perić, S. R. Aleksić, "Magnetic force calculation of permanent magnet systems using hybrid boundary element method", The Sixteenth Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation CEFC 2014, CD proceedings 113/PB3:17, Annecy, France, 25-28 May, 2014.

[159] Wang, J., G. W. Jewell, D. Howe, "A general framework for the analysis and design of tubular linear permanent magnet machines", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 35 no. 3, pp. 1986 –2000, May 1999.

[160] Weinmann, D., H.J. Wiesmann, "Application of rare earth magnets to coaxial synchronous couplings", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 9(1-3), pp. 179 – 181, 1978.

[161] Wrobel, L. C., M. H. Aliabadi, *The Boundary Element Method*, Wiley, New York, 2002.

[162] Xia, C., H. Li, T. Shi, "3-D magnetic field and torque analysis of a novel Halbach array permanent-magnet spherical motor", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 44, no. 8, pp. 2016–2020, Aug. 2008.

[163] Xiu, S. Q. Tan, "Study on axial unbalance mechanism of radial passive magnetic bearings and its effects", *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, IOS Press, vol. 33, no. 1-2 / 2010, pp. 71-77.

[164] Yang, W., G. Zhou, K. Gong, Y. Li, "The numeric calculation for cylindrical magnet's magnetic flux intensity", *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, IOS Press, vol. 40, no. 3 / 2012, pp. 227-235.

[165] Yang, W., D. Li, X. He, Q. Li, "Calculation of magnetic levitation force exerted on the cylindrical magnets immersed in ferrofluid", *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, IOS Press, vol. 40, no. 1 / 2012, pp. 37-49.

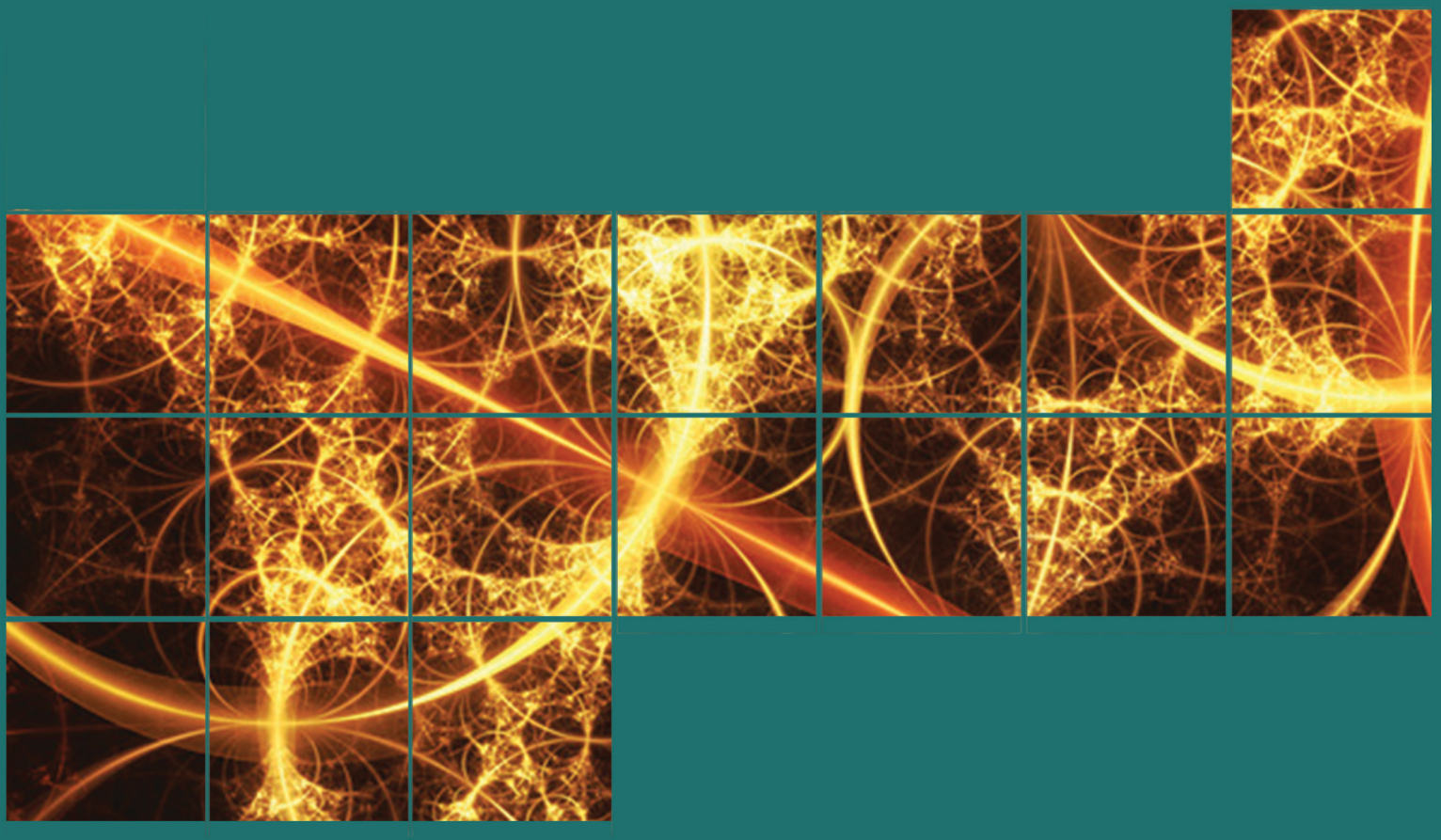
[166] Yonnet, J.-P., "Passive magnetic bearings with permanent magnets", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 14, no. 5, pp. 803–805, September 1978.

[167] J.-P. Yonnet, “Permanent magnet bearings and couplings”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 17, no. 1, pp. 1169–1173, January 1981.

[168] Yonnet, J.-P., H. Allag, “Three-dimensional analytical calculation of permanent magnet interactions by "magnetic node" representation”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. (99):1, 2011.

[169] Yonnet, J.-P., S. Hemmerlin, E. Rulliere, G. Lemarquand, “Analytical calculation of permanent magnet couplings”, *IEEE Transactions on Magnetics* vol. 29, no. 6, pp. 2932–2934, November 1993.

[170] Zhang, M., X. Zhao, B. Cai & Z. Wang, “Analysis for Magnetic Field and Axial Coupling of Multipole Disk Magnets by Fourier Transform”, *Electromagnetics,* vol. 20, no. 2, pp. 131-139, 2000.



13. Prilozi

13. Prilozi

13.1. Prilog1: Izvođenje izraza za magnetni vektor potencijal stacionarnih struja u vakuumu

Jednačina (5.13) ne definiše magnetni vektor potencijal jednoznačno. Prema Helmholcovoj teoremi jednoznačnosti jedna vektorska funkcija je određena u potpunosti samo ako su joj definisani i divergencija i rotor. Kako magnetni vektor potencijal $\boldsymbol{A}$ ima samo pomoćnu funkciju, usvaja se da je njegova divergencija svuda jednaka nuli.

Smenom izraza (5.13) u (5.11) dobija se vektorska diferencijalna jednačina iz koje se određuje magnetni vektor potencijal:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\mu_0\boldsymbol{J}\,. \tag{13.1}$$

U Dekartovom koordinatnom sistemu se vektorska jednačina (13.1) može razložiti na tri skalarne jednačine tipa:

$$\operatorname{rot}_x\left(\operatorname{rot}\boldsymbol{A}\right)=\mu_0 \mathrm{J}_\mathrm{x}\,. \tag{13.2}$$

Primenom definicionih izraza za projekcije rotora:

$$\operatorname{rot}_x\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\,, \tag{13.3}$$

$$\operatorname{rot}_y\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\,, \tag{13.4}$$

$$\operatorname{rot}_z\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\,, \tag{13.5}$$

dobija se

$$\operatorname{rot}_x\left(\operatorname{rot}\boldsymbol{A}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{div}\boldsymbol{A}\right)-\Delta A_x\,. \tag{13.6}$$

Na isti način se mogu dobiti i y i z projekcija vektora $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$, pa je:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A}-\Delta\boldsymbol{A}\,. \tag{13.7}$$

Kako je $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$, važi

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=-\Delta\boldsymbol{A}\,. \tag{13.8}$$

Iz jednačine (13.1) i (13.8) dobija se

$$\Delta\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{J}\,, \tag{13.9}$$

odnosno, za jednu od projekcija magnetnog vektor potencijala, poslednja jednačina se svodi na oblik

$$\Delta A_x = -\mu_0 J_x . \tag{13.10}$$

Jednačina (5.10) ima oblik Puasonove diferencijalne jednačine za električni skalar potencijal, s tim što se umesto skalar potencijala javlja jedna od projekcija vektor potencijala, umesto zapreminske gustine naelektrisanja javlja se odgovarajuća projekcija vektora gustine struje, a umesto konstante $1/\varepsilon_0$ konstanta μ_0. Na osnovu analogije mogu se napisati rešenja za pojedinačne projekcije vektor potencijala, koje se mogu sažeti u jednu vektorsku jednačinu oblika prikazanog relacijom (5.14).

13.2. Prilog 2: Površinske i zapreminske Amperove struje u funkciji vektora gustine magnetnog momenta

Veza između vektora gustine magnetnog momenta $\boldsymbol{M}$ i gustine Amperovih struja $\boldsymbol{J}_{\mathrm{a}}$ i $\boldsymbol{J}_{\mathrm{sa}}$ može se odrediti poređenjem izraza (5.16) i (5.17).

Kako je

$$\mathrm{rot}_{\mathrm{P}}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{R}\right) = \frac{1}{R}\mathrm{rot}_{P}\,\boldsymbol{M} + \mathrm{grad}_{P}\,\frac{1}{R}\times\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{rot}_{P}\,\boldsymbol{M}}{R} + \frac{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{M}}{R^3}, \tag{13.11}$$

gde P predstavlja tačku u kojoj se izvode prostorna diferenciranja, to se dobija

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_V \frac{\mathrm{rot}_{P}\,\boldsymbol{M}}{R}\,\mathrm{d}V - \int_V \mathrm{rot}_{P}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{R}\right)\mathrm{d}V\right]. \tag{13.12}$$

Pri transformaciji drugog sabirka u izrazu (13.12) koristi se sledeća vektorska transformacija:

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{b}, \tag{13.13}$$

gde je $\boldsymbol{b}$ stalan vektor. Kako je rotor stalnog vektora jednak nuli, važi

$$\boldsymbol{b}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = \mathrm{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}). \tag{13.14}$$

Prema tome, može se napisati

$$\boldsymbol{b}\int_V \mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}V = \int_V \mathrm{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,\mathrm{d}V = \int_S (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S . \tag{13.15}$$

Sa druge strane važi

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{n} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}), \tag{13.16}$$

pa je

$$\int_V \mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}V = \int_S (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a})\,\mathrm{d}S\,. \tag{13.17}$$

Na osnovu izraza (13.17) drugi sabirak u izrazu (13.12) se može napisati u obliku

$$\int_V \mathrm{rot}_P\left(\frac{\boldsymbol{M}}{R}\right)\mathrm{d}V = \oint_S \frac{\bar{n}\times\boldsymbol{M}}{R}\,\mathrm{d}S\,, \tag{13.18}$$

pa se jednačina (13.12) svodi na jednačinu (5.18) (Poglavlje 5). Upoređivanjem izraza (5.17) i (5.18) datih u Poglavlju 5, dobijaju se izrazi za gustinu zapreminske i površinske Amperove struje, (5.19) i (5.20), pri čemu se indeks P uz $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{M}$ može izostaviti kao suvišan, jer je vektor gustine magnetnog momenta, $\boldsymbol{M}$, funkcija jedino tačke P.

Biografija

Ana Vučković je rođena 29.07.1977. godine u Nišu, gde je završila osnovnu školu i gimnaziju Bora Stanković. Elektronski fakultet u Nišu upisala je 1996. godine, smer Računarska tehnika, gde je i diplomirala 09.07.2003. godine. Diplomski rad pod naslovom "Proračun sfernih ekrana", radila je pod mentorstvom prof. dr Dragutina Veličkovića.

Poslediplomske studije pri Katedri za teorijsku elektrotehniku Elektronskog fakulteta u Nišu upisala je januara 2004. godine i položila sve ispite sa prosečnom ocenom 10.00 (deset). Magistarsku tezu pod naslovom "Proračun magnetnog polja stalnih magneta", odbranila je 27.09.2004. godine pod mentorstvom prof. dr Slavoljuba Aleksića.

Za asistenta pripravnika na Elektronskom fakultetu u Nišu, pri Katedri za teorijsku elektrotehniku, izabrana je 15.03.2004. godine. Bila je angažovana na izvođenju računskih i laboratorijskih vežbi iz predmeta Osnovi elektrotehnike, Osnovi elektrotehnike I i Osnovi elektrotehnike II, kao i na izvođenju računskih vežbi iz predmeta Električna kola.

Tokom 2003.godine, boravila je dva meseca na Tehničkom Univerzitetu u Ilmenau (Nemačka) u okviru projekta “Theoretical Electrical Engineering” sponzorisanog od strane DAAD fondacije. U okviru obnovljenog projekta „Joint German-South-Eastern European Network Project ELISE ”, bila je na studijskom boravku na Tehničkom Univerzitetu u Ilmenau (Nemačka) tokom septembra 2009. godine. Učesnik je letnjih škola elektromagnetike u Budvi (Crna Gora) 2004.godine, na Ohridu (Makedoniji) 2005.godine i u Banja Luci (Republika Srpska) 2006.godine, kao i međunarodnog PhD seminara, u Nišu 2009. i 2013. godine i Temišvaru (Rumunija) 2014.

U svom dosadašnjem radu bila je angažovana na četiri projekta Ministarstva nauke i zaštite životne sredine Republike Srbije. Član je organizacionog odbora međunarodne konferencije iz primenjene elektromagnetike, PES 2011. Autor je i koautor šezdeset radova štampanih u časopisima od međunarodnog i nacionalnog značaja i zbornicima konferencijama. Pored radova vezanih za stalne magnete, koautor je i radova iz oblasti elektromagnetne kompatibilnosti u kojima je izložen uticaj bliskog i dalekog elektromagnetnog polja elektronskih uređaja na ljude, radova u kojima su analizirani sistemi za generisanje elektrostatičkih polja visoke homogenosti, kao i onih u kojima su analizirani mikrotalasni vodovi.

Spisak objavljenih naučnih radova

a) Radovi objavljeni u naučnim časopisima međunarodnog značaja

b) Monografska studija/ poglavlje u knjizi

c) Radovi objavljeni u naučnim časopisima nacionalnog značaja

d) Radovi saopšteni na međunarodnim naučnim skupovima koji su štampani u odgovarajućim zbornicima radova

e) Radovi saopšteni na nacionalnim skupovima i štampani u odgovarajućim zbornicima radova

f) Publikacije

g) Radovi na sticanju naučnih kvalifikacija

a) Radovi objavljeni u naučnim časopisima međunarodnog značaja

[a.1] Ana N. Vučković, Saša S. Ilić, Slavoljub R. Aleksić: "Interaction magnetic force calculation of permanent magnets using magnetization charges and discretization technique", *Electromagnetics*, Taylor & Francis, 33:6, pp. 421-436, 2013. DOI: 10.1080/02726343.2013.799950 [Online] http://dx.doi.org/10.1080/02726343.20132.799950

[a.2] Ana N. Vučković, Nebojša B. Raičević, Saša S. Ilić, Slavoljub R. Aleksić: "Interaction magnetic force calculation of radial passive magnetic bearing using magnetization charges and discretization technique", *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, IOS Press, Vol. 43, Number 4/2013, pp. 311-323, 2013.
DOI 10.3233/JAE-131703, ISSN 1383-5416 (Print), ISSN 1875-8800 (Online), [Online] http://iospress.metapress.com/content/n5751k8371548877/

[a.3] Ana N. Vučković, Slavoljub R. Aleksić, Saša S. Ilić, Alexander Tatarenko, Roman Petrov, Mirza Bichurin: "Attraction Magnetic Force Calculation of Axial Passive Magnetic Bearing", *Electrical and Electronic Engineering , Scientific & Academic Publishing*; Vol.3, No.2, pp.43-48, 2013, doi:10.5923/j.eee.20130302.03, p-ISSN: 2162-9455, e-ISSN: 2162-8459, [Online] http://article.sapub.org/10.5923.j.eee.20130302.03.html

[a.4] Nebojša B. Raičević, **Ana N. Vučković**, Mirjana T. Perić, Slavoljub R. Aleksić: "One numerical method for strike force determination at the step motors", *Facta Universitatis (Ser.: Automatic Control and Robotics),* University of Niš, Serbia, Vol. 12, No. 2, pp. 89-101, 2013, ISSN 1820-6417.

[a.5] Ana N. Vučković, Saša S. Ilić, Slavoljub R. Aleksić: "Interaction magnetic force calculation of ring permanent magnets using Ampere's microscopic surface currents and discretization technique", *Electromagnetics,* Taylor & Francis 32:2, pp. 117-134, 2012.
http://dx.doi.org/10.1080/02726343.2012.645430

[a.6] Zlata Ž. Cvetković, Mirjana T. Perić, **Ana N. Mladenović – Vučković**: "Optimization procedure for high homogeneity field systems design", *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, IOS Press, Vol. 37, No. 2-3 / 2011, pp. 133-145, 2011, DOI 10.3233/JAE-2011-1385,ISSN 1383-5416 (Print), ISSN 1875-8800 (Online), [Online] http://iospress.metapress.com/content/n5751k8371548877/

[a.7] Zlata Ž. Cvetković, Mirjana T. Perić, **Ana N. Vučković**: "Systems for Homogeneous Electrostatic Field Generation using Chebyshev Polynomials", *Facta Universitatis (Ser.:*

Automatic Control and Robotics), University of Niš, Serbia, Vol. 10, No. 1, pp. 105-114, 2011, ISSN 1820-6417, [Online] http://facta.junis.ni.ac.rs/acar/acar201101/acar2011-10.html.

[a.8] Ana Mladenović, Slavoljub Aleksic: "Magnetic Field Determination for Different Block Permanent Magnet Systems", *Facta Universitatis, Series: Electronics and Energetics*, Vol 23, No.3, December 2010, pp. 259-271, 2010, ISSN 0353-3670. [Online] http://factaee.elfak.ni.ac.rs/fu2k103/contents.html

b) Monografska studija/ poglavlje u knjizi

[b.1] Slavoljub Aleksic, **Ana Mladenović**: "Magnetic field determination of different shaped permanent magnets", *Discrete and Computational Mathematics*, Nova Science Publisher, Inc, New York 2008, Chapter 3, pp. 31-43, 2008, ISBN-13: 978-1-60021-810-1 ISBN-10: 1-60021-810-5.

c) Radovi objavljeni u časopisima nacionalnog značaja

[c.1] Ana N. Vučković, Saša S. Ilić, Slavoljub R. Aleksić: "Calculation of the attraction and levitation forces using magnetization charges", *Elektrotechnica and Elektronica (E+E)*, The Union of Electronics, Electrical Engineering and Telecommunications/CEEC/Bulgaria, Vol.47. No 7-8, 2012, pp. 12-16, ISSN 0861-4717.

[c.2] Ana N. Mladenović, Slavoljub R. Aleksić: "Magnetic field determination of block permanent magnet magnetized in arbitrary direction", *Elektrotechnica and Elektronica*, The Union of Electronics, Electrical Engineering and Telecommunications/CEEC/Bulgaria, Vol.45. No 9-10, 2010, pp. 20-23, ISSN 0861-4717.

[c.3] Ana N. Mladenović, Slavoljub R. Aleksić: "Toroidal shaped permanent magnet with air gap"*, Journal of Technical Sciences and mathematics*, Faculti of Technical Sciences Kosovska Mitrovica, Serbia and Montenegro, Vol. 10, No 1, (2005), pp. 43-52.

d) Radovi saopšteni na međunarodnim naučnim skupovima koji su štampani u odgovarajućim zbornicima radova

[d.1] Ana N. Vučković, Nebojša B. Raičević, Mirjana T. Perić, Slavoljub R. Aleksić: "Magnetic force calculation of permanent magnet systems using hybrid boundary element method", The Sixteenth Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation CEFC 2014, CD proceedings 113/PB3:17, Annecy, France, 25-28 May, 2014.

[d.2] Mirjana T. Perić, Saša S. Ilić, Slavoljub R. Aleksić, Nebojša B. Raičević, **Ana N. Vučković**: "Examples of HBEM application for microstrip lines analysis", 8th International PhD-Seminar on Computational electromagnetics and electromagnetic compatibility – CEM&EMC 2014, Faculty of Electrical Engineering, University of Timisoara, Timisoara, Romania, CD-Proceedings – O3.2, 02-04 September 2014.

[d.3] Ana N. Vučković, Saša S. Ilić, Nebojša B. Raičević, Slavoljub R. Aleksić: "Axial force calculation for different permanent magnet configurations". 7th International PhD-Seminar on Computational electromagnetics and bioeffects of electromagnetic fields – CEMBEF 2013, Niš, Serbia, 28 - 30 August 2013, Faculty of Electronic Engineering of Niš, pp. 45-48, 2009, ISBN 978-86-6125-089-7

[d.4] Ana N. Vučković, Saša S. Ilić, Nebojša B. Raičević, Mirza Bichurin, Alexander Tatarenko: "Axial force calculation of Passive Magnetic Bearing in case of Radial Magnetization", 11th International Conference on Applied Electromagnetics – ПЕС 2013, Niš, Serbia, CD-proceedings, Oral Session O2,Sept. 2013, ISBN 978-86-6125-090-3

[d.5] I. N. Solovyev, A. N. Solovyev, R. V. Petrov, Mirza Bichurin, **Ana N. Vučković**, Nebojša B. Raičević: "Sensitivity of Magnetoelectic Current Sensor", 11th International Conference on Applied Electromagnetics – ПЕС 2013, Niš, Serbia, CD-proceedings, Poster Session P2,Sept. 2013, ISBN 978-86-6125-090-3.

[d.6] Mirjana T. Perić, Saša S. Ilić, Slavoljub R. Aleksić, Nebojša B. Raičević, Ana N. Vučković: "Covered Coupled Microstrip Lines with Ground Planes of Finite Width", 11th International Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services – TELSIKS 2013, Faculty of Electronic Engineering of Niš, Niš, Serbia, CD-proceedings, pp. 37-40, 16-19 October 2013, ISBN 978-1-4799-0900-1.

[d7] Saša S. Ilić, **Ana N. Vučković**, Slavoljub R. Aleksić: "Interaction Magnetic Force Calculation of Axial Passive Magnetic Bearing Using Magnetization Charges and Discretization Technique". Proceedings of Abstracts of the 15th International IGTE Symposium on Numerical Field Calculation in Electrical Engineering, Graz, Austria, 17-19 September, 2012, pp. 63.

[d.8] Zlata Ž. Cvetković, Bojana Petković, Mirjana T. Perić, **Ana N. Vučković**, V. Golubović: "Simple systems for uniform electrostatic field generation", 10th International Conference on Applied Electromagnetics – ПЕС 2011, Niš, Serbia, CD-proceedings, Session O9-2, Sept. 2011, ISBN 978-86-6125-042-2.

[d.9] Ana N. Vučković, Saša S. Ilić, Slavoljub R. Aleksić: "Calculation of the attraction and levitation forces using magnetization charges", 10th International Conference on Applied Electromagnetics – ПЕС 2011, Niš, Serbia, CD-proceedings, Sept. 2011, ISBN 978-86-6125-042-2.

[d.10] Ana N. Vučković, Saša S. Ilić, Slavoljub R. Aleksić: "Calculation of the Attraction Force Between Permanent Magnet and Infinite Linear Magnetic Plane Using Ampere's Currents", XLVI International Scientific Conference on Information, Communication and Energy Systems and Technologies - ICEST 2011, Niš, Serbia, Online proceedings, pp.489-492 Vol. 2 pp. 489-492, June 2011, ISBN 978-86-6125-032-3

[d.11] Marian Greconici, Zlata Ž. Cvetković, **Ana N. Mladenović**, Slavoljub R. Aleksić, Daniela Vesa: "Analytical-numerical approach for levitation force calculation of a cylindrical bearing with permanent magnets used in an electric meter", 12th International Conference on Optimization of Electrical and Electronic Equipment (OPTIM 2010), May 20-22, 2010, Brasov, Romania, Fullpaper on CD, pp. 197 – 201, CFP 1022D CDR, ISBN 978-973-131-080-0.

[d.12] Bernd Jaekel, **Ana N. Mladenović**, Mirjana T. Perić, Dušan M. Vučković, Nenad N. Cvetković, Slavoljub R. Aleksić: „Some Considerations and Investigations Concerning Far-field to Near-field Approximations", The XX International Conference on Electromagnetic Disturbances - EMD 2010, Kaunas, Lithuania, 22 – 24 September 2010, Kaunas University of Technology, pp. 17-20, 2010, ISSN: 1822-3249.

[d.13] Bernd Jaekel, **Ana N. Mladenović**, Mirjana T. Perić, Dušan M. Vučković, Nenad N. Cvetković, Slavoljub R. Aleksić: „Emissions from automation equipment regarding human exposure / Approaches for an assessment according to the generic standard IEC 62311",

EMC Europe 2010, Wroclaw, Poland, 13 – 17 September 2010, Wroclaw University of Technology, pp. 163-166, 2010, ISBN: 978-83-7493-426-8.

[d.14] Bernd Jaekel, **Ana N. Mladenović**, Mirjana T. Perić, Dušan M. Vučković, Nenad N. Cvetković, Slavoljub R. Aleksić: „Assessment of emissions from electrical equipment regarding human exposure – approaches for application of the generic standard IEC 62311“, IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility, Fort Lauderdale, Florida, USA, 25 – 30 July 2010, IEEE EMC Society, Vol. 3, pp. 697-701, 2010, ISBN: 978-1-4244-6306-0/10 (Printed Proceedings), ISBN: 978-1-4244-6307-7 (CD Proceedings).

[d.15] Zlata Ž. Cvetković, Mirjana T. Perić, **Ana N. Mladenović**: "Optimization procedure for high homogeneity field systems design", 11th Workshop on optimization and inverse problems in Electromagnetism – OIPE 2010, Sofia, Bulgaria, 14 – 18 September 2010, Technical University of Sofia, pp. 100-101, 2010, ISBN 978-954-438-855-3.

[d.16] Ana N. Mladenović, Slavoljub R. Aleksić, Saša S. Ilić: "Levitation Force Calculation for Permanent Magnet Bearings using Ampere's Currents", The 14th International IGTE Symposium on Numerical Field Calculation in Electrical Engineering, Graz, 20-22 September 2010, Graz University of Technology, pp. 149-153, 2011, ISBN: 978-3-85125-133-3.

[d.17] Zlata Ž. Cvetković, Mirjana T. Perić, **Ana N. Mladenović**: "Systems for Homogeneous Electrostatic Field Generation Using Chebyshev Polynomials", X Triennial International SAUM Conference on Systems, Automatic Control and Measurements – SAUM 2010, Niš, Serbia, 10 – 12 November 2010, SAUM – Association of Serbia for Systems, Automatic Control and Measurements, pp. 121-124, 2010, ISBN 978-86-6125-020-0.

[d.18] Ana N. Mladenović, Slavoljub R. Aleksić: "Magnetic field determination of block permanent magnet magnetized in arbitrary direction" XVI-th International Symposium on Electrical Apparatus and Technologies – SIELA 2009, Bourgas, Bulgaria, 4-6 June 2009, Proceedings, Vol. II, pp. 228-234, 2009, ISBN 978-954-323-560-5.

[d.19] Ana N. Mladenović: "Magnetic field determination for block permanent magnet systems". 4th International PhD-Seminar on Computational electromagnetics and bioeffects of electromagnetic fields – CEMBEF 2009, Niš, Serbia, 28 - 30 August 2009, Faculty of Electronic Engineering of Niš, pp. 63-67, 2009, ISBN 978-86-85195-82-2.

[d.20] Ana N. Mladenović, Slavoljub R. Aleksić: „Block permanent magnet system magnetic field determination". 54th IWK – Internationales Wissenschaftliches Kolloquium (International Scientific Colloquium), Ilmenau, Germany, September 07-10, 2009, Ilmenau University of Technology, Fullpaper proceedings on CD, ISBN 978-3-938843-45-1.

[d.21] Ana N. Mladenović, Slavoljub R. Aleksić: "Magnetic field calculus for block permanent magnet system", 12th International Conference on Electrical Machines, Drives and Power Systems ELMA 2008, Sofia, Bulgaria, 16-18 October 2008. Technical University of Sofia, Vol.1, pp. 228-231, 2008, ISSN 1313-4965.

[d.22] Mićo Gacanović, Saša S. Ilić, **Ana N. Mladenović**: "Electrostatic characterization optimization of oil tank an equivalent voltage model", 10th Workshop on optimization and inverse problems in electromagnetism, OIPE 2008, Ilmenau, Germany, 14-17 September 2008, Proceedings, pp. 117-118.

[d.23] Ana N. Mladenović, Slavoljub R. Aleksić: "Magnetic field determination of rod shaped permanent magnet system" XV-th International Symposium on Electrical Apparatus

and Technologies SIELA 2007, Plovdiv, Bulgaria, 31 May – 1 June 2007. Technical University of Sofia, Vol. I, pp. 108-114, 2007, ISBN 978-954-9726-01-5.

[d.24] Ana N. Mladenović: ”Magnetic field determination of toroidal shaped permanent magnet system”, 8th International Conference on applied electromagnetics ПЕС 2007 – Proceedings of extended abstracts, Niš, Serbia and Montenegro, 3-5 September 2007, Faculty of Electronic Engineering of Niš, CD-proceedings (Session O1-7), 2007, ISBN 978-86-85195-47-0.

[d.25] Ana N. Mladenović, Slavoljub R. Aleksić: “Determination for different shaped permanent magnets”, VII International Symposium on Electromagnetic Compatibility and Electromagnetic Ecology, St.Petersburg, Russia, 26th -29th June 2007, St. Petersburg State Electrotechnical University “LETI”, CD-proceedings, pp. 84-87, 2007, DOI 10.1109/EMCECO.2007.4371720.

[d.26] Ana N. Mladenović: “Permanent magnet homogeneously magnetized along its axes”, International PhD-Seminar “Computational Electromagnetics and Technical Application”, Proceedings of Full Papers, Banja Luka, Bosna and Herzegovina, 28 August-01 September 2006, Elektrotehnički fakultet Banja Luka, Proceedings of Full Papers, pp. 171-174, 2006, ISBN 99938-793-5-5.

[d.27] Ana N. Mladenović, Slavoljub R. Aleksić: "Magnetic field calculation of permanent magnets" 51st Internationales Wissenschaftliches Kolloquium, Ilmenau, Germany, 11 – 15 September 2006, Technische Universitaet Ilmenau, CD-Proceedings (Session 3.3 - 3_3_8.pdf), 2006, ISBN 3-938843-16-0.

[d.28] Ana N. Mladenović, Slavoljub R. Aleksić: “Toroidal shaped permanent magnet with air gap”, 7th International Conference on applied electromagnetics ПЕС 2005, Niš, Serbia and Montenegro, 23-25 May 2005, Faculty of Electronic Engineering of Niš, Fullpaper proceedings on CD, pp. 54-63. 2005. ISBN 86-85195-12-8.

[d.29] Ana N. Mladenović, Slavoljub R. Aleksić: ”Methods for magnetic field calculation”, 11th International Conference on Electrical Machines, Drives and Power Systems ELMA 2005, Sofia, Bulgaria, 15-16 September 2005, Technical University of Sofia, Vol.2, pp. 350-354**,** 2005, ISBN 954-902-09-6-7.

[d.30] Ana N. Mladenović: “Toroidal shaped permanent magnet with two air gaps”, International PhD-Seminar “Numerical Field Computation and Optimization in Electrical Engineering”, Ohrid, Macedonia, 20-25 September 2005, Elektrotehnički fakultet Skopje, Proceedings of Full Papers, pp. 153-158, 2005, ISBN 9989-630-47-x.

[d.31] Ana N. Mladenović: “Toroidal shaped permanent magnet”, International PhD-Seminar “Computation of Electromagnetic Field”, Budva, Serbia and Montenegro, 23-28 September 2004, Proceedings of Full Papers, pp.125-130.

e) Radovi saopšteni na nacionalnim skupovima i štampani u odgovarajućim zbornicima radova

[e.1] Dobrivoje Stojanović, **Ana Mladenović,** Bojana Petković, Nebojša Raičević: "Karakteristike dijagrama potrošnje u distributivnoj mreži PD „Jugoistok“ Niš", 52. Konferencija ETRAN-a, Palić, Srbija, 08 - 12. jun, 2008, ISBN 978-86-80509-63-1.

[e.2] Ana N. Mladenović: "Proračun magnetnog polja homogeno namagnetisanog stalnog magneta", 50. Konferencija ETRAN-a, Beograd, Srbija i Crna Gora, 06 - 08. jun, 2006. Društvo za ETRAN, Sveska II, str. 255-257, 2006, ISBN 86-80509-59-0, **(M63)**.

[e.3] Ana N. Mladenović: "Proračun polja stalnog magneta oblika torusa", XLIX Konferencija ETRAN-a, Budva, Srbija i Crna Gora, 05 - 10. jun, 2005. Društvo za ETRAN, Sveska II, str. 253-256, 2005, ISBN 86-80509-54-X.

[e.4] Ana Mladenović, Mirjana Perić, "Proračun polja stalnog magneta oblika štapa", XIII Telekomunikacioni forum TELFOR 2005, Beograd, Srbija i Crna Gora, 22 – 24. novembar 2005, Društvo za telekomunikacije, Zbornik na CD-u, sekcija 7.7: PEL, 2005, [Online] http://www.telfor.rs/telfor2005/index.html.

[e.5] Ana N. Mladenović, Slavoljub R. Aleksić: "Stalni magnet oblika štapa", XLVIII Konferencija ETRAN-a, Čačak, Srbija i Crna Gora, 6 - 10. jun, 2004, tom II, str. 233-236.

f) Publikacije

[f.1] Slavoljub Aleksić, Zlata Cvetković i saradnici **Ana Mladenović** ... [i dr.]: "Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz Osnova elektrotehnike 2002-2004". Elektronski fakultet u Nišu, 2006.

[f.2] Zlata Ž. Cvetković, **Ana N. Vučković**: "Zbirka zadataka iz električnih kola". Elektronski fakultet u Nišu, 2013.

g) Radovi na sticanju naučnih kvalifikacija

[g.1] Ana N. Mladenović: "Proračun magnetnog polja stalnih magneta", Magistarska teza, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, Niš, Srbija, 27. septembar 2008.