



**УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ЕЛЕКТРОНСКИ ФАКУЛТЕТ**



МР МИРЈАНА Т. ПЕРИЋ

**КВАЗИСТАЦИОНАРНИ ПРИСТУП
ЗА АНАЛИЗУ
МИКРОТАЛАСНИХ ВОДОВА**

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Ниш, 2015.



**UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF ELECTRONIC
ENGINEERING**



MIRJANA T. PERIĆ, M. Sc.

**QUASI-STATIC APPROACH FOR
MICROWAVE TRANSMISSION LINES
ANALYSIS**

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2015.

ПОДАЦИ О МЕНТОРУ И ЧЛАНОВИМА КОМИСИЈЕ

Ментор	1. Др Славољуб Алексић, редовни професор, Универзитет у Нишу, Електронски факултет у Нишу <hr/>
Чланови комисије	2. Др Иван Јачев, редовни професор, Технички универзитет у Софији, Бугарска <hr/> 3. Др Небојша Раичевић, доцент, Универзитет у Нишу, Електронски факултет у Нишу <hr/> 4. Др Злата Цветковић, редовни професор, Универзитет у Нишу, Електронски факултет у Нишу <hr/> 5. Др Небојша Дончов, редовни професор, Универзитет у Нишу, Електронски факултет у Нишу <hr/>
Датум одбране	<hr/>

Идеја за израду ове докторске дисертације потекла је од проф. др Славољуба Алексића, редовног професора Електронског факултета у Нишу. Захваљујем се свом ментору на ангажовању, стрпљивом и пажљивом усмеравању не само током израде дисертације, већ и током мог целокупног научног развоја.

Посебно се захваљујем колеги др Саши Илићу на досадашњој сарадњи, стручној помоћи, као и на садржајним сугестијама при коначном формулисању ове дисертације.

Захваљујем се и доценту др Небојши Раичевићу на подрици, драгоценим саветима и коментарима.

Током читавог процеса израде дисертације имала сам несребичну подршку свих колега са Катедре за теоријску електротехнику Електронског факултета у Нишу. Захваљујем им се на томе, а посебно колегиници Ани Вучковић за дивно пријатељство и сарадњу.

Хвала свим мојим пријатељима на разумевању, стрпљењу и свесрдној подрици. Ви сте моја оаза позитивне енергије.

Посебно се захваљујем мојој породици за сву љубав, ослонац и подршку коју су ми пружили и научили да само рад, упорност и стрпљење дају резултате.

Заслужни сте за све оно што данас јесам.

Зато што постојите...

Ниш, март 2015.

Аутор

ПОДАЦИ О ДОКТОРСКОЈ ДИСЕРТАЦИЈИ

Наслов: Квазистационарни приступ за анализу микроталасних водова

Резиме: Анализа микроталасних водова предмет је светских истраживања већ више од шест деценија. Од првих дана настанка тракастог вода, давне 1949. године, а затим и свих његових модификација које су уследиле у наредним годинама, "армија" научника покушавала је да што једноставније анализира и пројектује ове структуре које су, због својих карактеристика, нашле широку примену у микроталасним интегрисаним колима, за реализацију микроталасних филтара и антена, линија за кашњење, усмерених спрежњака, итд.

Различити нумерички и аналитички методи као што су: варијациони метод, метод момената, метод граничних елемената, метод коначних елемената, метод конформног пресликавања, Фуријеова трансформација, метод покретног савршеног електричног зида, метод еквивалентне електроде и др., могу се применити са мање или више успеха за анализу микроталасних водова.

Циљ ове докторске дисертације је квазистационарна ТЕМ анализа микроталасних водова помоћу хибридног метода граничних елемената. Овај метод, развијен на Катедри за теоријску електротехнику Електронског факултета у Нишу, заснива се на примени метода еквивалентне електроде, методе подешавања у тачкама за потенцијал савршено проводних електрода и подешавању нормалне компоненте вектора електричног поља на граничној површини било која два диелектрична слоја. До сада је метод веома успешно примењен за анализу вишеслојних електромагнетних проблема, одређивање расподеле електромагнетног поља у околини кабловских завршница и спојница, уземљивачких система и при прорачуну магнетног поља и силе сталних магнета. Са циљем да се прошири област примене овог метода, по први пут је у овој дисертацији употребљен за квазистационарну анализу микроталасних водова.

У приказаним примерима вршена је анализа једноструких и спрегнутих, оклопљених и отворених микроталасних водова са хомогеним, изотропним једнослојним и вишеслојним диелектрицима. Анализиране су структуре са неограничено широком уземљеном равни, али и реални случајеви – геометрије са уземљеном траком коначне ширине, коначном дебљином метализације и коначном ширином супстрата.

Метод се показао као веома једноставан, брз и довољно тачан у анализи микроталасних водова. Формирани систем линеарних једначина је увек добро условљен, јер

су елементи на главној дијагонали матрице увек доминантни. Веома добра конвергенција резултата остварена је са 700-1500 непознатих величина (еквивалентних електрода), зависно од разматране геометрије микроталасног вода. За највећи број примера, табеларно и графички, приказани су конвергенција резултата, време израчунавања, еквипотенцијале и расподела површинског везаног наелектрисања дуж раздвојне површине два диелектрика.

Са циљем да се верификују резултати за карактеристичне параметре вода, добијени применом хибридног метода граничних елемената, искоришћени су резултати из доступне литературе, као и резултати које је дала примена програмских пакета *FEMM* и *FlexPDE*. Резултати су приказани табеларно и графички. Релативна грешка добијених резултата је у највећем броју примера мања од 0.5 %. Такође, време израчунавања применом хибридног метода граничних елемената је знатно краће у односу на времена потребна за анализу применом *FEMM*-а и *FlexPDE*-а.

Прави изазов током рада на дисертацији био је применити хибридни метод граничних елемената за анализу микротракастих водова са биизотропном подлогом. Анализирани су биизотропни материјали Телегеновог типа. За разлику од широког спектра литературе која се бави анализом микроталасних водова са изотропним диелектриком, биизотропне средине, због њихове сложености, нису тако чест предмет истраживања. Хибридни метод граничних елемената је са успехом примењен и за анализу оваквих структура.

Применом хибридног метода граничних елемената брзо, једноставно и довољно тачно анализиране су сложене конфигурације микроталасних водова са изотропном и биизотропном подлогом, чиме ова дисертација представља мали допринос у историји развоја метода за анализу микроталасних водова дугој већ више од 60 година.

Кључне речи: Нумеричка електромагнетика, микроталасни водови, микротракасти вод, тракасти вод, карактеристична импеданса, еквивалентне електроде, метод коначних елемената, метод граничних елемената, метод еквивалентне електроде, хибридни метод граничних елемената.

Научна област: Теоријска електротехника

Ужа научна област: Електромагнетика

УДК број: _____

DOCTORAL DISSERTATION – MAIN INFORMATION

Title: Quasi-static approach for microwave transmission lines analysis

Abstract: Analysis of microwave transmission lines is the main subject of research in the world for more than six decades. Since the day of stripline invention, back in 1949, and its modifications that followed in the forthcoming years, an "army" of scientists was trying to analyze it, simplify it and design new structures. These structures, due to their characteristics, have found wide application in microwave integrated circuits, for microwave filters and antennas design, delay lines, directional couplers, etc.

Various numerical and analytical methods such as: the variational method, the method of moments, the boundary element method, the conformal mapping, the moving perfect electric wall method, the equivalent electrodes method etc. can be applied with more or less accuracy to the microwave transmission lines analysis.

The aim of this doctoral dissertation is quasi TEM analysis of microwave transmission lines using the hybrid boundary method (HBEM). This method, developed at the Department of Theoretical Electrical Engineering in the Faculty of Electronic Engineering of Niš, is based on the equivalent electrodes methods and the point-matching method for the potential of the perfect electric conductor electrodes and for normal component of the electric field at the boundary surface between any two dielectric layers. Until now, it was applied to multilayered electromagnetic problems, grounding systems, electromagnetic field determination in the vicinity of cable terminations as well as magnetic field and force calculations of permanent magnets. In order to expand the field of method's application, it is, for the first time, applied for the microwave transmission lines analysis.

Single and coupled, shielded and open microwave transmission lines with homogeneous, isotropic single-layer and multilayer dielectrics were analysed in the examples presented. Structures with the ground planes of infinite width, but also the real cases – geometry with ground planes of finite width, the finite metallization thickness and substrate width, are also shown in this dissertation.

The hybrid boundary element method has been proved to be a very simple, powerful and accurate procedure for microwave transmission lines analysis. The obtained system of linear equations is always well-conditioned, as the system matrix always has the greatest elements on the main diagonal. Quite good convergence for the desired parameters is achieved for only 700-1500 unknowns (equivalent electrodes). For the most examples, the convergence of

results, calculation time, equipotential contours and distribution of polarized charges per unit length along boundary surfaces are shown in the tables and graphically.

In order to validate the characteristic parameters results, obtained by the hybrid boundary element method, all the results will be compared to those obtained by software FEMM and FlexPDE as well as the results already reported in the literature. These results were shown in tables and graphically. The relative error for the characteristic impedance is less than 0.5 % in regards to the results obtained using the FEMM with few thousands elements and the uniform meshing technique. The computation time is even several times shorter than in the case of the analysis using the FEMM and FlexPDE.

The real challenge for the author was to apply the hybrid boundary element method for analysis of microstrip transmission lines with Tellegen material (non-reciprocal bi-isotropic media). Unlike a wide range of literature that deals with the analysis of microwave transmission lines with isotropic dielectric, bi-isotropic media, due to their complexity, are not so common subject of research. The hybrid boundary element method was successfully applied for the analysis of such structures.

Applying the hybrid boundary element method it is possible to analyze quickly, easily and sufficiently accurate the complex configuration of microwave transmission lines with isotropic and bi-isotropic substrate. In that way this dissertation represents a small contribution to the history of the development of methods for the analysis of microwave lines long more than 60 years.

Keywords: Computational electromagnetics, microwave transmission lines, microstrip line, stripline, characteristic impedance, equivalent electrodes, finite element method, boundary element method, equivalent electrodes method, hybrid boundary element method.

Scientific area: Theoretical electrical engineering

Field of academic expertise: Electromagnetics

UDC number: _____

САДРЖАЈ

1. Увод / 1

2. ЕЛЕКТРОМАГНЕТНО ПОЉЕ У НЕПОКРЕТНИМ СРЕДИНАМА / 19

2.1. Потпуни систем Максвелових једначина електромагнетног поља у непокретним срединама / 19

2.2. Гранични услови / 20

2.3. Подела проблема у погледу временске зависности електромагнетног поља / 22

2.4. Електромагнетне особине средина / 24

2.5. Типови вођених електромагнетних таласа / 26

2.6. Карактеристични параметри микроталасних водова / 26

3. МЕТОДИ ЗА КВАЗИСТАЦИОНАРНУ АНАЛИЗУ МИКРОТАЛАСНИХ ВОДОВА / 28

3.1. Метод конформног пресликавања / 28

3.2. Метод коначних разлика / 31

3.3. Метод фиктивних извора / 33

3.4. Метод коначних елемената / 34

3.5. Метод граничних елемената / 37

3.6. Метод еквивалентне електроде / 39

4. ХИБРИДНИ МЕТОД ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА / 42

4.1. Теоријски приступ / 43

4.2. Провера тачности хибридног метода граничних елемената / 49

4.2.1. Модификована теорема лика / 49

4.2.2. Примена хибридног метода граничних елемената / 51

4.2.3. Подужно наелектрисање у двослојној средини / 54

5. ВОДОВИ КРУЖНОГ И ПРАВОУГАОНОГ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА / 56

5.1. Коаксијални вод са аксијалним прорезом / 56

5.2. Симетрично спрегнут прорезани вод / 62

5.3. Ваздушни вод правоугаоног попречног пресека / 67

5.4. Вод квадратног попречног пресека са двослојним диелектриком / 71

5.5. Оклопљени спрегнут микротракасти вод са подлогом од диелектрика / 74

6. ТРАКАСТИ ВОДОВИ / 81

6.1. Проводник кружног попречног пресека постављен између две неограничено широке уземљене равни / 81

6.2. Проводник правоугаоног попречног пресека постављен хоризонтално између две паралелне, уземљене равни неограничене ширине / 86

6.3. Проводник правоугаоног попречног пресека постављен вертикално између две паралелне, уземљене равни неограничене ширине / 89

7. МИКРОТРАКАСТИ ВОДОВИ / 92

7.1. Микротракасти вод са уземљеном, савршено проводном равни неограничене ширине / 93

7.2. Микротракасти вод са уземљеном равни коначне ширине / 98

7.3. Ширум страном спрегнут микротракасти вод / 102

7.4. Симетрично спрегнут микротракасти вод изнад уземљене неограничене равни / 106

7.5. Симетрично спрегнут микротракасти вод са уземљеном равни коначне ширине / 113

7.6. Спрегнут микротракасти вод са уметком од диелектрика / 119

8. ПРЕКРИВЕНИ МИКРОТРАКАСТИ ВОДОВИ / 126

8.1. Микротракасти вод између неограничено широких уземљених равни / 126

8.2. Микротракасти вод између две уземљене равни коначне ширине / 130

8.3. Симетрично спрегнут вертикални микротракасти вод између две неограничено широке уземљене равни / 136

8.4. Спрегнут микротракасти вод између две уземљене равни коначне ширине / 141

9. ПРИМЕНА ХИБРИДНОГ МЕТОДА ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА У БИИЗОТРОПНИМ СРЕДИНАМА / 146

9.1. Биизотропне средине / 146

9.2. Подужно наелектрисање у двослојној биизотропној средини – теорема лика / 148

9.2.1. Одређивање везе између нормалних компоненти електричног и магнетног поља на раздвојној површини две биизотропне средине / 150

9.2.2. Одређивање електричног и магнетног површинског оптерећења на раздвојној површини две биизотропне средине / 150

9.3. Примена хибридног метода граничних елемената / 152

9.3.1. Анализа микротракастог вода применом хибридног метода граничних елемената / 159

10. ЗАКЉУЧАК / 167

ЛИТЕРАТУРА / 172

ПРИЛОЗИ / 189

ПРИЛОГ I: Одређивање еквивалентног полупречника тракастог проводника / 189

ПРИЛОГ II: Одређивање еквивалентног полупречника танке цилиндричне
љуске / 192

ПРИЛОГ III: Одређивање полупречника еквивалентних електрода на раздвојној
површини два диелектрика / 194

ПРИЛОГ IV: Одређивање полупречника еквивалентних електрода на раздвојној
површини две биизотропне средине / 196

БИОГРАФИЈА АУТОРА / 197

ИЗЈАВЕ АУТОРА / 198

1

Увод

Основне карактеристике система који врше пренос информација на даљину зависе у великој мери од врсте сигнала, тј. од физичке величине која се користи као преносни медијум. Системи који за пренос користе електромагнетне таласе, због њихове велике брзине простирања, омогућавају практично тренутни пренос информација чак и на веома великим растојањима. Самим тим, ови **системи везе**, како их скраћено можемо назвати, далеко су супериорнији од свих осталих.

Према типу електромагнетног таласа који користе за пренос, системи везе се могу поделити у две основне групе, [1]:

- системи са слободним електромагнетним таласом;
- системи са вођеним електромагнетним таласом.

Први тип као носећу величину користи слободан електромагнетни талас (радио-талас), па не захтева постојање било какве материјалне средине између предајника и пријемника. Њиме се у принципу може остварити веза између било које две тачке у простору за најкраће могуће време. Слободни електромагнетни таласи имају радијални карактер, па их извор емитује у свим правцима. Због тога се велики део електромагнетне енергије губи и само мали део стиже на место пријема.

За ефикаснији пренос информација од тачке до тачке, електромагнетни талас мора бити усмерен, тј. вођен, [2]. То се остварује системима са вођеним таласом тј. преносним водовима (енг. *transmission lines*). С обзиром да је код ових система енергија вођена само у једном правцу, на први поглед је спречено расипање електромагнетне енергије, па би се могло рећи да су и губици сведени на минимум. Са друге стране, они захтевају постојање физичке везе између две или више тачака. Овакав начин комуника-

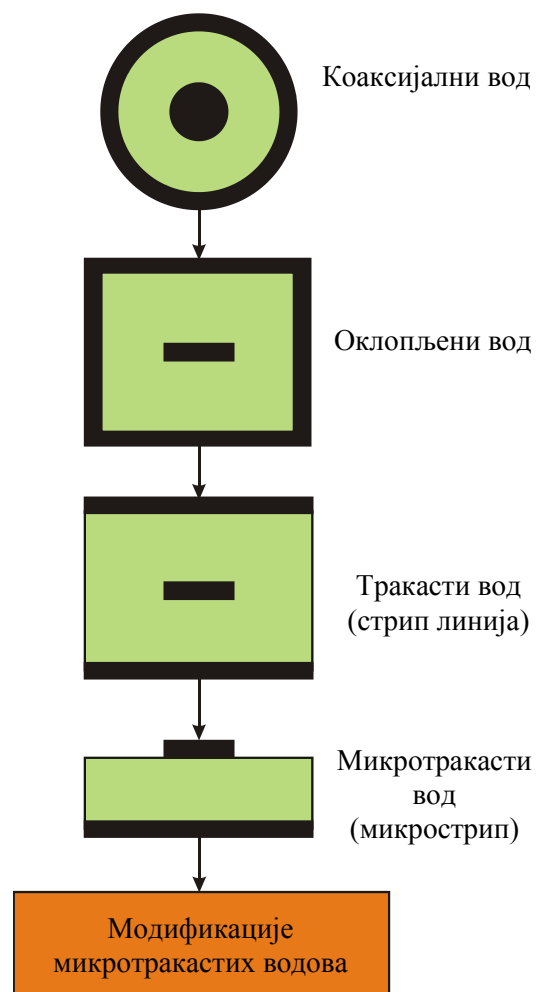
ције компликује процес преношења информација, а утиче у знатној мери и на цену уређаја.

Преносни водови се могу груписати у две категорије, [3]:

- а) Они који се састоје од једног проводника у виду цеви произвољног попречног пресека. Такви системи су: правоугаони таласовод, кружни таласовод, таласовод "U"-типа, таласовод "H"-типа, метало-диелектрични таласовод, диелектрични таласовод, оптичко влакно итд. Они се користе за каналисање електромагнетних таласа при највишим радио-фреквенцијама (реда 300 MHz па навише);
- б) Вишежични преносни водови. Ту спадају: надземни далековод, коаксијални кабл, оклопљени диелектрични вод, тракасти вод, микротракасти вод, прорезани вод, копланарни вод итд. Они се користе при релативно ниским фреквенцијама због израженог ефекта слабљења сигнала са порастом учестаности.

Микроталасни водови представљају већ више од шест деценија неизоставни део сваког микроталасног уређаја. Претеча ових компоненти је таласовод правоугаоног попречног пресека. Један од његових главних недостатака је узан пропусни опсег. Због тога су истраживачи покушавали да пронађу компоненте ширег пропусног опсега, али и мањих димензија, па су настајале различите конфигурације микроталасних водова. Њихов развој кроз историју приказан је на *Слици 1.1*.

Као што је наведено у [4], једна од првобитних структура био је коаксијални вод, који поседује шири пропусни опсег, а има и могућност минијатуризације. Међутим, израда пасивних и активних компоненти и уређаја који садрже овакав вод је веома скупа и компликована. Са циљем да се избегну ови недостаци, унутрашњи проводник коаксијалног кабла је замењен проводном траком, а спољашњи оклопом правоугаоног попречног пресека.



Слика 1.1 – Развој микроталасних водова.

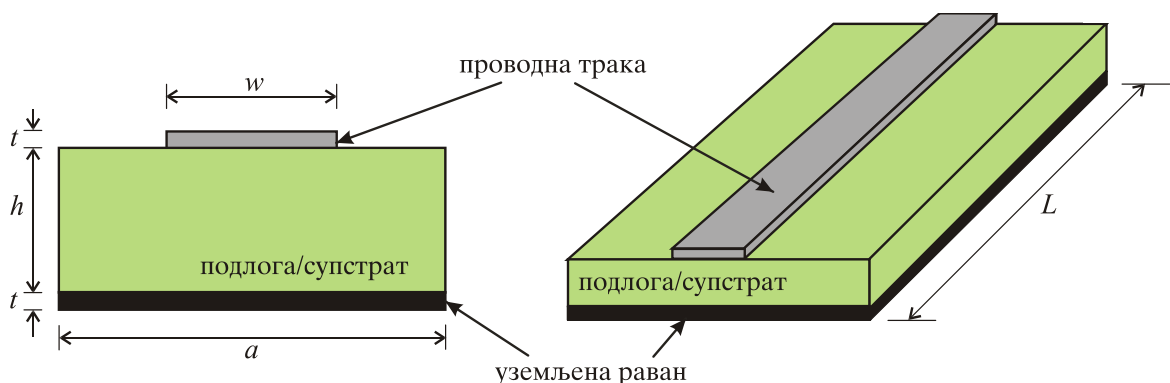
Готово у исто време, крајем 1949. године, Роберт М. Барет је, док је радио у Ваздухопловном истраживачком центру на Кембриџу, направио корак напред у развоју микроталасних водова, [5]. Он је уклонио бочне стране оклопа, а задржао горњу и доњу раван. Конфигурацију коју је добио назвао је тракасти вод, тј. стрип линија (енг. *stripline*).

Попут коаксијалног вода, тракасти вод је недисперзивна компонента и има широк опсег учестаности. Област између горње и доње референтне траке овог вода је испуњена диелектриком или ваздухом.

Даља модификација тракастог вода довела је до уклањања горње равни, остављајући траку, доњу раван и диелектричну подлогу која "носи" траку. Ова планарна структура названа је микротракасти вод, тј. микрострип (енг. *microstrip line*), и представља другу генерацију штампаних преносних водова. Њени творци су Грег и Енгелман из *ITT Ferearl Telecommunications Laboratories* у Њу Џерсију (САД) и настала је као конкуренција тракастом воду почетком педесетих година XX века, [6].

Водови који се израђују у техници штампаних веза називају се **планарни водови**, [7], јер се проводници тих водова (метализоване танке траке) налазе у једној или у више равни. Најједноставнији и најчешће коришћен тип планарних водова, посебно у микроталасним интегрисаним колима, је микротракасти вод.

Микротракасти вод се састоји од проводне металне траке, ширине w и дебљине метализације t , и уземљене равни, *Слика 1.2*. Оне су међусобно раздвојене слојем диелектрика, тзв. "супстрат", висине h и ширине a . Овај вод, за разлику од тракастог вода, има нехомоген диелектрик (чине га подлога и ваздух).



Слика 1.2 – Микротракасти вод.

Према Позару, [8], почетни облици микротракастих водова имали су подлогу од диелектрика велике дебљине, док су већ шездесетих година постале популарније тање

структуре које су довеле до мањих губитака на воду током преношења сигнала. Веома детаљан приказ примене микротракастих водова дат је у [9]. Наведено је да је анализа ових компоненти започела још 1952. године. Микротракасти вод је једноставна, отворена, планарна структура, малих димензија, чије се све компоненте могу поставити на самој штампаној плочи, што представља његову главну предност над тракастим водом. Недостатак овог вода је мали Q – фактор, зрачење, интерференција и дисперзија, што посебно долази до изражаја у случајевима када се захтева јача изолација вода, нпр. код филтара или прекидача. Тада је неопходно увести додатно оклопљавање, па то доводи до модификованих облика микротракастих водова који се користе као алтернативне структуре, [10].

Са друге стране, због зрачења, микротракасти вод је нашао примену у изради микрострип печ антене (енг. *microstrip patch antenna*), која је направљена 15 година након проналаска микротракастог вода, [11] и [12].

Са циљем да се побољшају карактеристике и остваре минијатурне димензије микротракастог вода, настају модификоване конфигурације на неки од следећих начина, [4]:

- променама физичких димензија микротракастог вода;
- структуралним променама (утиснут, прекривен, инвертован, оклопљен микротракасти вод);
- употребом различитих материјала за супстрат микротракастог вода;
- променом облика уземљене равни;
- употребом проводника различитог облика.

У циљу смањења димензија кола и реализације комплекснијих структура, користе се и микротракасти водови са више слојева диелектрика.

Од педесетих година XX века до данас објављено је много радова везаних за анализу микроталасних водова. Веома добар приказ различитих типова ових водова дат је у [13]. Осим значајне листе референци из области микроталасних водова, приручник, намењен пре свега пројектантима, садржи и једначине у затвореном облику за многе конфигурације. За примере који немају тачна решења, примењени су апроксимативни изрази.

За анализу микроталасних водова користе се бројни полуаналитички и нумерички методи, [5]. На самом почетку развоја микроталасних водова, најчешће је коришћен метод конформног пресликавања.

Временом су два битна фактора условила развој нових метода. Први од њих је употреба брзих рачунара са јачим процесорима, који су омогућили примену нумерички захтевнијих метода за решавање електромагнетних проблема. Други фактор је проширење фреквенцијског опсега примене микроталасних водова на ред GHz, где дисперзиони ефекат није више занемарљив. То је довело до развоја метода који врше потпуну таласну анализу задатог проблема. На нижим учестаностима важе ТЕМ и квази ТЕМ приступи. Савремена истраживања у први план стављају проблеме дисконтинуитета на воду и губитке у микроталасним водовима, што доводи до развоја нових техника и употребе рачунара са још бољим перформансама.

У општем случају, методи за анализу микроталасних водова примењују се да би се одредили карактеристични параметри вода, попут: карактеристичне импедансе, константе простирања, фазне брзине и константе слабљења. Методи који се користе могу се поделити у две велике групе, *Слика 1.3*, [14]. Наведени су неки од чешће коришћених метода.



Слика 1.3 – Методи за анализу микроталасних водова.

Прву групу чине методи чија се примена заснива на **квазистационарном приступу**, а другу методи који примењују **потпуну таласну анализу**. У литератури се дефинише и прелазна група између ова два метода, а ради се о методима који се заснивају на **дисперзионим моделима** водова.

Примена метода из прве групе, која обухвата **квазистационарни приступ** за анализу микроталасних водова, базира се на претпоставци да електромагнетно поље на воду има TEM карактер. Као што је познато, основна особина TEM таласа је да је електрично поље нормално на магнетно, а оба су нормална на осу вода дуж које се простира тај талас. Карактеристични параметри оваквих водова рачунају се након одређивања подужне капацитивности анализираних структуре. Оваква анализа може се применити при учестаностима до 10 GHz, где су попречне димензије микроталасног вода (ширина вода и дебљина подлоге) много мање у односу на таласну дужину сигнала који се простира дуж њега. Карактеристика ових метода је једноставност, а резултати који се добијају њиховом применом су задовољавајуће тачности за споменути опсег учестаности.

Друга група метода узима у обзир потпуну таласну природу простирања сигнала и називају се **методима потпуне таласне анализе**. Ови методи су аналитички много комплекснији од оних заснованих на квазистационарном приступу. Изнад опсега од 10 GHz, расподела електричног и магнетног поља знатно одступа од TEM расподеле и неопходно је приликом анализе узети у обзир и изражене дисперзионе ефекте. То значи да се са променом учестаности мењају карактеристична импеданса и фазна брзина, као и ефективна релативна диелектрична константа. Примена таласне анализе доводи до резултата изузетно високе тачности, што се посебно захтева код пројектовања кола у врхунским технологијама, од којих се и очекује испуњење строгих захтева.

Када потпуна таласна анализа постане исувише компликована, са циљем одређивања промене карактеристичних параметара микроталасних водова са фреквенцијом, развијено је неколико квази-емпиријских метода, познатијих под називом **дисперزيونи методи**, који се заснивају на експериментално добијеним резултатима или се користе резултати које је дала примена неког од метода потпуне таласне анализе.

Микротракасти водови су предмет истраживања већ више од пола века. Литература која се бави њиховом анализом је изузетно обимна и разноврсна, па ће у наставку бити наведен само део расположивих референци из ове области.

На почетку развоја микроталасних водова анализирани су микротракасти водови бесконачне ширине диелектрика и уземљене проводне траке, микроталасни водови правоугаоног попречног пресека и оклопљени тракасти водови. Са друге стране, примери отворених микротракастих водова коначне ширине подлоге и коначне дебљине металне траке су ретко проучавани.

Различити нумерички и аналитички методи као што су: варијациони метод (енг. *variational method*), [15]-[18], метод момената / метод граничних елемената (енг. *method of moments / boundary element method*), [19]-[25], метод конформног пресликавања (енг. *conformal mapping*) [26], [27], Фуријеова трансформација (енг. *Fourier transformation*), [28], метод покретног савршеног електричног зида (енг. *moving perfect electric wall method - MPEW*), [29]-[31], метод спектралне анализе (енг. *spectral analysis*) [32], [33] и др., могу се применити за квазистационарну анализу микроталасних водова.

Један од првих и најпознатијих метода који је коришћен за анализу микроталасних водова је **метод конформног пресликавања**. Пионир у примени овог метода је Харолд Вилер. У [27] Вилер је дошао до израза у затвореном облику за одређивање карактеристичне импедансе вода који чине две паралелне траке раздвојене диелектриком. У том раду је, по први пут, уведен појам "ефективна релативна диелектрична константа". Дефинисана је као количник две статичке подужне капацитивности тракастог вода – прве, израчунате када постоји подлога од произвољног изотропног диелектрика, и друге добијене када је диелектрик ваздух. Анализа је извршена занемарујући дебљину проводне траке. Вилер је, осим у споменутом раду, у [34] и [35] анализирао тракасти и микротракасти вод, ослањајући се на резултате добијене у [27] и [36] уз коришћење интерполационе технике. У [34] извршена је анализа утицаја дебљине проводне траке на вредност карактеристичних параметара вода, али без присуства подлоге од диелектрика. Сличан метод је примењен у [37] за одређивање квазистатичких параметара спрегнутих микротракастих водова.

Метод конформног пресликавања примењен је и у [38] за анализу микротракастог вода са два диелектрика уз коришћење две узастопне Шварц-Кристофелове трансформације. Приликом ове анализе аутори су сматрали да је уземљена савршено проводна раван неограничене ширине. У раду [39] такође је примењен метод конформног пресликавања, с том разликом што је сада узета у обзир коначна ширина уземљене траке. Да би одредили карактеристичне параметре, било је неопходно решити систем шест једначина са шест непознатих. Сам поступак је прилично комплексан чак и за најједноставнији случај микротракастог вода са једним слојем диелектрика. Анализа отворених

симетрично спрегнутих водова у [40] и [41] извршена је такође применом метода конформног пресликавања.

Решење у затвореном облику за карактеристичну импедансу добијено је за одређене геометрије микроталасних водова у [42]-[45]. Предложеним методом у комбинацији са конформним пресликавањем формиране су интегралне једначине, које су решене помоћу Гаус-Лагерове квадратуре. Аналитички изрази добијени за вишеслојне, вишестраке планарне или цилиндричне микроталасне водове приказани су у [46] и [47]. До њих се у [47] дошло решавањем сингуларног дела система једначина који задовољавају Волтеров гранични услов. Решење је приказано у облику бесконачних матрица које веома добро конвергирају. Анализа се може применити и за прорачун електричног поља унутар саме структуре. Као и у претходним радовима, приликом израчунавања карактеристичних параметара, није узета у обзир коначна дебљина проводне траке, као ни коначна ширина уземљене равни. У [46] капацитивност спрегнутог микроталасног вода одређена је решавањем Лапласове једначине користећи развој у Фуријеов ред. Дебљина метализације је и овде занемарена.

Занемаривање дебљине проводне траке присутно је и у [48] где је извршена анализа оклопљених водова применом приступа осетљивости (енг. *sensitivity approach*).

Неколико аутора у [49] врше веома добру квази-ТЕМ анализу оклопљених микроталасних водова, базирану на регуларизацији Карлеманове интегралне једначине.

Применом **метода коначних разлика** (енг. *finite difference method*), [50], могуће је анализирати оклопљене водове узимајући у обзир проводну траку коначне дебљине. У [51] коришћен је метод коначних разлика у временском домену, којим су анализирани вишеслојни микротракасти и слот водови са уземљеном равни коначне ширине.

Метод коначних елемената (енг. *finite element method*) се такође веома често примењује, [50], [52]-[55]. Веома је сличан методу коначних разлика, а основна разлика је у начину на који се врши деоба посматране области на сегменте. Осим тога, разликује се и начин одређивања функције потенцијала за сегменте формиране мреже. На примени овог метода заснивају се и програмски пакети: *FEMM*, [56], *COMSOL Multiphysics*, [57], *QuickField*, [58], *FlexPDE*, [59], итд. *FEMM* ће бити коришћен у овој дисертацији за проверу резултата добијених приликом анализе микроталасних водова. У радовима [60]-[63] примењен је модификовани метод коначних елемената тзв. "јак" формулације за анализу оклопљених микроталасних водова са подлогом од изотропног, биизотропног и анизотропног материјала. Методом коначних елемената у [55] анализирани су водови произвољног попречног пресека са произвољним бројем про-

водника у нехомогеној средини, која се апроксимира хомогеним подобластима. Тачност добијених решења условљена је густином формиране мреже, а гушћа мрежа доводи до потребе за рачунарима бољих перформанси.

Моделовање и анализа микроталасних водова је очигледно предмет многих истраживања. У раду [64] одређена је подужна капацитивност микроталасних водова правоугаоног попречног пресека коришћењем програмског пакета *COMSOL*, а анализирани су и вишепроводнички водови. Простирање електромагнетних таласа дуж вишепроводничких водова је веома атрактивна област истраживања у нумеричкој електромагнетици. Ове структуре се успешно користе у полупроводним уређајима, монолитним интегрисаним колима, спрежњацима велике брзине итд. Микротракасти водови се користе у свим планарним колима зависно од фреквенцијског опсега сигнала који се преноси. Често се користе и код преносних водова на високим учестаностима. Развој микроталасних кола коришћењем коаксијалних водова правоугаоног попречног пресека непрестано се усавшава. Аутори су резултате добијене применом *COMSOL*-а упоредили са онима који се могу наћи у литератури. Исти софтвер примењен је и у [65] за анализу оклопљених вертикалних микротракастих водова, док су у [66] одређени карактеристични параметри оклопљених тракастих водова.

Применом **варијационог принципа** у просторном или Фуријеовом домену, [17], [18], [67], [68], могуће је анализирати вишеслојне средине, као и отворене, оклопљене и спрегнуте водове, узимајући у обзир све граничне услове на раздвојним површинама диелектрика, без обзира на њихов број. Карактеристична импеданса и таласна дужина на воду могу да се одреде за широк спектар параметара. Приступ се заснива на одређивању подужне капацитивности применом теорије електростатичког поља. Уместо решавања интегралне једначине за налажење непознате расподеле површинских наелектрисања, да би се одредила подужна капацитивност користи се варијациони израз у коме се користи приближна расподела површинске густине наелектрисања на проводним тракама. Иако метод конформног пресликавања и метод релаксације такође могу да се користе за овакву анализу, ипак је за анализу вишеслојних микроталасних водова погоднији варијациони метод. Као што се у [18] наводи, време израчунавања карактеристичних параметара је знатно краће у односу на релаксациони метод. Тачност овог метода доста зависи од избора функције којом се апроксимира расподела наелектрисања.

Методом брзог Фуријеовог домена у [69] анализирани су микроталасни водови без губитака. Метод коначних елемената је искоришћен за одређивање параметара кола,

док су матричном једначином описане особине уздужног простирања таласа. Овим брзим методом анализирани су микроталасни филтри пропусници опсега.

Одређивање карактеристичних параметара микроталасних водова може се обавити применом Гринове функције уз комбинацију **метода момената**, који се у литератури среће и под називом **метод граничних елемената**, [70]. Многи аутори користе метод момената, [20], [71], [72], и његове подметоде: Гарлекинов метод, [15], или метод подешавања у тачкама за анализу ових проблема. У раду [72] аутори су представили поступак за одређивање карактеристичних параметара вишепроводничких водова са хомогеним диелектриком. Утицај коначне ширине уземљене равни је узет у обзир. Систем интегралних једначина које се добијају применом презентованог метода решен је коришћењем Гарлекиновог метода са импулсном апроксимацијом. Процедура која је примењена у овом раду је побољшана верзија оне из [71] у смислу веће тачности добијених резултата.

Истраживања у области микроталасних водова се углавном фокусирају на микротракасти вод бесконачне ширине уземљене равни и супстрата, [19], [21] и [24], и водове правоугаоног попречног пресека, [73]-[77]. Карактеристични параметри ових конфигурација микроталасних водова, као и симетрично и асиметрично спрегнутих структура (паран и непаран режим), одређени су у [51] и [78]-[82]. Применом метода момената формира се систем интегралних једначина за систем еквивалентних наелектрисања којима се замењују раздвојне површине проводник-диелектрик и диелектрик-диелектрик. Њиховим решавањем одређују се вредности еквивалентних наелектрисања, а затим и карактеристични параметри микротракастог вода.

Метод који је са успехом примењен како код отворених, тако и оклопљених микроталасних водова, је **метод интегралних једначина** (енг. *integral equations method*), [19], [83]. За примену метода неопходно је познавати одговарајућу Гринову функцију за потенцијал сталног подужног наелектрисања. Добијена интегрална једначина решава се нумерички, применом неке од варијанти метода граничних елемената / метода момената.

Приближним решавањем интегралних једначина за потенцијал применом побољшаног метода подешавања у тачкама анализирани су тракасти водови у [84]. При коришћењу овог метода узет је у обзир сингуларитет који постоји на ивицама тракастих проводника и који се обично у радовима занемарује.

Метод фиктивних извора (енг. *charges simulation method*) се такође примењује за анализу микроталасних водова. Основе овог метода поставио је Штајнбиглер давне

1969. године у [85]. Метод је прихваћен и веома успешно примењиван у овој области и од стране чланова Катедре за теоријску електротехнику Електронског факултета у Нишу, [86]-[90]. У овим радовма анализирани су једноструки и спрегнути микроталасни водови, отворене и оклопљене структуре, структуре са вишеслојном изотропном и анизотропном подлогом. Побољшање метода фиктивних извода остварено је помоћу поступка описаног у [91], када су познате Гринове функције, јер су на тај начин аутоматски задовољени гранични услови на електродама система.

У [24] и [31] анализирани су микротракасти водови са диелектриком коначне ширине и уземљеном равни коначне ширине. Нови, такозвани **метод покретног савршеног електричног зида** у спрези са методом конформног пресликавања примењен је у [30] и [31] за добијање једноставних аналитичких израза за квази-ТЕМ параметре вода. Наиме, у овом раду најпре је одређен положај савршеног електричног зида између трака вода комбинацијом експерименталног моделовања и поступка оптимизације. Самим тим, микротракасти вод се посматра као редна веза два микротракаста вода постављена изнад бесконачно дуге уземљене равни, за чије карактеристичне параметре већ постоје аналитички изрази одређени применом метода конформног пресликавања. Процедура приказана у [31] погодна је за анализу микрострип *CAD* система. Метод је ограничен на анализу отворених микроталасних водова, а није узета у обзир ни коначна дебљина проводних трака, тј. метализације.

Прорачун капацитивности проводника произвољног попречног пресека "утиснутих" у вишеслојни диелектрик приказан је у [92], где је за решавање примењен **матрични метод** у комбинацији са методом момената. Цео систем може бити постављен изнад уземљене равни коначне или бесконачне ширине или између две уземљене паралелне равни. Проводници могу бити коначних димензија или бесконачно танки.

За анализу оваквих система примењена је Гринова функција за потенцијал система тоталних и везаних наелектрисања, која се налазе на раздвојним површинама проводник-диелектрик и диелектрик-диелектрик, респективно. Сваки слој се дели на скуп троугаоних површина, при чему се подразумева да је на њима константно површинско наелектрисање. Иако се метод може применити за произвољне геометрије, ипак је присутно ограничење у његовој примени за сложеније геометрије, где је неопходно решити матричне једначине великих димензија. Применом градијентног метода, како наводе аутори, могуће је смањити димензије матрица и тиме утицати на краће време израчунавања.

Током последњих двадесет година технологија израде електронских кола добила је нов задатак. Главни фокус инжењера–пројектаната је на смањењу димензија интегрисаних кола и гушћем паковању компоненти. Једна од главних последица блиско постављених компоненти је изражен ефекат спрезања који може да утиче на правилан рад система. Због тога је неопходно да ефекат спреге између проводника микротракастог вода буде узет у обзир или, још боље, контролисан од стране самог пројектанта. Други битан чинилац у пројектовању је и расипање сигнала због разлике у парном и непарном режиму простирања сигнала кроз проводнике микротракастог вода. Са циљем да се ове потешкоће избегну или што више ублаже, у [93] и [94] ефекат спреге између проводника умањен је убацивањем диелектричног уметка између проводних трака вода, као и слоја диелектрика тзв. "суперстрата" изнад њих. Одговарајућим избором вредности релативних диелектричних константи ових додатака могуће је "држати под контролом" два гореспоменута проблема. Међусобни утицај проводника вода може се елиминисати одржавањем капацитивне спреге у жељеном опсегу. За ову анализу примењен је **метод интегралних једначина**, док је у [95] коришћен **метод коначних разлика**. Квазистационарна ТЕМ анализа је примењена и узето је у обзир да су проводници занемарљиве дебљине. Диелектрици су хомогени, изотропни и без губитака. Формулација проблема се базира на решавању Лапласове једначине уз задовољење одговарајућих граничних услова, на коришћењу Лагранжеових полинома за добијање другог извода потенцијала и метода коначних разлика. Укупно наелектрисање на тракама се одређује применом Гаусовог закона. На основу одређеног наелектрисања израчунавају се подужна капацитивност, фазна брзина и карактеристична импеданса за оба режима на воду.

Један од начина да се утиче на компактнији дизајн микротракастих водова, а да се, са друге стране, компензује разлика у фазним брзинама за паран и непаран режим на воду, приказан је у [96]. Илустрована су два приступа. У првом случају представљена је методологија базирана на расподељеном приступу, када се модификује спрегнута структура, слој диелектрика или уземљена раван, тако да се фазне брзине оба мода изједначе. За остваривање овог приступа нису неопходне никакве спољне компоненте. Недостатак приступа је у немогућности добијања једначина у затвореном облику. Са друге стране, компензациони приступ уводи додатне компоненте између или изнад спрегнутих проводних трака. Разликују се **индуктивне** и **капацитивне компензационе технике**. Димензије компензованих паралелно спрегнутих микротракастих водова су идентичне као и код оригинала. Друга значајна предност је једноставан дизајн, јер

се могу добити једначине у затвореном облику. Недостатак је паразитни ефекат спрегнутих компоненти, мада се, како наводе аутори, он може умањити редном везом више малих индуктивности и тиме повећати директивност спрегнутог микротракастог вода. Слична проблематика анализирана је и у [97], где су такође добијене једначине у затвореном облику. Да се ради о веома актуелној теми говори и [98], у коме су анализирани *UWB* филтри пропусници опсега који се управо и заснивају на паралелно спрегнутим микротракастим водовима.

У претходно споменутих методима углавном је примењиван квазистационарни ТЕМ приступ за анализу микроталасних водова. Овај приступ је валидан за ниже учестаности, када су параметри попут карактеристичне импедансе и ефективне релативне диелектричне константе независни од фреквенције. Међутим, када се узме у обзир дисперзиони ефекат, који је изражен на вишим фреквенцијама, неопходно је применити потпуну таласну анализу. Као што се види са *Слике 1.3*, за овај тип анализе примењују се различити нумерички и полунумерички методи. У [99] и [100] примењен је **метод коначне разлике у временском домену** (енг. *finite difference time-domain – FDTD*). Дали у [101] примењује **метод коначних елемената**, док су у [102]-[104] решаване интегралне једначине.

Проблем дисперзије на воду анализиран је и применом **варијационог метода конформног пресликавања**, [105]. Карактеристични параметри симетричног микротракастог вода са уметком од диелектрика анализирани су и у [106] применом **метода линија** (енг. *method of lines – MOL*). Одређене су ефективна диелектрична константа и фазна брзина за паран и непаран режим на воду на учестаностима већим од 100 GHz. Применом овог метода анализирани су и микротракасти водови са супстратом коначне ширине у [107], као и коначном дебљином метализације у [108]. Гетсингеров модел, [109], који описује начин простирања таласа дуж једнослојног микротракастог вода модификован је за случај вишеслојних водова у [110]. Дисперзионе карактеристике микротракастих водова могу да се одреде и помоћу **анализе у спектралном домену** тј. применом брзе Фуријеове трансформације, [32], [111]-[114].

Као проводници у микроталасним водовима најчешће се користе бакар или алуминијум. За подлоге се користе различите врсте диелектрика, [7]. У свим до сада наведеним радовима супстрати су били хомогени, изотропни диелектрици. Основни недостатак њихове примене је нестабилна вредност диелектричне константе. Зато се све чешће

као подлога користе анизотропни, [62], [115]-[118], феритни, [119], биизотропни материјали, [61], [120]-[126], или метаматеријали, [118], [124], [127], [128]. У [119] изложена теорија представља проширење теорије спрегнутих микротракастих водова на изотропној подлози. С обзиром да феритни материјал поседује својства биаксијалне анизотропије, поље у фериту не може да се прикаже преко уобичајених релација које важе за изотропну средину. Применом релације реципроцитета формиране су одговарајуће једначине које доводе до одређивања вредности карактеристичних параметара вода.

У [117], [118], [126], [129]-[138] за анализу тракастих водова коришћен је **метод еквивалентне електроде** (енг. *equivalent electrodes method - EEM*), који такође припада групи квазистационарних метода, а развијен је на Катедри за теоријску електротехнику Електронског факултета у Нишу. Далеке 1978. године представљени су први резултати добијени применом овог метода, [139]. У том раду метод је употребљен за одређивање еквивалентног полупречника цилиндричних проводника велике дужине и произвољног попречног пресека.

Област примене метода еквивалентне електроде је изузетно широка. Метод је са успехом примењиван за решавање електростатичких проблема, [140]-[142], у теорији уземљивача, [143], [144], за анализу температурних поља, [145], вишеслојних система, [146], итд.

Метод еквивалентне електроде се примењује тако што се реалне електроде замењују системом еквивалентних електрода чији се облик дефинише зависно од геометрије проблема који се анализира. У том смислу метод подсећа на метод фиктивних извора, с том разликом што се овде еквивалентне електроде постављају по површини, а код примене метода фиктивних извора унутар електроде и њихов положај контролише фактором увлачења.

Овај метод је у [117] примењен за анализу различитих типова микроталасних водова, тј. структура са изотропном, анизотропном и биизотропном подлогом, при чему је узета у обзир дебљина и облик проводне траке, док су подлога од диелектрика и уземљена трака неограничене ширине. Као што аутор наводи, утицај дебљине метализације се не може занемарити, јер се са повећањем дебљине траке смањују карактеристична импеданса и ефективна релативна диелектрична констатна. У [115] анализирани су симетрично спрегнути тракасти водови са подлогом од анизотропног материјала.

У општем случају, примена метода еквивалентне електроде зависи од познавања облика Гринево функције за посматрани проблем, па се може рећи да се метод заснива на комбинацији аналитичког облика Гринево функције у затвореном облику и нумеричког метода којим се решавају конкретни сложени проблеми. У неким случајевима, одређивање Гринево функције у затвореном облику може бити веома компликовано или чак немогуће.

Иако метод еквивалентне електроде подсећа и на метод граничних елемената/метод момената, он се битно разликује од њега. Веома је важно напоменути да примена метода еквивалентне електроде не захтева никакву нумеричку интеграцију током решавања проблема, док је код метода момената нумеричка интеграција готово увек присутна. То доводи до тога да се приликом решавања одређених проблема могу јавити интегрални са сингуларном или квазисингуларном подинтегралном функцијом.

Побољшање метода еквивалентне електроде остварено је комбиновањем овог метода са методом граничних елемената, са циљем да се анализирају вишеслојни системи произвољног облика код којих је налажење Гринево функције отежано или немогуће. Овај нови метод, развијен на Катедри за теоријску електротехнику Електронског факултета у Нишу, заснива се на примени метода еквивалентне електроде, метода подешавања у тачкама (енг. *point-matching method*) за потенцијал савршено проводних електрода и подешавању нормалне компоненте вектора електричног поља на граничној површини било која два диелектрична слоја. Метод је у [147] назван **хибридни метод граничних елемената**¹ (енг. *hybrid boundary element method – HBEM*).

До сада је овај метод веома успешно примењен за анализу вишеслојних електромагнетних проблема, [148], [149], одређивање расподеле електромагнетног поља у околини кабловских завршница и спојница, [143], [150], уземљивачких система, [151] и при прорачуну магнетног поља и силе сталних магнета [152].

Предмет ове докторске дисертације је квазистационарна ТЕМ анализа микроталасних водова помоћу хибридног метода граничних елемената. У радовима саопштеним у међународним и домаћим часописима, као и на међународним конференцијама, [153]-[167], примењен је овај метод, анализирани су различите конфигурације микроталасних водова, а део тих резултата је приказан у дисертацији.

¹ У наставку ће за овај метод бити коришћена скраћеница *HBEM*, изведена из енглеског назива метода.

Дисертација се састоји из десет поглавља, прегледа коришћене литературе и четири прилога. Након Увода, у коме је приказан преглед стања истраживања микроталасних водова у свету, у Поглављу 2 дати су основни изрази и појмови из електромагнетике који се односе на поље у непокретним срединама и који ће бити коришћени у дисертацији. Прегледу метода који се најчешће примењују за анализу микроталасних водова посвећено је Поглавље 3. Поглавље 4 даје теоријски приказ хибридног метода граничних елемената. Детаљно је објашњена суштина поменутог метода, с обзиром да се он, по први пут, примењује за одређивање карактеристичних параметара микроталасних водова (ефективне релативне диелектричне константе и карактеристичне импедансе). На овај начин, могуће је анализирати веома сложене конфигурације микроталасних водова, које до сада нису решаване у литератури или су решаване применом сложенијег математичког апарата.

За разлику од метода коначних елемената, примена хибридног метода граничних елемената увек доводи до тога да су елементи на главној дијагонали матрице доминантни тако да је систем линеарних једначина које треба решити увек добро условљен, а време израчунавања је много краће у односу на примену метода коначних елемената. Хибридни метод граничних елемената се показао као веома ефикасан при 2Д анализи сложених микроталасних водова и ти резултати биће приказани у дисертацији.

Као илустрација примене *НВЕМ*-а, у Поглављима 5-8 биће нумерички анализиран већи број сложених примера 2Д микроталасних оклопљених или отворених водова. Такође, биће анализирани и микротракасти водови са подлогом од диелектрика коначне ширине, али и случајеви када је подлога неограничене ширине, што је случај у великом броју радова других аутора, па је могуће вршити поређење добијених резултата. Осим тога, као што се може закључити на основу прегледног приказа метода за анализу микроталасних водова, применом других нумеричких и аналитичких метода углавном се могу анализирати микротракасти водови са бесконачно танком проводном траком. Применом *НВЕМ*-а могуће је, међутим, прорачунавати параметре реалних микротракастих водова који имају проводну траку коначне дебљине и облика. Ти резултати су такође овде приказани.

Симетрично и асиметрично спрегнути микроталасни водови могу да се анализирају коришћењем варијационог, [16], метода момената, [19], [21], [22], метода еквивалентне електроде, [117], [168], [169], итд. Споменути методи се примењују за прорачун карактеристичне импедансе или код одређивања L - C матрица. Ови параметри су важни јер се спрегнути микроталасни водови примењују за реализацију микроталасних филтара,

кола за прилагођење, линија за кашњење, као и за пројектовање усмерених спрежњака. Код оваквих микроталасних водова карактеристична су два режима: парни и непарни. Парни режим се односи на симетричну побуду вода (обе проводне траке су на потенцијалима исте вредности и истог знака), док се непарни режим односи на асиметричну побуду (проводне траке су на потенцијалима истих вредности, али различитог знака). У Поглављима 5, 7 и 8 биће анализирани и овакви водови.

Проблем међусобног утицаја проводника двојичних микротракастих водова и могућност да се тај ефекат смањи убацивањем једног или више додатних слојева диелектрика у подлогу приказан је у једном од анализираних примера. С обзиром да се у том случају ради о вишеслојним срединама, предност коришћења *НВЕМ*-а ће посебно доћи до изражаја, а добијени резултати за ефективну релативну диелектричну константу и карактеристичну импедансу биће упоређени са методом коначних елемената, [56].

Посебно поглавље посвећено је примени *НВЕМ*-а за анализу биизотропних средина тј. микротракастих водова који имају подлогу од биизотропног материјала Телегеновог типа. Ради се о материјалима који се састоје од елемената који поседују и електричне и магнетне диполе. Када се овакви материјали унесу у електрично поље, оно не делује само на електричне, већ и на магнетне диполе. Магнетно поље, попут електричног, такође утиче на распоред како магнетних, тако и електричних дипола. Због своје комплексности, ови материјали нису тако често анализирани у литератури. Хибридни метод граничних елемената је у овој дисертацији успешно примењен и на решавање оваквих микротракастих водова. Најпре је било неопходно, на основу теореме лика у биизотропној средини, одредити граничне услове који важе на раздвојној површини две биизотропне средине, а онда је примењен метод. Посматран је прво случај подужног наелектрисања у двослојној биизотропној средини и одређена расподела електричних и магнетних површинских оптерећења дуж раздвојне површине две средине различитих карактеристика, а затим анализиран и микротракасти вод са подлогом од биизотропног материјала коначне ширине постављен изнад савршено проводне равни. Такође, узета је у обзир коначна дебљина проводне траке.

Закључци до којих се дошло током досадашњих и правци даљих истраживања сумирани су у Поглављу 10, док је након њега дат списак литературе коришћене при изради докторске дисертације.

На крају се налазе четири прилога у којима је приказан начин одређивања полупречника еквивалентних електрода.

Главна претпоставка целокупне анализе и примене *НВЕМ*-а у овој дисертацији укључује **квазистационарну ТЕМ анализу** микроталасних водова. Са циљем провере тачности развијеног метода, резултати за ефективну релативну диелектричну константу и карактеристичну импедансу у највећем броју примера упоређени су са онима добијеним применом програмског пакета *FEMM*, који се базира на примени метода коначних елемената, као и са резултатима који су већ саопштени у радовима других истраживача.

Дисертација се састоји од 130 слика, 253 формуле и 50 табела. Сlike, једначине и табеле нумерисане су за свако поглавље понаособ. Редни број једначине навођен је у малим заградама, а попут слика и табела, означен је са два броја од којих се први односи на број поглавља, а други на редни број једначине, односно слике и табеле. Референце су наведене у средњим (угластим) заградама. Скаларне величине означаване су косим (*italic*) малим и великим словима латинице, као и усправним грчким словима, док су векторске величине означаване масним и искошеним (***bold-italic***) карактерима. Као индекси су коришћени нумерички симболи, искошени и нормални карактери.

Називи на енглеском језику означавани су косим (*italic*) малим и великим словима абецеде.

За све анализиране примере писани су кодови у програмском пакету *Mathematica*, [170], док су за проверу резултата коришћени софтвери: *FEMM*, [56], и *FlexPDE*, [59]. Коначна визуелна форма дисертације добијена је применом програмских пакета: *Microsoft Word*, *Corel Draw* и *Microcal Origin*.

Сви прорачуни и припрема дисертације извршени су на рачунару са *INTEL* процесором са двоструким језгром, учестаности 2.8 GHz и 4 GB RAM-а.

2

Електромагнетно поље у непокретним срединама

2.1. Потпуни систем Максвелових једначина електромагнетног поља у непокретним срединама

Приликом проучавања електромагнетних појава потребно је одредити шест векторских величина – три за електричну и три за магнетну компоненту поља, [171]. Те величине су:

- Вектор јачине електричног поља, \mathbf{E} ;
- Вектор електричне индукције, \mathbf{D} ;
- Вектор јачине поларизације, \mathbf{P} ;
- Вектор јачине магнетног поља, \mathbf{H} ;
- Вектор магнетне индукције, \mathbf{B} ;
- Вектор густине магнетног момента, \mathbf{M} .

Између ових величина постоје две конститутивне везе:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (2.2)$$

где су $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m и $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m диелектрична константа вакуума и магнетна пропустљивост вакуума, респективно.

С обзиром да постоји шест величина, а само две једначине, преостале четири једначине су плод смелих Максвелових хипотеза и уопштавања Фарадејевих експерименталних резултата. Називају се Максвелове једначине и представљају формулацију основних закона теорије електромагнетних поља.

Комплетан систем Максвелових једначина у локалном (диференцијалном) облику је:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_s, \quad (2.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.6)$$

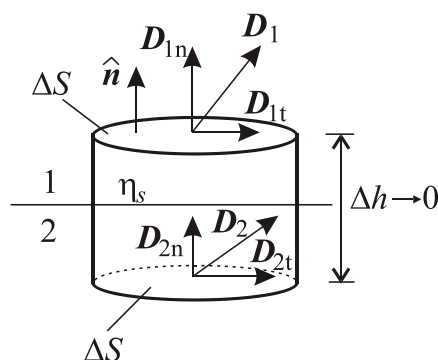
2.2. Гранични услови

Као што је наведено у [171], Максвелове једначине у локалном (диференцијалном) облику су парцијалне диференцијалне једначине, па се сходно томе не могу применити на местима где долази до скоковитих промена електромагнетних особина средина, нпр. при прелазу из средине диелектричне константе ϵ_1 у средину диелектричне константе ϵ_2 . Функције које представљају компоненте поља у тим тачкама, нису диференцијабилне. Са циљем да се обезбеди физички континуитет расподеле електромагнетног поља, једначинама (2.3)-(2.6) додају се и гранични услови, који се изводе из интегралних облика Максвелових једначина.

Интегрални облик треће Максвелове једначине – Максвеловог постулата је

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q_s. \quad (2.7)$$

Применимо ову једначину на затворену цилиндричну површину чије су основе ΔS постављене паралелно раздвојној површини две средине, *Слика 2.1*. Једна основа цилиндра је у једној, а друга у другој средини.



Слика 2.1 – Извођење граничног услова за нормалне компоненте вектора електричне индукције на раздвојној површини две средине.

Уколико су основе довољно мале, а висина цилиндра тежи нули, израз (2.7) добија облик

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = D_{1n} \Delta S - D_{2n} \Delta S = \eta_s \Delta S, \quad (2.8)$$

при чему су D_{1n} и D_{2n} нормалне компоненте вектора електричне индукције у обе средине непосредно уз раздвојну површину, док је са η_s обележена површинска густина слободних оптерећења на раздвојној површини. Може се закључити да се на раздвојној површини две средине нормална компонента вектора електричне индукције скоковито мења када на њој постоје слободна површинска наелектрисања.

Израз (2.8) се може написати у облику

$$\hat{n}(D_1 - D_2) = \eta_s, \quad (2.9)$$

где је \hat{n} орт нормале на раздвојну површину усмерен од средине 2 ка средини 1.

Сличним поступком се из четврте Максвелове једначине и једначине континуитета, као што је представљено у [171], добијају гранични за нормалну компоненту магнетне индукције и нормалну компоненту густине тоталне струје, респективно

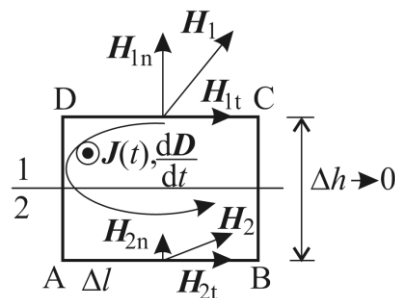
$$\hat{n}(B_1 - B_2) = 0, \quad (2.10)$$

$$\hat{n}(J_1 - J_2) = -\frac{\partial \eta_s}{\partial t}. \quad (2.11)$$

Из прве Максвелове једначине, генерализаног Амперовог закона, изводе се преостали гранични услови. Израз

$$\oint_c \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_t dS = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dS \quad (2.12)$$

се примењује на малу правоугаону контуру ABCDA која је тако постављена да су јој основице дужине Δl , паралелне раздвојној површини, смештене са њених супротних страна, а висина Δh занемарљиво мала ($\Delta h \rightarrow 0$), Слика 2.2.



Слика 2.2 – Извођење граничног услова за тангенцијалне компоненте вектора јачине магнетног поља на раздвојној површини две средине.

Такође се сматра да су основице довољно мале тако да је на њима поље практично хомогено.

Израз (2.12) може да се напише у облику

$$H_{2t}\Delta l - H_{1t}\Delta l = J\Delta h\Delta l + \frac{\partial D}{\partial t} \Delta h\Delta l, \quad (2.13)$$

где су H_{1t} и H_{2t} тангенцијалне компоненте вектора јачине магнетног поља у обе средине, непосредно уз раздвојну површину.

Вектори густина струја, \mathbf{J} и $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, управни су на раван слике и оријентисани по праву десне завојнице у односу на изабрани смер обиласка по контури. Други сабирак на десној страни је занемарљиво мали, јер је $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ коначна величина на раздвојној површини, а Δh тежи нули.

Ако по раздвојној површини не протичу кондукционе струје, \mathbf{J} је коначна величина па је и први сабирак нула. Гранични услов (2.13) добија облик

$$H_{2t} = H_{1t}. \quad (2.14)$$

Када постоје кондукционе струје, \mathbf{J} је неограничено велико, па се десна страна граничног услова појављује као привидно неодређен израз који дефинише површинску густину струје J_s

$$H_{2t} - H_{1t} = \lim_{\substack{\Delta h \rightarrow 0 \\ J \rightarrow \infty}} J_{\text{kond}} = J_s. \quad (2.15)$$

У том случају, израз (2.13) је

$$H_{2t} - H_{1t} = J_s, \quad (2.16)$$

а може се написати и у облику

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s, \quad (2.17)$$

где је $\hat{\mathbf{n}}$ орт нормале на раздвојну површину усмерен од средине 2 ка средини 1.

Сличним поступком се из друге Максвелове једначине и једначине континуитета, као што је наведено у [171], одређује гранични услов за тангенцијалну компоненту вектора јачине електричног поља

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (2.18)$$

2.3. Подела проблема у погледу временске зависности електромагнетног поља

У [171] извршена је подела проблема у погледу временске зависности електромагнетног поља на:

- статичке;
- стационарне;
- квазистационарне;
- динамичке.

Код **динамичких проблема** компоненте електромагнетног поља се интензивно мењају у времену. За решавање ових проблема користи се потпун систем Максвелових једначина датих изразима (2.3)-(2.6).

Код **статичких проблема** компоненте поља не зависе од времена, нити протичу кондукционе и конвекционе струје. Потпун систем Максвелових једначина сада има облик:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad (2.19)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (2.20)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_s, \quad (2.21)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.22)$$

Једначине (2.20) и (2.21) чине подсистем једначина којим је описано електрично поље. Преостале две једначине, (2.19) и (2.22), описују магнетостатичко поље.

Код **стационарних проблема** компоненте електромагнетног поља се не мењају у времену, али протичу сталне кондукционе и/или конвекционе струје, па је $\mathbf{J} = \text{const}$. Максвелове једначине су облика:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (2.23)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (2.24)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_s, \quad (2.25)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.26)$$

Квазистационарни проблеми су у суштини динамички, који се могу третирати као стационарни, а да се притом не чини велика грешка. Потребан и довољан услов за ово је да густина кондукционе струје буде много већа од густине струје диелектричног помераја:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \gg \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (2.27)$$

Услов квазистационарности, дат изразом (2.27), испуњен је у два случаја:

1. У добрим проводницима, јер је њихова специфична проводност веома велика;
2. При ниским учестаностима, јер су тада промене поља у времену споре и вредности парцијалних извода по времену мале.

Код поља која се мењају по простопериодичном закону у времену, услов квазистационарности се дефинише у односу на таласну дужину и величину области у којој

се посматра поље. У некој области проблем се сматра квазистационарним ако су димензије те области много мање од таласне дужине.

2.4. Електромагнетне особине средина

Електромагнетне особине средина могу да се опишу помоћу следеће три величине:

- диелектричне константе, ϵ ;
- магнетне пропустљивости, μ ;
- специфичне проводности, σ .

Овим величинама описане су особине средина у електричном, магнетном и смислу провођења. Према овој подели, средине се могу поделити на:

- изотропне и анизотропне;
- хомогене и нехомогене;
- линеарне и нелинеарне;
- дисперзивне и недисперзивне.

За средину се каже да је **изотропна у електричном смислу** ако су вектори јачине електричног поља, електричне индукције и јачине поларизације колинеарни. Веза између њих је

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} . \quad (2.28)$$

Средина је **анизотропна у електричном смислу** уколико ови вектори нису колинеарни. Веза између њих може да се у том случају прикаже изразом

$$\vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \overleftrightarrow{\epsilon}_r \vec{\mathbf{E}} , \quad (2.29)$$

где су

$$\vec{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} , \quad (2.30)$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} , \quad (2.31)$$

$$\overleftrightarrow{\epsilon}_r = \begin{bmatrix} \epsilon_{rxx} & \epsilon_{rxy} & \epsilon_{rxz} \\ \epsilon_{ryx} & \epsilon_{ryy} & \epsilon_{ryz} \\ \epsilon_{rzx} & \epsilon_{rzy} & \epsilon_{rzz} \end{bmatrix} , \quad (2.32)$$

тензори електричне индукције, јачине електричног поља и релативне диелектричне константе, респективно.

Средина је **изотропна у магнетном смислу** ако су вектори јачине магнетног поља, магнетне индукције и магнетног момента колинеарни, а конститутивна веза облика

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu\mathbf{H}. \quad (2.33)$$

Средина је **анизотропна у магнетном смислу** ако ови вектори нису колинеарни, а конститутивна веза је тензорска,

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mu}_r \vec{\mathbf{H}}. \quad (2.34)$$

За средину се каже да је **изотропна у смислу провођења** ако су вектори јачине електричног поља и густине кондукционе струје колинеарни, па је Омов закон скаларног облика

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}. \quad (2.35)$$

Када ови вектори нису колинеарни средина је **анизотропна у смислу провођења**, а Омов закон добија тензорски облик

$$\vec{\mathbf{J}} = \vec{\sigma}\vec{\mathbf{E}}. \quad (2.36)$$

Бианизотропне средине су магнетоелектричне средине за које је карактеристично да се под утицајем електричног, односно магнетног поља, истовремено и поларишу и магнетишу. Конститутивне везе ових величина дате су тензорским везама:

$$\vec{\mathbf{D}} = \vec{\epsilon}\vec{\mathbf{E}} + \vec{\xi}\vec{\mathbf{H}} \quad \text{и} \quad (2.37)$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\zeta}\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mu}\vec{\mathbf{H}}, \quad (2.38)$$

где су $\vec{\xi}$ и $\vec{\zeta}$ тензори величина које описују биизотропна својства средине.

Уколико је веза између ових величина линеарна, ради се о **биизотропним срединама**. Најједноставнији тип биизотропних материјала је Телегенов, за који су конститутивне везе између вектора који описују електрично и магнетно поље дате изразима, [121],

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} + \xi\mathbf{H} \quad \text{и} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{B} = \xi\mathbf{E} + \mu\mathbf{H}. \quad (2.40)$$

Средина је **хомогена** ако величине које описују њене електромагнетне особине не зависе од текућих координата. У супротном је **хетерогена**.

Средина је **линеарна** ако величине које описују њене електромагнетне особине не зависе од јачине побудног поља. У противном је **нелинеарна**.

Уколико су величине које описују електромагнетне особине средине зависне од учестаности, средина је **дисперзивна**. У супротном се ради о **недисперзивној** средини.

2.5. Типови вођених електромагнетних таласа

Таласи који имају само трансверзалне компоненте електричног и магнетног поља ($E_z = 0, H_z = 0$) називају се **трансверзални електромагнетни (ТЕМ) таласи**. Електрично и магнетно поље су међусобно управни једно на друго, а оба су нормална на правац простирања таласа. Таласи код којих електрично поље нема лонгитудиналну (уздужну) компоненту, али магнетно поље је има ($E_z = 0, H_z \neq 0$), називају се **трансверзални електрични (ТЕ) таласи**. Уколико електрично поље таласа има уздужну компоненту, док је магнетно нема ($E_z \neq 0, H_z = 0$), ради се о **трансверзалним магнетним (ТМ) таласима**, [7].

У неким случајевима, као нпр. код система са нехомогеним диелектриком, није могуће простирање ниједног од ова три типа таласа, али је могуће простирање таласа који имају уздужне компоненте и електричног и магнетног поља ($E_z \neq 0, H_z \neq 0$). Таласи са оваквим карактеристикама зову се хибридни таласи. Математички, овакав талас се може посматрати као суперпозиција ТЕ и ТМ таласа.

ТЕМ талас се може простирати само по водовима са хомогеним диелектриком. Међутим, у микроталасним колима често се срећу водови са нехомогеним диелектриком (нпр. микротракасти вод). У општем случају, по оваквим водовима се могу простирати само хибридни таласи. Ипак, при довољно ниским учестаностима, уздужне компоненте поља су много мање од трансверзалних, па се могу занемарити. Такави таласи се називају **квази-ТЕМ таласи**. За ове таласе је изражена дисперзија при учестаностима већим од 10 GHz, јер долази до промене структуре поља.

2.6. Карактеристични параметри микроталасних водова

Као што је у већ напоменуто, квазистационарни приступ подразумева простирање "правог" ТЕМ таласа дуж вода. Карактеристични параметри микроталасних водова који се заснивају на оваквом приступу одређују се помоћу две статичке подужне капацитивности: C' и C'_0 , при чему је:

- C' - подужна капацитивност микроталасног вода у присуству диелектричне средине (или средина),

- C'_0 - подужна капацитивност идентичног вода када се супстрат замени ваздушним диелектриком.

На основу израчунатих подужних капацитивности, дефинишу се остали карактеристични параметри вода:

- **Ефективна релативна диелектрична константа**

$$\epsilon_r^{\text{eff}} = \frac{C'}{C'_0}; \quad (2.41)$$

- **Карактеристична импеданса вода**

$$Z_c = \frac{1}{c\sqrt{C'C'_0}}, \text{ тј. } Z_c = \frac{Z_{c0}}{\sqrt{\epsilon_r^{\text{eff}}}}, \quad (2.42)$$

где је $c = 3 \cdot 10^8$ m/s брзина простирања електромагнетних таласа у слободном простору, а Z_{c0} је карактеристична импеданса вода када је у њему диелектрик вакуум.

Ефективна релативна диелектрична константа и карактеристична импеданса су два основна параметра која се дефинишу за микроталасни вод. Такође, дефинишу се и:

- **Таласна дужина на воду:**

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r^{\text{eff}}}} \text{ или } \lambda = \frac{300}{f(\text{GHz})\sqrt{\epsilon_r^{\text{eff}}}} \text{ mm}, \quad (2.43)$$

где је $\lambda_0 = \frac{c}{f}$.

- **Константа простирања је**

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad (2.44)$$

- **Фазна брзина**

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r^{\text{eff}}}}; \quad (2.45)$$

- **Електрична дужина вода**

$$\theta = \beta L, \quad (2.46)$$

где је L физичка дужина вода.

За израчунавање статичких подужних капацитивности, C' и C'_0 , примењују се различити методи и неки од њих биће приказани у наредном поглављу.

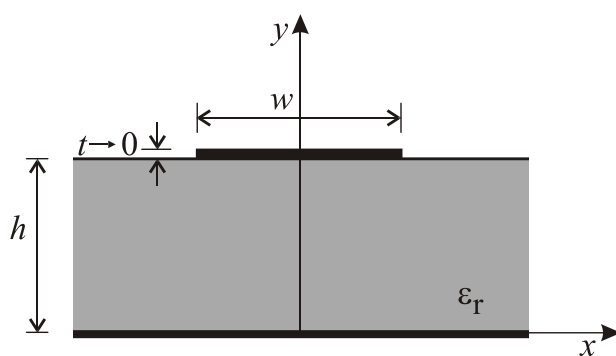
3

Методи за квазистационарну анализу микроталасних водова

Након прегледа развоја микроталасних водова и метода који се користе за њихову анализу, датог у уводном делу, у овом поглављу ће бити приказане карактеристике неких од најчешће коришћених метода за квазистационарну ТЕМ анализу микроталасних водова.

3.1. Метод конформног пресликавања

Аналитички метод који је примењиван на самом почетку развоја микроталасних водова за њихову анализу је **метод конформног пресликавања**. Вилер је у периоду од 1964. до 1965. године први применио метод конформног пресликавања за анализу микротракастих водова, [27] и [36]. Метод се заснива на коришћењу конформних пресликавања за одређивање подужне капацитивности вода који има ваздушни диелектрик,



Слика 3.1 – Микротракасти вод са неограничено широком подлогом од диелектрика.

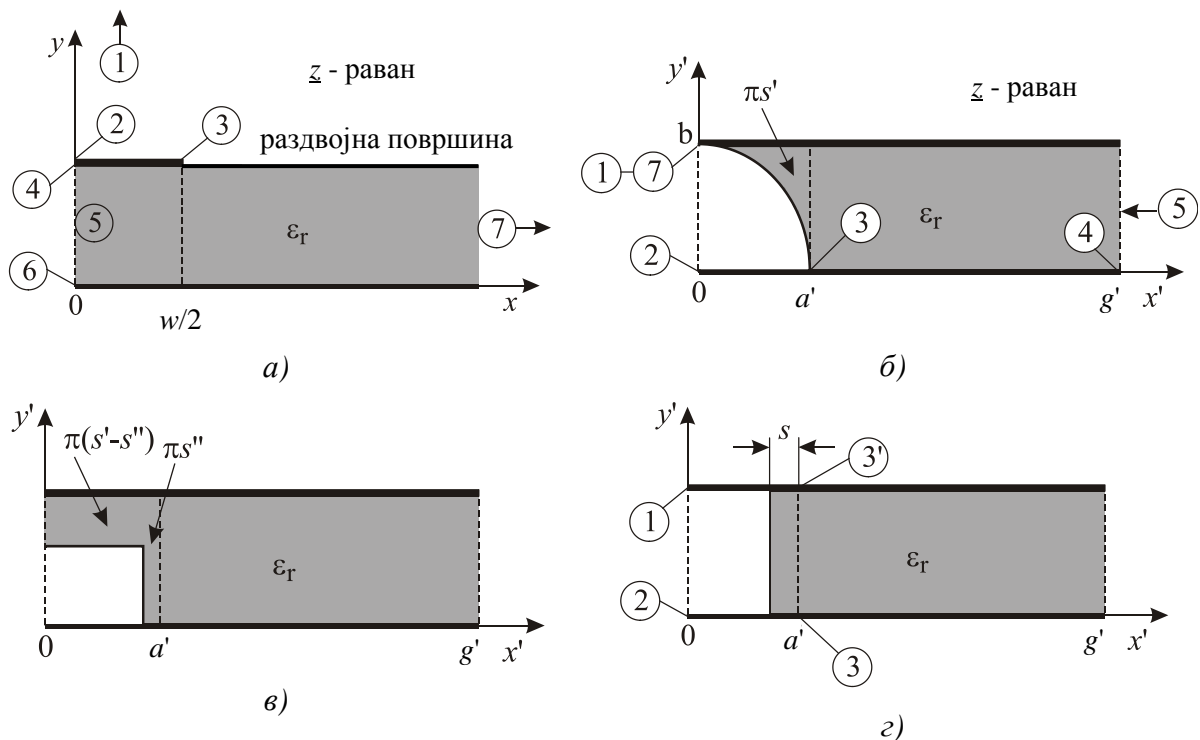
C'_0 , и увођењу појма **ефективне релативне диелектричне константе**, [27], да би се одредила подужна капацитивност, C' , микротракастог вода, Слика 3.1. Изабрана функција комплексне променљиве је таква да су изрази, који су добијени у затвореном облику, написани преко једноставних функција и погодни су како за анализу, тако и синтезу ових водова.

У [27] анализиран је микротракасти вод приказан на *Слици 3.1*. Функција конформног пресликавања која се примењује има облик

$$\underline{z} = j\pi + d \tanh(\underline{z}'/2) - \underline{z}'. \quad (3.1)$$

Променљива \underline{z} одговара комплексној равни микротракастог вода (*Слика 3.2a*), док је \underline{z}' комплексна равна пресликавања. Параметар d је приближно једнак параметру g' (*Слика 3.2b*). Раздвојна површина диелектрик-вакуум задатом функцијом конформног пресликавања трансформише се у криву облика елипсе ba' као што је приказано на *Слици 3.2b*. Да би се одредила подужна капацитивност C' , потребно је увести апроксимацију како би се модификовала граница диелектрик-вакуум. Закривљена граница диелектрик-вакуум са *Слике 3.2b* апроксимира се правоугаоном граничном облашћу, као што је и приказано на *Слици 3.2в*. Област $\pi s'$ изнад криве представљена је као збир две површине – "хоризонталне" $\pi s''$ и "вертикалне" $\pi(s' - s'')$. Ове две површине могу да се замене једном вертикалном површином s , као што је приказано на *Слици 3.2г*,

$$s = s'' + (s' - s'')/\epsilon_r. \quad (3.2)$$



Слика 3.2 – Примена метода конформног пресликавања за анализу микротракастог вода (преузето из [14]).

Уколико се уведе параметар

$$q = (g' - a' + s) / g', \quad (3.3)$$

могуће је дефинисати ефективну релативну диелектричну константу као

$$\varepsilon_r^{\text{eff}} = (1 - q) + q\varepsilon_r. \quad (3.4)$$

Различити изрази се користе за одређивање ефективне релативне диелектричне константе, $\varepsilon_r^{\text{eff}}$, за случај микротракастог вода код кога је $w/h > 2$ и за микротракасти вод код кога је $w/h < 2$, јер се примењују различите апроксимације за ова два случаја. За микротракасте водове код којих је $w/h > 2$, параметар q је, [172],

$$q = 1 - \frac{1}{d} \ln\left(\frac{d+c}{d-c}\right) + \frac{0.732}{d\varepsilon_r} \left[\ln\left(\frac{d+c}{d-c}\right) - \cosh^{-1}(0.358d + 0.595) \right] + \frac{\varepsilon_r - 1}{d\varepsilon_r} \left[0.386 - \frac{1}{2(d-1)} \right], \quad (3.5)$$

где је $d = 1 + \sqrt{1 + c^2}$, док је c одређено из

$$\frac{\pi w}{2h} = c - \sinh^{-1}(c). \quad (3.6)$$

За микротракасте водове код којих је $w/h < 2$, важи

$$\varepsilon_r^{\text{eff}} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \frac{\ln(\pi/2) + (1/\varepsilon_r)\ln(4/\pi)}{\ln(8h/w)}. \quad (3.7)$$

На основу ових израза, за микротракасте водове, код којих је $w/h > 2$, карактеристична импеданса је

$$Z_c = \frac{377}{\sqrt{\varepsilon_r}} \left[\frac{w}{h} + 0.883 + \frac{\varepsilon_r + 1}{\pi\varepsilon_r} \left\{ \ln\left(\frac{w}{2h} + 0.94\right) + 1.451 \right\} + 0.165 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r^2} \right]^{-1}, \quad (3.8)$$

док је за микротракасте водове код којих је $w/h < 2$,

$$Z_c = \frac{377}{2\pi\sqrt{(\varepsilon_r + 1)/2}} \left[\ln \frac{8h}{w} + \frac{1}{8} \left(\frac{w}{2h} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \left\{ \ln \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\varepsilon_r} \ln \frac{4}{\pi} \right\} \right], \quad (3.9)$$

где је w ширина траке вода, док је h дебљина супстрата.

Изрази на основу којих се може вршити синтеза микротракастог вода за задату карактеристичну импедансу су следећег облика.

За микротракасте водове код којих је $w/h > 2$ важи

$$\frac{w}{2h} \pi = \frac{377\pi}{2\sqrt{\varepsilon_r} Z_c} - 1 - \ln \left\{ \frac{377\pi}{\sqrt{\varepsilon_r} Z_c} - 1 \right\} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2\varepsilon_r} \left[\ln \left\{ \frac{377\pi}{2\sqrt{\varepsilon_r} Z_c} - 1 \right\} + 0.293 - \frac{0.517}{\varepsilon_r} \right], \quad (3.10)$$

а за микротракасте водове код којих је $w/h < 2$ је

$$\frac{2h}{w} = \frac{1}{4}e^{h'} - \frac{1}{2}e^{-h'}, \quad (3.11)$$

где је

$$h' = \sqrt{\frac{\epsilon_r + 1}{2} \frac{Z_c}{60} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left(0.226 + \frac{0.120}{\epsilon_r} \right)}. \quad (3.12)$$

Метод конформног пресликавања, који је описан у овој секцији, не узима у обзир дебљину метализације. У [34] дат је корекциони фактор за случај траке коначне дебљине. Цела анализа се односи само на отворене микротракасте водове.

У [173] овај приступ је проширен на прорачун подужне капацитивности вишеслојних микротракастих водова.

Корекција Вилерових израза приказана је у [174] и [175]. Ови изрази су веома погодни за практичну примену и често их софтвери за анализу и синтезу микроталасних кола имају уграђене. Нпр. за микротракасти вод са *Слике 3.1*, ефективна релативна диелектрична константа може се израчунати користећи Хамерштадове изразе, који су дати у [174],

$$\epsilon_r^{\text{eff}} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{12h}{w}}} + 0.04 \left(1 - \frac{w}{h} \right)^2 \right), \quad \text{за } \frac{w}{h} < 1, \quad (3.13)$$

$$\epsilon_r^{\text{eff}} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{12h}{w}}}, \quad \text{за } \frac{w}{h} \geq 1, \quad (3.14)$$

где је ϵ_r релативна диелектрична константа супстрата.

За одређивање карактеристичне импедансе микротракастог вода могу да се употребе изрази Хамерштада, [174], и Шнајдера, [175]:

$$Z_c = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r^{\text{eff}}}} \ln \left(\frac{8h}{w} + \frac{w}{4h} \right), \quad \text{за } \frac{w}{h} < 1, \quad (3.15)$$

$$Z_c = \frac{377}{\sqrt{\epsilon_r^{\text{eff}}}} \left(\frac{w}{h} + 1.393 + \frac{2}{3} \ln \left(\frac{w}{h} + 1.444 \right) \right)^{-1}, \quad \text{за } \frac{w}{h} \geq 1. \quad (3.16)$$

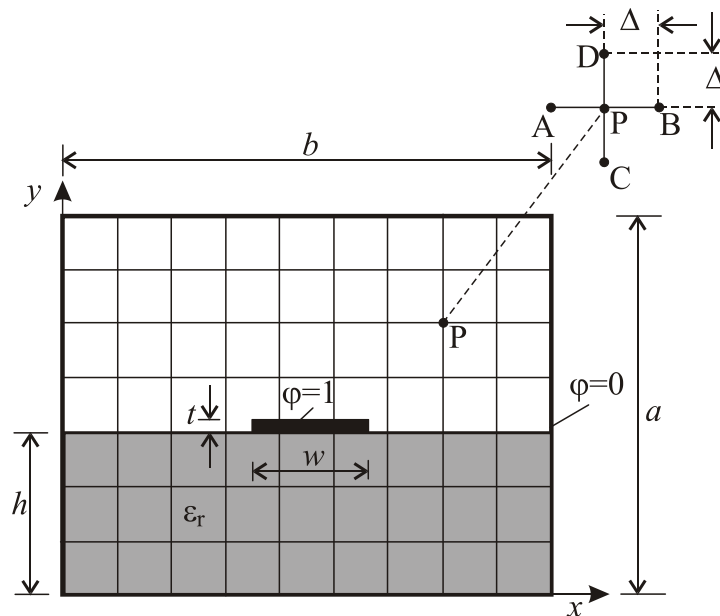
3.2. Метод коначних разлика

Метод коначних разлика заснива се на приближном нумеричком решавању Лапласове једначине у коначном броју тачака, смештених у чворовима претходно формиране

мреже. Метод је развијен далеке 1920. године и примењиван је најпре у области хидродинамике. Применом овог метода могуће је анализирати оклопљене водове, док коначна дебелина проводне траке може са лакоћом бити укључена у анализу. Недостатак метода је велики број непознатих величина, па самим тим захтева ангажовање бржих рачунара.

Посматрајмо конфигурацију приказану на *Слици 3.3*, [14]. Да би одредили потенцијал у било којој тачки, потребно је решити Лапласову једначину облика

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (3.17)$$



Слика 3.3 – Примена метода коначних разлика.

Потенцијали тачака А, В, С и D, у непосредној околини тачке P могу се написати у облику

$$\varphi_A = \varphi_P - \frac{\Delta \partial \varphi}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \dots \quad (3.18)$$

$$\varphi_B = \varphi_P + \frac{\Delta \partial \varphi}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \dots \quad (3.19)$$

$$\varphi_C = \varphi_P - \frac{\Delta \partial \varphi}{\partial y} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} + \dots \quad (3.20)$$

$$\varphi_D = \varphi_P + \frac{\Delta \partial \varphi}{\partial y} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} + \dots \quad (3.21)$$

Уколико занемаримо чланове четвртог и вишег реда и искористимо (3.17), сумирање израза (3.18)-(3.21) даје

$$\varphi_P = \frac{\varphi_A + \varphi_B + \varphi_C + \varphi_D}{4}. \quad (3.22)$$

Диференцијална једначина (3.22) се најчешће решава коришћењем релаксационог метода. Најпре се претпоставе вредности за φ у свим тачкама мреже. Те вредности се узастопно мењају на следећи начин:

$$\text{Ново } \varphi_P = \text{старо } \varphi_P - \alpha R_P, \quad (3.23)$$

где се резидуми R_P одређују као

$$R_P = \varphi_P - \frac{\varphi_A + \varphi_B + \varphi_C + \varphi_D}{4}. \quad (3.24)$$

Ова узастопна "релаксација" изводи се док разлика између старе и нове вредности не буде мања од задате дозвољене грешке. Брзина конвергенције процеса "релаксације" одређена је вредношћу константе α . Израз (3.24) треба да буде модификован за тачке које се налазе близу развојне површине диелектрик-вакуум и оне које су у угловима.

Решавањем Лапласове једначине приказаним методом, добија се расподела потенцијала у попречном пресеку оклопљеног микротракастог вода, на основу које се одређују расподела поља и наелектрисање на проводној траци.

Добија се

$$Q = \oint_S \mathbf{D}_n \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.25)$$

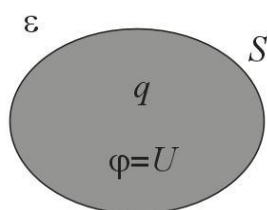
при чему се интегралање врши по површини која обухвата проводну траку. Капацитивност је одређена као однос укупног наелектрисања и потенцијала траке. Након израчунавања капацитивности C и C_0 , применом (2.29) и (2.30) одређени су и карактеристични параметри оклопљеног микротракастог вода.

3.3. Метод фиктивних извора

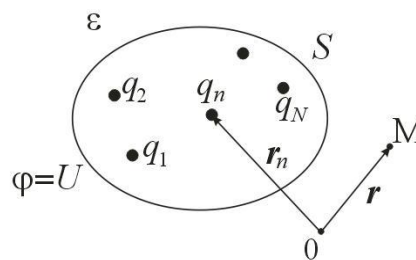
Прве идеје о примени метода фиктивних извора потичу још од пионирских дана развоја савремене теорије електромагнетних поља када су формулисане теореме лика у равном, цилиндричном и сферном огледалу и помоћу њих решаван велики број проблема у затвореном, аналитичком облику. Међутим, ту се стало и тек са развојем рачунара и њихове примене за приближно решавање проблема електромагнетике наставља се са развојем овог метода.

Данас, стечена искуства показују да је метод фиктивних извора веома једноставан нумерички метод применљив у широкој области електромагнетике. У свету је основе овог метода поставио Штајнбиглер у својој докторској дисертацији 1969. године. Предложени метод назвао је метод симулираних (фиктивних) наелектрисања. Нешто касније, појавили су се и радови групе аутора предвођених Сингером, [85]. У [176] се може наћи податак да су први резултати о примени метода фиктивних извора за приближно нумеричко решавање проблема у теорији поља публиковани од стране чланова Катедре за теоријску електротехнику Електронског факултета у Нишу још 1973. године.

У основи овог метода је идеја да се уместо правог електродног система, *Слика 3.4*, образује еквивалентни електростатички систем тако што се подесно одабрани фиктивни извори распореде унутар простора који запоседају електроде система, *Слика 3.5*.



Слика 3.4 – Усамљена електрода.



Слика 3.5 – Положаји фиктивних извора.

У произвољној тачки $M(\mathbf{r})$ потенцијал има вредност

$$\varphi = \sum_{n=1}^N q_n G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n), \quad (3.26)$$

где је

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n) = \frac{1}{4\pi\epsilon|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|} \quad (3.27)$$

Гринова функција за потенцијал усамљеног тачкастог оптерећења, док су са \mathbf{r} и \mathbf{r}_n обележени вектори положаја произвољне тачке M и фиктивних извора, респективно.

Интензитети фиктивних извора, као и њихов положај, одређују се тако да гранични услов на површини електроде, $\varphi = U$, буде што боље задовољен. Уколико се унапред не дефинише положај фиктивних извора, добија се нелинеарни систем једначина, па могу да настану проблеми приликом решавања формираног система. Ови проблеми односе се на конвергенцију и тачност добијеног решења у односу на избор почетне вред-

ности решења итеративног процеса, заснованог на линеаризацији нелинеарних једначина.

3.4. Метод коначних елемената

Метод коначних елемената се најпре примењивао у области структуралне анализе. Иако су прве математичке поставке овог метода настале 1943. године, тек је 1968. метод примењен за решавање проблема у електромагнетици, [177], [178]. Од тада се овај метод примењује за решавање широког спектра проблема у области система за вођење електромагнетне енергије, електричних машина, полупроводних уређаја, микротракастих водова, као и код анализе утицаја електромагнетног зрачења на људе.

Упркос постојању метода који су концептуално много једноставнији и лакши за програмирање него што је метод коначних елемената, захваљујући могућности решавања широког спектра проблема сложених геометрија и нехомогених средина овај метод се веома често користи. Понекад се програм за решавање проблема из одређене области, развијен применом метода коначних елемената, уз минималне корекције може успешно применити и на решавање проблема неке друге области. Зато не чуди податак да се највећи број програмских пакета намењених решавању проблема из електромагнетике базира на примени метода коначних елемената.

Примена метода коначних елемената може се разложити на четири корака:

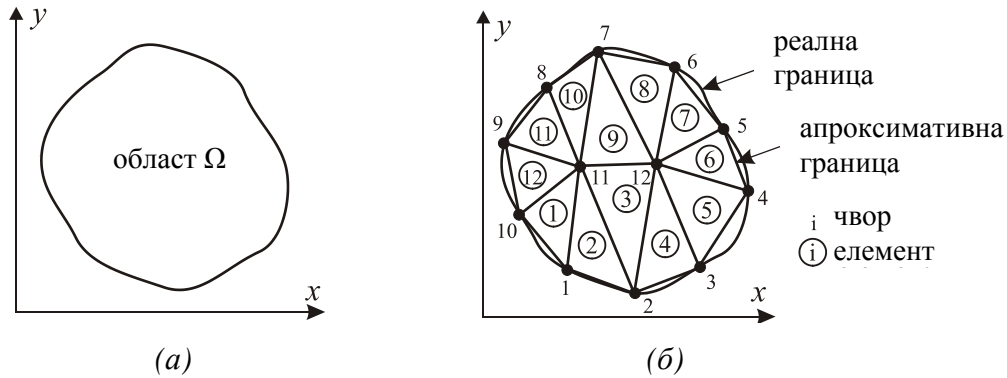
- Дискретизација области на коначан број подобласти (елемената);
- Формирање једначина за одговарајући елемент;
- Груписање свих елемената у области; и
- Решавање добијеног система једначина.

Дискретизација подразумева поделу области проблема на подобласти које се називају коначни елементи. Што је већи број коначних елемената, гушћа је мрежа на коју се дели посматрана област, па је и тачност рачунања већа. То има за последицу потребу за бржим и јачим рачунарима како би се целокупни поступак израчунавања довео до краја.

Са циљем да се одреди расподела потенцијала, $\phi(x, y)$, у дводимензионој области са *Слике 3.6а*, решавањем Лапласове једначине, читава област се дели на мале коначне елементе, *Слика 3.6б*. У пракси је уобичајено, због лакшег рачунања, да сви елементи буду истог типа нпр. троуглови. Приближно решење за потенцијал целе области је

$$\varphi(x, y) \approx \sum_{i=1}^N \varphi_i(x, y), \quad (3.28)$$

где је са N обележен број троуглова (коначних елемената) на које је област подељена.

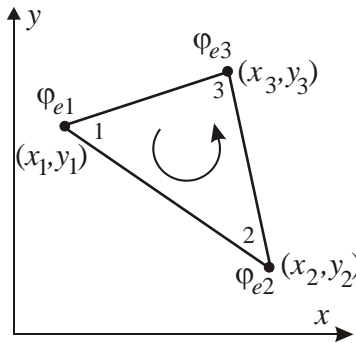


Слика 3.6 (а) Област решавања; (б) Дискретизација коначним елементима.

Посматрајмо један од елемената, Слика 3.7. Функционал који одговара Лапласовој једначини, $\Delta\varphi = 0$, је

$$f(\varphi_i) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon |\mathbf{E}|^2 d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon |\nabla\varphi_i|^2 d\Omega, \quad (3.29)$$

што представља енергију локализовану у i -том елементу.



Слика 3.7 – Типичан троугаони елемент; обележавање локалних чворова 1-2-3 обавља се у смеру супротном од кретања казаљке на сату (обележено стрелицом).

Лапласова једначина је задовољена када је укупна енергија локализована у области минимална. Због тога је неопходно наћи минимум енергије за сваки елемент

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial \varphi_N} = 0, \text{ или у општем случају } \frac{\partial f}{\partial \varphi_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.30)$$

На овај начин се добија матрична једначина за сваки коначни елемент, Слика 3.7, облика

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{e1} \\ \Phi_{e2} \\ \Phi_{e3} \end{bmatrix} = 0, \quad (3.31)$$

док је матрична једначина за цео систем

$$[c] \cdot [\varphi] = 0, \quad (3.32)$$

где су

$[c]$ - матрица коефицијената елемената целог систем, димензија $N_t \times N_t$, при чему је N_t укупан број тачака које су добијене дискретизацијом проблема,

$[\varphi]$ - вектор потенцијала свих тачака дискретизоване области.

Постављањем вредности за потенцијал чворова чији је потенцијал већ познат (Дирихлеов гранични услов) на задату вредност, врши се трансформација система једначина. Њен облик је

$$[c]_R [\varphi] = [b], \quad (3.33)$$

где су:

$[c]_R$ - редукована матрица коефицијената елемената целог систем. Њена димензија је $N_n \times N_n$, при чему је N_n број тачака непознатог потенцијала,

$[\varphi]$ - вектор непознатих потенцијала,

$[b]$ - вектор слободних чланова.

Решавањем система (3.33) одређују се непознати потенцијали.

Једна од главних потешкоћа код примене метода коначних елемената јавља се приликом припреме улазних података. Наиме, уколико је број елемената на које се дели посматрана област мали, припрема улазних података се може обавити ручно. Међутим, чешћи је случај знатно сложенијих мрежа са великим бројем елемената и чворова, па у том случају треба применити готове кодове, тзв. генераторе мреже. Примена ових кодова смањује број улазних података, смањује време неопходно за њихову припрему, а елиминисана је и могућност људске грешке у припреми података и формирању мреже.

Овај метод веома лако решава проблеме у нехомогеним и нелинеарним срединама, матрице које се формирају су углавном ретке (са великим бројем нултих елемената), гранични услови се једноставно представљају, итд.

Све ове особине, пре свега могућност аутоматизације читавог процеса, довеле су до широке примене овог метода у бројним програмским пакетима за решавање проблема

у електромагнетици. Наравно, не треба сметнути са ума да је метод коначних елемената у основи математички метод који је успешно нашао примену и у области електромагнетике.

3.5. Метод граничних елемената

Метод граничних елемената² је нумерички метод који се примењује за решавање парцијалних диференцијалних једначина формулисаних у облику интегралних једначина, који се базира на дискретизационој процедури, [22], [70], [178].

Коришћење метода граничних елемената у електромагнетици постало је популарно крајем шездесетих година прошлог века. Метод је успешно примењен за решавање електростатичких проблема, анализу микроталасних водова, проблема простирања изнад несавршене подлоге, у области антена, биомагнетизма, итд.

Поступак примене овог метода обухвата следеће кораке:

- Формирање интегралних једначина;
- Дискретизација граничне површине;
- Трансформација интегралних једначина у матричну једначину – одређивање елемената матрице (Гарлекинов метод, метод најмањих квадрата...); и
- Решавање матричне једначине и израчунавање тражених величина.

За разлику од метода коначне разлике и метода коначних елемената, код примене метода граничних елемената дискретизује се гранична област, тј. чворови постављају на граничну површину две средине и при томе води рачуна да грешка услед дислокације буде минимална.

Диференцијалне једначине којима је описан неки проблем потребно је трансформисати у интегралне једначине директном или индиректном методом. Већина диференцијалних једначина може да се изрази у облику интегралних, али не и обрнуто. Уколико уз саму диференцијалну једначину постоје и одређени гранични услови, они су садржани унутар формиране интегралне једначине, тако да се може рећи да интегрална једначина садржи и диференцијалну једначину и граничне услове.

Применом индиректне методе трансформације добија се систем интегралних једначина у којима се појављују одговарајуће Гринеове функције или се сингуларна решења парцијалних диференцијалних једначина на граничној области изражавају у повољно

² Често се у електромагнетици метод граничних елемената назива и метод момената (*Method of moments - MoM*)

одабраном облику уколико се трансформацији приступи на индиректан начин, [143]. Непознате величине, тзв. примитивне променљиве, смештене су на самој раздвојној области (код директне методе) или су то непозната површинска наелектрисања смештена на граници две средине (индиректна метода).

Након дискретизације формира се пуна и несиметрична матрица система. Директно решавање ове матрице је прилично дуготрајно, па је треба решити помоћу неких итеративних метода. Проблем у примени метода граничних елемената јесу и отворене границе система. Уколико гранична област има оштре ивице, онда решење има сингуларитете.

У [143] наведено је да је, уколико се метод граничних елемената користи самостално, присутан велики број слабости. Међутим, у комбинацији са неким другим методама, његова предност је изузетно велика и доприноси повећању тачности израчунавања.

3.6. Метод еквивалентне електроде

Метод еквивалентне електроде је једноставан нумерички метод, развијен на Катедри за теоријску електротехнику Електронског факултета у Нишу, [141]. Основа метода еквивалентне електроде заснива се на подели површине савршено проводне електроде на велики број елементарних површина и замењивању сваке од њих еквивалентном електродом³. За разлику од метода фиктивних извора, где се електроде постављају унутар области, еквивалентне електроде се налазе на површини границе две области. Потенцијал еквивалентних електрода је исти као потенцијал савршено проводне електроде.

Подела површине савршено проводне електроде на сегменте може бити равномерна или неравномерна, што је ствар избора самог истраживача. Уколико постоји потреба да се смањи број елемената у матрици система или побољша конвергенција резултата (ако су у питању оштре ивице), препоручљиво је користити неравномерну сегментацију површине, која даје бољу и бржу конвергенцију. Да би се постигла још већа тачност, могућа је комбинација метода еквивалентне електроде са неким другим методима, попут метода фиктивних извора.

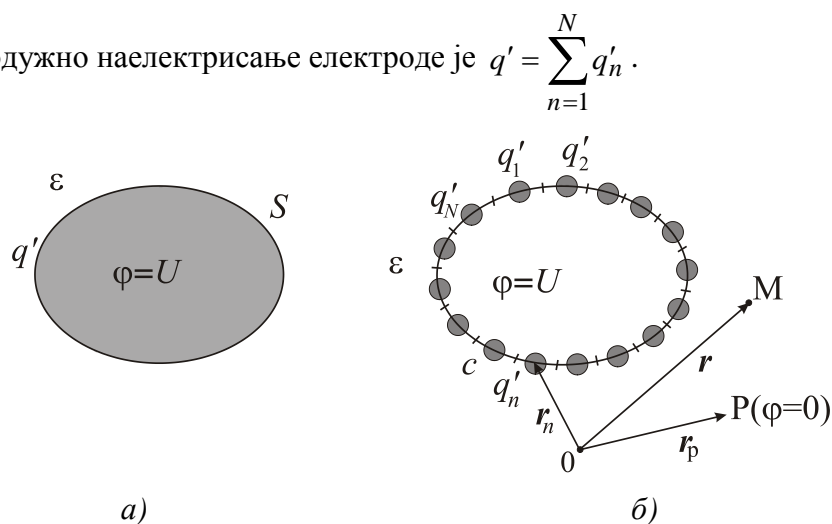
Као еквивалентне електроде могу да се користе тороидалне еквивалентне електроде код дводимензионалних проблема са аксијалном симетријом, танке цилиндричне електроде за решавање планпаралелних проблема, док су еквивалентне електроде сфере

³ Полупречник еквивалентне електроде се одређује применом метода конформног пресликавања. Поступак је приказан у Прилозима I и II.

одговарајућих еквивалентних полупречника код анализе тродимензионалних (3Д) проблема.

Посматрајмо проводник произвољног попречног пресека са *Слике 3.8а*. Применом метода еквивалентне електроде гранична површина дели се на проводне траке (љуске), *Слика 3.8б*. Потенцијал сваке љуске одговара потенцијалу електроде, а подужно наелектрисање сваке од њих је q'_n ($n = 1, 2, 3, \dots, N$).

Укупно подужно наелектрисање електроде је $q' = \sum_{n=1}^N q'_n$.



Слика 3.8 – (а) Усамљена електрода; (б) Положаји еквивалентних електрода.

Формиране траке се замењују цилиндричним проводницима, полупречника a_{en} . Полупречник еквивалентне електроде која замењује равну траку је

$$a_e = d/4, \quad (3.34)$$

где је d ширина траке, [141]. За овалну траку, са централним углом ширине 2α и полупречника a , еквивалентни полупречник се одређује као

$$a_e = a \sin(\alpha/2). \quad (3.35)$$

У Прилозима I и II приказан је поступак добијања израза (3.34) и (3.35).

Овим поступком се електрода са *Слике 3.8а* замењује системом еквивалентних наелектрисања.

У произвољној тачки $M(\mathbf{r})$ потенцијал има вредност

$$\varphi = \sum_{n=1}^N q'_n G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n), \quad (3.36)$$

где је

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_n|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|} \quad (3.37)$$

Гринова функција за потенцијал усамљеног подужног оптерећења, док су са r , r_n и r_p обележени вектори положаја произвољне тачке М, еквивалентних електрода и референтне тачке нултог потенцијала, респективно.

Користећи гранични услов да су све еквивалентне електроде еквипотенцијалне, могуће је формирати систем линеарних једначина са наелектрисањима еквивалентних електрода као непознатим величинама. Решавајући овај систем линеарних једначина и налажењем непознатих наелектрисања могуће је одредити потенцијал, јачину електричног поља, као и капацитивност читавог система.

Метод еквивалентне електроде је у радовима публикованим од стране чланова Катедре за теоријску електротехнику успешно примењен за анализу вишеслојних средина, као и оклопљених прорезаних водова где се Гринова функција могла добити у затвореном облику.

У општем случају примена метода еквивалентне електроде зависи од познавања облика Гринове функције за посматрани проблем, па се може рећи да се метод заснива на комбинацији аналитичког облика Гринове функције у затвореном облику и нумеричког метода којим се решавају конкретни сложени проблеми. У неким случајевима, одређивање Гринове функције у затвореном облику може бити веома компликовано или чак немогуће.

Иако метод еквивалентне електроде подсећа на метод момената, [22], он се битно разликује од њега. Веома је важно напоменути да примена метода еквивалентне електроде не захтева никакву нумеричку интеграцију током решавања проблема, док је код метода момената нумеричка интеграција готово увек присутна. То доводи до тога да се приликом решавања одређених проблема могу јавити интегрални са сингуларном или квази сингуларном подинтегралном функцијом.

4

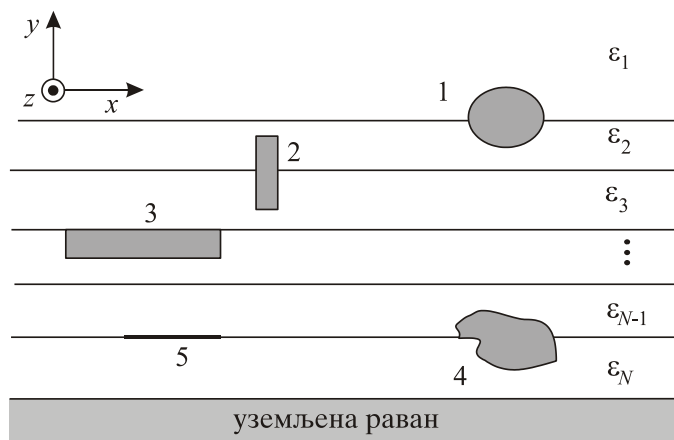
Хибридни метод граничних елемената

Као што је у уводу делу ове дисертације наведено, побољшање метода еквивалентне електроде остварено је његовим комбиновањем са методом граничних елемената, са циљем да се анализирају вишеслојни системи произвољног облика, где је налажење Гринове функције отежано или немогуће. Тај нови метод, развијен на Катедри за теоријску електротехнику Електронског факултета у Нишу, заснива се на примени метода еквивалентне електроде, метода подешавања у тачкама за потенцијал савршено проводних електрода и подешавању нормалне компоненте вектора електричног поља на граничној површини било која два диелектрична слоја.

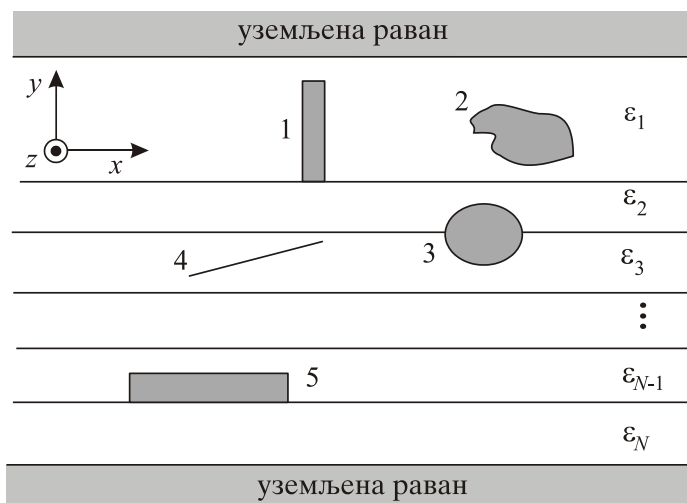
Метод је у [147] назван **хибридни метод граничних елемената** (енг. *hybrid boundary element method – HBEM*). До сада је овај метод веома успешно примењен за анализу вишеслојних електромагнетних проблема, [148], [149], одређивање расподеле електромагнетног поља у околини кабловских завршница и спојница, [143], [150], уземљивачких система, [151] и при прорачуну магнетног поља и силе сталних магнета, [152]. Метод се успешно може применити за анализу 2Д и 3Д статичких, стационарних и квазистационарних електромагнетних проблема. Тачност и ефикасност метода је потврђена у [150], где су добијени резултати упоређени са експерименталним, као и оним добијеним применом метода коначних елемената, [179].

Такође, метод је примењен за анализу микроталасних водова и потврђен у многобројним радовима аутора ове дисертације саопштеним на међународним скуповима и објављеним у међународним часописима, [153]-[167]. Резултати до којих се дошло биће приказани у овој дисертацији и упоређени са онима добијеним од стране других истраживача.

Типови микроталасних водова, који се могу решавати применом хибридног метода граничних елемената, у општем случају могу се приказати системима са *Слика 4.1* и *4.2*.



Слика 4.1 – Микроталасни вод са више проводника произвољног попречног пресека постављених у вишеслојном диелектрику изнад уземљене равни.



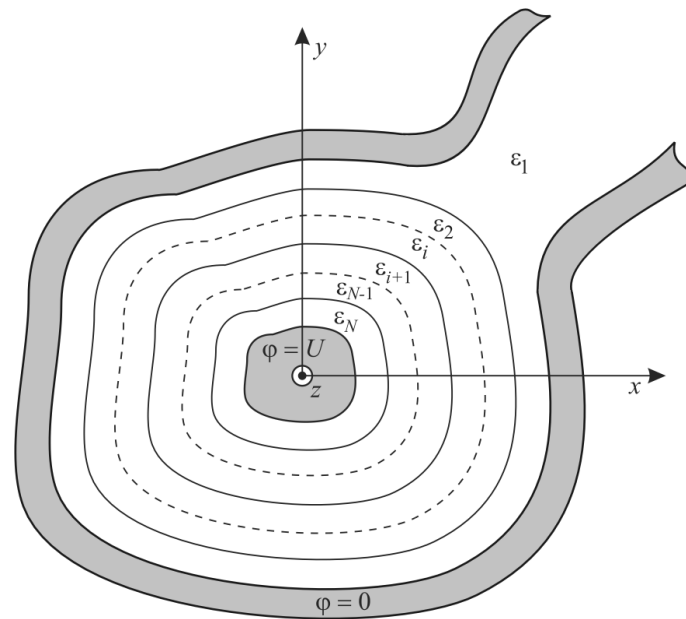
Слика 4.2 – Тракасти вод са више проводника произвољног попречног пресека постављених у вишеслојном диелектрику.

4.1. Теоријски приступ

Са циљем да се објасни примена хибридног метода граничних елемената, посматра се вишеслојни микроталасни вод, *Слика 4.3*, испуњен слојевима изотропног, линеарног, хомогеног диелектрика различитих диелектричних константи.

Према хибридном методу граничних елемената, површина проводника тј. металних електрода се дели на сегменте и свака од добијених љуски замењује такозваним еквивалентним електродама одговарајућег полупречника, постављених у центар сегмента у

одговарајућем слоју диелектрика. Ове електроде представљају слободна површинска наелектрисања металних електрода.



Слика 4.3 – Двожични вишеслојни микроталасни вод.

Као и код метода еквивалентне електроде, еквивалентне електроде у *НВЕМ*-у, зависно од геометрије проблема, су: тороидалне електроде код анализе дводимензионалних проблема са аксијалном симетријом, танке цилиндричне електроде код планпаралелних проблема, док се сферне електроде користе као еквивалентне електроде за анализу тродимензионалних проблема.

На површини електрода треба да буде задовољен гранични услов:

$$\varphi = \varphi_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad (4.1)$$

при чему је са φ_k обележен потенцијал k -те електроде. Подразумева се да је површина сваке металне електроде еквипотенцијална у електростатичком пољу, па је потенцијал φ_k исти у свим тачкама једне електроде, тј. на свакој од еквивалентних електрода којима се та површина замењује.

Проблем, међутим, настаје приликом одређивања везаних наелектрисања на граници два диелектрика, јер се мора узети у обзир и утицај диелектрика на електрично поље и потенцијал система. У теорији електростатичких поља познато је да се утицај диелектрика на електрично поље и потенцијал може заменити утицајем везаних наелектрисања (површинских и запреминских) тог диелектрика, смештених у вакууму, [180]. Према томе, уколико је позната расподела везаних наелектрисања, може се одстранити диелектрик и оставити само његова везана наелектрисања, постављена у

вакууму. На овај начин, вектор електричног поља и електрични скалар потенцијал остаће исти у свим тачкама посматраног система.

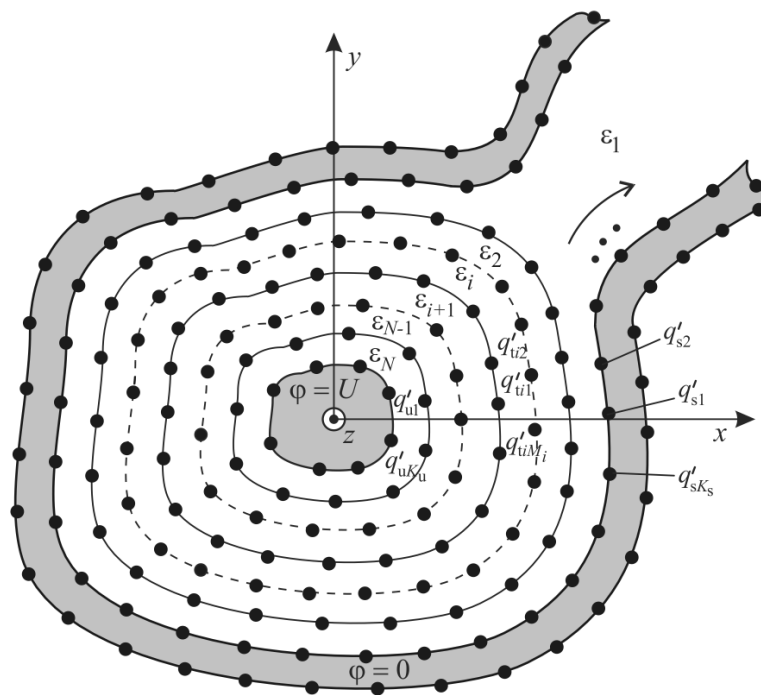
У унутрашњости изотропног, линеарног, хомогеног диелектрика у коме нема везаних запреминских наелектрисања, $\rho_v = -\text{div } \mathbf{P} = 0$, постоје само везана наелектрисања по површини диелектрика, односно на раздвојној површини диелектрика са вакуумом, металном електродом или другим диелектрицима. Тотално површинско наелектрисање на граници слојева диелектрика је једнако везаном површинском наелектрисању с обзиром да слободна наелектрисања на раздвојним површинама слојева диелектрика не постоје (слободна наелектрисања постоје само на површинама металних електрода).

Према томе, раздвојна површина два диелектрика се дели на сегменте, а у центар сваког од њих постављају се еквивалентне електроде смештене у вакууму. Оне представљају присутна везана наелектрисања. Тиме су елиминисане диелектричне особине средина, а систем се третира као да се та наелектрисања налазе у вакууму.

На раздвојној површини диелектрика задовољен је гранични услов за нормалну компоненту вектора поларизације:

$$\eta_v = P_{2n} - P_{1n}. \quad (4.2)$$

Оваквом анализом формиран је еквивалентан систем наелектрисања приказан на *Слици 4.4*.



Слика 4.4 – HBEM модел.

На раздвојној површини проводника и диелектрика постоје и слободна површинска и везана површинска наелектрисања, која у збиру дају тотална наелектрисања. У [143] приликом примене хибридног метода граничних елемената извршена је апроксимација која се показала задовољавајуће тачном у смислу да се везана површинска наелектрисања на раздвојној површини проводника и диелектрика могу занемарити и узети у обзир једино слободна оптерећења (замењују се еквивалентним електродама постављеним у одговарајућем диелектрику). Та апроксимација примењена је и у овој дисертацији. На раздвојној површини проводника и вакуума постоје само слободна површинска наелектрисања (замењују се еквивалентним електродама постављеним у вакууму), а на раздвојној површини два диелектрика или диелектрика и вакуума, само везана површинска наелектрисања (замењују се еквивалентним електродама постављеним у вакууму). Електрични скалар потенцијал у произвољној тачки система са *Слике 4.2* је:

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_0 - \sum_{k=1}^{K_u} \frac{q'_{uk}}{2\pi\epsilon_N} \ln \sqrt{(x-x_{uk})^2 + (y-y_{uk})^2} - \\ - \sum_{k=1}^{K_s} \frac{q'_{sk}}{2\pi\epsilon_1} \ln \sqrt{(x-x_{sk})^2 + (y-y_{sk})^2} - \\ - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M_i} \frac{q'_{tim}}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{(x-x_{tim})^2 + (y-y_{tim})^2}, \quad N \geq 2, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где су:

- K_u – број еквивалентних електрода на унутрашњем проводнику, оптерећених слободним подужним наелектрисањима q'_{uk} ($k = 1, \dots, K_u$);
- K_s – број еквивалентних електрода на спољашњем проводнику, оптерећених слободним подужним наелектрисањима q'_{sk} ($k = 1, \dots, K_s$);
- M_i – број еквивалентних електрода на i -тој раздвојној површини два слоја диелектрика, оптерећених везаним подужним наелектрисањима q'_{tim} ($m = 1, \dots, M_i$, $i = 1, \dots, N-1$);
- $N-1$ је број раздвојних површина;
- (x_{uk}, y_{uk}) , (x_{sk}, y_{sk}) и (x_{tim}, y_{tim}) су координате позиција еквивалентних електрода;
- ϵ_n ($n = 1, \dots, N$) је релативна диелектрична константа n -тог слоја диелектрика;

- φ_0 је адитивна константа која зависи од изабране референтне тачке нултог потенцијала.

$$N_{\text{tot}} = K_u + K_s + \sum_{i=1}^{N-1} M_i + 1, \quad (4.4)$$

је укупан број непознатих.

Вектор јачине електричног поља је дефинисан као

$$\mathbf{E} = -\text{grad}(\varphi) = E_x \hat{x} + E_y \hat{y}, \quad (4.5)$$

и његове компоненте су:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \sum_{k=1}^{K_u} \frac{q'_{uk}}{2\pi\epsilon_N} \frac{x - x_{uk}}{(x - x_{uk})^2 + (y - y_{uk})^2} + \sum_{k=1}^{K_s} \frac{q'_{sk}}{2\pi\epsilon_1} \frac{x - x_{sk}}{(x - x_{sk})^2 + (y - y_{sk})^2} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M_i} \frac{q'_{tim}}{2\pi\epsilon_0} \frac{x - x_{tim}}{(x - x_{tim})^2 + (y - y_{tim})^2}, \quad (4.6)$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sum_{k=1}^{K_u} \frac{q'_{uk}}{2\pi\epsilon_N} \frac{y - y_{uk}}{(x - x_{uk})^2 + (y - y_{uk})^2} + \sum_{k=1}^{K_s} \frac{q'_{sk}}{2\pi\epsilon_1} \frac{y - y_{sk}}{(x - x_{sk})^2 + (y - y_{sk})^2} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M_i} \frac{q'_{tim}}{2\pi\epsilon_0} \frac{y - y_{tim}}{(x - x_{tim})^2 + (y - y_{tim})^2}. \quad (4.7)$$

Веза између нормалне компоненте вектора јачине електричног поља и тоталног површинског наелектрисања дата је изразом

$$\hat{n}_{im} \cdot \mathbf{E}_{im}^{(0+)} = \frac{-\epsilon_{i+1}}{\epsilon_0(\epsilon_i - \epsilon_{i+1})} \eta_{tim}, \quad \eta_{tim} = \frac{q'_{tim}}{\Delta l_{im}}, \quad m = 1, \dots, M_i, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (4.8)$$

где је \hat{n}_{im} јединични вектор нормале оријентисан од средине ϵ_{i+1} ка средини ϵ_i .

Положаји тачака подешавања за потенцијал унутрашњег и спољашњег проводника су:

$$x_{un} = x_{uk} + \delta_{nk} a_{euk} \hat{n}_{uk} \cdot \hat{x}, \quad y_{un} = y_{uk} + \delta_{nk} a_{euk} \hat{n}_{uk} \cdot \hat{y},$$

$$x_{sn} = x_{sk} + \delta_{nk} a_{esk} \hat{n}_{sk} \cdot \hat{x}, \quad y_{sn} = y_{sk} + \delta_{nk} a_{esk} \hat{n}_{sk} \cdot \hat{y},$$

док су полупречници одговарајућих еквивалентних електрода $a_{euk} = \Delta l_{uk}/4$ и $a_{esk} = \Delta l_{sk}/4$ (Прилог I). Са δ_{nk} обележена је Кронекерова делта функција,

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k. \end{cases} \quad (4.9)$$

Тачке подешавања на раздвојној површини за нормалну компоненту вектора електричног поља на i -тој раздвојној површини су:

$$x_{tin} = x_{tim} + \delta_{nm} a_{eim} \hat{n}_{im} \cdot \hat{x} \quad \text{и} \quad y_{tin} = y_{tim} + \delta_{nm} a_{eim} \hat{n}_{im} \cdot \hat{y},$$

где је полупречник еквивалентних електрода $a_{eim} = \Delta l_{im} / \pi$ (Прилог III).

Неопходно је додати још једну једначину формираном систему линеарних једначина. Ради се о једначини очувања електричне неутралности посматраног система,

$$\sum_{k=1}^{K_u} q'_{uk} + \sum_{k=1}^{K_s} q'_{sk} = 0. \quad (4.10)$$

Циљ је формирати квадратни систем линеарних једначина са непознатим слободним наелектрисањима на савршено проводним електродама, тоталним наелектрисањима на раздвојним површинама слојева и непознатом адитивном константом φ_0 која зависи од изабране референтне тачке нултог потенцијала. Користећи метод подешавања у тачкама за потенцијал унутрашњег и спољашњег проводника, (4.3), метод подешавања у тачкама за нормалну компоненту вектора јачине електричног поља, (4.8), као и услов електричне неутралности, (4.10), формира се систем линеарних једначина чијим се решавањем одређују непознате вредности подужних наелектрисања, као и вредност адитивне константе φ_0 .

Подужна капацитивност микроталасног вода је

$$C' = \sum_{k=1}^{K_u} \frac{q'_{uk}}{U}. \quad (4.11)$$

Карактеристична импеданса микроталасног вода се одређује као

$$Z_c = Z_{c0} / \sqrt{\epsilon_r^{\text{eff}}}, \quad (4.12)$$

где је $\epsilon_r^{\text{eff}} = C'/C'_0$ ефективна релативна диелектрична константа, док је Z_{c0} карактеристична импеданса микроталасног вода када је диелектрик вакуум.

За проверу резултата за карактеристичну импедансу и ефективну релативну диелектричну константу, коришћен је програмски пакет **FEMM 4.2**, [56], који се базира на примени **метода коначних елемената**.

Као мера одступања добијених резултата дефинише се **релативна грешка**:

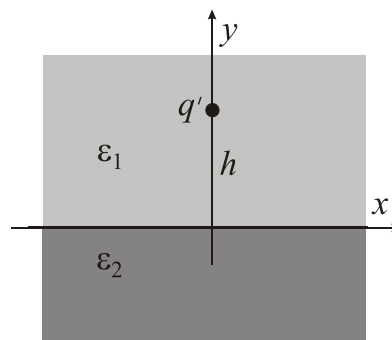
$$\delta[\%] = \frac{|Z_c^{\text{HBEM}} - Z_c^{\text{FEM}}|}{Z_c^{\text{FEM}}} \cdot 100. \quad (4.13)$$

4.2. Провера тачности хибридног метода граничних елемената

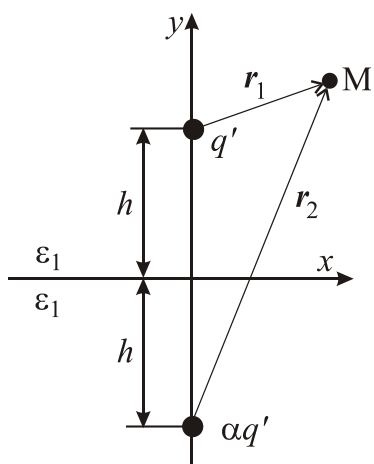
Како би се показало важење описаног метода, анализиран је најједноставнији пример подужног наелектрисања смештеног у средини ε_1 на висини h од раздвојне површине две средине диелектричних константи ε_1 и ε_2 , *Слика 4.5*. За овај проблем постоји аналитичко решење добијено применом модификоване теореме лика, дато у [181], које ће бити приказано у наставку.

4.2.1. Модификована теорема лика

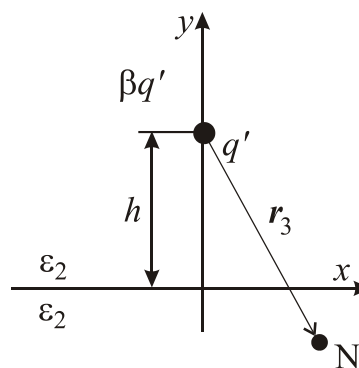
Еквивалентни систем чине примарно оптерећење q' и његов модификовани лик $\alpha q'$, када се проблем анализира у средини 1 (*Слика 4.6*) и $\beta q'$, које се налази на месту примарног оптерећења, за случај анализе проблема у средини 2 (*Слика 4.7*).



Слика 4.5 – Подужно наелектрисање у двослојној средини.



Слика 4.6 – Еквивалентан систем за средину 1.



Слика 4.7 – Еквивалентан систем за средину 2.

Величине α и β се одређују тако да на раздвојној површини буду задовољени гранични услови: $E_{1t} = E_{2t}$ и $D_{1n} = D_{2n}$.

$$E_{1t} = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_1 r} \cos \theta + \frac{\alpha q'}{2\pi\varepsilon_1 r} \cos \theta = \frac{\beta q'}{2\pi\varepsilon_2 r} \cos \theta = E_{2t} \quad \text{и} \quad (4.14)$$

$$D_{1n} = \varepsilon_1 \left(\frac{q'}{2\pi\varepsilon_1 r} \sin \theta - \frac{\alpha q'}{2\pi\varepsilon_1 r} \sin \theta \right) = \varepsilon_2 \frac{\beta q'}{2\pi\varepsilon_2 r} \sin \theta = D_{2n}, \quad (4.15)$$

где је са θ обележен угао који на раздвојној површини заклапају вектори \mathbf{D} и \mathbf{E} са позитивним смером x – осе.

Ова два израза формирају систем једначина са две непознате, чијим се решавањем одређују непознате величине α и β :

$$\alpha = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \text{ и } \beta = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (4.16)$$

Потенцијал у околини подужног наелектрисања је дат изразом:

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_0 - \frac{q'}{2\pi\varepsilon_1} \ln(r_1) - \frac{q'}{2\pi\varepsilon_1} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \ln(r_2), & \text{у средини } \varepsilon_1, \\ \varphi_0 - \frac{q'}{2\pi\varepsilon_2} \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \ln(r_3), & \text{у средини } \varepsilon_2. \end{cases} \quad (4.17)$$

φ_0 је адитивна константа која зависи од избора положаја референтне тачке.

Површинско везано наелектрисање на раздвојној површини два диелектрика је

$$\eta_v = P_{2n} - P_{1n}. \quad (4.18)$$

Вектор поларизације се одређује из израза $\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\mathbf{E}$, при чему су одговарајуће нормалне компоненте дате изразима

$$P_{1n} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)E_{1n}^{(0+)} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)E_y^{(0+)} \text{ и} \quad (4.19)$$

$$P_{2n} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)E_{2n}^{(0-)} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)E_y^{(0-)}. \quad (4.20)$$

Заменом израза за $E_y^{(0+)}$ и $E_y^{(0-)}$ који се добијају из $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = E_x \hat{x} + E_y \hat{y}$, при чему је електрични скалар потенцијал дефинисан изразом (4.17), нормалне компоненте вектора поларизације су

$$P_{1n} = -\frac{\varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{hq'}{\pi(x^2 + h^2)}, \quad (4.21)$$

$$P_{2n} = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{hq'}{\pi\varepsilon_1(x^2 + h^2)}. \quad (4.22)$$

Заменом у израз (4.18) добија се

$$\eta_v = P_{2n} - P_{1n} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{hq'}{\pi(x^2 + h^2)}. \quad (4.23)$$

На основу добијеног израза можемо да проверимо да ли, за конкретан пример са *Слике 4.5*, важи израз (4.8)

$$E_{1n}^{(0+)} = \frac{-\varepsilon_2}{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \eta_v. \quad (4.24)$$

Нормална компонента вектора електричног поља у средини 1 је:

$$E_{1n}^{(0+)} = \frac{q'}{2\pi\varepsilon_1} \left[-\frac{h}{x^2 + h^2} + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{h}{x^2 + h^2} \right] = -\frac{q'h\varepsilon_2}{\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(x^2 + h^2)}. \quad (4.25)$$

Са друге стране, заменом израза (4.23) у (4.24) добија се

$$E_{1n}^{(0+)} = \frac{-\varepsilon_2}{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \eta_v = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)hq'}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\pi(x^2 + h^2)} = -\frac{q'h\varepsilon_2}{\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(x^2 + h^2)},$$

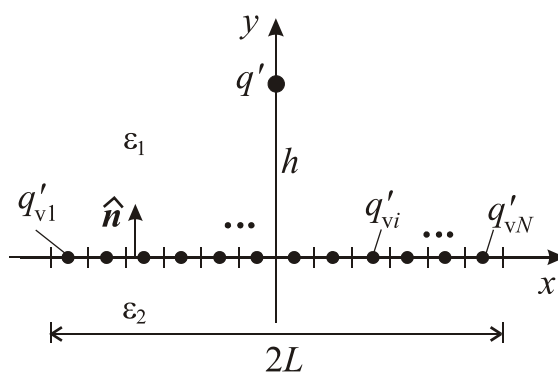
тј. задовољена је релација (4.8).

Нормализована расподела везаног површинског наелектрисања дуж раздвојне површине дата је изразом:

$$\frac{\eta_v h}{q'} = \frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})} \frac{1}{\pi \left[\left(\frac{x}{h} \right)^2 + 1 \right]}. \quad (4.26)$$

4.2.2. Примена хибридног метода граничних елемената

Раздвојна површина два диелектрика ширине $2L$, *Слика 4.8*, сегментира се на N трака, чија је ширина $\Delta l = 2L/N$. Према хибридном методу граничних елемената, сваки од сегмената замењује се еквивалентном електродом, полупречника $a_e = \Delta l/\pi$, смештеном у центар траке и оптерећеном везаним подужним наелектрисањем q'_{vi} ($i = 1, 2, \dots, N$). Наелектрисања која су на раздвојној површини смештена су у вакууму.



Слика 4.8 – Примена хибридног метода граничних елемената.

За формиран систем са слике, потенцијал у произвољној тачки дат је изразом

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{q'}{2\pi\varepsilon_1} \ln \sqrt{x^2 + (y-h)^2} - \sum_{i=1}^N \frac{q'_{vi}}{2\pi\varepsilon_0} \ln \sqrt{(x-x_i)^2 + y^2}, \quad (4.27)$$

где су положаји везаних наелектрисања: $x_i = -L + (2i-1)\Delta l/2$ и $y_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$).

Да би вредности непознатих везаних наелектрисања биле одређене, неопходно је формирати систем линеарних једначина подешавањем у тачкама граничног услова за нормалну компоненту вектора јачине електричног поља, датог изразом (4.8),

$$\hat{n}E_{iy}^{(0+)} = \frac{-\varepsilon_2}{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \eta_{vi}, \quad (4.28)$$

где је са $\eta_{vi} = \frac{q'_{vi}}{\Delta l}$ дата веза између везаног површинског и подужног наелектрисања,

док је орт нормале на раздвојну површину $\hat{n} = \hat{y}$. Заменом у израз (4.28) добија се

$$q'_{vi} = \frac{-\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_2} E_{iy}^{(0+)} \Delta l. \quad (4.29)$$

Подешавање у тачкама на површини i -те еквивалентне електроде се врши узимајући у обзир:

- утицај те електроде, са тачкама подешавања $x_p = x_i$, $y_p = a_e$,
- утицај осталих везаних наелектрисања, са тачкама подешавања $x_p = x_i$, $y_p = 0$,
- утицај примарног оптерећења, са тачкама подешавања $x_p = x_i$, $y_p = 0$.

На тај начин формира се следећи систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned} q'_{v1} &= \frac{-\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_2} \frac{2L}{N} \left[\frac{q'}{2\pi\varepsilon_1} \frac{-h}{x_1^2 + h^2} + \frac{q'_{v1}}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{a_e} + \frac{q'_{v2}}{2\pi\varepsilon_0} 0 + \dots + \frac{q'_{vi}}{2\pi\varepsilon_0} 0 + \dots + \frac{q'_{vN}}{2\pi\varepsilon_0} 0 \right] \\ &\quad \vdots \\ q'_{vi} &= \frac{-\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_2} \frac{2L}{N} \left[\frac{q'}{2\pi\varepsilon_1} \frac{-h}{x_1^2 + h^2} + \frac{q'_{v1}}{2\pi\varepsilon_0} 0 + \frac{q'_{v2}}{2\pi\varepsilon_0} 0 + \dots + \frac{q'_{vi}}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{a_e} + \dots + \frac{q'_{vN}}{2\pi\varepsilon_0} 0 \right] \\ &\quad \vdots \\ q'_{vN} &= \frac{-\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_2} \frac{2L}{N} \left[\frac{q'}{2\pi\varepsilon_1} \frac{-h}{x_1^2 + h^2} + \frac{q'_{v1}}{2\pi\varepsilon_0} 0 + \frac{q'_{v2}}{2\pi\varepsilon_0} 0 + \dots + \frac{q'_{vi}}{2\pi\varepsilon_0} 0 + \dots + \frac{q'_{vN}}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{a_e} \right] \end{aligned}$$

тј.

$$\begin{aligned} q'_{v1} \left(1 + \frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r2}} \frac{L}{\pi N a_e} \right) &= \frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} \varepsilon_{r2}} \frac{Lh}{N\pi(x_1^2 + h^2)} q' \\ &\quad \vdots \\ q'_{vi} \left(1 + \frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r2}} \frac{L}{\pi N a_e} \right) &= \frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} \varepsilon_{r2}} \frac{Lh}{N\pi(x_i^2 + h^2)} q' \\ &\quad \vdots \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$q'_{vN} \left(1 + \frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r2}} \frac{L}{\pi N a_e} \right) = \frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} \varepsilon_{r2}} \frac{Lh}{N\pi(x_N^2 + h^2)} q'.$$

Уколико се уведе нормализација $\frac{q'_{vi}}{q'}$ и $\frac{x_i}{h}$, систем једначина (4.30) може се написати у општем облику

$$\frac{q'_{vi}}{q'} \left(1 + \frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r2}} \frac{\frac{L}{h}}{\pi N \frac{a_e}{h}} \right) = \frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} \varepsilon_{r2}} \frac{\frac{L}{h}}{N\pi[1 + (x_i/h)^2]}, \quad i=1,2,\dots,N, \quad (4.31)$$

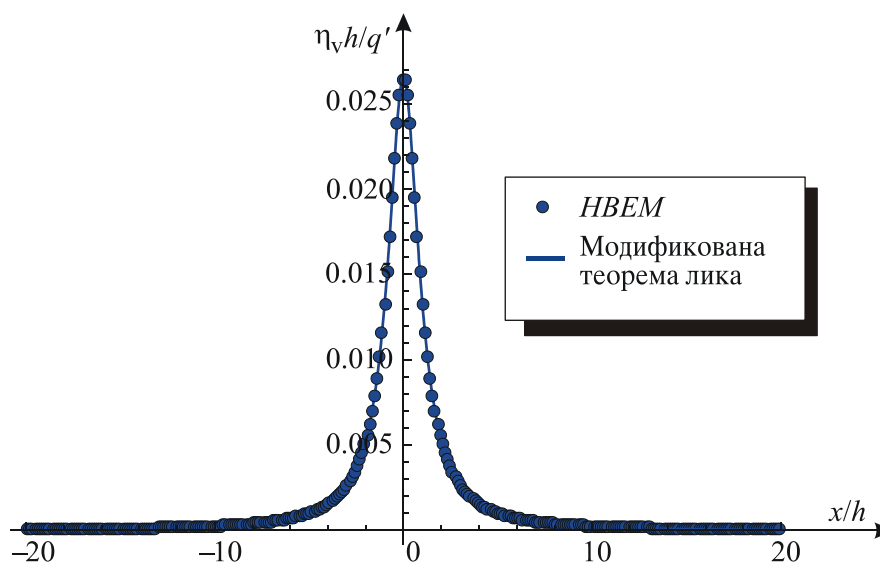
где је $a_e = \frac{\Delta l}{\pi} = \frac{2L}{\pi N}$, чијом се сменом у (4.31) добија

$$\frac{q'_{vi}}{q'} = \frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})} \frac{2L/h}{N\pi[1 + (x_i/h)^2]}. \quad (4.32)$$

Решавањем система једначина одређене су вредности везаног подужног наелектрисања, па је могуће одредити расподелу везаног површинског наелектрисања дуж раздвојне површине:

$$\frac{\eta_{vi}h}{q'} = \frac{q'_{vi}}{\Delta l} \frac{h}{q'} = \frac{N}{2L/h} \frac{q'_{vi}}{q'}, \quad i=1,2,\dots,N. \quad (4.33)$$

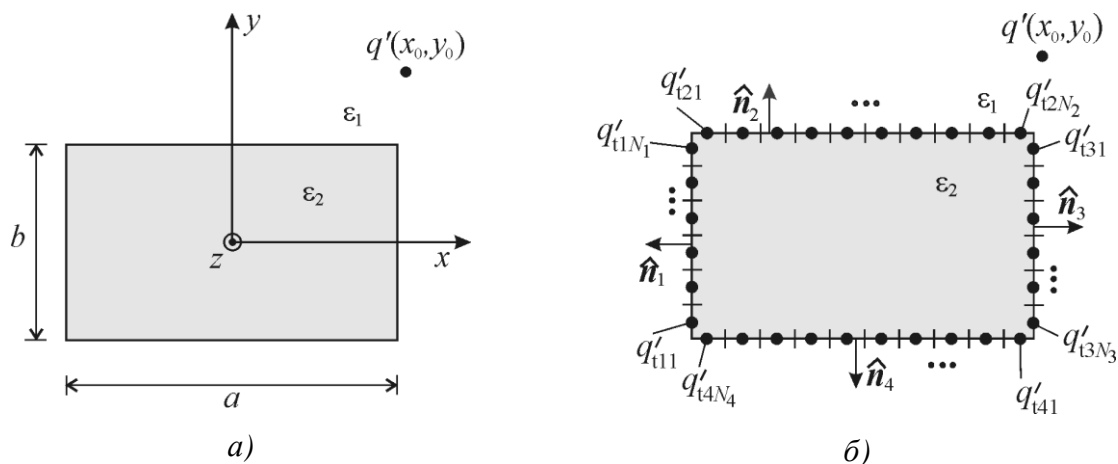
Ова расподела приказана је на Слици 4.9, на којој је дата и расподела одређена применом модификоване теореме лика, (4.26). Димензије и параметри система су: $\varepsilon_{r1} = 6$, $\varepsilon_{r2} = 2$, $L/h = 20$ и $N = 300$. Запажа се изузетно поклапање резултата.



Слика 4.9 – Нормализована расподела везаног површинског оптерећења дуж раздвојне површине.

4.2.3. Подужно наелектрисање у двослојној средини

Као уводна илустрација примене хибридног метода граничних елемената за анализу вишеслојних структура и микроталасних водова, посматраћемо подужно наелектрисање q' у средини 1 постављено у близини средине 2 правоугаоног попречног пресека, *Слика 4.10а*, [158].



Слика 4.10 – Подужно наелектрисање у вишеслојној средини (а) и одговарајући модел (б).

Примењујући хибридни метод граничних елемената и процедуру описану у Поглављу 4.1, раздвојна површина између две средине диелектричних константи ϵ_1 и ϵ_2 сегментира се на траке и свака од њих замењује еквивалентним електродама тј. дискретним еквивалентним тоталним подужним наелектрисањима, која се постављају по средини траке, *Слика 4.10б*. Ова наелектрисања се, према хибридном методу граничних елемената налазе у вакууму. Индекс "t" уз ознаке наелектрисања еквивалентних електрода је скраћеница од енглеске речи "total".

Еквивалентни систем чине подужно наелектрисање q' и еквивалентне електроде (дискретна тотална подужна наелектрисања).

Расподела потенцијала и јачине електричног поља биће одређена за формирану систем са *Слике 4.10б*. Потенцијал у произвољној тачки $M(x, y)$ дат је изразом:

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{q'}{2\pi\epsilon_1} \ln \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} - \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^{N_i} \frac{q'_{tik}}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{(x-x_{tik})^2 + (y-y_{tik})^2}, \quad (4.34)$$

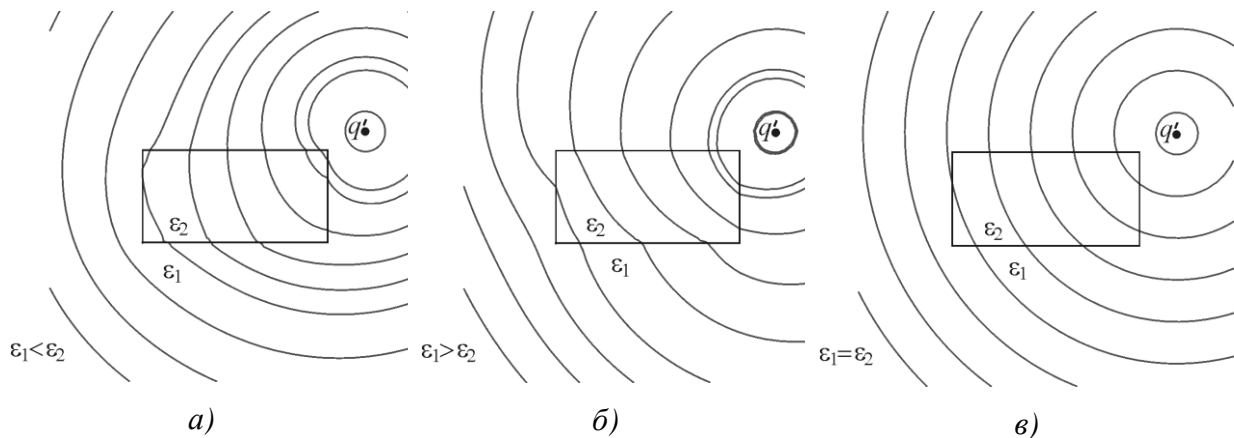
где су:

- N_i – број еквивалентних електрода, оптерећених тоталним (везаним) подужним наелектрисањима q'_{tik} на i -тој раздвојној површини између слојева ϵ_1 и ϵ_2 ,
- (x_0, y_0) – координате подужног наелектрисања q' ,
- (x_{tik}, y_{tik}) – позиције еквивалентних електрода ($i=1, \dots, 4, k=1, \dots, N_i$),
- φ_0 – непозната адитивна константа која зависи од избора положаја референтне тачке нултог потенцијала.

Користећи метод подешавања у тачкама за нормалну компоненту вектора јачине електричног поља, дат изразом (4.8), формиран је систем линеарних једначина, чија су решења непозната тотална подужна наелектрисања на раздвојној површини. Адитивна константа φ_0 биће одређена из услова да је потенцијал једнак нули за $x=0$ и $y=0$.

Након одређивања непознатих вредности, могуће је одредити и расподелу потенцијала. Еквипотенцијале су приказане на *Слици 4.11* за параметре система: $b/a=0.5$, $x_0/a=0.7$ и $y_0/a=0.35$ и различите вредности релативних диелектричних константи:

- $\epsilon_{r1}=1, \epsilon_{r2}=3$;
- $\epsilon_{r1}=10, \epsilon_{r2}=3$;
- $\epsilon_{r1}=2, \epsilon_{r2}=2$.



Слика 4.11 – Еквипотенцијале добијене за различите вредности релативних диелектричних константи ϵ_{r1} и ϵ_{r2} .

Са *Слике 4.11* уочава се утицај слоја диелектрика правоугаоног попречног пресека на расподелу потенцијала у околини подужног наелектрисања q' смештеног у средини диелектричне константе ϵ_1 .

5

Водови кружног и правоугаоног попречног пресека

Радио комуникација између локомотиве и диспечера, за случај када се воз налази у тунелу или прелази преко затвореног челичног моста, може да се оствари коришћењем сета усмерених антена на крају тунела или коаксијалних водова са прорезом који су постављени кроз тунел или дуж моста. Као што је наведено у Уводу, вод правоугаоног попречног пресека представља прелазни облик од коаксијалног вода кружног попречног пресека ка тракастим водовима. Коаксијални водови, као и оклопљени водови са правоугаоним прорезаним оклопом главна су тема многобројних истраживања, [75], [132], [134], [135], [182]-[186].

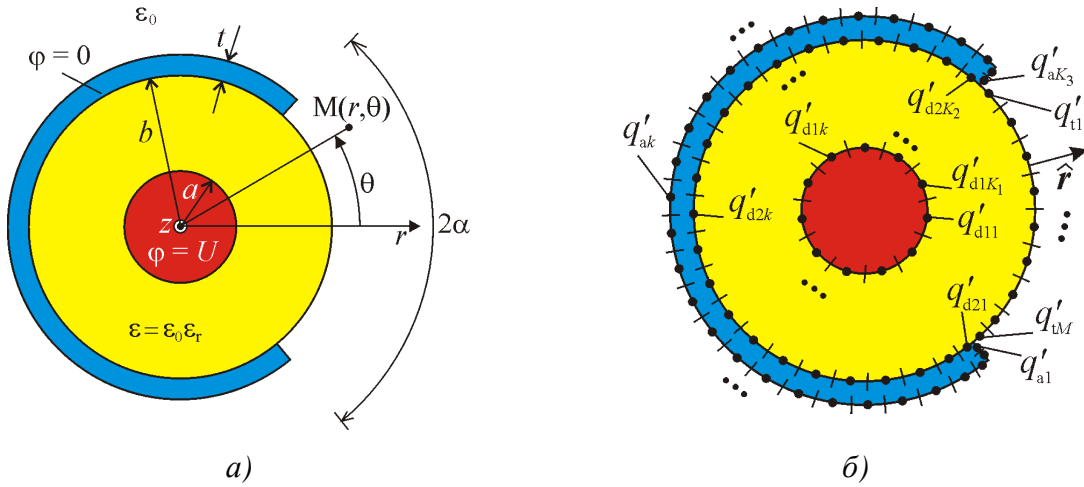
Метод еквивалентне електроде показао се као веома успешан у тој анализи, док ће у овом поглављу за анализу различитих конфигурација водова кружног и правоугаоног попречног пресека бити примењен хибридни метод граничних елемената.

5.1. Коаксијални вод са аксијалним прорезом

Геометрија коаксијалног вода са аксијалним прорезом и одговарајући *НВЕМ* модел приказани су на *Слици 5.1а*, [156].

Примењујући процедуру која је дата у Поглављу 4, проводници вода, као и раздвојна површина између две средине диелектричних константи ϵ_0 и ϵ , деле се на траке (сегменте) и свака од њих замењује одговарајућим еквивалентним електродама тј. слободним подужним наелектрисањима на проводницима и дискретним еквивалентним тоталним подужним наелектрисањима која се постављају дуж осе сваке траке, *Слика 5.1б*. Еквивалентна тотална подужна наелектрисања на раздвојној површини две

средине су везана наелектрисања, јер слободна наелектрисања постоје само на проводницима вода. Ова везана наелектрисања се, према *НВЕМ*-у, налазе у вакууму.



Слика 5.1 – Коаксијални вод са аксијалним прорезом (а) и одговарајући модел (б).

Електрични скалар потенцијал у било којој тачки еквивалентног система са Сlike 5.1б, дат је изразом (5.1):

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_0 - \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{K_i} \frac{q'_{dik}}{2\pi\epsilon} \ln \sqrt{r^2 + r_{dik}^2 - 2rr_{dik} \cos(\theta - \theta_{dik})} - \\ - \sum_{k=1}^{K_3} \frac{q'_{ak}}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{r^2 + r_{ak}^2 - 2rr_{ak} \cos(\theta - \theta_{ak})} - \\ - \sum_{m=1}^M \frac{q'_{tm}}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{r^2 + r_{tm}^2 - 2rr_{tm} \cos(\theta - \theta_{tm})}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где су:

- Индекси "d", "a" и "t" уз ознаке наелектрисања еквивалентних електрода су скраћенице од енглеских речи "dielectric", "air" и "total", респективно.
- K_i је број еквивалентних електрода на i -тој површини ($i = 1, 2$) са слободним наелектрисањима q'_{dik} , која су смештена у диелектрику,
- K_3 је број еквивалентних електрода на спољашњој површини са слободним наелектрисањима q'_{ak} , која су смештена у вакууму,
- M је број еквивалентних електрода на раздвојној површини диелектрик-вакуум, са везаним наелектрисањима q'_{tm} , смештених у вакууму,
- $(r_{dik}, \theta_{dik}), (r_{ak}, \theta_{ak}), (r_{tm}, \theta_{tm})$ су одговарајуће позиције еквивалентних електрода,

- φ_0 је непозната адитивна константа која се одређује из услова електричне неутралности читавог система.

Електрично поље одређено је коришћењем везе $\mathbf{E} = -\text{grad}(\varphi)$.

Веза између нормалне компоненте електричног поља и тоталног површинског наелектрисања, η_{tm} ($m=1, \dots, M$), дата је изразом (4.8), који за разматран пример има облик:

$$\hat{\mathbf{n}}_m \cdot \mathbf{E}_m^{(0+)} = \frac{-\varepsilon_r}{\varepsilon_0(1-\varepsilon_r)} \eta_{tm}, \quad \eta_{tm} = \frac{q'_{tm}}{\Delta l_m}, \quad m=1, \dots, M, \quad (5.2)$$

где је $\hat{\mathbf{n}}_m = \hat{\mathbf{r}}$ јединични вектор нормале оријентисан од средине ε ка средини ε_0 , Слика 5.1б, а Δl_m је ширина траке m -тог сегмента.

Полупречници еквивалентних електрода на проводницима (Прилози I и II) су:

$$a_{edik} = \begin{cases} a \sin(\Delta\theta_{dik}/4), & i=1, k=1, \dots, K_1, \\ b \sin(\Delta\theta_{dik}/4), & i=2, k=1, \dots, K_2, \end{cases}$$

$$a_{eak} = \begin{cases} (b+t) \sin(\Delta\theta_{ak}/4), & \text{за овалну љуску,} \\ \Delta l_{ak}/4, & \text{за тракасту љуску,} \end{cases}$$

при чему је $k=1, \dots, K_3$.

Са $\Delta\theta_{dik}$ и $\Delta\theta_{ak}$ обележени су угаони отвори овалних љуски на које се сегментирају раздвојне површине две средине, док је Δl_{ak} ширина тракасте љуске на раздвојној површини метална електрода-вакуум.

За нормалну компоненту вектора јачине електричног поља на раздвојној површини, тачке подешавања су:

$$r_{tn} = b + \delta_{nm} a_{etm} \quad \text{и} \quad \theta_{tn} = \theta_{tm},$$

где су $n=1, \dots, M$, $m=1, \dots, M$, а δ_{nm} Кронекерова делта функција (4.9), док је полупречник еквивалентних електрода на раздвојној површини две диелектричне средине одређен као (Прилог III)

$$a_{etm} = \frac{4b}{\pi} \sin\left(\frac{\Delta\theta_{tm}}{4}\right).$$

Са $\Delta\theta_{tm}$ обележен је угаони отвор траке сегментираних раздвојних површина две диелектричне средине.

Коришћењем метода подешавања у тачкама за потенцијал на проводницима вода,

(5.1), и подешавањем нормалне компоненте вектора електричног поља на раздвојној површини слојева диелектрика, (5.2), као и задовољавањем услова електричне неутралности вода

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{K_i} q'_{dik} + \sum_{k=1}^{K_3} q'_{ak} = 0, \quad (5.3)$$

могуће је одредити непозната слободна наелектрисања на проводницима вода, везана наелектрисања на раздвојној површини диелектрика и адитивну константу φ_0 . Укупан

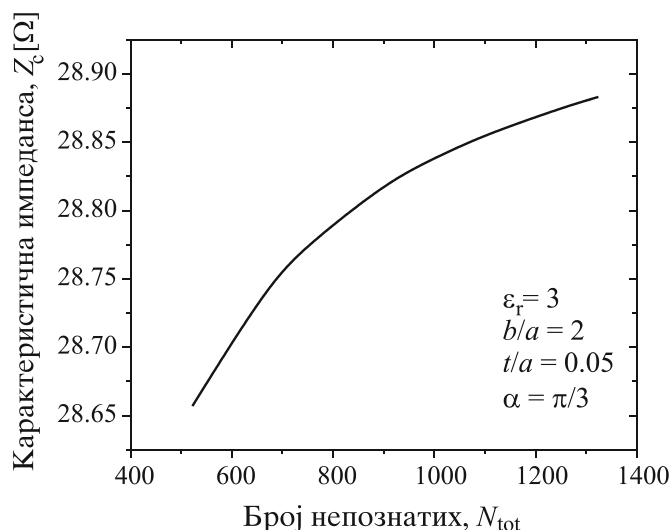
број непознатих величина је $N_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^3 K_i + M + 1$.

Карактеристични параметри вода: ефективна релативна диелектрична константа и карактеристична импеданса, одређују се применом израза (2.41) и (2.42). Конвергенција резултата за ефективну релативну диелектричну константу и карактеристичну импедансу, као и време израчунавања могу да се анализирају из Табеле 5.1 и са Сlike 5.2, за параметре вода: $\epsilon_r = 3$, $b/a = 2$, $t/a = 0.05$ и $\alpha = \pi/3$ rad, где је N_{tot} укупан број непознатих. Добијени резултати приказују добру конвергенцију резултата за кратко време израчунавања.

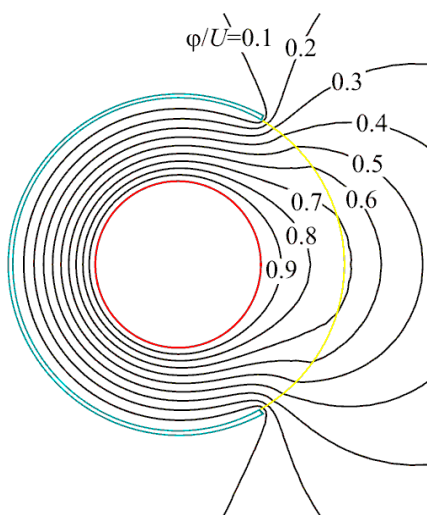
Табела 5.1 - Конвергенција резултата и време израчунавања.

N_{tot}	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	t (s)
522	2.8502	28.657	11.7
667	2.8431	28.743	19.2
740	2.8409	28.772	23.6
887	2.8376	28.815	33.8
960	2.8365	28.831	39.9
1033	2.8356	28.844	46.1
1106	2.8348	28.856	53.0
1251	2.8335	28.875	67.8
1324	2.8330	28.883	76.8

Са друге стране, симулацијом идентичног проблема у програмском пакету *FEMM*, за карактеристичну импедансу добијена је вредност $Z_c = 28.965 \Omega$, при чему време израчунавања износи око седам минута када је формирана мрежа од неколико стотина хиљада коначних елемената, што је много дуже у односу на време потребно за примену хибридног метода граничних елемената.

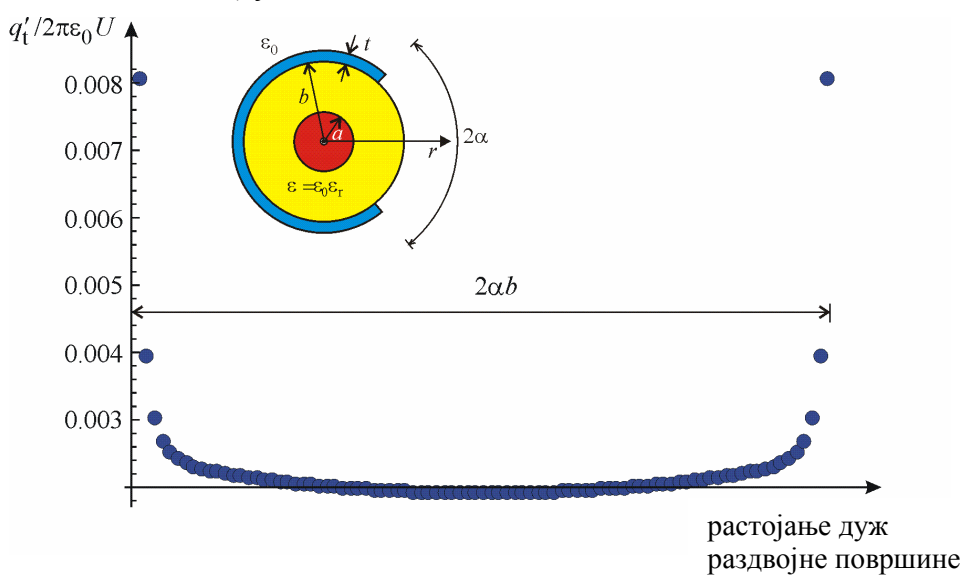


Слика 5.2 – Конвергенција резултата за карактеристичну импедансу.



Еквипотенцијале и расподела везаног подужног наелектрисања дуж раздвојне површине два диелектрика приказани су на Сликама 5.3 и 5.4, респективно, за следеће параметре вода: $\epsilon_r = 3$, $b/a = 2$, $t/a = 0.05$ и $\alpha = \pi/3$ rad.

Слика 5.3 – Еквипотенцијале.



Слика 5.4 – Нормализована расподела везаног подужног наелектрисања дуж раздвојне површине два диелектрика.

Са циљем да се анализира утицај параметара коаксијалног вода са аксијалним про-резом на његову ефективну релативну диелектричну константу и карактеристичну им-педансу, извршена је анализа за различите вредности параметара и резултати су прика-зани у Табелама 5.2 и 5.3.

Како би се добијени резултати верификовали, идентичан коаксијални вод симулиран је коришћењем [56] и остварено је веома добро слагање резултата. Релативна грешка резултата је, као што се види из приложених табела, мања од 0.5 %.

Сви резултати приказани графички и у табелама дати су када је број непознатих око 1100.

Табела 5.2 – Промена карактеристичне импедансе коаксијалног вода са аксијалним прорезом за различите вредности параметара t/a и α , када је $\epsilon_r = 3$ и $b/a = 2$.

$\frac{t}{a}$	α	HBEM		FEMM		δ [%]
		ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	
0.02	$\pi/6$	2.9476	25.263	2.9386	25.344	0.32
	$\pi/3$	2.8466	28.892	2.8271	29.024	0.45
	$\pi/2$	2.7335	35.065	2.7100	35.242	0.50
	$2\pi/3$	2.5962	45.909	2.5790	46.073	0.36
0.04	$\pi/6$	2.9432	25.240	2.9380	25.325	0.33
	$\pi/3$	2.8375	28.868	2.8257	28.986	0.41
	$\pi/2$	2.7221	35.022	2.7076	35.172	0.43
	$2\pi/3$	2.5867	45.770	2.5751	45.930	0.35
0.06	$\pi/6$	2.9410	25.228	2.9376	25.312	0.33
	$\pi/3$	2.8323	28.851	2.8245	28.955	0.36
	$\pi/2$	2.7141	35.000	2.7056	35.111	0.32
	$2\pi/3$	2.5780	45.693	2.5719	45.805	0.24
0.08	$\pi/6$	2.9397	25.222	2.9372	25.301	0.31
	$\pi/3$	2.8294	28.826	2.8236	28.927	0.35
	$\pi/2$	2.7106	34.943	2.7037	35.057	0.32
	$2\pi/3$	2.5734	45.581	2.5689	45.692	0.24
0.10	$\pi/6$	2.9390	25.207	2.9370	25.291	0.33
	$\pi/3$	2.8271	28.808	2.8226	28.902	0.32
	$\pi/2$	2.7072	34.905	2.7021	35.008	0.29
	$2\pi/3$	2.5692	45.492	2.5662	45.589	0.21

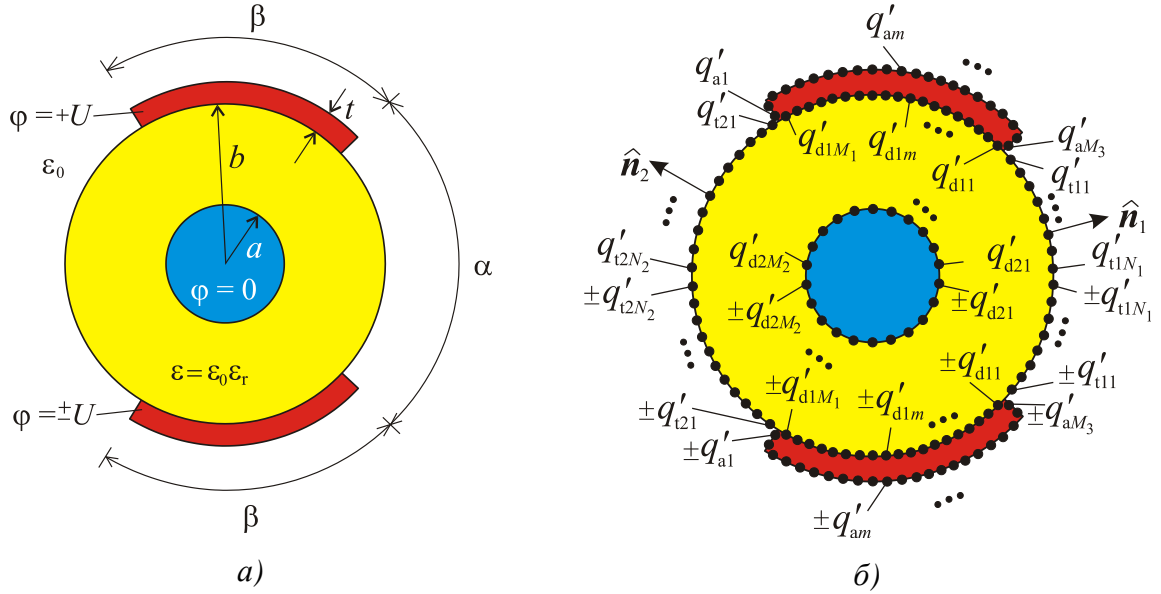
Табела 5.3 – Промена карактеристичне импедансе коаксијалног вода са аксијалним прорезом за различите вредности параметара α и b/a , када је $\epsilon_r = 3$ и $t/a = 0.05$.

α	$\frac{b}{a}$	HBEM		FEMM		δ [%]
		ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	
$\frac{\pi}{6}$	1.2	2.9234	7.050	2.9179	7.090	0.56
	1.6	2.9277	17.406	2.9236	17.481	0.43
	2.0	2.9411	25.246	2.9377	25.318	0.28
	2.4	2.9508	31.601	2.9475	31.672	0.22
	2.8	2.9572	36.957	2.9536	37.032	0.20
	3.2	2.9618	41.588	2.9581	41.667	0.19
$\frac{\pi}{3}$	1.2	2.8685	8.563	2.8589	8.606	0.50
	1.6	2.8287	20.376	2.8191	20.477	0.49
	2.0	2.8348	28.856	2.8251	28.969	0.39
	2.4	2.8467	35.541	2.8370	35.663	0.34
	2.8	2.8587	41.075	2.8484	41.214	0.33
	3.2	2.8688	45.819	2.8579	45.971	0.33
$\frac{\pi}{2}$	1.2	2.8108	10.976	2.7995	11.068	0.56
	1.6	2.7290	25.295	2.7181	25.410	0.45
	2.0	2.7182	35.003	2.7065	35.141	0.39
	2.4	2.7233	42.400	2.7117	42.547	0.34
	2.8	2.7342	48.370	2.7213	48.549	0.37
	3.2	2.7456	53.401	2.7315	53.607	0.38
$\frac{2\pi}{3}$	1.2	2.7299	15.553	2.7172	15.646	0.59
	1.6	2.6072	34.047	2.5993	34.151	0.30
	2.0	2.5807	45.757	2.5743	45.858	0.22
	2.4	2.5794	54.279	2.5716	54.407	0.23
	2.8	2.5863	60.978	2.5779	61.125	0.24
	3.2	2.5964	66.490	2.5870	66.666	0.26

5.2. Симетрично спрегнут прорезани вод

У претходном примеру, анализиран је коаксијални вод са аксијалним прорезом. Случај симетрично спрегнутог прорезаног вода биће анализиран у наставку, [153]. Геометријски приказ попречног пресека овог вода и њему одговарајући *HBEM* модел дат је на *Слици 5.5*. Биће анализирана два режима – парни и непарни.

Укупно (тотално) наелектрисање између слојева диелектрика је једнако везаном површинском наелектрисању, јер слободна наелектрисања на раздвојној површини за овај случај не постоје (слободна наелектрисања постоје само на површини проводника вода).



Слика 5.5 – Симетрично спрегнут прорезани вод (а) и одговарајући модел (б).

Електрични скалар потенцијал у било којој тачки система са Сликe 5.5б, дат је изразом:

$$\begin{aligned}
 \varphi^{(e,o)} = \varphi_0^{(e,o)} - \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^{M_i} \frac{q'_{dim}}{2\pi\epsilon} \left[\ln \sqrt{r^2 + r_{dim}^2 - 2rr_{dim} \cos(\theta - \theta_{dim})} \pm \right. \\
 \left. \pm \ln \sqrt{r^2 + r_{dim}^2 - 2rr_{dim} \cos(\theta + \theta_{dim})} \right] - \\
 - \sum_{m=1}^{M_3} \frac{q'_{am}}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[\sqrt{r^2 + r_{am}^2 - 2rr_{am} \cos(\theta - \theta_{am})} \pm \ln \sqrt{r^2 + r_{am}^2 - 2rr_{am} \cos(\theta + \theta_{am})} \right] - \\
 - \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{N_i} \frac{q'_{tin}}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln \sqrt{r^2 + r_{tin}^2 - 2rr_{tin} \cos(\theta - \theta_{tin})} \pm \ln \sqrt{r^2 + r_{tin}^2 - 2rr_{tin} \cos(\theta + \theta_{tin})} \right],
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

док је електрично поље одређено коришћењем везе $\mathbf{E} = -\text{grad}(\varphi)$.

- Индекси "d", "a" и "t" уз ознаке наелектрисања еквивалентних електрода су скраћенице од енглеских речи "dielectric", "air" и "total", респективно.
- M_i је број еквивалентних електрода на i -тој површини са слободним наелектрисањима q'_{dim} , која су смештена у диелектрику ($i = 1, 2$), и са слободним наелектрисањима q'_{am} ($m = 1, \dots, M_3$), која су смештена у вакууму,
- N_i ($i = 1, 2$) је број еквивалентних електрода на раздвојној површини диелектрик-вакуум, смештених у вакууму и оптерећених везаним наелектрисањима q'_{tin} ,

- $(r_{dim}, \theta_{dim}), (r_{am}, \theta_{am}), (r_{tin}, \theta_{tin})$ су одговарајуће позиције еквивалентних електрода,
- $\varphi_0^{(e,o)}$ је адитивна константа одређена из услова електричне неутралности читавог система.

$$\text{Укупан број непознатих је } N_{tot} = \sum_{i=1}^3 M_i + \sum_{i=1}^2 N_i + 1.$$

Веза између нормалне компоненте електричног поља и тоталног површинског наелектрисања дата је изразом (5.2), док су полупречници еквивалентних електрода којима се замењују формирану сегменти идентични онима из претходног примера.

Подешавајући потенцијал на проводницима вода, (5.4), на вредност $+U$ и $\pm U$ (за случај парног и непарног режима на воду, респективно) и подешавањем нормалне компоненте електричног поља на раздвојној површини слојева диелектрика, (5.2), као и задовољавањем услова електричне неутралности система, (4.10), могуће је одредити непозната слободна подужна наелектрисања на проводницима вода, везана наелектрисања на раздвојној површини диелектрика и вредност адитивне константе φ_0 .

Након решавања система линеарних једначина, подужна капацитивност симетрично спрегнутог прорезаног вода одређује се из израза:

$$C'^{(e,o)} = \frac{1}{U} \left(\sum_{m=1}^{M_1} q'_{dim} + \sum_{m=1}^{M_3} q'_{am} \right). \quad (5.5)$$

Када је израчуната подужна капацитивност, карактеристична импеданса се одређује као $Z_c^{(e,o)} = Z_{c0}^{(e,o)} / \sqrt{\epsilon_r^{\text{eff}(e,o)}}$, где је $\epsilon_r^{\text{eff}(e,o)} = C'^{(e,o)} / C_0'^{(e,o)}$ ефективна релативна диелектрична константа, док је $Z_{c0}^{(e,o)}$ карактеристична импеданса симетрично спрегнутог прорезаног вода без слоја диелектрика (диелектрик је вакуум), за паран (скраћеница "е" потиче од енглеске речи "even") и непаран (скраћеница "о" потиче од енглеске речи "odd") режим, респективно.

Поређење резултата за ефективну релативну диелектричну константу и карактеристичну импедансу за различите вредности параметра t/a за: $\epsilon_r = 2.2$, $\alpha = \pi/2$ рад, $\beta = \pi/2$ рад и $b/a = e$, у случају парног и непарног режима на воду, приказано је у Табели 5.4. Упоредени су резултати добијени применом *HVEM*-а и програмског пакета *FEMM*. Дата је и релативна грешка резултата за карактеристичну импедансу за паран и непаран режим. Резултати су приказани када је број непознатих око 800.

Може се закључити да се резултати веома добро слажу, имајући у виду да је релативна грешка, дата изразом (4.13), мања од 0.5 %.

Табела 5.4 – Поређење вредности за карактеристичну импедансу и ефективну релативну диелектричну константу симетрично спрегнутог прорезаног вода са променом односа t/a .

$\frac{t}{a}$	Паран режим					Непаран режим				
	HBEM		FEMM		δ [%]	HBEM		FEMM		δ [%]
	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]		ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	
0.01	2.104	96.577	2.087	96.980	0.41	1.680	63.304	1.671	63.445	0.22
0.02	2.099	96.496	2.087	96.883	0.40	1.672	63.159	1.668	63.245	0.14
0.03	2.094	96.477	2.086	96.797	0.33	1.665	63.051	1.666	63.059	0.01
0.04	2.093	96.355	2.086	96.717	0.37	1.661	62.876	1.664	62.883	0.01
0.05	2.091	96.327	2.086	96.641	0.32	1.658	62.700	1.662	62.711	0.02
0.08	2.088	96.194	2.085	96.450	0.26	1.650	62.243	1.657	62.244	0.01
0.10	2.086	96.099	2.085	96.337	0.25	1.646	61.946	1.653	61.953	0.01

У Табели 5.5 приказани су резултати за карактеристичне параметре вода добијени применом HBEM-а и програмског пакета FEMM, за различите вредности параметара α и β када је: $\epsilon_r = 2.2$, $t/a = 0.05$ и $b/a = e$, за паран и непаран режим.

Сви резултати добијени применом HBEM-а одређени су када је укупан број непознатих наелектрисања $N_{\text{tot}} = 800$. Из ових табела може се уочити веома добро слагање резултата добијених применом HBEM-а и FEMM-а. Релативна грешка резултата је мања од 0.5 %. Карактеристична импеданса има минималну вредност (паран режим) и максималну вредност (непаран режим) за услов да је $\alpha + \beta = \pi \text{ rad}$ (Табела 5.5).

Нормализоване расподеле везаног подужног наелектрисања на раздвојној површини диелектрика, када су параметри вода: $\epsilon_r = 2.2$, $\alpha = \pi/3 \text{ rad}$, $\beta = \pi/2 \text{ rad}$, $b/a = e$ и $t/a = 0.05$, за паран и непаран режим на воду, приказане су на Слицима 5.6 и 5.7, респективно.

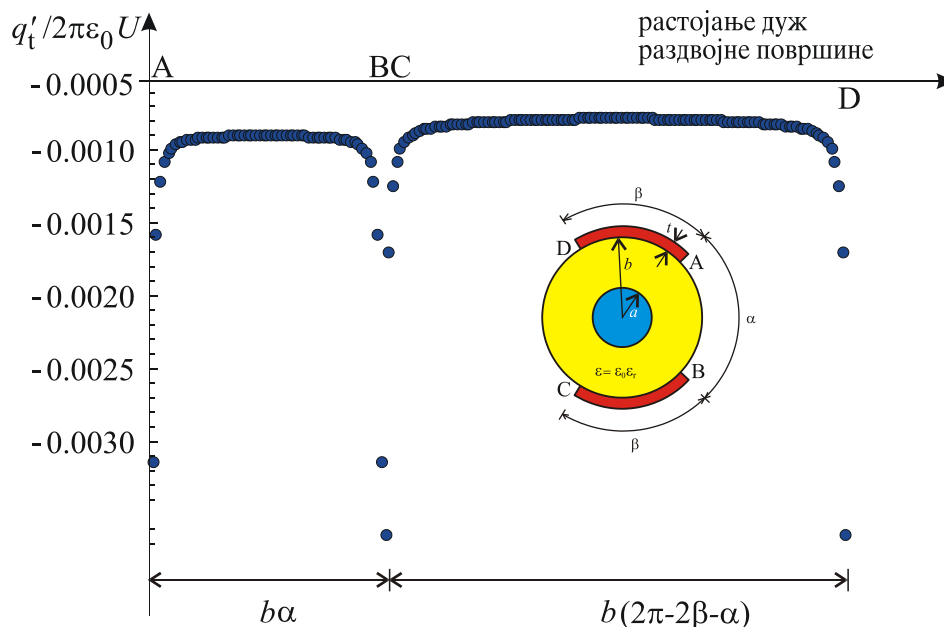
Еквипотенцијале за оба режима за следеће параметре вода:

$$\epsilon_r = 2.2, \alpha = \pi/3 \text{ rad}, \beta = \pi/2 \text{ rad}, b/a = e \text{ и } t/a = 0.05$$

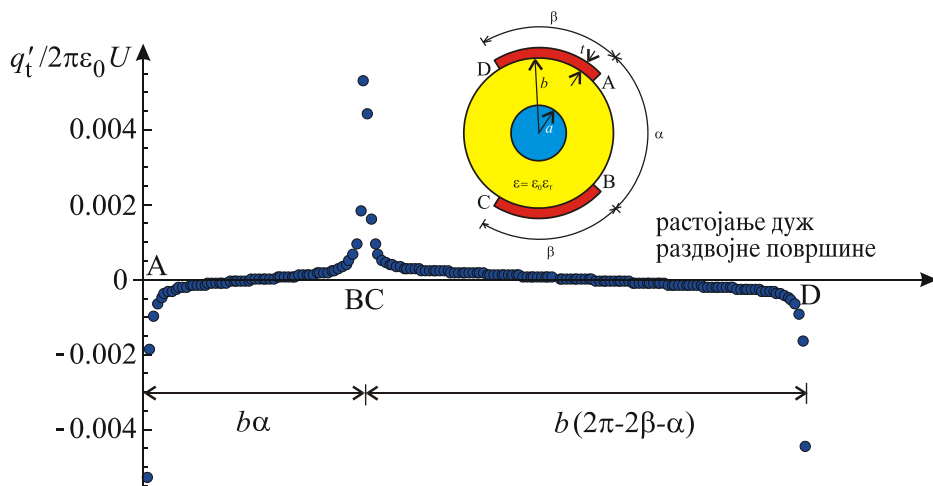
приказане су на Слици 5.8.

Табела 5.5 – Поређење вредности за карактеристичну импедансу и ефективну релативну диелектричну константу симетрично спрегнутог прорезаног вода за различите вредности параметара α и β .

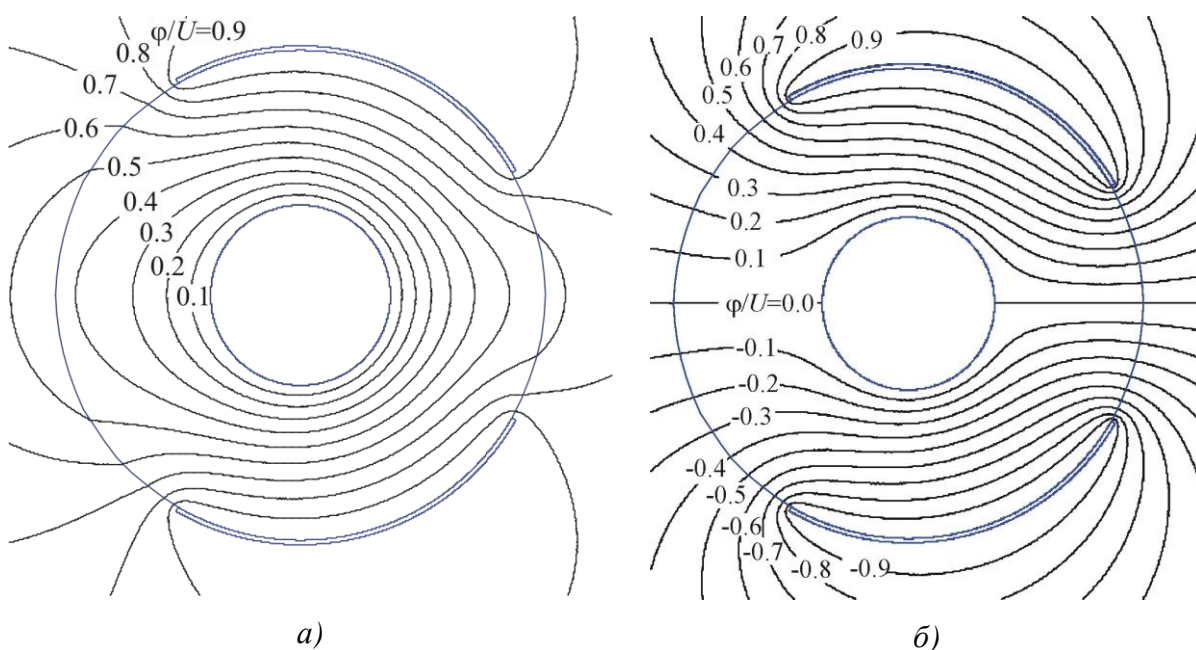
α	β	Паран режим				δ [%]	Непаран режим				δ [%]
		НВЕМ		FEMM			НВЕМ		FEMM		
		ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]		ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	
$\frac{\pi}{3}$	$\pi/6$	1.901	152.489	1.907	152.543	0.03	1.595	101.382	1.614	100.896	0.48
	$\pi/3$	2.006	116.437	2.003	116.758	0.27	1.631	76.028	1.641	75.871	0.21
	$\pi/2$	2.087	97.474	2.082	97.798	0.33	1.653	61.212	1.657	61.185	0.04
	$2\pi/3$	2.150	87.103	2.146	87.382	0.32	1.657	49.337	1.659	49.331	0.01
$\frac{\pi}{2}$	$\pi/6$	1.904	146.068	1.910	146.117	0.03	1.609	108.203	1.627	107.711	0.46
	$\pi/3$	2.010	113.104	2.007	113.401	0.26	1.643	79.891	1.652	79.753	0.17
	$\pi/2$	2.091	96.327	2.086	96.641	0.32	1.658	62.728	1.662	62.711	0.03
	$2\pi/3$	2.144	88.364	2.139	88.747	0.43	1.647	46.636	1.651	46.634	0.01
$\frac{2\pi}{3}$	$\pi/6$	1.904	143.029	1.910	143.069	0.03	1.617	111.358	1.635	110.864	0.44
	$\pi/3$	2.011	112.115	2.008	112.404	0.26	1.647	80.985	1.656	80.859	0.15
	$\pi/2$	2.087	97.474	2.082	97.798	0.33	1.653	61.212	1.657	61.185	0.04



Слика 5.6 – Нормализована расподела везаног подужног наелектрисања дуж раздвојне површине два диелектрика (паран режим).



Слика 5.7 – Нормализована расподела везаног подужног наелектрисања дуж раздвојне површине два диелектрика (непаран режим).

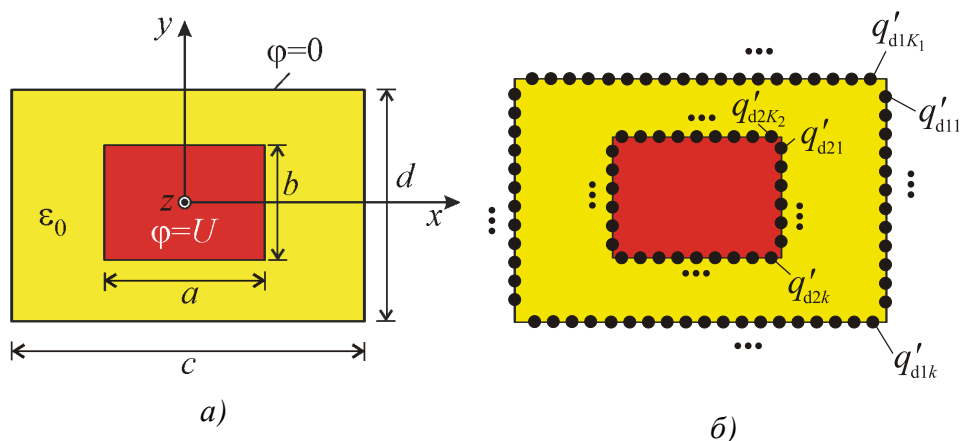


Слика 5.8 – Еквипотенцијале: паран режим (а) и непаран режим (б).

5.3. Ваздушни вод правоугаоног попречног пресека

За анализу ваздушног вода правоугаоног попречног пресека може се применити класични метод еквивалентне електроде (*EEM*), с обзиром да вод не садржи диелектрике различитих диелектричних константи. Ваздушни вод правоугаоног попречног пресека и његов одговарајући *EEM* модел приказани су на Слици 5.9.

Метод еквивалентне електроде примењен је тако што се проводници вода деле на траке и свака од њих замењује еквивалентном електродом, која се поставља по средини формираних трака, Слика 5.9б. Еквивалентне електроде су подужна наелектрисања, а њихов полупречник одређен је у Прилогу I.



Слика 5.9 – Ваздушни вод правоугаоног попречног пресека (а) и одговарајући ЕЕМ модел (б).

За систем са Сликe 5.9б, потенцијал у произвољној тачки $M(x, y)$ дат је изразом:

$$\varphi = \varphi_0 - \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{K_i} \frac{q'_{dik}}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{(x - x_{dik})^2 + (y - y_{dik})^2}, \quad (5.6)$$

где су:

- Индекс "d" уз ознаке наелектрисања еквивалентних електрода је скраћеница од енглеске речи "*dielectric*".
- K_i је број еквивалентних електрода на i -тој површини ($i=1, 2$) са слободним наелектрисањима q'_{dik} , која су смештена у вакууму,
- (x_{dik}, y_{dik}) су позиције еквивалентних електрода ($i=1, 2, k=1, \dots, K_i$),
- φ_0 је непозната адитивна константа која се одређује из услова електричне неутралности читавог система.

Коришћењем метода подешавања у тачкама за потенцијал на проводницима вода, (5.6), и задовољавањем услова електричне неутралности вода, који за разматран пример има облик

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{K_i} q'_{dik} = 0, \quad (5.7)$$

могуће је одредити непозната слободна наелектрисања на проводницима вода и адитивну константу φ_0 , тако што се формира систем линеарних једначина на начин како је то описано у Поглављу 4.

Укупан број непознатих величина је $N_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^2 K_i + 1$.

Применом *EEM*-а, написан је одговарајући код за израчунавање и анализу приказаног вода. Израчунавањем непознатих величина, могуће је одредити његову капацитивност

$$C' = \sum_{k=1}^{K_2} \frac{q'_{dk}}{U}, \quad (5.8)$$

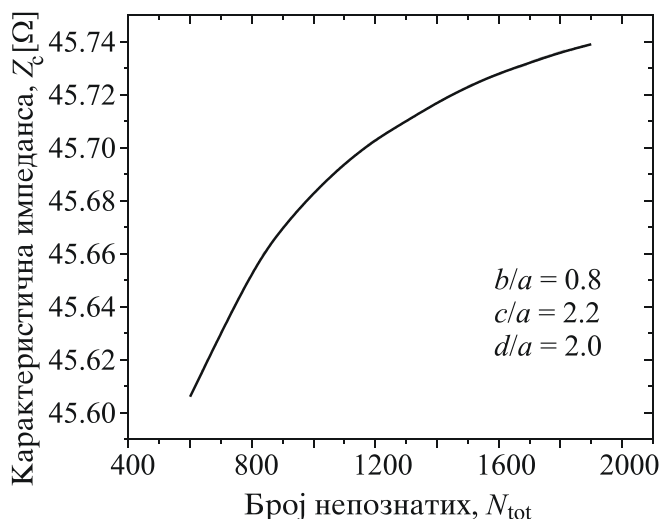
као и остале карактеристичне параметре.

Конвергенција резултата за карактеристичну импедансу и потребно време израчунавања за различит број непознатих приказани су у Табели 5.6 и на Слици 5.10, за: $b/a = 0.8$, $c/a = 2.2$ и $d/a = 2.0$. N_{tot} означава укупан број непознатих.

Остварена је добра конвергенција резултата за кратко време израчунавања.

Табела 5.6 – Конвергенција резултата и време израчунавања.

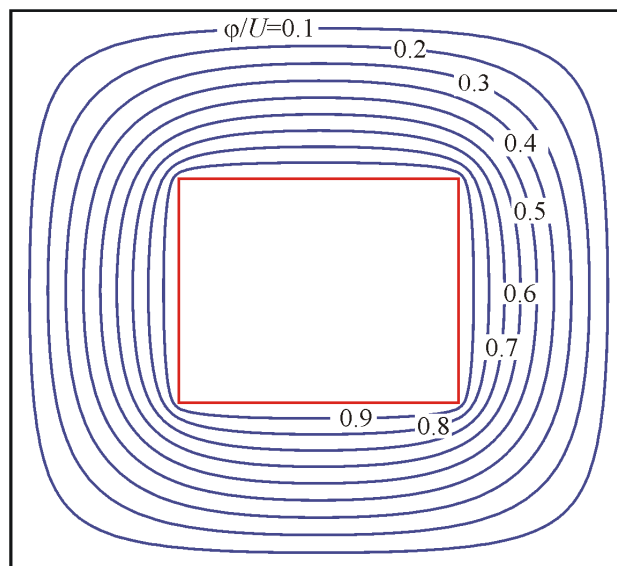
N_{tot}	Z_c [Ω]	t (s)
600	45.606	6.0
800	45.654	10.6
900	45.670	13.3
1000	45.683	16.2
1100	45.694	20.0
1200	45.703	24.0
1300	45.710	28.1
1400	45.717	32.7
1500	45.723	38.3
1600	45.728	43.1
1700	45.732	49.4
1800	45.736	54.9



Слика 5.10 – Конвергенција резултата за карактеристичну импедансу.

Еквипотенцијале су приказане на Слици 5.11 за: $b/a = 0.8$, $c/a = 2.2$ и $d/a = 2.0$.

Са циљем да се провере резултати добијени применом *EEM*-а, у Табели 5.7 извршено је поређење резултата за карактеристичну импедансу добијених од стране других истраживача, применом различитих метода, из којег се може уочити веома добро слагање резултата са оним који је дала примена *EEM*-а.



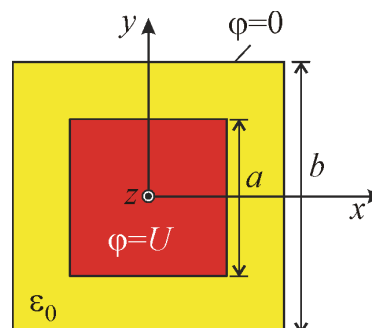
Слика 5.11 – Еквипотенцијале.

Табела 5.7 – Поређење вредности за карактеристичну импедансу за: $b/a = 0.8$, $c/a = 2.2$ и $d/a = 2.0$ добијених применом различитих метода.

Метод	Z_c [Ω]
Chen [26]	45.759
FEMM [56]	45.719
COMSOL [64]	45.700
FDM [178]	46.612
Costamagna & Fanni [182]	45.767
Lau [185]	45.778
Zheng et al. [186]	45.789
FDM [187]	46.538
EEM, $N_{tot} = 1900$	45.739

У случају када је за вод са Сlike 5.9 $a = b$ и $c = d$, добија се ваздушни вод квадратног попречног пресека, Слика 5.12.

У Табели 5.8 извршено је поређење резултата за карактеристичну импедансу са резултатима добијених од стране других истраживача и саопштеним у одговарајућим научним радовима. Из табеле се може уочити веома добро слагање резултата.



Слика 5.12 – Ваздушни вод квадратног попречног пресека.

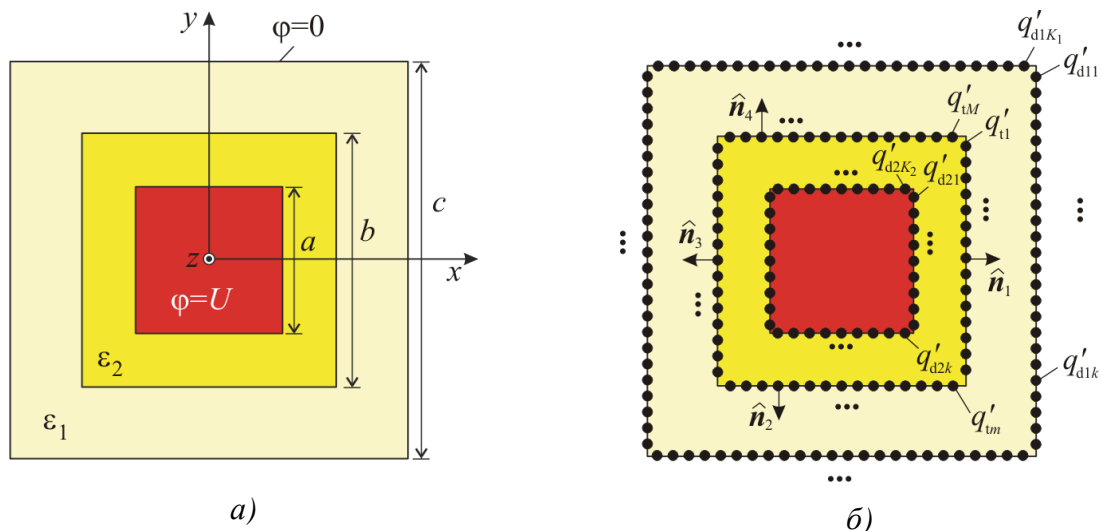
Табела 5.8 – Поређење вредности за карактеристичну импедансу за $b/a = 2.0$

добјених применом различитих метода.

Метод	Z_c [Ω]
<i>FEMM</i> [56]	36.78
<i>COMSOL</i> [64]	36.75
<i>FDM</i> [178]	36.75
Costamagna & Fanni [182]	36.81
Lau [185]	36.81
Zheng et al. [186]	36.79
Cockcroft [188]	36.80
Bowan [189]	36.81
Green [190]	36.58
Ivanov & Djankov [191]	36.97
Riblet [192]	36.80
<i>EEM</i> , $N_{\text{tot}} = 1900$	36.77

5.4. Вод квадратног попречног пресека са двослојним диелектриком

Још један покушај да се провери тачност и примена *НВЕМ*-а учињен је кроз анализу вода попречног пресека облика квадрата са двослојним диелектриком. Геометрија овог вода, као и одговарајући *НВЕМ* модел, формиран на начин описан у Поглављу 4, приказани су на Слици 5.13, [156].



Слика 5.13 – Вод квадратног попречног пресека са двослојним диелектриком (а) и одговарајући модел (б).

За систем са Слике 5.13б, потенцијал у произвољној тачки $M(x, y)$ дат је изразом:

$$\varphi = \varphi_0 - \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{K_i} \frac{q'_{dik}}{2\pi\epsilon_i} \ln \sqrt{(x-x_{dik})^2 + (y-y_{dik})^2} - \sum_{m=1}^M \frac{q'_{tm}}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{(x-x_{tm})^2 + (y-y_{tm})^2}, \quad (5.9)$$

где су:

- Индекси "d" и "t" уз ознаке наелектрисања еквивалентних електрода су скраћенице од енглеских речи "*dielectric*" и "*total*", респективно.
- K_i је број еквивалентних електрода на i -тој површини ($i=1,2$) са слободним наелектрисањима q'_{dik} , која су смештена у срединама ϵ_1 и ϵ_2 , респективно.
- M је број еквивалентних електрода на раздвојној површини две диелектричне средине, са везаним наелектрисањима q'_{tm} ($m=1,\dots,M$), која су смештена у вакууму,
- (x_{dik}, y_{dik}) и (x_{tm}, y_{tm}) су позиције еквивалентних електрода ($i=1,2, k=1,\dots,K_i, m=1,\dots,M$),
- φ_0 је непозната адитивна константа која се одређује из услова електричне неутралности читавог система.

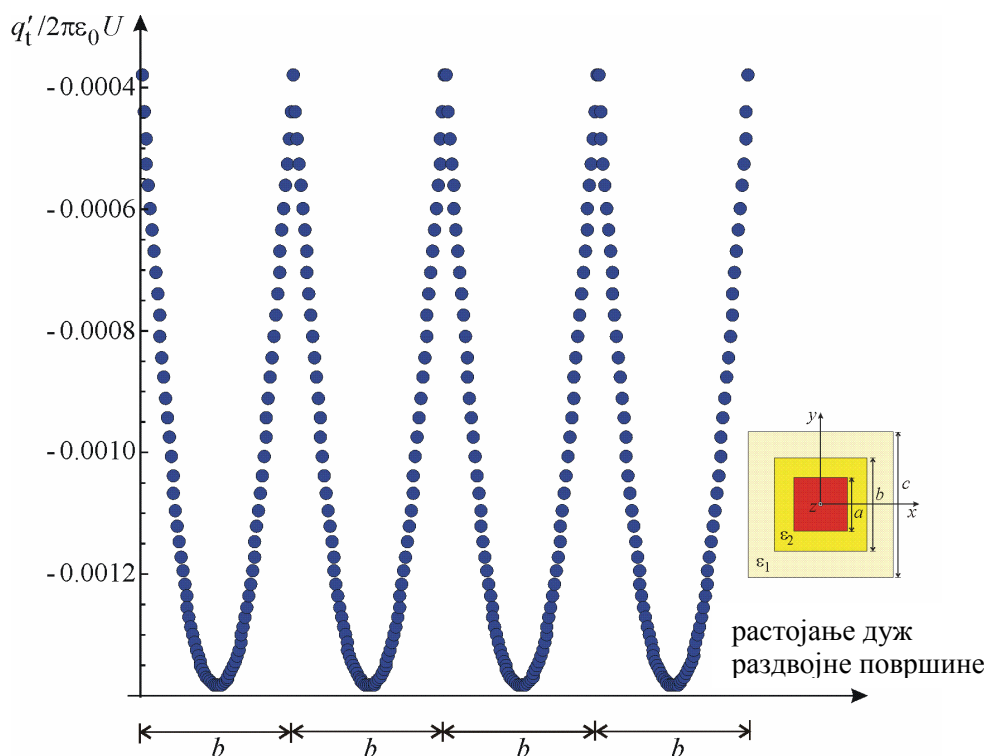
У овом примеру потребно је узети у обзир и везана (тотална) наелектрисања на раздвојној површини два диелектрика, тако да је, приликом формирања система линеарних једначина, поред метода подешавања у тачкама за потенцијал на проводницима вода, (5.9), и задовољавања услова електричне неутралности вода

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{K_i} q'_{dik} = 0, \quad (5.10)$$

неопходно извршити и подешавање нормалне компоненте вектора електричног поља на раздвојној површини слојева диелектрика, (4.8). На тај начин формира се систем линеарних једначина, чијим се решавањем одређују непознате вредности еквивалентних електрода.

Написан је одговарајући код у програму *Mathematica*, тако да је израчуната најпре капацитивност вода, а затим и карактеристична импеданса и ефективна релативна диелектрична константа.

Нормализована расподела везаног подужног наелектрисања дуж раздвојне површине приказана је на Слици 5.14 за следеће вредности параметара вода: $\epsilon_{r1} = 2$, $\epsilon_{r2} = 3$, $b/a = 2$ и $c/a = 3$. Број непознатих величина је 1000.



Слика 5.14 – Нормализована расподела везаног подужног наелектрисања дуж раздвојне површине два диелектрика.

Са циљем да се провери тачност метода и добијених резултата за вод квадратног попречног пресека са променом параметра b/a , размотрена су два случаја. Ти резултати приказани су у Табелама 5.9 и 5.10. Сви резултати су дати за два изотропна слоја:

А) $\epsilon_{r1} = 2$; $\epsilon_{r2} = 5$, и Б) $\epsilon_{r1} = 5$; $\epsilon_{r2} = 2$, при чему је $c/a = 3$.

Табела 5.9 – Поређење резултата за карактеристичну импедансу вода квадратног попречног пресека – варијанта А.

A	HBEM	FEMM	FDM [187]		
b/a	Z_c [Ω]	Z_c [Ω]	δ [%]	Z_c [Ω]	δ [%]
1.2	40.591	40.624	0.08	40.565	0.06
1.5	37.714	37.745	0.08	37.692	0.06
1.8	35.171	35.203	0.09	35.165	0.02
2.0	33.628	33.660	0.09	33.624	0.01
2.3	31.503	31.537	0.11	31.503	0.00
2.5	30.190	30.226	0.12	30.191	0.00

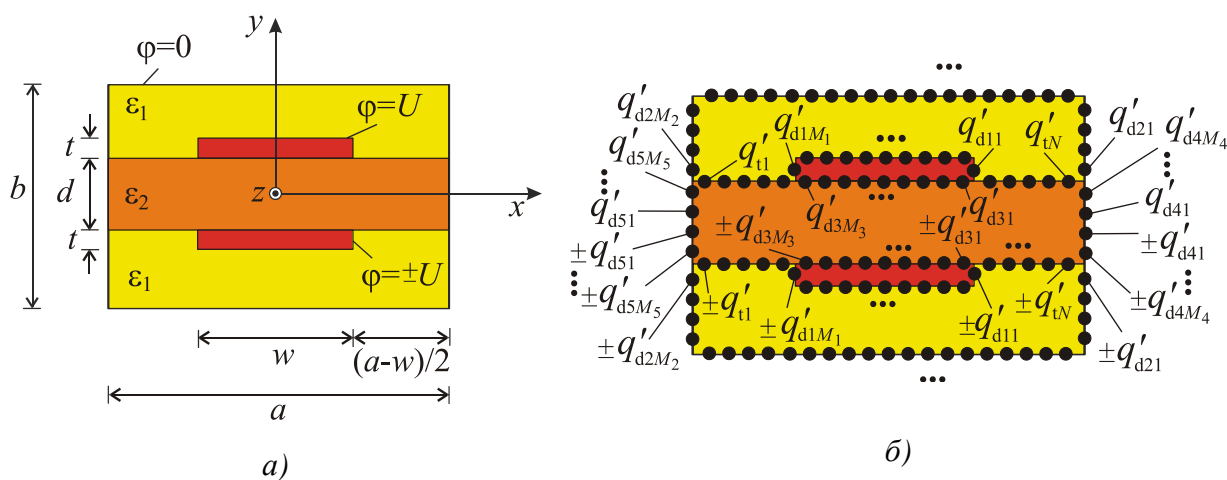
Добијени нумерички резултати упоређени су са вредностима које је дала примена програмског пакета *FEMM*, као и примена метода коначне разлике – *FDM*, [187]. Из табеле се може уочити веома добро слагање резултата, имајући у виду да је одступање *HVEM* резултата у односу на вредности добијене применом *FEMM* -а и *FDM*-а мање од 0.2 %. Такође, из табела се може уочити да са порастом вредности параметра b/a вредност за карактеристичну импедансу вода опада за варијанту А, док за варијанту Б те вредности расту.

Табела 5.10 – Поређење резултата за карактеристичну импедансу и ефективну релативну диелектричну константу вода квадратног попречног пресека – варијанта Б.

Б	<i>HVEM</i>		<i>FEMM</i>		
	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	$\delta[\%]$
b/a					
1.2	4.0668	30.001	4.0600	30.055	0.18
1.5	3.2781	33.416	3.2754	33.461	0.13
1.8	2.8137	36.067	2.8128	36.108	0.11
2.0	2.5979	37.536	2.5976	37.547	0.03
2.3	2.3569	39.408	2.3572	39.444	0.09
2.5	2.2329	40.487	2.2335	40.522	0.09
2.8	2.0827	41.922	2.0836	41.954	0.08

5.5. Оклопљени спрегнут микротракасти вод са подлогом од диелектрика

Оклопљени спрегнут микротракасти вод са диелектричном подлогом, [167], и његов одговарајући *HVEM* модел приказани су на *Слици 5.15*.



Слика 5.15 – Оклопљени спрегнут микротракасти вод (а) и одговарајући модел (б).

За систем са *Слике 5.15б*, потенцијал у произвољној тачки $M(x, y)$ дат је изразом:

$$\begin{aligned} \varphi^{(e,o)} = & \varphi_0^{(e,o)} - \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^{M_i} \frac{q'_{dim}}{2\pi\epsilon_1} \left[\ln \sqrt{(x-x_{dim})^2 + (y-y_{dim})^2} \pm \ln \sqrt{(x-x_{dim})^2 + (y+y_{dim})^2} \right] - \\ & - \sum_{i=3}^5 \sum_{m=1}^{M_i} \frac{q'_{dim}}{2\pi\epsilon_2} \left[\ln \sqrt{(x-x_{dim})^2 + (y-y_{dim})^2} \pm \ln \sqrt{(x-x_{dim})^2 + (y+y_{dim})^2} \right] - \\ & - \sum_{n=1}^N \frac{q'_{tn}}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln \sqrt{(x-x_{tn})^2 + (y-y_{tn})^2} \pm \ln \sqrt{(x-x_{tn})^2 + (y+y_{tn})^2} \right], \quad (5.11) \end{aligned}$$

где су:

- Индекси "d" и "t" уз ознаке наелектрисања еквивалентних електрода су скраћенице од енглеских речи "*dielectric*" и "*total*", респективно.
- M_i је број еквивалентних електрода на одговарајућој површини ($i=1, \dots, 5$) са слободним наелектрисањима q'_{dim} , смештених у средини ϵ_1 (за $i=1, 2$), и у средини ϵ_2 (за $i=3, 4, 5$).
- N је број еквивалентних електрода на раздвојној површини два диелектрика са везаним наелектрисањима q'_{tn} , која су смештена у вакууму,
- $(x_{dim}, y_{dim}), (x_{tn}, y_{tn})$ су позиције еквивалентних електрода ($i=1, 2, \dots, 5, m=1, \dots, M_i, n=1, \dots, N$),
- $\varphi_0^{(e,o)}$ је непозната адитивна константа која се одређује из услова електричне неутралности читавог система.

Укупан број непознатих је $N_{tot} = \sum_{i=1}^5 M_i + N + 1$.

Применом *HBEM*-а, као што је то описано у Поглављу 4, написан је одговарајући код за анализу приказаног вода. И у овом примеру, као и претходном, неопходно је узети у обзир и везана (тотална) наелектрисања на раздвојној површини два диелектрика, тако да је, приликом формирања система линеарних једначина, поред метода подешавања у тачкама за потенцијал на проводницима вода на вредности $+U$ и $\pm U$ (за случај парног и непарног режима на воду, респективно) и задовољавања услова електричне неутралности вода

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{k=1}^{K_i} q'_{dik} = 0, \quad (5.12)$$

неопходно извршити и подешавање нормалне компоненте вектора електричног поља на раздвојној површини слојева диелектрика релативних диелектричних константи ϵ_{r1}

и ϵ_{r2} . На тај начин, решавањем добијеног система линеарних једначина, биће одређена непозната слободна наелектрисања на проводницима вода, везана (тотална) наелектрисања на раздвојној површини диелектрика и адитивна константа ϕ_0 .

Подужна капацитивност симетрично спрегнутог микротракастог вода одређена је из израза:

$$C^{(e,o)} = \frac{1}{U} \left(\sum_{m=1}^{M_1} q'_{d1m} + \sum_{m=1}^{M_3} q'_{d3m} \right). \quad (5.13)$$

Након одређивања подужне капацитивности, ефективна релативна диелектрична константа и карактеристична импеданса одређују се применом израза (2.41) и (2.42), за паран и непаран режим понаособ.

Вредности за карактеристичну импедансу приказане су у Табели 5.11 за: $\epsilon_{r1} = 1$, $\epsilon_{r2} = 2.35$, $a/w = b/w = 2.5$, $d/w = 0.5$ и $t/w = 0.01$. N_{tot} означава укупан број непознатих. Остварена је добра конвергенција резултата за кратко време израчунавања.

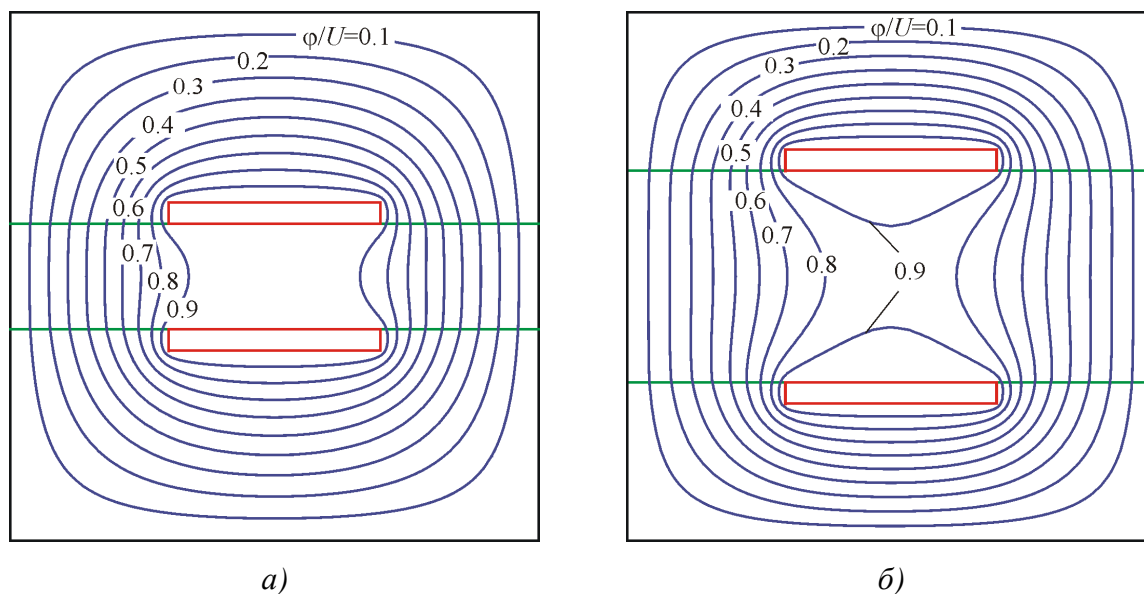
Табела 5.11 – Конвергенција резултата и време израчунавања.

N_{tot}	Паран режим		Непаран режим		$t(s)$
	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	
784	1.1058	66.702	2.0388	36.869	20.0
872	1.1394	65.732	2.0157	37.096	25.3
960	1.1621	65.101	2.0005	37.252	29.2
1044	1.1790	64.646	1.9901	37.362	35.6
1128	1.1920	64.306	1.9825	37.444	41.6
1216	1.2022	64.043	1.9768	37.509	47.4
1300	1.2104	63.835	1.9722	37.561	54.7
1384	1.2173	63.661	1.9686	37.603	61.5
1468	1.2231	63.516	1.9656	37.639	72.3
1565	1.2282	63.392	1.9632	37.669	81.3
1640	1.2325	63.288	1.9610	37.696	90.9

Еквипотенцијале за паран и непаран режим приказане су на Сликама 5.16 и 5.17, респективно, за различите вредности параметра d/w . Резултати су дати за следеће вредности параметара оклопљеног спрегнутог микротракастог вода: $\epsilon_{r1} = 1$, $\epsilon_{r2} = 2.35$, $a/w = b/w = 2.5$ и $t/w = 0.01$.

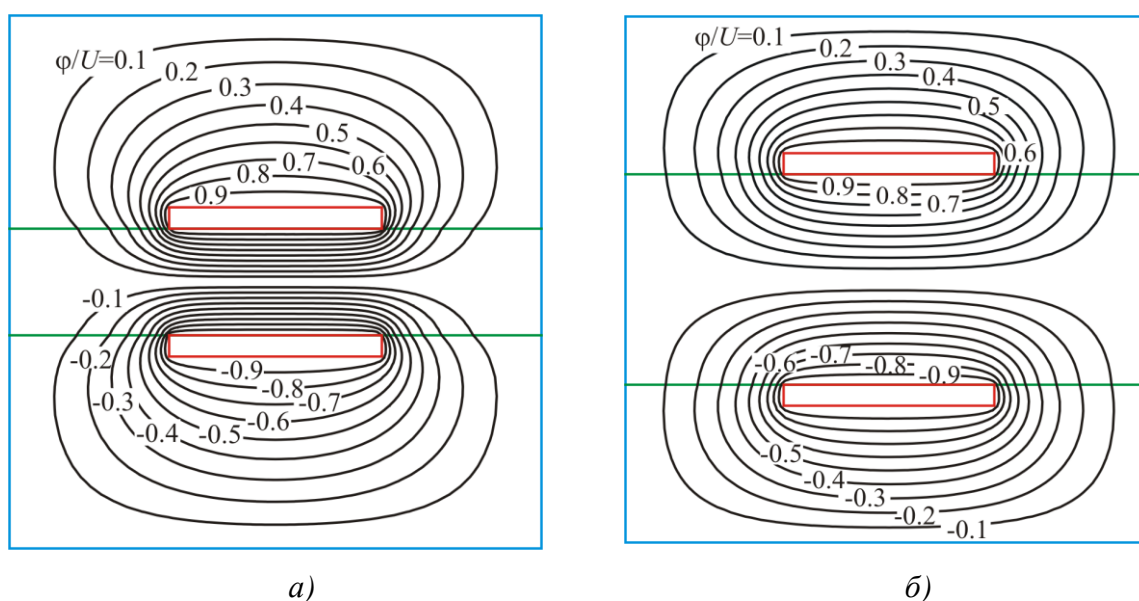
Са циљем да се провере резултати добијени применом *НВЕМ*-а у Табели 5.12 је извршено поређење добијених резултата са вредностима које се могу пронаћи у литератури. Може се уочити веома добро слагање резултата.

Сви резултати приказани графички и у табелама дати су када је број непознатих око 1600.



Слика 5.16 – Еквипотенцијале за $d/w = 0.5$ (а) и $d/w = 1.0$ (б) – паран режим.

У Табелама 5.13 и 5.14 приказан је утицај параметра d/w на ефективну релативну диелектричну константу и карактеристичну импедансу. Резултати добијени применом *HVEM*-а упоређени су са онима које је дала примена *FEMM*-а и метода коначне разлике, [187]. Параметар h означава корак мреже, док је са N_{it} обележен број итерација. Анализа је извршена како за парни, тако и непарни режим на воду. Вредности параметара оклопљеног микротракастог вода су: $\epsilon_{r1} = 1$, $\epsilon_{r2} = 2.35$, $a/w = b/w = 2.5$ и $t/w = 0.01$.



Слика 5.17 – Еквипотенцијале за $d/w = 0.5$ (а) и $d/w = 1.0$ (б) – непаран режим.

Табела 5.12 – Поређење вредности за карактеристичну импедансу за: $\epsilon_{r1} = 1$, $\epsilon_{r2} = 2.35$, $a/w = b/w = 2.5$ и $d/w = 0.5$ добијена применом различитих метода (паран режим).

Метод	Z_c [Ω]	
Gish & Graham [184]	62.50	
FDM [178]	$h = 0.25$ cm, $N_{it} = 700$	49.05
	$h = 0.10$ cm, $N_{it} = 500$	57.85
	$h = 0.05$ cm, $N_{it} = 1000$	61.53
FDM [187]	$h = 0.25$ cm, $N_{it} = 700$	75.60
	$h = 0.10$ cm, $N_{it} = 500$	66.53
	$h = 0.05$ cm, $N_{it} = 1000$	64.67
FEMM [56], $t/w = 0.01$	61.63	
HВЕМ, $N_{tot} = 1640$, $t/w = 0.01$	63.29	

Табела 5.13 – Утицај параметра d/w на карактеристичну импедансу и ефективну релативну диелектричну константу (паран режим).

$\frac{d}{w}$	HВЕМ $t/w = 0.01$		FEMM $t/w = 0.01$		FDM [187] $h = 0.05$ cm	
	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]
0.3	1.1369	73.4846	1.2164	71.0466	1.1335	77.8844
0.4	1.1889	67.9253	1.2617	65.9408	1.2138	68.7875
0.6	1.2785	59.1176	1.3318	57.9144	1.2766	61.9778
0.8	1.3319	52.6761	1.3794	51.7595	1.3494	53.4516
1.0	1.3646	47.4784	1.4085	46.7335	1.3836	48.1470
1.2	1.3787	43.0018	1.4209	42.3664	1.3967	44.6813
1.4	1.3753	38.8459	1.4178	38.2774	1.3984	40.4072
1.6	1.3543	34.6499	1.3990	34.1198	1.3750	35.1050
1.8	1.3143	30.0270	1.3632	29.5247	1.3342	30.4350
2.0	1.2518	24.4731	1.3080	24.0040	1.2712	24.8806

У приказаним табелама уочава се релативно добро слагање резултата. Мало веће одступање је присутно за мале вредности параметра d/w , а одступање од резултата које је дала примена FDM-а је последица чињенице да су вредности за карактеристичне параметре добијене за случај када су проводне траке бесконачно танке, што код примеме HВЕМ-а и FEMM-а није случај.

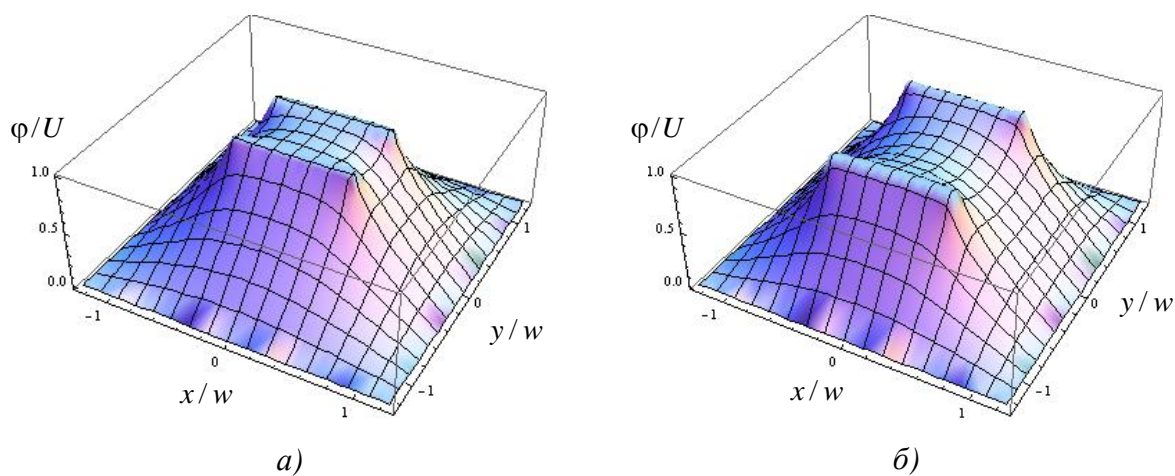
Табела 5.14 – Утицај параметра d/w на карактеристичну импедансу и ефективну релативну диелектричну константу (непаран режим).

d/w	HBEM $t/w = 0.01$		FEMM $t/w = 0.01$	
	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$
0.3	2.0771	26.2455	2.0387	26.5484
0.4	2.0123	32.4427	1.9834	32.7208
0.6	1.9062	42.3051	1.8917	42.4865
0.8	1.8181	49.4188	1.8142	49.4819
1.0	1.7401	54.2103	1.7449	54.1394
1.2	1.6669	56.8899	1.6795	56.6846
1.4	1.5940	57.5097	1.6142	57.1667
1.6	1.5171	55.9571	1.5453	55.4802
1.8	1.4311	51.8985	1.4684	51.2998
2.0	1.3297	44.6336	1.3782	43.9488

Такође, било је интересно одредити расподелу потенцијала у xOy равни оклопљеног спрегнутог микротракастог вода за паран и непаран режим. Ти резултати су приказани на *Сликама 5.18-5.21* за оба режима. Анализиран је утицај параметра d/w на расподелу потенцијала.

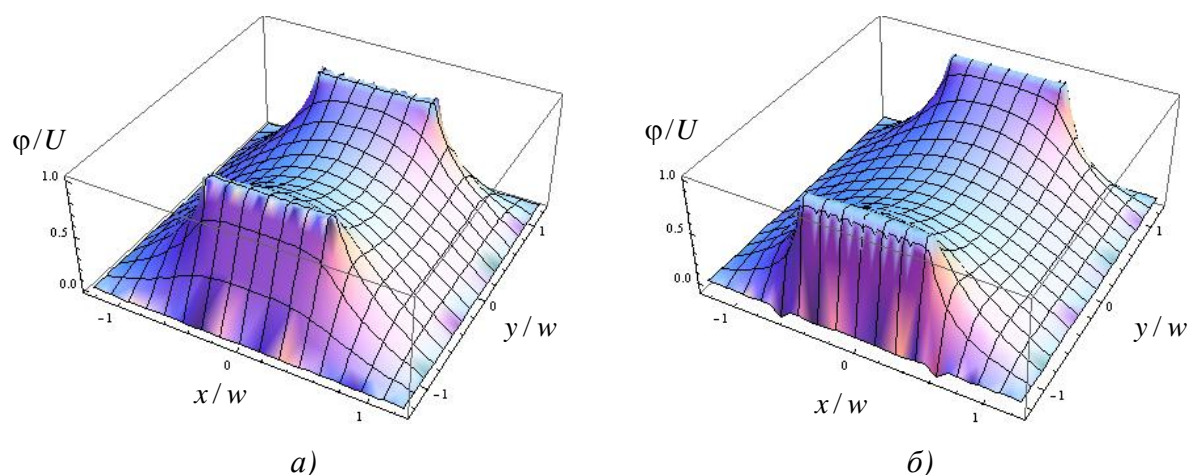
Параметри анализираног вода су: $\epsilon_{r1} = 1$, $\epsilon_{r2} = 2.35$, $a/w = b/w = 2.5$ и $t/w = 0.01$.

На основу приказане расподеле потенцијала може се приметити евидентан утицај дебљине слоја диелектрика на расподелу потенцијала у оклопљеном микротракастом воду.

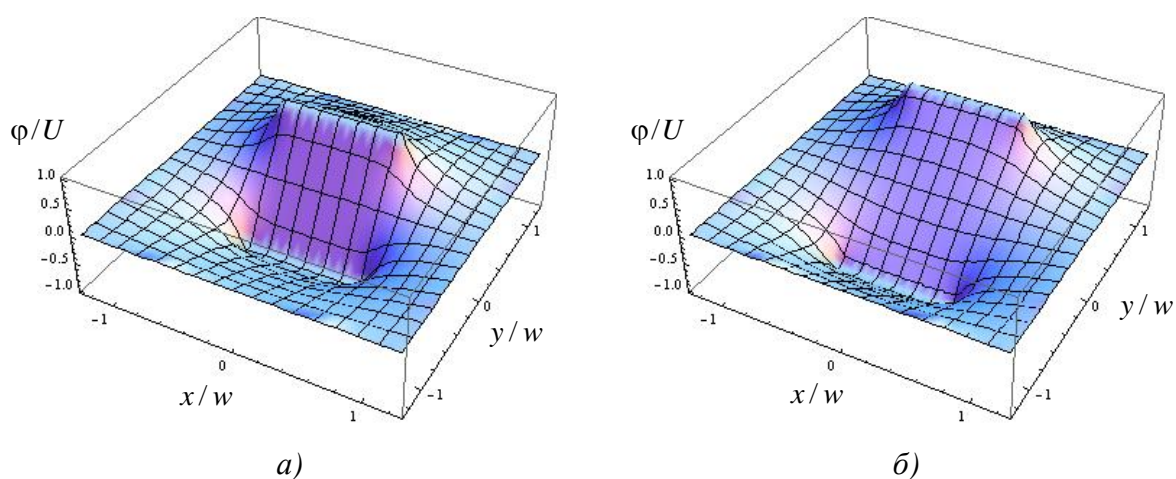


Слика 5.18 – Расподела нормализоване вредности потенцијала у xOy равни за:

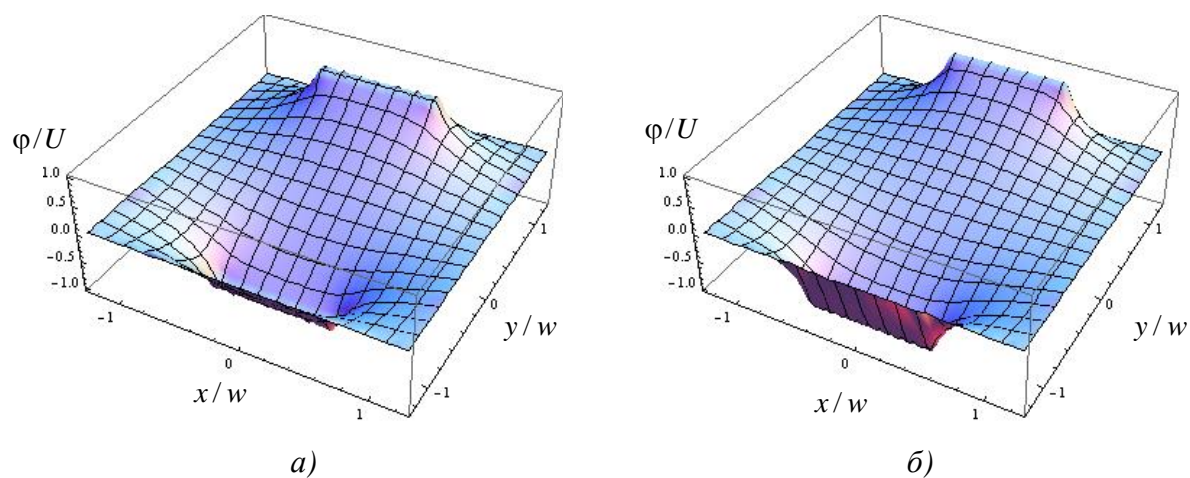
$d/w = 0.5$ (а) и $d/w = 1.0$ (б) – паран режим.



Слика 5.19 – Распореда нормализоване вредности потенцијала у $x0y$ равни за:
 $d/w = 1.5$ (а) и $d/w = 2.0$ (б) – паран режим.



Слика 5.20 – Распореда нормализоване вредности потенцијала у $x0y$ равни за:
 $d/w = 0.5$ (а) и $d/w = 1.0$ (б) – непаран режим.

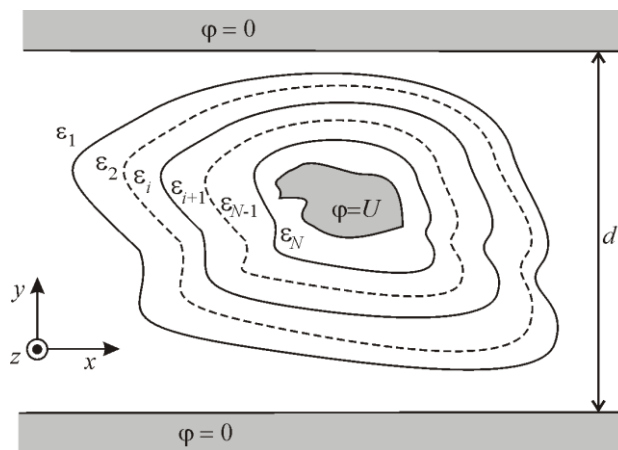


Слика 5.21 – Распореда нормализоване вредности потенцијала у $x0y$ равни за:
 $d/w = 1.5$ (а) и $d/w = 2.0$ (б) – непаран режим.

6

Тракасти водови

Као што је у уводном делу дисертације наведено, крајем 1949. године извршена је модификација оклопљених водова тиме што су уклоњене бочне стране оклопа, а задржане горња и доња равна. Добијена структура је названа тракасти вод.



Слика 6.1 – Вишеслојни тракасти вод.

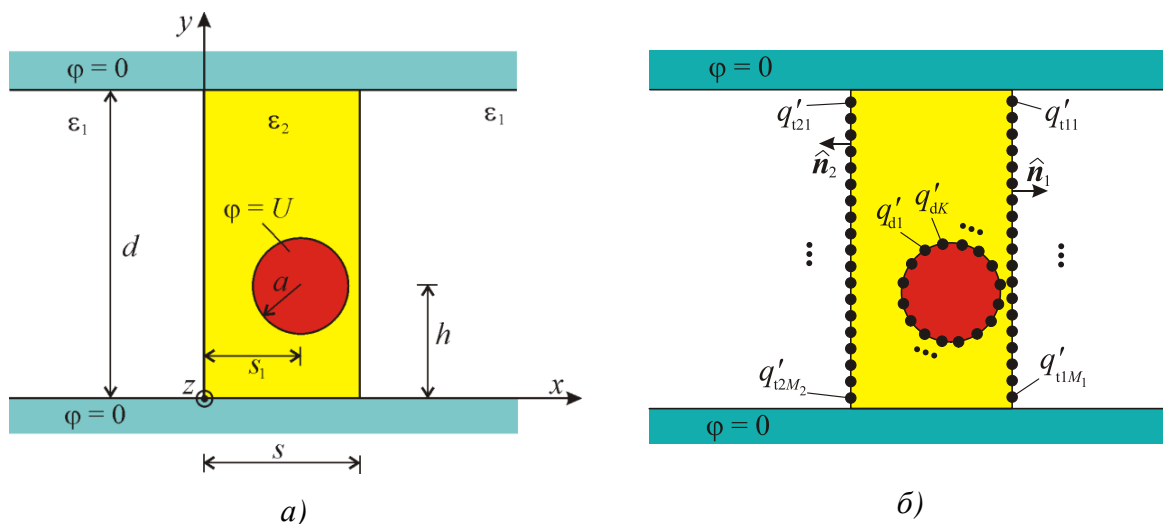
Филтри и спојнице који се праве од тракастих водова имају шири пропусни опсег у односу на микротракасте водове. Међутим, недостатак ове конфигурације огледа се, пре свега, у томе да је много компликованије, а и скупље, произвести тракасти него микротракасти вод. У наставку ће бити анализирана три типа вишеслојних тракастих водова применом хибридног метода граничних елемената.

6.1. Проводник кружног попречног пресека постављен између две неограничено широке уземљене равни

Геометрија анализаног тракастог вода и одговарајући *HVEM* модел приказани су на Слици 6.2, [164].

Тракасти вод, Слика 6.1, најчешће има хомоген диелектрик, а то у техници планарних водова може да представља значајну предност у односу на микротракасти вод и друге сличне конфигурације са нехомогеним диелектриком. Тракасти вод је недисперзивна компонента.

Применом процедуре која је описана у Поглављу 4, површина кружног проводника и раздвојна површина два слоја диелектрика сегментирају се на траке. Према хибридном методу граничних елемената, сваки од сегмената замењује се еквивалентним електродама, чији су полупречници одређени у Прилозима II и III. На тај начин формиран је систем подужних наелектрисања смештених између две дуге, неограничено широке равни.



Слика 6.2 – Проводник кружног попречног пресека између две неограничене уземљене равни (а) и одговарајући модел (б).

Гринова функција за подужно наелектрисање постављено између две паралелне равни нултог потенцијала, које се налази на висини h од доње равни је дата у [193],

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \sqrt{\frac{\cosh\left[\frac{\pi}{d}x\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y+h)\right]}{\cosh\left[\frac{\pi}{d}x\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y-h)\right]}}, \quad (6.1)$$

где је са d означено растојање између равни.

Користећи Гринову функцију дату изразом (6.1), може се одредити потенцијал у било којој тачки еквивалентног система са Сlike 6.2б:

$$\begin{aligned} \varphi = & \sum_{k=1}^K \frac{q'_{dk}}{2\pi\epsilon_2} \ln \sqrt{\frac{\cosh\left[\frac{\pi}{d}(x-x_{dk})\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y+y_{dk})\right]}{\cosh\left[\frac{\pi}{d}(x-x_{dk})\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y-y_{dk})\right]}} - \\ & - \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^{M_i} \frac{q'_{tim}}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{\frac{\cosh\left[\frac{\pi}{d}(x-x_{tim})\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y+y_{tim})\right]}{\cosh\left[\frac{\pi}{d}(x-x_{tim})\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y-y_{tim})\right]}}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где су:

- Индекси "d" и "t" уз ознаке наелектрисуња еквивалентних електрода су скраћенице од енглеских речи "*dielectric*" и "*total*", респективно.
- K је број еквивалентних електрода на кружној проводној траци са слободним наелектрисуњима q'_{dk} ($k = 1, \dots, K$), која се налазе у средини ε_2 .
- M_i ($i = 1, \dots, 2$) је број еквивалентних електрода на раздвојној површини два диелектрика са везаним наелектрисуњима q'_{tim} , која су смештена у вакууму ($m = 1, \dots, M_i$).
- (x_{dk}, y_{dk}) , (x_{tim}, y_{tim}) су позиције еквивалентних електрода у Декартовом правоуглом координатном систему.

Укупан број непознатих, N_{tot} , је

$$N_{tot} = K + \sum_{i=1}^2 M_i .$$

Примењујући метод подешавања у тачкама за потенцијал кружног проводника и подешавајући нормалну компоненту вектора јачине електричног поља на раздвојној површини средина 1 и 2, формира се систем линеарних једначина, чија су решења вредности наелектрисуња еквивалентних електрода.

Подужна капацитивност овог вода биће одређена применом израза

$$C' = \frac{1}{U} \sum_{k=1}^K q'_{dk} , \quad (6.3)$$

док је карактеристична импеданса

$$Z_c = Z_{c0} / \sqrt{\varepsilon_r^{\text{eff}}} , \quad (6.4)$$

где је $\varepsilon_r^{\text{eff}} = C'/C'_0$ ефективна релативна диелектрична константа, а Z_{c0} је карактеристична импеданса вода када је диелектрик вакуум.

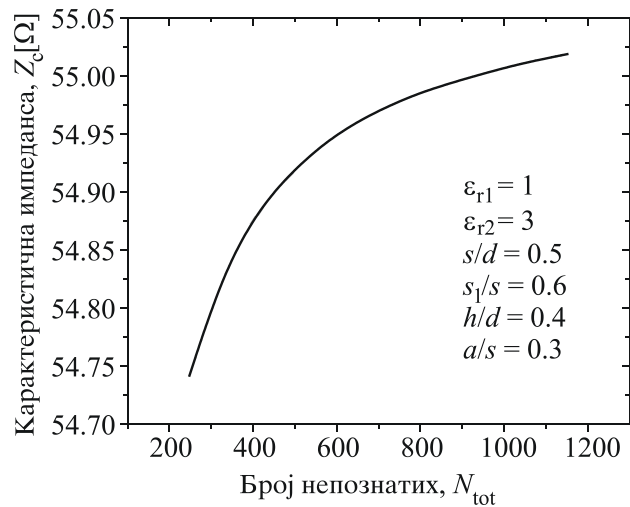
Одређена су два карактеристична параметра анализираниог вода: ефективна релативна диелектрична константа и карактеристична импеданса. Вредности ова два параметра и време израчунавања приказани су у *Табели 6.1* и на *Слици 6.3* када су параметри вода: $\varepsilon_{r1} = 1$, $\varepsilon_{r2} = 3$, $s/d = 0.5$, $s_1/s = 0.6$, $h/d = 0.4$ и $a/s = 0.3$.

Анализирајући резултате приказане табеларно и графички, могу се дати следећи закључци. Најпре, остварена је веома добра конвергенција резултата оба параметра. Повећавајући број непознатих, време израчунавања расте линеарно. Време израчуна-

вања је веома кратко. За решавање система једначина са 1154 непознатих и израчунавање параметара тракастог вода потребно је 167.8 секунди.

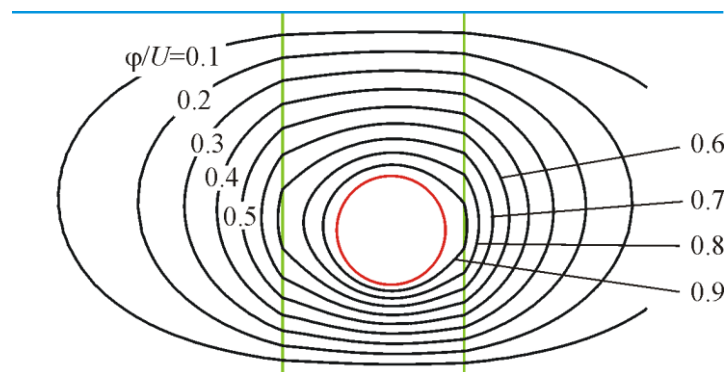
Табела 6.1 – Конвергенција резултата и време израчунавања.

N_{tot}	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	$t(\text{s})$
247	2.2820	54.741	7.7
329	2.2828	54.831	13.6
413	2.2832	54.885	21.2
494	2.2835	54.918	30.6
576	2.2837	54.944	41.9
660	2.2838	54.963	54.9
741	2.2840	54.977	69.0
823	2.2841	54.989	85.3
988	2.2842	55.006	122.0
1070	2.2843	55.013	144.4
1154	2.2843	55.019	167.8



Слика 6.3 – Конвергенција резултата за карактеристичну импедансу.

Еквипотенцијале и нормализована расподела подужног везаног наелектрисања дуж раздвојне површине су приказани на *Сликама 6.4* и *6.5*, респективно, за: $\epsilon_{r1} = 1$, $\epsilon_{r2} = 3$, $s/d = 0.5$, $s_1/s = 0.6$, $h/d = 0.4$ и $a/s = 0.3$. Број непознатих је 660.

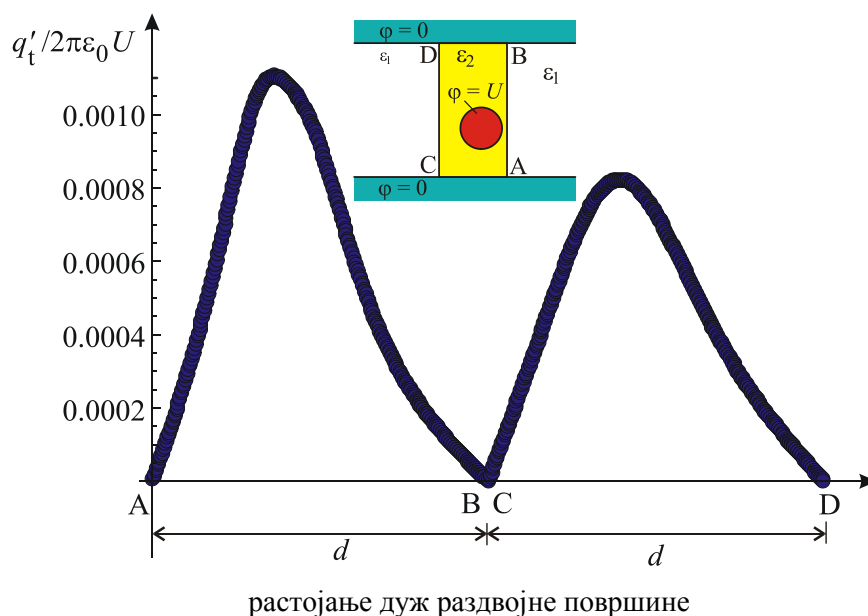


Слика 6.4 – Еквипотенцијале.

Са циљем да се провери тачност метода, резултати за карактеристичне параметре за различите вредности параметара s_1/s и h/d за: $\epsilon_{r1} = 1$, $\epsilon_{r2} = 3$, $s/d = 0.5$ и $a/s = 0.3$, упоређени су у *Табели 6.2* са резултатима добијеним применом програмског пакета *FEMM*. Приказано је и одступање добијених резултата δ , (4.13). Број непознатих величина је и овде 660.

Уочава се веома добро слагање резултата, при чему је релативна грешка мања од 0.55 %. Повећавајући параметар h/d до средишњег растојања између две уземљене

равни, где је $h/d = 0.5$, расте и вредност карактеристичне импедансе. Након те вредности (за $h/d > 0.5$), карактеристична импеданса опада. Добијене вредности су у том случају исте као и када је $h/d < 0.5$, јер се ради о идентичном растојању, само овог пута од горње равни.



Слика 6.5 – Нормализована расподела везаног подужног наелектрисања дуж раздвојне површине два диелектрика.

Табела 6.2 – Поређење вредности за карактеристичну импедансу и ефективну релативну диелектричну константу за различите вредности параметара s_1/s и h/d

за: $\epsilon_{r1} = 1$, $\epsilon_{r2} = 3$, $s/d = 0.5$ и $a/s = 0.3$.

$\frac{s_1}{s}$	$\frac{h}{d}$	HBEM		FEMM		$\delta[\%]$
		ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	
0.35	0.2	2.5844	28.361	2.5837	28.517	0.55
	0.3	2.3532	46.713	2.3540	46.792	0.17
	0.4	2.2566	55.293	2.2577	55.349	0.10
	0.5	2.2285	57.923	2.2296	57.977	0.09
0.40	0.2	2.6183	28.176	2.6177	28.331	0.55
	0.3	2.3850	46.401	2.3857	46.480	0.17
	0.4	2.2838	54.963	2.2849	55.018	0.10
	0.5	2.2542	57.596	2.2554	57.645	0.09
0.50	0.2	2.6446	28.036	2.6441	28.190	0.55
	0.3	2.4100	46.154	2.4113	46.233	0.17
	0.4	2.3059	54.699	2.3070	54.754	0.10
	0.5	2.2751	57.332	2.2762	57.380	0.08

Утицај полупречника проводника на карактеристичну импедансу и ефективну релативну диелектричну константу приказан је у Табели 6.3. *HVEM* резултати упоређени су са *FEMM* резултатима. Приказана је и релативна грешка δ . Вредности овог параметра указују на добро слагање резултата.

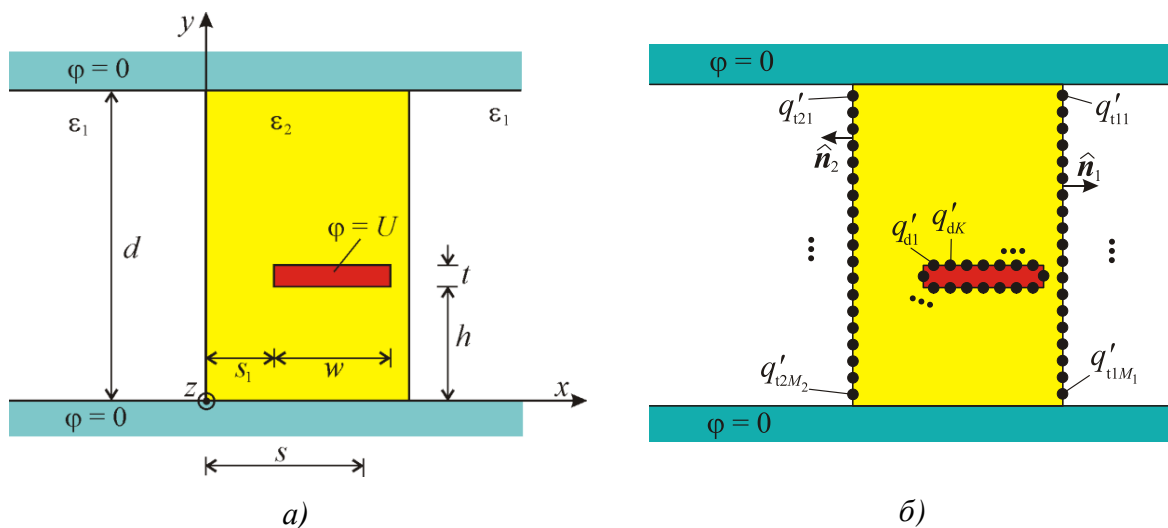
Табела 6.3 – Поређење вредности за карактеристичну импедансу и ефективну релативну диелектричну константу за различите вредности параметара a/s за:

$$\epsilon_{r1} = 1, \epsilon_{r2} = 3, s/d = 0.5, s_1/s = 0.5 \text{ и } h/d = 0.25.$$

$\frac{a}{s}$	<i>HVEM</i>		<i>FEMM</i>		δ [%]
	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	
0.1	2.6670	80.106	2.6683	80.370	0.33
0.2	2.5678	55.121	2.5667	55.247	0.23
0.3	2.5038	38.854	2.5042	38.957	0.26
0.4	2.5202	24.502	2.5192	24.629	0.52

6.2. Проводник правоугаоног попречног пресека постављен хоризонтално између две паралелне, уземљене равни неограничене ширине

Проводник правоугаоног попречног пресека постављен хоризонтално у средини ϵ_2 између две паралелне, неограничене равни нултог потенцијала, [164], и одговарајући *HVEM* модел приказани су на Слици 6.6.



Слика 6.6 – Проводник правоугаоног попречног пресека постављен хоризонтално између две паралелне, уземљене равни (а) и одговарајући модел (б).

Примењујући идентичан поступак, дефинисан у претходном примеру, написан је одговарајући програмски код за анализу приказане геометрије.

Потенцијал у било којој тачки еквивалентног система са *Слике 6.6б* је

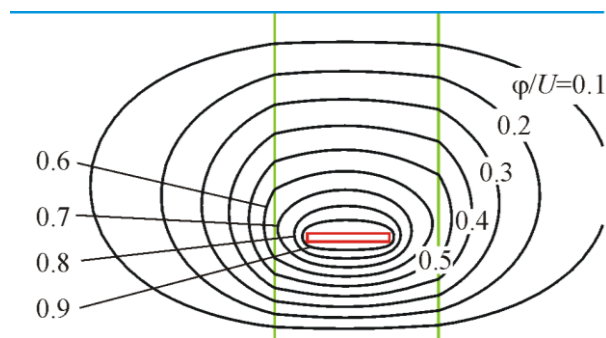
$$\begin{aligned} \varphi = & \sum_{k=1}^K \frac{q'_{dk}}{2\pi\epsilon_2} \ln \sqrt{\frac{\cosh\left[\frac{\pi}{d}(x-x_{dk})\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y+y_{dk})\right]}{\cosh\left[\frac{\pi}{d}(x-x_{dk})\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y-y_{dk})\right]}} - \\ & - \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^{M_i} \frac{q'_{tim}}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{\frac{\cosh\left[\frac{\pi}{d}(x-x_{tim})\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y+y_{tim})\right]}{\cosh\left[\frac{\pi}{d}(x-x_{tim})\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y-y_{tim})\right]}}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где су:

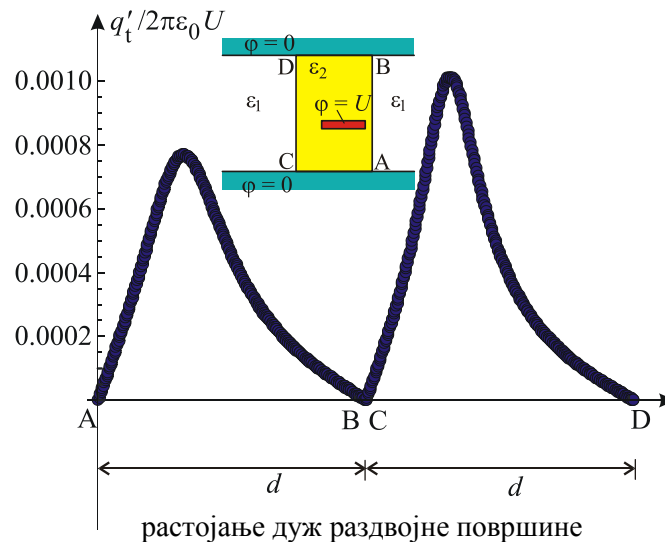
- Индекси "d" и "t" уз ознаке наелектрисања еквивалентних електрода су скраћенице од енглеских речи "*dielectric*" и "*total*", респективно.
- K је број еквивалентних електрода на проводној траци са слободним наелектрисањима q'_{dk} ($k=1, \dots, K$), која се налазе у средини ϵ_2 .
- M_i ($i=1, \dots, 2$) је број еквивалентних електрода на раздвојној површини два диелектрика са везаним наелектрисањима q'_{tim} , која су смештена у вакууму ($m=1, \dots, M_i$).
- (x_{dk}, y_{dk}) , (x_{tim}, y_{tim}) су позиције еквивалентних електрода у Декартовом правоуглом координатном систему.

Укупан број непознатих, N_{tot} , је $N_{tot} = K + \sum_{i=1}^2 M_i$.

Еквипотенцијале и нормализована расподела везаног подужног наелектрисања дуж раздвојне површине два диелектрика приказани су на *Сликама 6.7* и *6.8*, респективно, за: $\epsilon_{r1}=1$, $\epsilon_{r2}=3$, $s/d=0.5$, $s_1/s=0.2$, $h/d=0.3$, $w/s=0.5$ и $t/w=0.1$. Сви резултати приказани графички и у табелама добијени су када је број непознатих 860.



Слика 6.7 – Еквипотенцијале.



Слика 6.8 – Нормализована расподела везаног подужног наелектрисања дуж раздвојне површине два диелектрика.

Утицај проводне траке на расподелу везаног подужног наелектрисања огледа се у “пиковима” који се могу уочити на Слици 6.8. Користећи програмски пакет *FEMM*, симулиран је модел приказан на Слици 6.6а, са циљем да се верификују резултати добијени применом *HVEM*-а. У Табелама 6.4 и 6.5 приказани су резултати за ефективну релативну диелектричну константу и карактеристичну импедансу, као и њихово одступање од оних добијених применом [56]. Максимално одступање је 0.22 %.

Табела 6.4 – Поређење вредности за карактеристичну импедансу и ефективну релативну диелектричну константу за различите вредности параметара s_1/s и h/d

за: $\epsilon_{r1} = 1$, $\epsilon_{r2} = 3$, $s/d = 0.5$, $w/s = 0.5$ и $t/w = 0.05$.

$\frac{s_1}{s}$	$\frac{h}{d}$	<i>HVEM</i>		<i>FEMM</i>		δ [%]
		ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	
0.1	0.1	2.7350	44.646	2.7348	44.634	0.03
	0.2	2.5588	65.889	2.5587	65.834	0.08
	0.3	2.4540	78.241	2.4539	78.166	0.09
	0.4	2.3985	84.833	2.3986	84.750	0.10
0.2	0.1	2.7986	44.135	2.7985	44.126	0.02
	0.2	2.6214	65.097	2.6214	65.045	0.08
	0.3	2.5087	77.382	2.5087	77.307	0.09
	0.4	2.4485	83.963	2.4485	83.879	0.10
0.25	0.1	2.8056	44.080	2.8055	44.069	0.02
	0.2	2.6289	65.005	2.6289	64.953	0.08
	0.3	2.5153	77.281	2.5153	77.206	0.09
	0.4	2.4545	83.860	2.4545	83.777	0.10

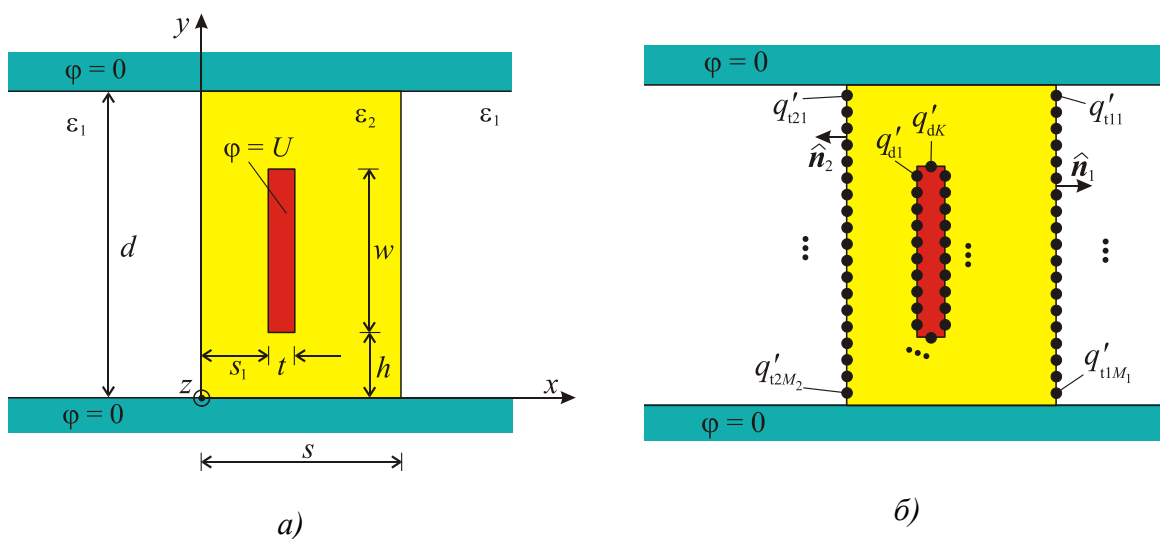
Табела 6.5 – Поређење вредности за карактеристичну импедансу и ефективну релативну диелектричну константу за различите вредности параметара w/s за:

$$\varepsilon_{r1} = 1, \varepsilon_{r2} = 3, s/d = 0.5, s_1/s = 0.2, h/d = 0.3 \text{ и } t/w = 0.05.$$

$\frac{w}{s}$	НВЕМ		FEMM		$\delta[\%]$
	$\varepsilon_r^{\text{eff}}$	$Z_c [\Omega]$	$\varepsilon_r^{\text{eff}}$	$Z_c [\Omega]$	
0.1	2.6304	133.670	2.6300	133.371	0.22
0.2	2.5980	109.038	2.5983	108.878	0.15
0.3	2.5746	94.713	2.5746	94.611	0.11
0.4	2.5467	84.782	2.5468	84.697	0.10
0.5	2.5087	77.382	2.5087	77.307	0.03
0.6	2.4556	71.694	2.4556	71.628	0.09
0.7	2.3817	67.310	2.3817	67.251	0.09

6.3. Проводник правоугаоног попречног пресека постављен вертикално између две паралелне, уземљене равни неограничене ширине

Ако се проводник постави вертикално између две паралелне уземљене равни неограничене ширине, [161], *Слика 6.9а*, такође је могуће применити хибридни метод граничних елемената и формирати еквивалентан систем приказан на *Слици 6.9б*.

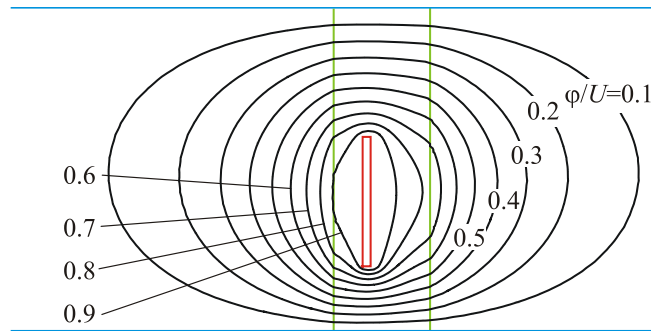


Слика 6.9 – Проводник правоугаоног попречног пресека постављен вертикално између две паралелне, уземљене равни (а) и одговарајући модел (б).

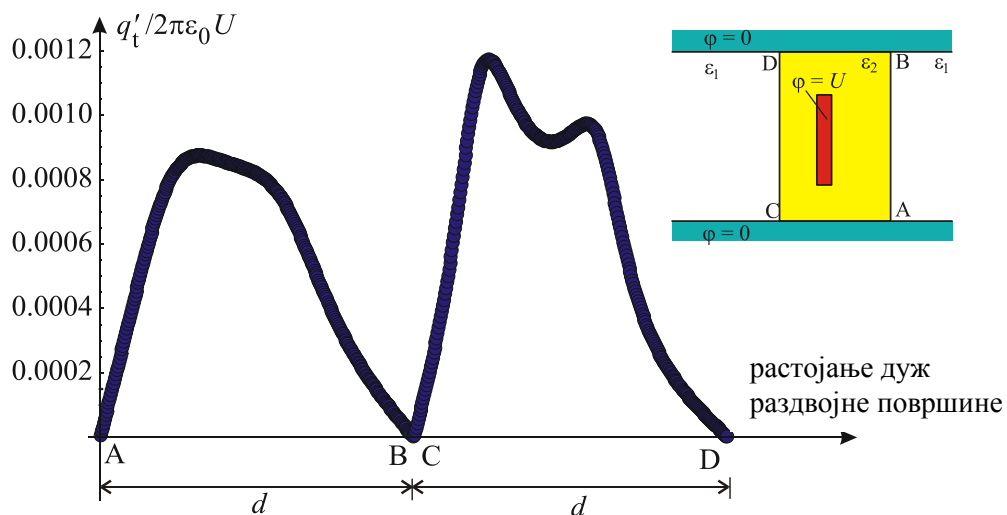
Потенцијал у било којој тачки еквивалентног система са *Слике 6.9б* идентичан је оном који је дат изразом (6.5).

Еквипотенцијале и нормализована расподела везаног подужног наелектрисања дуж раздвојне површине диелектрика дата је на *Сликама 6.10* и *6.11*, респективно.

Параметри вода су: $\varepsilon_{r1}=1$, $\varepsilon_{r2}=3$, $s/d=0.3$, $s_1/s=0.3$, $h/d=0.2$, $w/d=0.4$ и $t/w=0.1$. Сви резултати приказани графички и у табелама добијени су када је број непознатих 900.



Слика 6.10 – Еквипотенцијале.



Слика 6.11 – Нормализована расподела везаног подужног наелектрисања дуж раздвојне површине два диелектрика.

С обзиром да је, у конкретном примеру, трака ближа левој раздвојној површини, њен утицај се огледа и у расподели везаног подужног наелектрисања, Слика 6.11.

Вредности за ефективну релативну диелектричну константу и карактеристичну импедансу добијене применом *HVEM*-а и *FEMM*-а, као и одговарајућа одступања, приказани су у Табелама 6.6 и 6.7. Добијени резултати се веома добро слажу. Релативна грешка, дата изразом (4.13), је око 0.14 %.

Табела 6.6 показује да повећањем параметра h/d карактеристична импеданса прво опада, па затим расте. Максимална вредност је достигнута када је тракасти вод на средини између две паралелне равни нултог потенцијала.

Табела 6.6 - Поређење вредности за диелектричну константу и карактеристичну импедансу са променом односа s_1/s и h/d за: $\epsilon_{r1}=1$, $\epsilon_{r2}=3$, $s/d=0.3$, $w/d=0.4$ и $t/w=0.05$.

$\frac{s_1}{s}$	$\frac{h}{d}$	HBEM		FEMM		$\delta[\%]$
		ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	
0.3	0.1	2.2257	56.885	2.2262	56.830	0.10
	0.2	2.0832	68.413	2.0836	68.347	0.10
	0.3	2.0451	71.784	2.0455	71.712	0.10
	0.4	2.0832	68.413	2.0836	68.347	0.10
	0.5	2.2257	56.885	2.2262	56.830	0.10
0.4	0.1	2.2574	56.485	2.2578	56.432	0.09
	0.2	2.1081	68.007	2.1086	67.943	0.09
	0.3	2.0678	71.389	2.0682	71.315	0.10
	0.4	2.1081	68.007	2.1086	67.943	0.09
	0.5	2.2574	56.485	2.2578	56.432	0.09
0.5	0.1	2.2618	56.429	2.2623	56.376	0.09
	0.2	2.1117	67.949	2.1122	67.882	0.10
	0.3	2.0710	71.333	2.0715	71.263	0.10
	0.4	2.1117	67.949	2.1122	67.882	0.10
	0.5	2.2618	56.429	2.2623	56.376	0.09

Табела 6.7 – Поређење вредности за диелектричну константу и карактеристичну импедансу са променом односа w/s за: $\epsilon_{r1}=1$, $\epsilon_{r2}=3$, $s/d=0.5$, $s_1/s=0.5$, $h/d=0.2$ и $t/w=0.05$.

$\frac{w}{d}$	HBEM		FEMM		$\delta[\%]$
	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	
0.1	2.4347	106.735	2.4349	106.590	0.14
0.2	2.2754	87.673	2.2758	87.578	0.11
0.3	2.1744	76.550	2.1748	76.472	0.10
0.4	2.1117	67.949	2.1122	67.882	0.10
0.5	2.0814	60.099	2.0818	60.043	0.09
0.6	2.0902	51.821	2.0907	51.774	0.09
0.7	2.1758	41.243	2.1761	41.208	0.08

7

Микротракасти водови

Даља модификација тракастог вода, описаног у претходном поглављу, довела је до уклањања горње равни, остављајући траку и доњу раван, као и диелектричну подлогу која "носи" траку. Ова планарна структура названа је микротракасти вод тј. микрострип и представља другу генерацију планарних водова.

У литератури су углавном анализиране структуре код којих је уземљена раван неограничене ширине. Поред тога, често се приликом анализе сматра и да је проводна трака бесконачно танка, а супстрат неограничено широк. Све ово, наравно, није ситуација са којом се срећемо у практичној реализацији. Због тога су, као што је у Уводу и наведено, развијани методи који би успели да што реалније узму у обзир параметре микротракастог вода и анализирају ове структуре. Један од таквих метода, који се са успехом може применити, је и хибридни метод граничних елемената.

Доминантни тип таласа на микротракастом воду је квази-ТЕМ. При вишим учестаностима, хибридна природа ових таласа доводи до промене расподеле поља, па се мењају и карактеристични параметри вода. Гранична учестаност при којој треба узети у обзир ове дисперзионе ефекте је реда 10 GHz. На нижим учестаностима важи квази-ТЕМ приступ, који је овде и примењен.

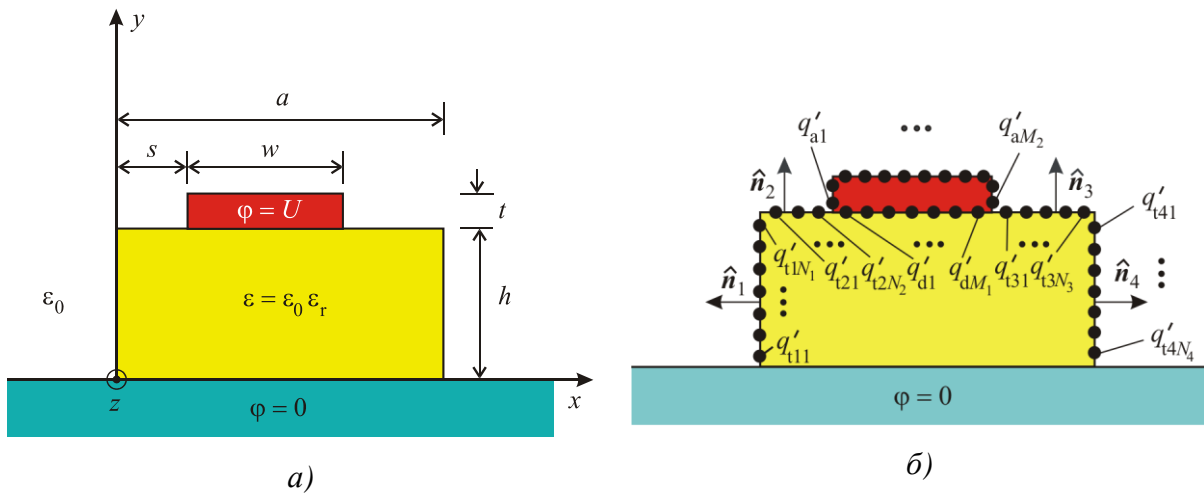
Поред најједноставније конфигурације микротракастог вода, приказаног на *Слици 1.2*, често се срећу и симетрично и асиметрично спрегнути микротракасти водови. Спрегнути микротракасти водови користе се за реализацију микроталасних филтара, кола за прилагођење, линија за кашњење, као и за пројектовање усмерених спрежњака, [194]. Код оваквих водова карактеристична су два режима: парни и непарни. Парни режим се односи на симетричну побуду микротракастог вода (обе проводне траке су на потенцијалима исте вредности и истог знака), док се непарни режим односи на асимет-

ричну побуду (проводне траке су на потенцијалима истих вредности, али различитог знака). Овакве структуре биће такође анализирани у овом Поглављу.

7.1. Микротракасти вод са уземљеном, савршено проводном равни неограничене ширине

Кренимо ипак са анализом најчешће сретане конфигурације микроталасног вода у литератури, а то је микротракасти вод са уземљеном, савршено проводном равни неограничене ширине и подлогом од диелектрика коначне ширине, [193]. Геометрија анализираниог микротракастог вода и одговарајући *НВЕМ* модел приказани су на *Слици 7.1*.

НВЕМ модел је формиран пратећи процедуру описану у Поглављу 4, тако што су проводна трака и раздвојна површина слоја диелектрика и вакуума равномерно сегментирани на траке, а затим је сваки од сегмената замењен еквивалентном електродом тј. подужним наелектрисањем.



Слика 7.1 – Микротракасти вод са уземљеном савршено проводном равни неограничене ширине (а) и одговарајући модел.

На проводној траци постоје слободна наелектрисања, док су на раздвојној површини вакуум-диелектрик присутна само везана наелектрисања. С обзиром да се цео систем, *Слика 7.1б*, налази изнад савршено проводне, бесконачне равни нултог потенцијала, неопходно је применити теорему lika у равном огледалу, [195].

Потенцијал у произвољној тачки $M(x, y)$ је

$$\begin{aligned} \varphi = & \sum_{m=1}^{M_1} \frac{q'_{dm}}{2\pi\epsilon} \ln \sqrt{\frac{(x-x_{dm})^2 + (y+y_{dm})^2}{(x-x_{dm})^2 + (y-y_{dm})^2}} + \sum_{m=1}^{M_2} \frac{q'_{am}}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{\frac{(x-x_{am})^2 + (y+y_{am})^2}{(x-x_{am})^2 + (y-y_{am})^2}} + \\ & + \sum_{i=1}^4 \sum_{n=1}^{N_i} \frac{q'_{tin}}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{\frac{(x-x_{tin})^2 + (y+y_{tin})^2}{(x-x_{tin})^2 + (y-y_{tin})^2}} \end{aligned} \quad (7.1)$$

где су:

- Индекси "d", "a" и "t" уз ознаке наелектрисања еквивалентних електрода су скраћенице од енглеских речи "*dielectric*", "*air*" и "*total*", респективно.
- M_k је број еквивалентних електрода на металној траци са слободним наелектрисањима q'_{dm} , која су смештена у средини ε (за $k=1$), и са слободним наелектрисањима q'_{am} , смештених у вакууму (за $k=2$).
- N_i је број еквивалентних електрода на раздвојној површини два диелектрика са везаним наелектрисањима q'_{tin} , која су смештена у вакууму ($i=1, \dots, 4$, $n=1, \dots, N_i$),
- (x_{dm}, y_{dm}) , (x_{am}, y_{am}) , (x_{tin}, y_{tin}) су позиције еквивалентних електрода ($i=1, \dots, 4$, $n=1, \dots, N_i$, $m=1, \dots, M_k$, $k=1, 2$).

Користећи процедуру описану у Поглављу 4, применом метода подешавања у тачкама на површини металне, проводне траке, као и метода подешавања у тачкама за нормалну компоненту вектора електричног поља на раздвојној површини диелектрика, формиран је систем линеарних једначина, чијим се решавањем одређују непозната слободна и тотална подужна наелектрисања. Самим тим, могуће је израчунати подужну капацитивност микротракастог вода, а затим и карактеристичне параметре.

За различите параметре вода, у наставку ће бити одређене и анализирани вредности за карактеристичну импедансу и ефективну релативну диелектричну константу микротракастог вода.

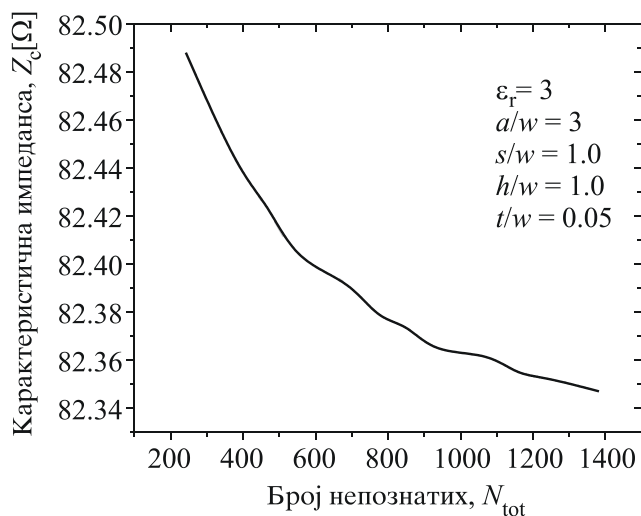
Конвергенција резултата и време израчунавања приказани су у Табели 7.1 и на Слици 7.2 за следеће вредности параметара вода: $\varepsilon_r = 3$, $a/w = 3$, $s/w = 1.0$, $h/w = 1.0$ и $t/w = 0.05$, где је са N_{tot} обележен укупан број непознатих, који за овај пример износи:

$$N_{\text{tot}} = M_1 + M_2 + \sum_{i=1}^4 N_i .$$

Из Табеле 7.1 се, најпре, може се уочити веома добра конвергенција резултата. Друго, време израчунавања је много краће упоређујући га са временом израчунавања оствареним применом *FEMM*-а, [56]. За решавање система линеарних једначина димензија 1382×1382 било је потребно 112.9 секунди, док је решавање истог проблема применом *FEMM*-а са мрежом од неколико стотина хиљада елемената трајало око 15 минута, при чему је добијена вредност карактеристичне импедансе $Z_c = 82.166 \Omega$.

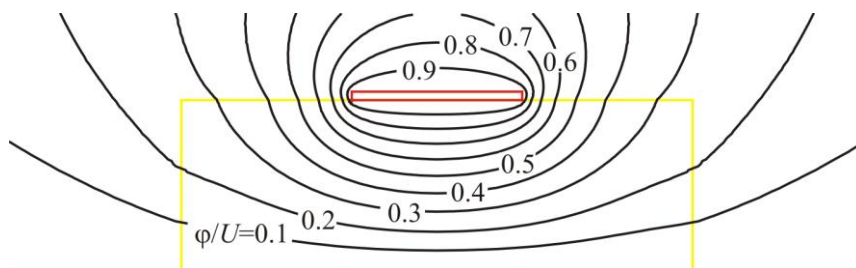
**Табела 7.1 – Конвергенција
резултата и време израчунавања.**

N_{tot}	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	$t(\text{s})$
388	2.1805	82.438	8.6
468	2.1821	82.425	12.6
546	2.1842	82.401	17.5
694	2.1855	82.393	27.8
772	2.1867	82.377	34.5
852	2.1871	82.375	41.7
924	2.1880	82.363	49.2
1078	2.1884	82.363	67.6
1156	2.1891	82.354	78.1
1230	2.1892	82.353	88.6
1382	2.1898	82.347	112.9

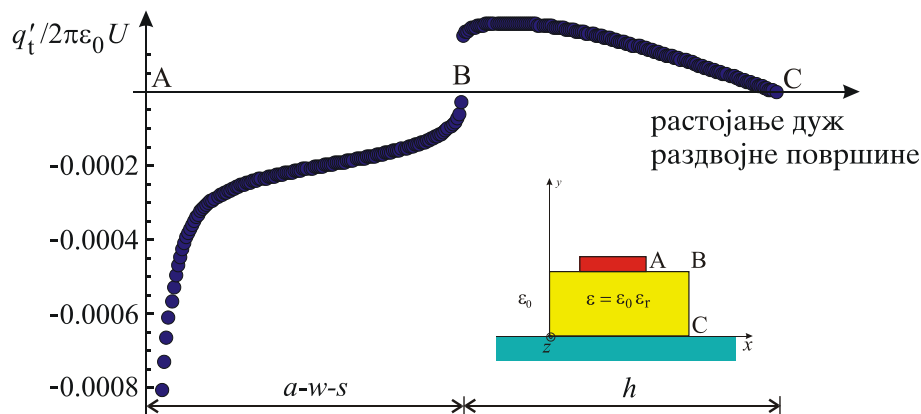


**Слика 7.2 – Конвергенција резултата за
карактеристичну импедансу.**

Еквипотенцијале и расподела везаног подужног наелектрисања дуж раздвојне површина вакуум-диелектрик приказани су на *Сликама 7.3 и 7.4*, респективно, за параметре вода: $\epsilon_r = 3$, $a/w = 3$, $s/w = 1.0$, $h/w = 1.0$ и $t/w = 0.05$. Број непознатих за резултате приказане графички и табеларно је око 800.



Слика 7.3 – Еквипотенцијале.



**Слика 7.4 – Нормализована расподела везаног подужног наелектрисања дуж
раздвојне површине два диелектрика.**

Написан програмски код може да анализира симетричне и асиметричне микротракасте водове. Утицај асиметричног положаја траке у односу на подлогу од диелектрика може да се уочи уз Табеле 7.2.

Табела 7.2 – Поређење вредности за карактеристичну импедансу и ефективну релативну диелектричну константу микротракастог вода за различите вредности параметра s/w за: $h/w=1.0$, $a/w=3$, $t/w=0.05$ и $\epsilon_r=3$.

$\frac{s}{w}$	HBEM		FEMM		$\delta[\%]$
	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	
0.1	2.0139	85.838	2.0206	85.631	0.24
0.2	2.0616	84.841	2.0685	84.632	0.25
0.3	2.0979	84.103	2.1051	83.895	0.25
0.4	2.1256	83.553	2.1330	83.343	0.25
0.5	2.1466	83.143	2.1543	82.932	0.25
0.6	2.1623	82.842	2.1670	82.630	0.26
0.7	2.1735	82.628	2.1812	82.417	0.26
0.8	2.1810	82.485	2.1888	82.275	0.25
0.9	2.1853	82.404	2.1932	82.192	0.26
1.0	2.1867	82.377	2.1946	82.166	0.26

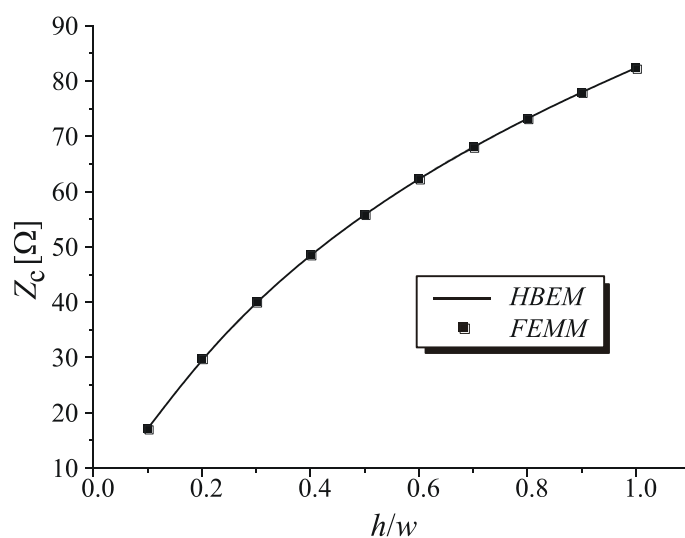
Када је трака постављена близу ивице подлоге од диелектрика ($s/w < 0.5$), приметан је утицај на вредности карактеристичне импедансе. Такође, у овој табели је приказано и релативно одступање резултата добијених применом *HBEM*-а и *FEMM*-а, израчунато коришћењем израза (4.13). Резултати за ефективну релативну диелектричну константу и карактеристичну импедансу које је дала примена *HBEM*-а се веома добро слажу са резултатима добијених симулацијом програмским пакетом *FEMM*. Одступање резултата је мање од 0.3 %.

Са циљем да се додатно верификују резултати добијени применом хибридног метода граничних елемената, извршено је њихово поређење са онима објављеним од стране других истраживача и саопштеним у одговарајућим научним радовима, Табела 7.3. Добијено је веома добро слагање резултата.

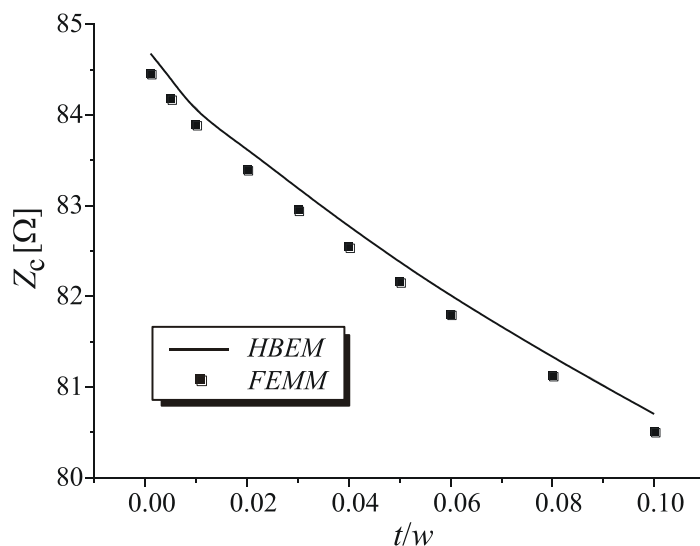
Расподела карактеристичне импедансе микротракастог вода са променом параметара h/w и t/w приказана је на Слици 7.5. Приказане су и вредности добијене применом *FEMM*-а, [56]. Параметри микротракастог вода су: $\epsilon_r=3$, $a/w=3$, $s/w=1.0$ и $t/w=0.05$ (Слика 7.5а), тј. $\epsilon_r=3$, $a/w=3$, $s/w=1.0$ и $h/w=1.0$ (Слика 7.5б).

Табела 7.3 – Карактеристична импеданса микротракастог вода са подлогом од диелектрика коначне и бесконачне ширине за: $\epsilon_r = 16$, $h/w = 0.5$, $s/w = 15.0$, $a/w = 31.0$ и $t/w = 0.01$.

Метод	Z_c [Ω]
Bryant & Weiss [19]	26.644
Farrar & Adams [21]	26.756
Smith [196]	26.879
Smith [29], коначна ширина супстрата	26.783
НВЕМ, коначна ширина супстрата	26.808



а)

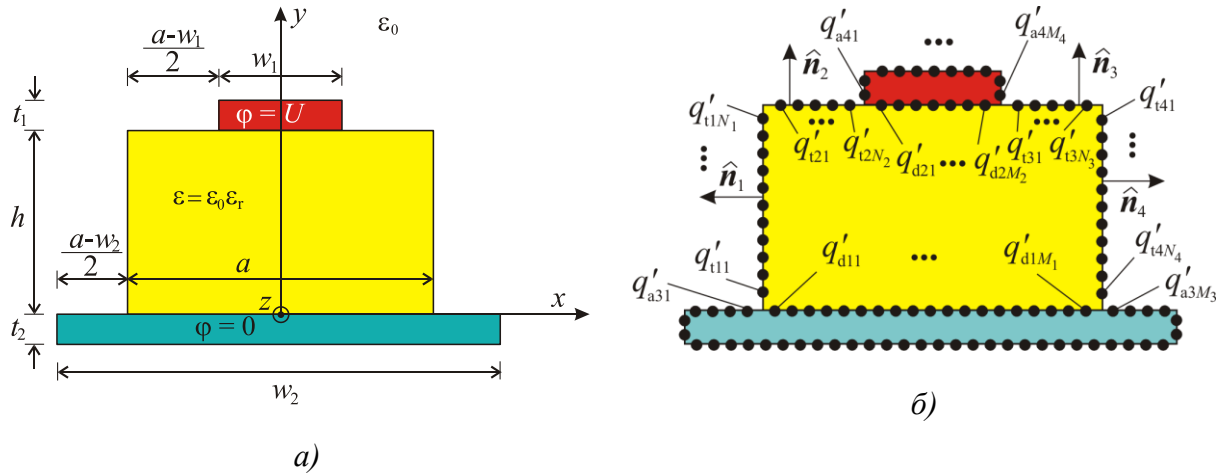


б)

Слика 7.5 – Зависност карактеристичне импедансе микротракастог вода од параметара h/w (а) и t/w (б).

7.2. Микротракасти вод са уземљеном равни коначне ширине

Реалнији микротракасти вод од претходно анализирани структуре је случај када је уземљена равна коначне ширине, [162]. Анализа такве структуре, без икаквих ограничења, могућа је коришћењем хибридног метода граничних елемената. Геометрија разматраног микротракастог вода, као и одговарајући *НВЕМ* модел, формиран применом поступка описаног у Поглављу 4, приказани су на Слици 7.6.



Слика 7.6 – Микротракасти вод са уземљеном равни коначне ширине (а) и одговарајући модел.

Потенцијал у произвољној тачки система дат је изразом:

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_0 - \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^{M_i} \frac{q'_{dim}}{2\pi\epsilon} \ln \sqrt{(x-x_{dim})^2 + (y-y_{dim})^2} - \\ - \sum_{i=3}^4 \sum_{m=1}^{M_i} \frac{q'_{aim}}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{(x-x_{aim})^2 + (y-y_{aim})^2} - \\ - \sum_{i=1}^4 \sum_{n=1}^{N_i} \frac{q'_{tin}}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{(x-x_{tin})^2 + (y-y_{tin})^2}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где су:

- Индекси "d", "a" и "t" уз ознаке наелектрисања еквивалентних електрода су скраћенице од енглеских речи "*dielectric*", "*air*" и "*total*", респективно.
- M_i је број еквивалентних електрода на металној проводној траци са слободним наелектрисањима q'_{dim} , која су смештена у средини ϵ ($i=1,2, m=1,\dots,M_i$), и са слободним наелектрисањима q'_{aim} , која су смештена у вакууму ($i=3,4, m=1,\dots,M_i$).

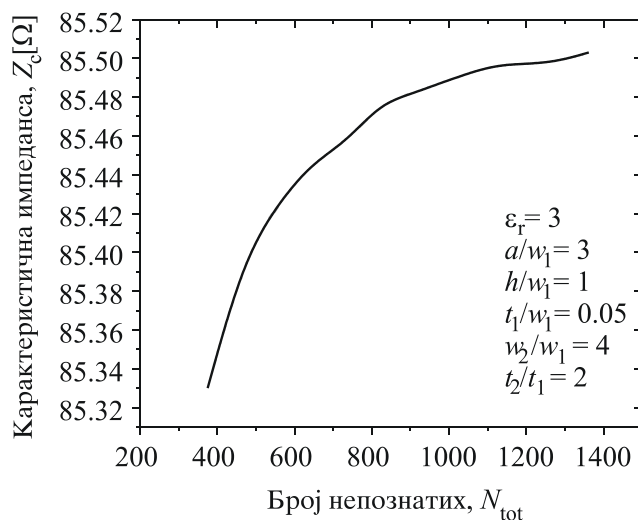
- N_i је број еквивалентних електрода на раздвојној површини два диелектрика са везаним наелектрисањима q'_{tin} , која су смештена у вакууму ($i=1,\dots,4$, $n=1,\dots,N_i$),
- (x_{dim}, y_{dim}) , (x_{ajm}, y_{ajm}) , (x_{tkn}, y_{tkn}) су позиције еквивалентних електрода ($i=1,2$, $j=3,4$, $k=1,\dots,4$),
- φ_0 је непозната адитивна константа која се одређује из услова електричне неутралности читавог система.

Укупан број непознатих је: $N_{tot} = \sum_{i=1}^4 M_i + \sum_{i=1}^4 N_i + 1$.

Вредности ефективне релативне диелектричне константе, карактеристичне импедансе и време израчунавања за: $\epsilon_r = 3$, $a/w_1 = 3$, $h/w_1 = 1$, $t_1/w_1 = 0.05$, $w_2/w_1 = 4$ и $t_2/t_1 = 2$ приказани су у Табели 7.4 и на Слици 7.7. Остварена је добра конвергенција резултата за кратко време израчунавања.

Табела 7.4 – Конвергенција резултата и време израчунавања.

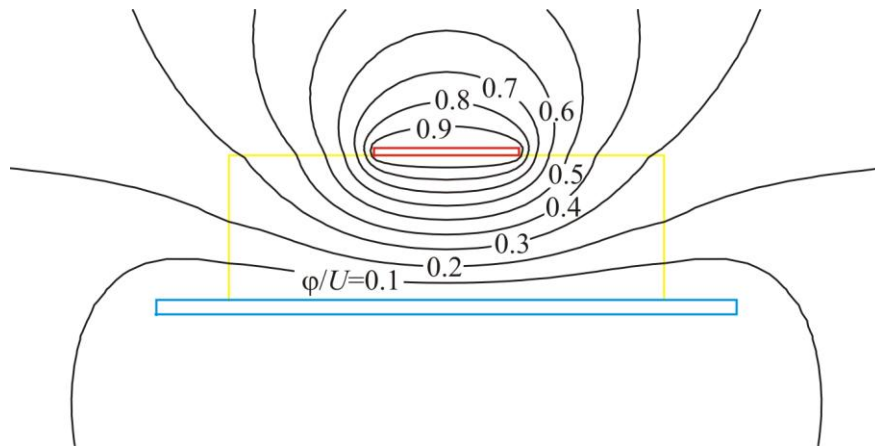
N_{tot}	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	$t(s)$
467	2.2533	85.396	7.0
560	2.2547	85.426	10.3
646	2.2556	85.446	13.6
734	2.2564	85.457	17.4
824	2.2565	85.477	22.0
910	2.2572	85.482	27.0
1095	2.2580	85.496	39.3
1181	2.2588	85.497	45.4
1274	2.2592	85.498	54.0
1362	2.2591	85.503	61.7



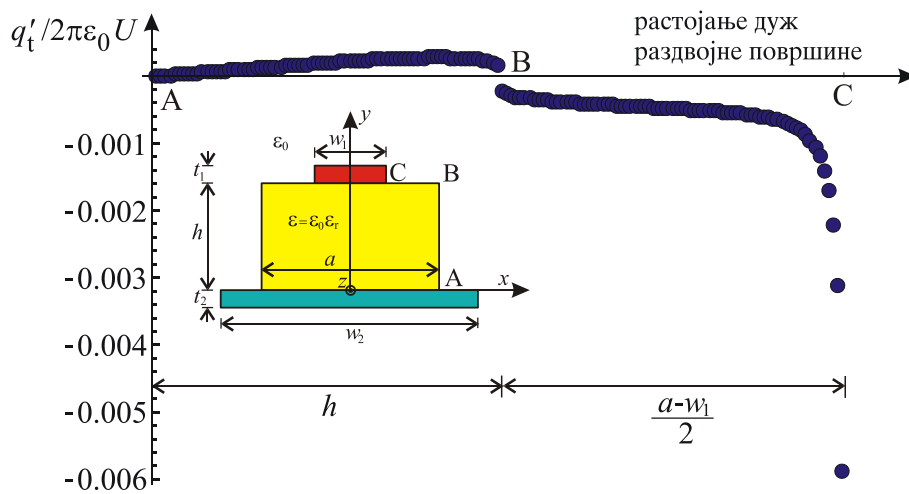
Слика 7.7 – Конвергенција резултата за карактеристичну импедансу.

Еквипотенцијале и нормализована расподела везаног подужног наелектрисања дуж раздвојне површине диелектрика дати су на Сликама 7.8 и 7.9, респективно за: $\epsilon_r = 3$, $a/w_1 = 3$, $h/w_1 = 1$, $t_1/w_1 = 0.05$, $w_2/w_1 = 4$ и $t_2/t_1 = 2$.

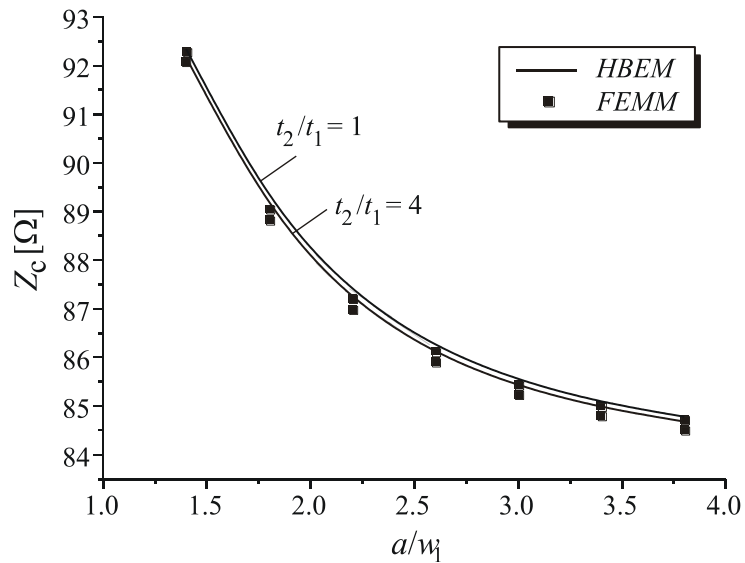
Промена карактеристичне импедансе микротракастог вода са променом параметара a/w_1 и t_2/t_1 за: $\epsilon_r = 3$, $h/w_1 = 1$, $t_1/w_1 = 0.05$ и $w_2/w_1 = 4$, приказана је на Слици 7.10.



Слика 7.8 – Еквипотенцијале.



Слика 7.9 – Нормализована расподела везаног подужног наелектрисуња дуж раздвојне површине два диелектрика.



Слика 7.10 – Зависност карактеристичне импедансе вода од параметара a/w_1 и t_2/t_1 .

Са слике се види да утицај односа t_2/t_1 на карактеристичну импедансу овог вода није значајан. Ефективна релативна диелектрична константа, карактеристична импеданса и релативна грешка тј. одступање *HBEM* и *FEMM* резултата, приказани су у Табели 7.5. Максимално одступање резултата је око 0.17 %. Укупан број непознатих је 800.

Табела 7.5 – Поређење резултата за ефективну релативну диелектричну константу и карактеристичну импедансу са променом параметра w_2/w_1 за: $\epsilon_r = 3$,

$$a/w_1 = 1, h/w_1 = 1, t_1/w_1 = 0.05 \text{ и } t_2/t_1 = 2.$$

$\frac{w_2}{w_1}$	<i>HBEM</i>		<i>FEMM</i>		δ [%]
	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	
3.4	2.2839	86.517	2.2896	86.396	0.14
3.6	2.2738	86.131	2.2806	86.000	0.15
3.8	2.2656	85.792	2.2725	85.659	0.15
4.0	2.2580	85.496	2.2655	85.361	0.16
4.2	2.2523	85.234	2.2596	85.091	0.17
4.4	2.2463	85.003	2.2543	84.855	0.17
4.6	2.2413	84.785	2.2495	84.652	0.16
4.8	2.2370	84.603	2.2455	84.460	0.17
5.0	2.2323	84.442	2.2416	84.298	0.17

У Табели 7.6 упоређени су резултати за карактеристичну импедансу микротракастог вода коначне ширине подлоге од диелектрика, добијени применом хибридног метода граничних елемената, метода савршеног покретног електричног зида, [31], и метода момената, [29].

Табела 7.6 - Поређење резултата за карактеристичну импедансу микротракастог

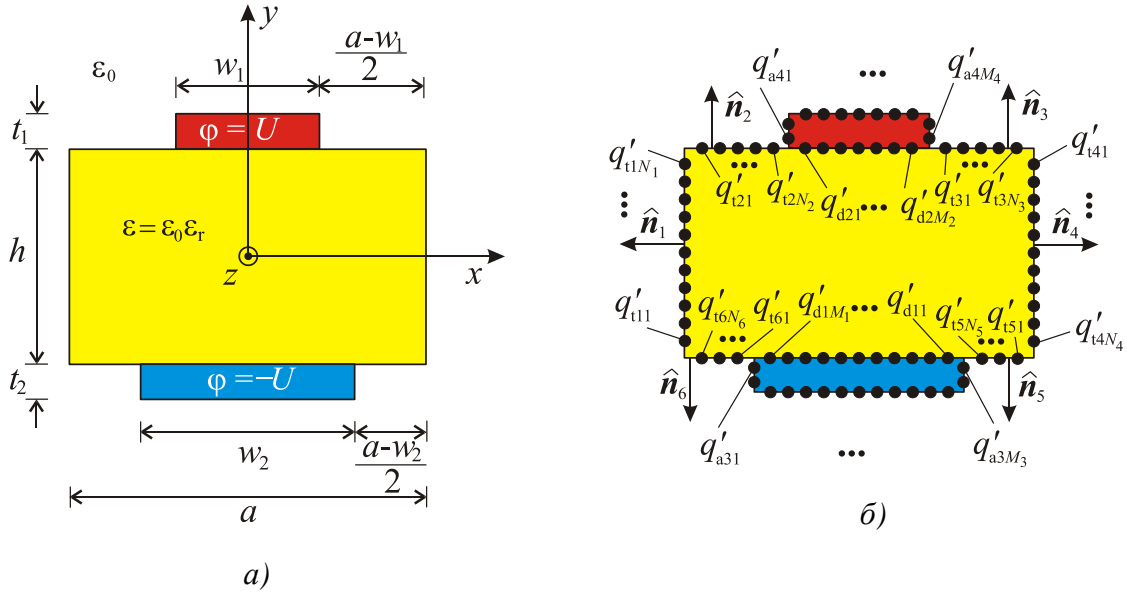
$$\text{вода за: } \epsilon_r = 2.2, a/w_2 = 1.0, t_1/t_2 = 1.0 \text{ и } t_1/w_1 = 0.01.$$

w_1/h	a/w_1	Z_c [Ω]			
		Svacina [31]	Smith & Chang [29]	<i>HBEM</i>	<i>FEMM</i>
3.12	11.0	49.84	50.0	48.27	48.96
3.12	7.0	49.86	50.0	48.71	49.03
2.71	5.0	54.60	54.6	53.85	54.17
2.38	3.0	59.54	59.2	59.61	59.67
2.33	2.0	63.31	63.8	62.63	62.73
2.27	1.5	67.97	68.4	67.48	67.44
2.53	1.0	73.20	73.0	72.23	72.15

Из табеле се уочава добро слагање резултата.

7.3. Широм страном спрегнут микротракасти вод

Геометрија широм страном спрегнутог микротракастог вода са диелектричним супстратом коначне ширине, [156], као и одговарајући модел, добијен применом хибридног метода граничних елемената, приказани су на Слици 7.11.



Слика 7.11 – Широм страном спрегнут микротракасти вод (а) и одговарајући модел.

Потенцијал у произвољној тачки система дат је изразом:

$$\begin{aligned}
 \varphi = \varphi_0 - \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^{M_i} \frac{q'_{dim}}{2\pi\epsilon} \ln \sqrt{(x - x_{dim})^2 + (y - y_{dim})^2} - \\
 - \sum_{j=3}^4 \sum_{m=1}^{M_j} \frac{q'_{ajm}}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{(x - x_{ajm})^2 + (y - y_{ajm})^2} - \\
 - \sum_{k=1}^6 \sum_{n=1}^{N_k} \frac{q'_{tkn}}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{(x - x_{tkn})^2 + (y - y_{tkn})^2},
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

где су:

- Индекси "d", "a" и "t" уз ознаке наелектрисања еквивалентних електрода су скраћенице од енглеских речи "dielectric", "air" и "total", респективно.
- M_i и M_j су број еквивалентних електрода на металним проводним тракама са слободним наелектрисањима q'_{dim} , која су смештена у средини ϵ ($i=1,2$, $m=1,\dots,M_i$), и са слободним наелектрисањима q'_{ajm} , која су смештена у вакууму ($j=3,4$, $m=1,\dots,M_j$).

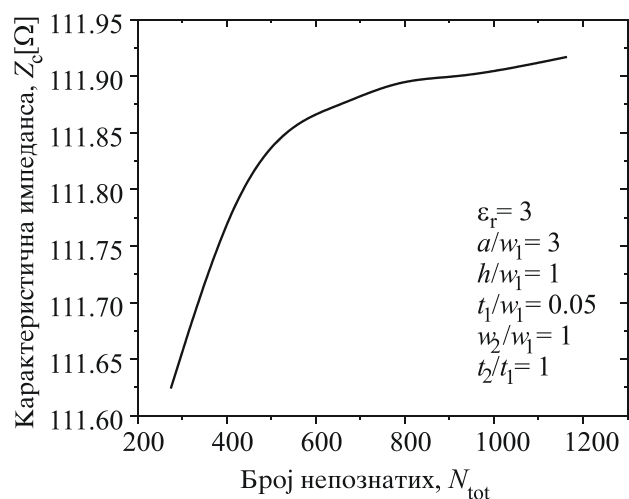
- N_k је број еквивалентних електрода на раздвојној површини два диелектрика са везаним наелектрисуњима q'_{tkn} , која су смештена у вакууму ($k=1, \dots, 6$, $n=1, \dots, N_k$),
- (x_{dim}, y_{dim}) , (x_{ajm}, y_{ajm}) , (x_{tkn}, y_{tkn}) су позиције еквивалентних електрода ($i=1, 2$, $j=3, 4$, $k=1, \dots, 6$),
- φ_0 је непозната адитивна константа која се одређује из услова електричне неутралности читавог система.

Укупан број непознатих је: $N_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^2 M_i + \sum_{j=3}^4 M_j + \sum_{k=1}^6 N_k + 1$.

Конвергенција резултата и време израчунавања приказани су у Табели 7.7 и на Слици 7.12, за параметре: $\varepsilon_r = 3$, $a/w_1 = 3$, $h/w_1 = 1$, $t_1/w_1 = 0.05$, $w_2/w_1 = 1$ и $t_2/t_1 = 1$, где је N_{tot} укупан број непознатих.

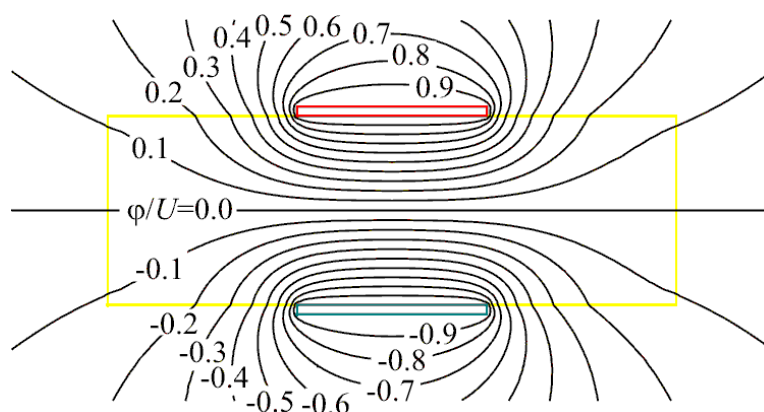
Табела 7.7 – Конвергенција резултата и време израчунавања.

N_{tot}	$\varepsilon_r^{\text{eff}}$	Z_c [Ω]	t (s)
274	2.3258	111.624	2.6
408	2.3264	111.792	5.6
532	2.3273	111.857	9.7
652	2.3289	111.874	14.5
786	2.3296	111.897	21.2
916	2.3310	111.899	28.2
1040	2.3313	111.907	37.7
1164	2.3315	111.917	47.4

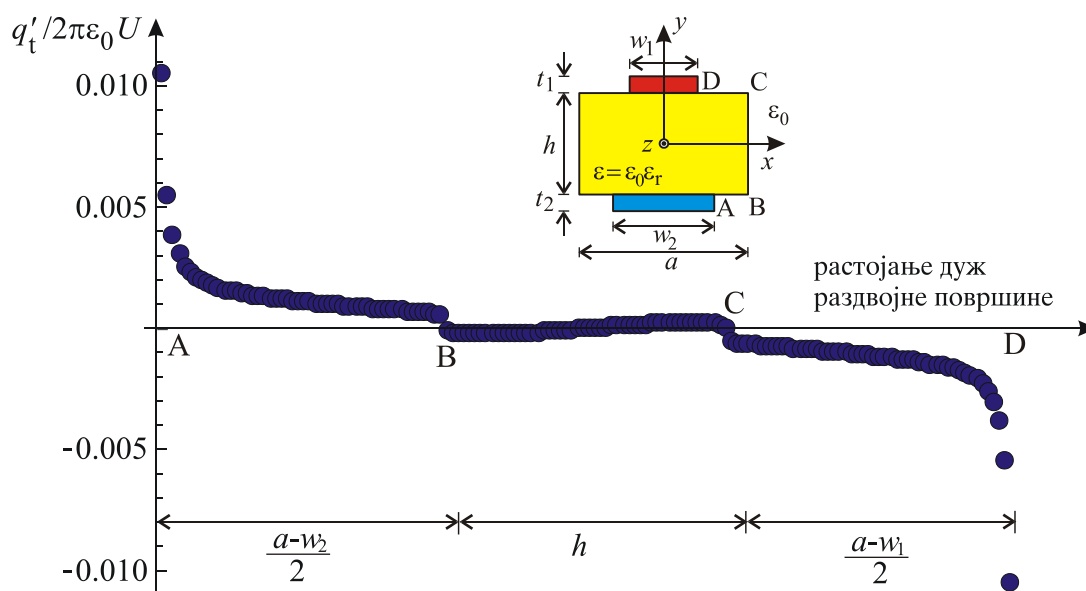


Слици 7.12 – Конвергенција резултата за карактеристичну импедансу.

Остварена је добра конвергенција резултата са релативно малим бројем непознатих величина за кратко време израчунавања, што је значајна предност овог метода у односу на остале. Еквипотенцијале и нормализована расподела везаних подужних наелектрисуња дуж раздвојне површине две средине приказани су на Сликама 7.13 и 7.14, респективно, за параметре: $\varepsilon_r = 3$, $a/w_1 = 3$, $h/w_1 = 1$, $t_1/w_1 = 0.05$, $w_2/w_1 = 1$ и $t_2/t_1 = 1$. Укупан број непознатих је 786.



Слика 7.13 – Еквипотенцијале.



Слика 7.14 – Нормализована расподела везаног подужног наелектрисања дуж раздвојне површине два диелектрика.

Поређење резултата за ефективну релативну диелектричну константу и карактеристичну импедансу анализираниог спрегнутог микротракастог вода за различите вредности параметара приказано је у Табелама 7.8-7.11. Ови резултати, добијени коришћењем хибридног метода граничних елемената, веома се добро слажу са онима које је дала примена *FEMM*-а, [56]. Релативна грешка је мања од 0.4 %.

Поређење резултата добијених применом *НВЕМ*-а са онима приказаним у [31] и [197] дато је у Табели 7.11. Може се уочити веома добро слагање између различитих метода за анализу спрегнутих микротракастих водова.

Табела 7.8 – Промена ефективне релативне диелектричне константе и карактеристичне импедансе спрегнутог микротракастог вода за различите вредности параметара h/w_1 када је: $\epsilon_r = 3$, $a/w_1 = 3$, $t_1/w_1 = 0.05$, $w_2/w_1 = 1$ и $t_2/t_1 = 1$.

h/w_1	HBEM		FEMM		$\delta[\%]$
	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	
0.2	2.6469	34.367	2.6476	34.332	0.10
0.4	2.5142	59.768	2.5149	59.749	0.03
0.6	2.4328	80.178	2.4357	80.107	0.09
0.8	2.3743	97.208	2.3805	97.113	0.10
1.0	2.3296	111.897	2.3382	111.716	0.16
1.2	2.2928	124.775	2.3037	124.479	0.24
1.4	2.2617	136.233	2.2733	135.877	0.26
1.6	2.2326	146.618	2.2457	146.169	0.31
1.8	2.2052	156.125	2.2197	155.596	0.34
2.0	2.1795	164.907	2.1949	164.296	0.37

Табела 7.9 – Промена ефективне релативне диелектричне константе и карактеристичне импедансе спрегнутог микротракастог вода за различите вредности параметара a/w_1 када је: $\epsilon_r = 3$, $h/w_1 = 1$, $t_1/w_1 = 0.05$, $w_2/w_1 = 1$ и $t_2/t_1 = 1$.

a/w_1	HBEM		FEMM		$\delta[\%]$
	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	
1.4	2.1749	115.891	2.1787	115.736	0.13
1.8	2.2719	113.369	2.2773	113.202	0.15
2.2	2.3086	112.446	2.3179	112.257	0.17
2.6	2.3238	112.056	2.3314	111.880	0.16
3.0	2.3296	111.897	2.3382	111.716	0.16
3.4	2.3329	111.798	2.3416	111.636	0.14
3.8	2.3339	111.754	2.3433	111.593	0.14
4.2	2.3341	111.734	2.3443	111.570	0.15
4.6	2.3341	111.716	2.3448	111.557	0.14
5.0	2.3340	111.697	2.3452	111.549	0.13

У [31] за одређивање карактеристичне импедансе примењен је метод покретног савршеног електричног зида, док се метод спектралног домена користи у [197]. Анализиран микротракасти вод има доњу равну коначне ширине и веома широк супстрат од диелектрика ($a = 20w_1$).

Табела 7.10 – Промена ефективне релативне диелектричне константе и карактеристичне импедансе спрегнутог микротракастог вода за различите вредности параметара t_1/w_1 када је: $\epsilon_r = 3$, $a/w_1 = 3$, $h/w_1 = 1$, $w_2/w_1 = 1$ и $t_2/t_1 = 1$.

t_1/w_1	HBEM		FEMM		δ [%]
	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	
0.01	2.3734	114.279	2.3684	114.270	0.01
0.02	2.3579	113.673	2.3597	113.525	0.13
0.03	2.3470	112.963	2.3519	112.868	0.08
0.04	2.3374	112.424	2.3449	112.267	0.14
0.05	2.3296	111.897	2.3382	111.716	0.16
0.06	2.3228	111.393	2.3321	111.194	0.18
0.08	2.3117	110.432	2.3207	110.243	0.17
0.10	2.3018	109.553	2.3103	109.377	0.16

Као што је у [31] напоменуто, у раду [197] узет је у обзир утицај оклопљеног вода на параметре спрегнутог микротракастог вода. То је главни разлог одступања резултата добијених у радовима [31] и [197], а самим тим и оних добијених применом хибридног метода граничних елемената.

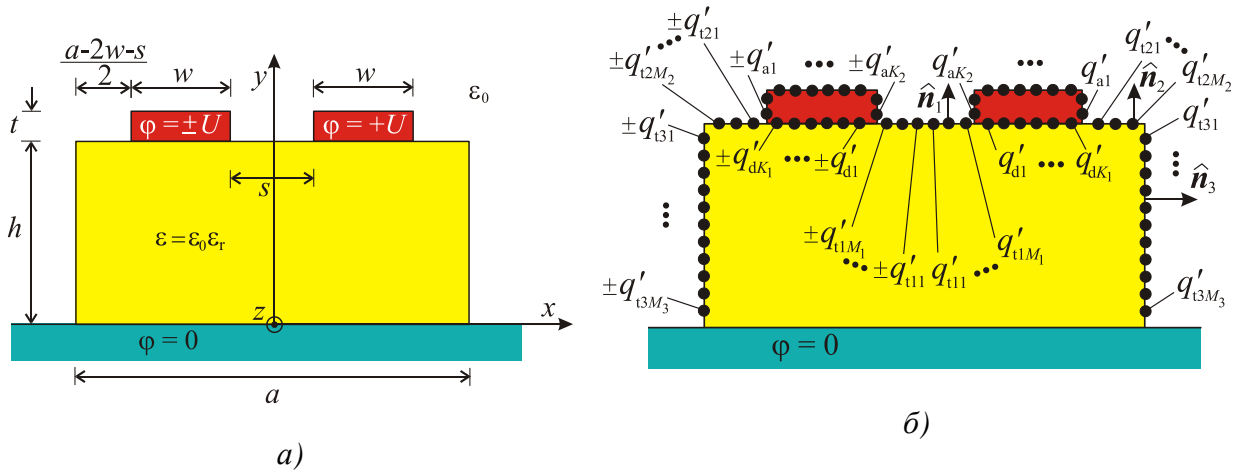
Табела 7.11 – Поређење вредности за карактеристичну импедансу спрегнутог микротракастог вода када је $\epsilon_r = 9.8$, $h = 1.5$ mm, $a = 20w_1$, $w_1/t_1 = 32$ и $t_2/t_1 = 1$.

w_1 [mm]	w_2 [mm]	Z_c [Ω]	Z_c [Ω]	Z_c [Ω]
		Svacina [31]	Chramiec & Janiczak [197]	HBEM
1.3	2.3	61.4	60.6	61.3
1.14	1.5	72.1	70.7	72.0
1.06	1.29	76.8	75.8	76.9
0.9	0.98	86.4	85.9	87.0
0.82	0.88	90.8	90.0	91.9
0.66	0.66	102.1	101.0	104.2

7.4. Симетрично спрегнут микротракасти вод изнад уземљене неограничене равни

Најосновнија конфигурација симетрично спрегнутог микротракастог вода, постављеног изнад савршено проводне, уземљене равни неограничене ширине дата је на *Слици 7.15a*. Као што је већ приказано у претходним примерима и објашњено у Поглављу 4, са циљем да се примени хибридни метод граничних елемената, површине проводних трака, као и развдојне површине диелектрик-вакуум деле се на сегменте, а

затим сваки од њих замењује еквивалентним електродама, постављеним у одговарајућој средини. *НВЕМ* модел приказан је на *Слици 7.15б*, [154].



Слика 7.15 – Симетрично спрегнут микротракасти вод изнад уземљене бесконачне равни (а) и одговарајући модел (б).

Тотална наелектрисања, која постоје на раздвојним површинама диелектрик-вакуум, су једино везана оптерећења, јер слободна наелектрисања постоје само на проводницима микротракастог вода.

За одређивање електричног скалар потенцијала у околини система са *Слике 7.15б* примењена је најпре теорема lika у равном огледалу, као и у Одељку 7.1, с обзиром да се микротракасти вод налази изнад савршене, неограничено дуге, проводне равни нултог потенцијала. Након примене теореме lika и користећи постојећу симетрију, електрични скалар потенцијал у произвољној тачки система са *Слике 7.15б*, дат је изразом:

$$\begin{aligned} \varphi^{(e, o)} = & \sum_{k=1}^{K_1} \frac{q'_{dk}}{2\pi\epsilon} \left[\ln \sqrt{\frac{(x-x_{dk})^2 + (y+y_{dk})^2}{(x-x_{dk})^2 + (y-y_{dk})^2}} \pm \ln \sqrt{\frac{(x+x_{dk})^2 + (y+y_{dk})^2}{(x+x_{dk})^2 + (y-y_{dk})^2}} \right] + \\ & + \sum_{j=1}^{K_2} \frac{q'_{aj}}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln \sqrt{\frac{(x-x_{aj})^2 + (y+y_{aj})^2}{(x-x_{aj})^2 + (y-y_{aj})^2}} \pm \ln \sqrt{\frac{(x+x_{aj})^2 + (y+y_{aj})^2}{(x+x_{aj})^2 + (y-y_{aj})^2}} \right] + \\ & + \sum_{i=1}^3 \sum_{m=1}^{M_i} \frac{q'_{tim}}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln \sqrt{\frac{(x-x_{tim})^2 + (y+y_{tim})^2}{(x-x_{tim})^2 + (y-y_{tim})^2}} \pm \ln \sqrt{\frac{(x+x_{tim})^2 + (y+y_{tim})^2}{(x+x_{tim})^2 + (y-y_{tim})^2}} \right], \end{aligned} \quad (7.4)$$

при чему знак "+" одговара парном режиму ("even" – е), док је знак "-" за непарни ("odd" – о) режим.

- Индекси "d", "a" и "t" уз ознаке наелектрисања еквивалентних електрода су скраћенице од енглеских речи "dielectric", "air" и "total", респективно.

- K_i ($i = 1, 2$) је број еквивалентних електрода на металним проводним тракама са слободним наелектрисуњима q'_{dk} ($k = 1, \dots, K_1$), која су смештена у средини ε , и са слободним наелектрисуњима q'_{aj} ($j = 1, \dots, K_2$), која су смештена у вакууму.
- M_i ($i = 1, \dots, 3$) је број еквивалентних електрода на раздвојној површини два диелектрика са везаним наелектрисуњима q'_{tim} , која су смештена у вакууму ($m = 1, \dots, M_i$),
- (x_{dk}, y_{dk}) , (x_{aj}, y_{aj}) , (x_{tim}, y_{tim}) су позиције еквивалентних електрода ($k = 1, \dots, K_1$, $j = 1, \dots, K_2$, $i = 1, 2, 3$, $m = 1, \dots, M_i$).

Компоненте вектора електричног поља одређују се користећи израз $\mathbf{E} = -\text{grad}(\varphi)$, а укупан број непознатих N_{tot} , одређује се као:

$$N_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^2 K_i + \sum_{i=1}^3 M_i.$$

Коришћењем метода подешавања у тачкама за потенцијал на површини десног проводника, (7.4), и подешавањем нормалне компоненте електричног поља на раздвојној површини слојева диелектрика, (4.8), формира се систем линеарних једначина, чијим решавањем је могуће одредити непозната слободна наелектрисуња на проводницима вода, као и везана (тотална) наелектрисуња на раздвојној површини диелектрика.

Подужна капацитивност спрегнутог микротракастог вода одређује се као

$$C'^{(e,o)} = \frac{1}{U} \left(\sum_{k=1}^{K_1} q'_{dk} + \sum_{k=1}^{K_2} q'_{ak} \right). \quad (7.5)$$

Када је позната подужна капацитивност, карактеристична импеданса се одређује при меном израза $Z_c^{(e,o)} = Z_{c0}^{(e,o)} / \sqrt{\varepsilon_r^{\text{eff}(e,o)}}$, где је $\varepsilon_r^{\text{eff}(e,o)} = C'^{(e,o)} / C_0'^{(e,o)}$ ефективна релативна диелектрична константа, док је $Z_{c0}^{(e,o)}$ карактеристична импеданса симетрично спрегнутог микротракастог вода када је диелектрик вакуум, за паран и непаран режим, респективно.

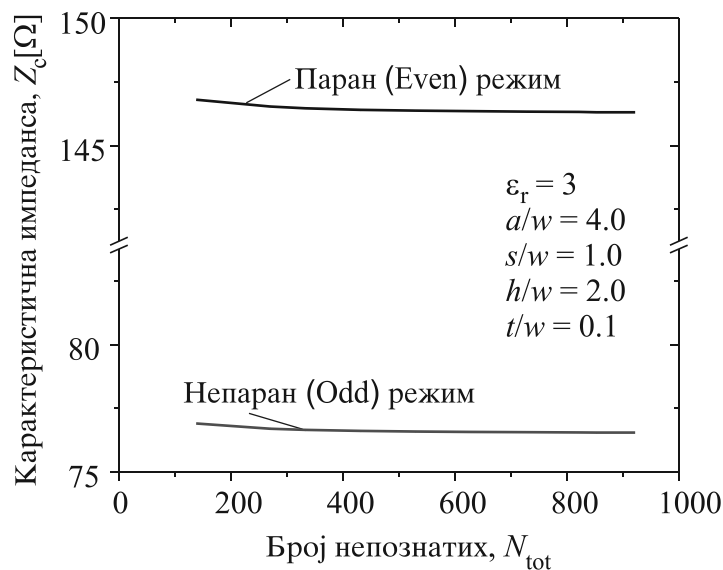
Са циљем да се верификују добијени резултати, примењен је метод коначних елемената, [56].

Вредности за ефективну релативну диелектричну константу, карактеристичну импедансу, конвергенција резултата и потребно време израчунавања приказани су у Табели

7.12 и на Слици 7.16 за: $\epsilon_r = 3$, $a/w = 4$, $s/w = 1$, $t/w = 0.1$ и $h/w = 2$, где је N_{tot} укупан број непознатих.

Табела 7.12 – Конвергенција резултата и време израчунавања.

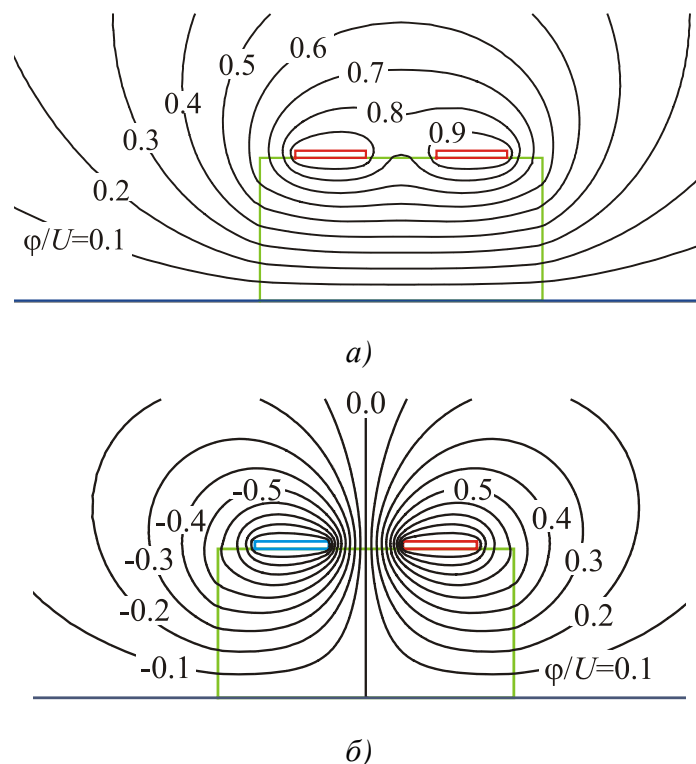
N_{tot}	Паран режим			Непаран режим		
	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	$t(s)$	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	$t(s)$
138	1.9976	146.808	2.4	1.8130	76.901	2.4
270	2.0082	146.540	9.0	1.8281	76.696	8.9
333	2.0107	146.473	13.6	1.8314	76.650	13.5
432	2.0131	146.411	23.1	1.8346	76.608	22.4
530	2.0144	146.380	34.9	1.8365	76.586	34.0
628	2.0153	146.358	50.1	1.8378	76.571	48.0
727	2.0160	146.339	64.9	1.8388	76.559	64.5
822	2.0165	146.328	83.6	1.8395	76.552	81.1
853	2.0169	146.317	87.8	1.8399	76.545	88.7
922	2.0170	146.317	103.9	1.8401	76.544	104.9



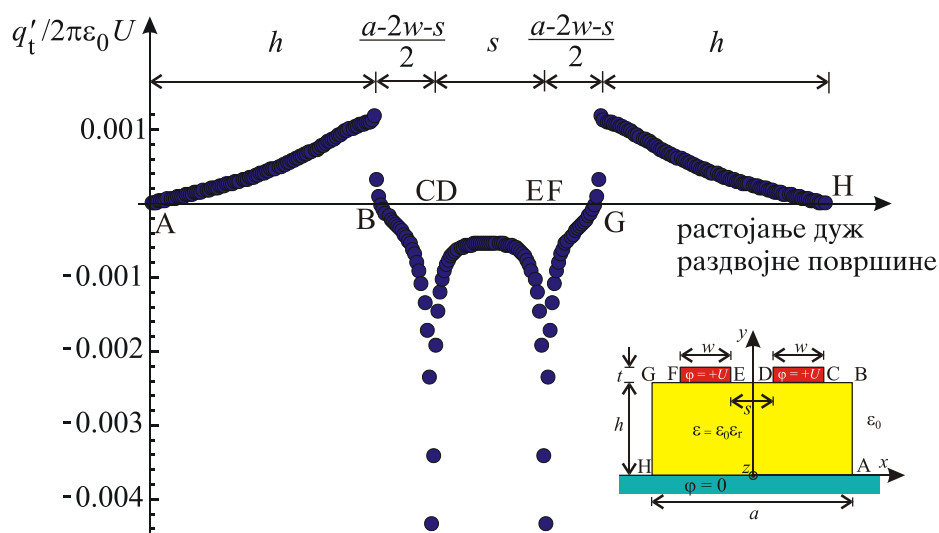
Слика 7.16 – Конвергенција резултата за карактеристичну импедансу.

Из табеле се може уочити веома добра конвергенција резултата са малим бројем променљивих. Такође, време израчунавања је веома кратко. Са друге стране, применом програмског пакета *FEMM*, време потребно за реализацију и симулацију идентичног проблема је око 15 минута са мрежом од неколико стотина хиљада коначних елемената. При томе је $Z_c^{(e)} = 145.924 \Omega$, док је $Z_c^{(o)} = 76.572 \Omega$. Уколико је мрежа мање густине, долази до значајнијег одступања резултата.

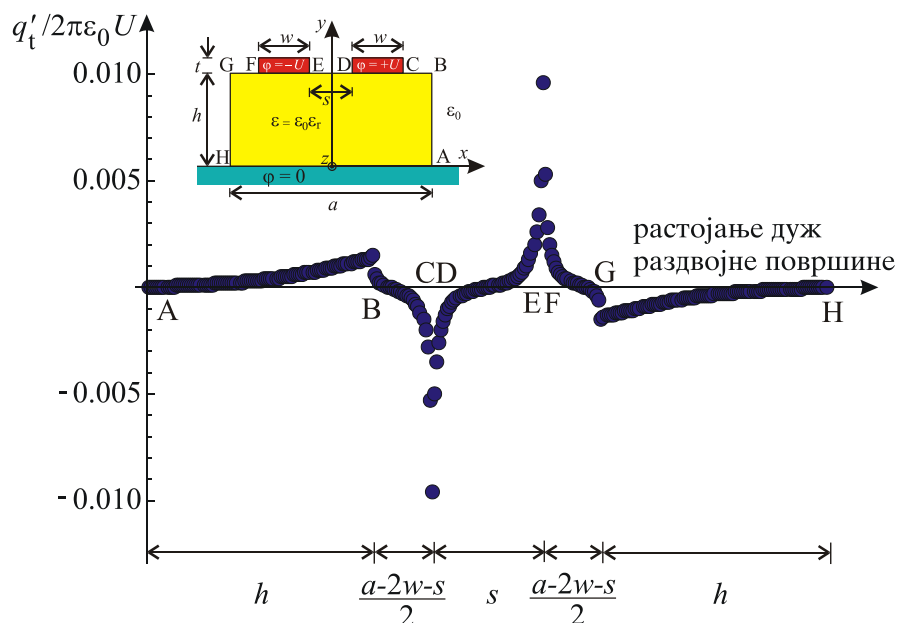
Еквипотенцијале и расподела везаног наелектрисања дуж раздвојне површине два диелектрична слоја приказани су на Сликама 7.17 – 7.19 за параметре: $\epsilon_r = 3$, $a/w = 4$, $s/w = 1$, $t/w = 0.1$ и $h/w = 2$. Укупан број непознатих је 822 за све резултате приказане у наставку табеларно и графички.



Слика 7.17 – Еквипотенцијале: паран режим (а) и непаран режим (б).



Слика 7.18 – Нормализована расподела везаног подужног наелектрисања дуж раздвојне површине два диелектрика (паран режим).



Слика 7.19 – Нормализована расподела везаног подужног наелектрисања дуж раздвојне површине два диелектрика (непаран режим).

Поређење резултата за ефективну релативну диелектричну константу и карактеристичну импедансу за различите вредности параметра приказано је у Табелама 7.13 и 7.14. Из ових табела се може уочити одлично слагање резултата добијених применом хибридног метода граничних елемената и програмског пакета *FEMM*. Одступање резултата је углавном мање од 0.55 %.

Табела 7.13 – Поређење вредности за карактеристичну импедансу и ефективну релативну диелектричну константу за различите вредности параметра t/w за:

$$a/w = 4.0, h/w = 2.0, s/w = 1.0 \text{ и } \epsilon_r = 3.$$

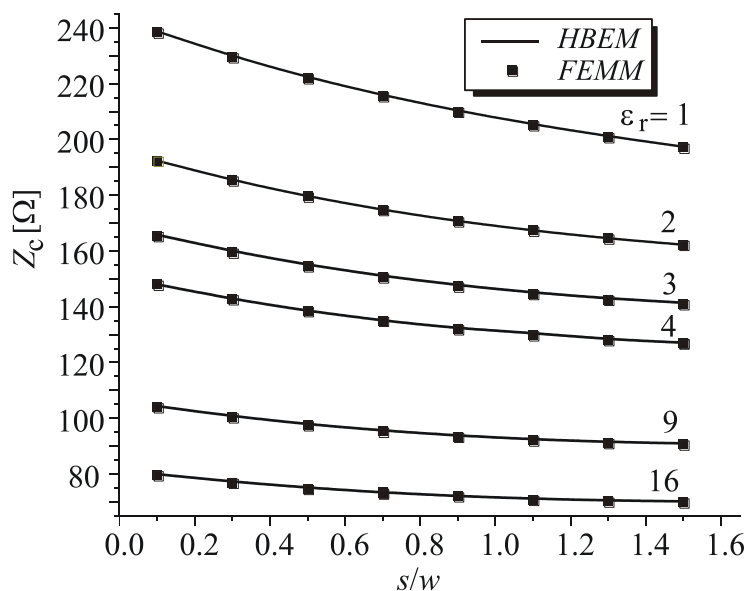
$\frac{t}{w}$	Паран режим					Непаран режим				
	<i>HVEM</i>		<i>FEMM</i>		δ [%]	<i>HVEM</i>		<i>FEMM</i>		δ [%]
	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]		ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	
0.01	2.053	149.77	2.055	149.45	0.21	1.911	81.84	1.921	81.41	0.52
0.02	2.042	149.45	2.050	148.95	0.34	1.901	81.08	1.911	80.71	0.45
0.03	2.015	149.00	2.046	148.49	0.34	1.893	80.40	1.901	80.06	0.42
0.04	2.034	148.56	2.042	148.05	0.34	1.879	79.84	1.892	79.45	0.49
0.05	2.030	148.17	2.038	147.65	0.35	1.871	79.25	1.884	78.88	0.47
0.06	2.026	147.77	2.035	147.28	0.33	1.864	78.67	1.876	78.30	0.47
0.07	2.023	147.39	2.031	146.92	0.32	1.857	78.11	1.868	77.76	0.45
0.08	2.021	147.03	2.028	146.58	0.31	1.850	77.58	1.861	77.26	0.41
0.09	2.018	146.69	2.025	146.24	0.31	1.844	77.07	1.854	76.74	0.43
0.10	2.015	146.36	2.022	145.92	0.30	1.837	76.57	1.847	76.27	0.39

Табела 7.14 – Поређење вредности за карактеристичну импедансу и ефективну релативну диелектричну константу за различите вредности параметра s/w за:

$$a/w = 4.0, h/w = 2.0, t/w = 0.1 \text{ и } \epsilon_r = 3.$$

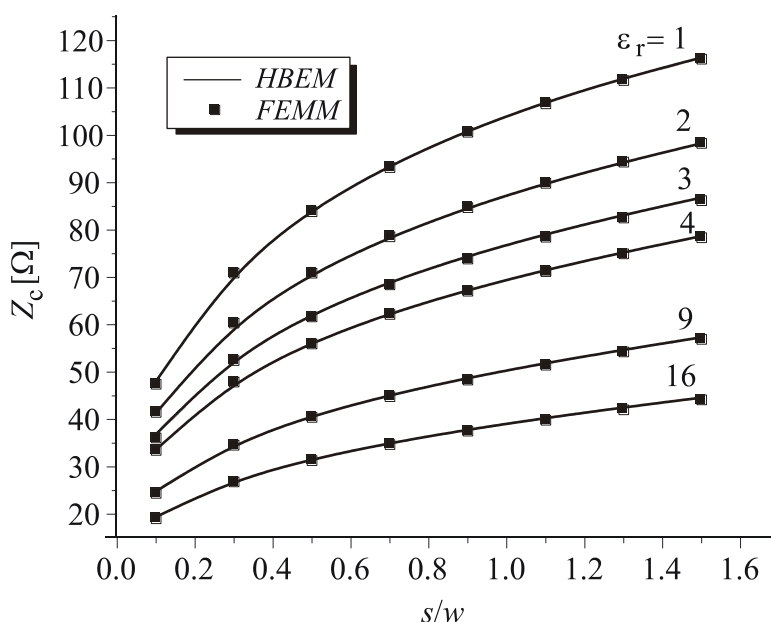
$\frac{s}{w}$	Паран режим					Непаран режим				
	HBEM		FEMM		$\delta[\%]$	HBEM		FEMM		$\delta[\%]$
	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$		ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	
0.1	2.073	165.81	2.078	165.42	0.23	1.703	36.37	1.721	36.11	0.72
0.3	2.066	159.90	2.072	159.49	0.26	1.815	52.75	1.828	52.47	0.53
0.5	2.056	155.04	2.062	154.60	0.28	1.839	61.94	1.850	61.67	0.44
0.7	2.042	151.04	2.049	150.59	0.30	1.845	68.72	1.855	68.43	0.42
0.9	2.025	147.76	2.032	147.32	0.30	1.841	74.17	1.851	73.89	0.38
1.1	2.004	145.10	2.011	144.67	0.30	1.832	78.80	1.841	78.50	0.38
1.3	1.979	143.01	1.985	142.58	0.30	1.818	82.86	1.827	82.54	0.39
1.5	1.948	141.42	1.955	141.00	0.30	1.799	86.53	1.807	86.22	0.36

На Сликама 7.20 и 7.21 приказан је утицај релативне диелектричне константе подлоге на вредности карактеристичне импедансе симетрично спрегнутог микротракастог вода, за паран и непаран режим, респективно, са променом растојања између проводних трака. Такође, добијене вредности су упоређене са резултатима које је дала примена програмског пакета *FEMM*. Остварено је веома добро слагање резултата.



Слика 7.20 – Расподела карактеристичне импедансе за паран режим са променом параметра s/w и релативне диелектричне константе за:

$$a/w = 4.0, h/w = 2.0 \text{ и } t/w = 0.1.$$



Слика 7.21 – Расподела карактеристичне импедансе за непаран режим са променом параметра s/w и релативне диелектричне константе за:

$$a/w = 4.0, h/w = 2.0 \text{ и } t/w = 0.1.$$

Са слике је очигледно да порастом вредности релативне диелектричне константе опада карактеристична импеданса, док са повећањем растојања између трака, вредност карактеристичне импедансе расте за непаран, а опада за паран режим рада.

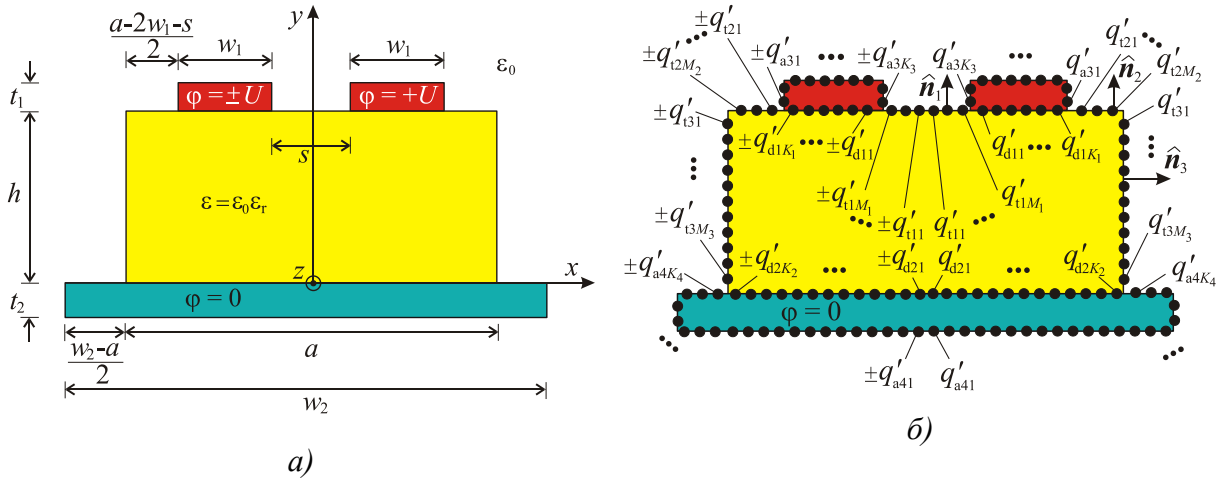
7.5. Симетрично спрегнут микротракасти вод са уземљеном равни коначне ширине

У претходном примеру, симетрично спрегнут микростип налазио се изнад савршено проводне, неограничене, уземљене равни.

Симетрично спрегнути микротракасти водови могу да се користе за реализацију микроталасних филтара, кола за прилагођење, линија за кашњење, за пројектовање усмерених спрежњака, па је зато важно анализирати реалнији случај од претходно приказаног. Геометрија проблема и одговарајући *HBEM* модел приказани су на *Слици 7.22*, [155].

Примењујући процедуру описану у Поглављу 4, као и у претходном примеру, површине микротракастог вода се сегментирају, замењују еквивалентним електродама и користећи постојећу симетрију формира еквивалентни систем са *Слике 7.22б*.

Електрични скалар потенцијал у произвољној тачки $M(x, y)$ је



Слика 7.22 – Симетрично спрегнут микротракасти вод са уземљеном равни коначне ширине (a) и одговарајући модел (б).

$$\begin{aligned}
 \varphi^{(e,o)} = \varphi_0^{(e,o)} - \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{K_i} \frac{q'_{dik}}{2\pi\epsilon} & \left[\ln \sqrt{(x - x_{dik})^2 + (y - y_{dik})^2} \pm \right. \\
 \pm \ln \sqrt{(x + x_{dik})^2 + (y - y_{dik})^2} & \left. \right] - \sum_{i=3}^4 \sum_{k=1}^{K_i} \frac{q'_{aik}}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln \sqrt{(x - x_{aik})^2 + (y - y_{aik})^2} \pm \right. \\
 \pm \ln \sqrt{(x + x_{aik})^2 + (y - y_{aik})^2} & \left. \right] - \sum_{i=1}^3 \sum_{m=1}^{M_i} \frac{q'_{tim}}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln \sqrt{(x - x_{tim})^2 + (y - y_{tim})^2} \pm \right. \\
 \pm \ln \sqrt{(x + x_{tim})^2 + (y - y_{tim})^2} & \left. \right],
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

при чему знак "+" треба узети за паран ("even" – е), а знак "-" за непаран ("odd" – о) режим.

- Индекси "d", "a" и "t" уз ознаке наелектрисања еквивалентних електрода су скраћенице од енглеских речи "dielectric", "air" и "total", респективно.
- K_i је број еквивалентних електрода на металним проводним тракама са слободним наелектрисањима q'_{dik} ($k=1, \dots, K_i$, $i=1,2$), која су смештена у средини ϵ , и са слободним наелектрисањима q'_{aik} ($k=1, \dots, K_i$, $i=3,4$), која су смештена у вакууму.
- M_i ($i=1, \dots, 3$) је број еквивалентних електрода на раздвојеној површини два диелектрика са везаним наелектрисањима q'_{tim} , која су смештена у вакууму ($m=1, \dots, M_i$),
- (x_{dik}, y_{dik}) , (x_{aik}, y_{aik}) , (x_{tim}, y_{tim}) су позиције еквивалентних електрода ($k=1, \dots, K_i$, $i=1, \dots, 4$, $m=1, \dots, M_j$, $j=1, \dots, 3$).

- $\varphi_0^{(e,o)}$ је непозната адитивна константа која се одређује из услова електричне неутралности читавог система.

Укупан број непознатих је N_{tot} и одређује се као: $N_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^4 K_i + \sum_{i=1}^3 M_i + 1$.

Услов електричне неутралности система је:

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{K_i} q'_{dik} + \sum_{i=3}^4 \sum_{k=1}^{K_i} q'_{aik} = 0. \quad (7.7)$$

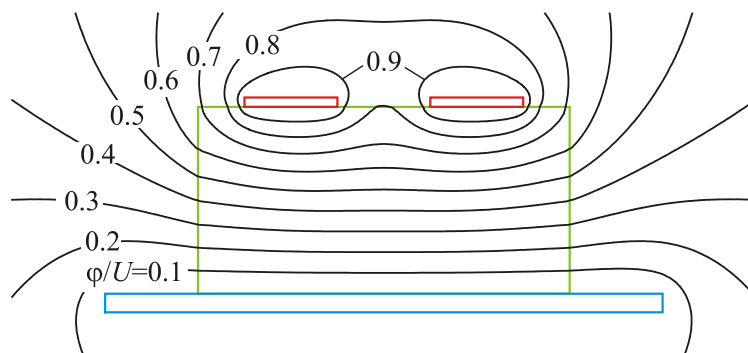
Након решавања формираног система једначина на начин описан у Поглављу 4, одређује се и подужна капацитивност спрегнутог микротракастог вода, дата изразом

$$C'^{(e,o)} = \frac{1}{U} \left(\sum_{k=1}^{K_1} q'_{d1k} + \sum_{k=1}^{K_3} q'_{a3k} \right). \quad (7.8)$$

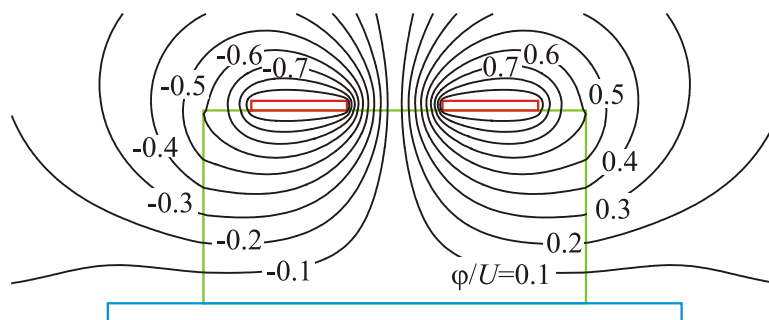
Карактеристична импеданса се одређује на идентичан начин описан у претходном одељку.

Еквипотенцијале и расподела везаног (тоталног) подужног наелектрисања приказани су на *Сликама 7.23 - 7.26* за оба режима, за параметре вода:

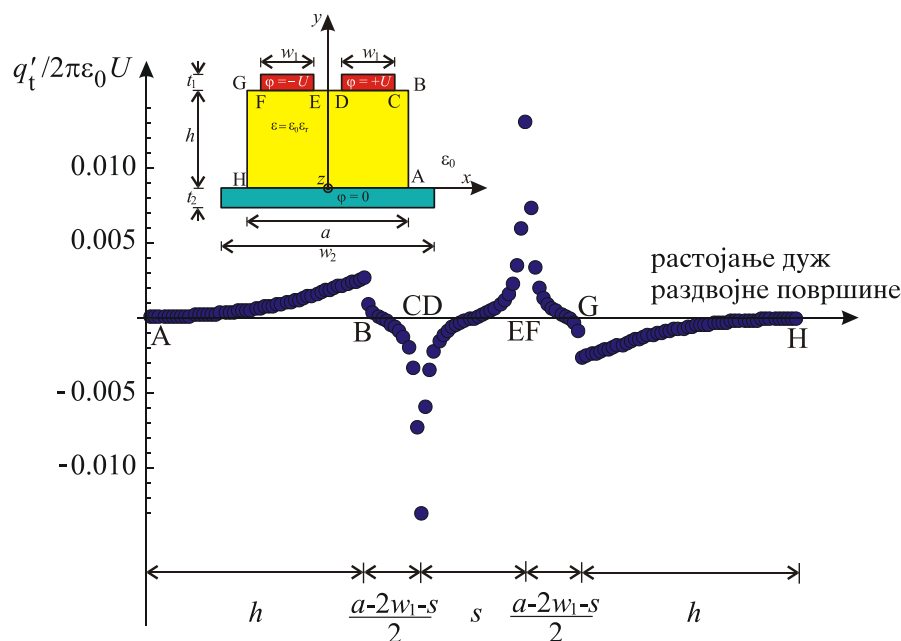
$\varepsilon_r = 3$, $a/w_1 = 4.0$, $h/w_1 = 2.0$, $t_1/w_1 = 0.1$, $s/w_1 = 1.0$, $w_2/w_1 = 6.0$ и $t_2/t_1 = 2.0$, док је број непознатих око 1200.



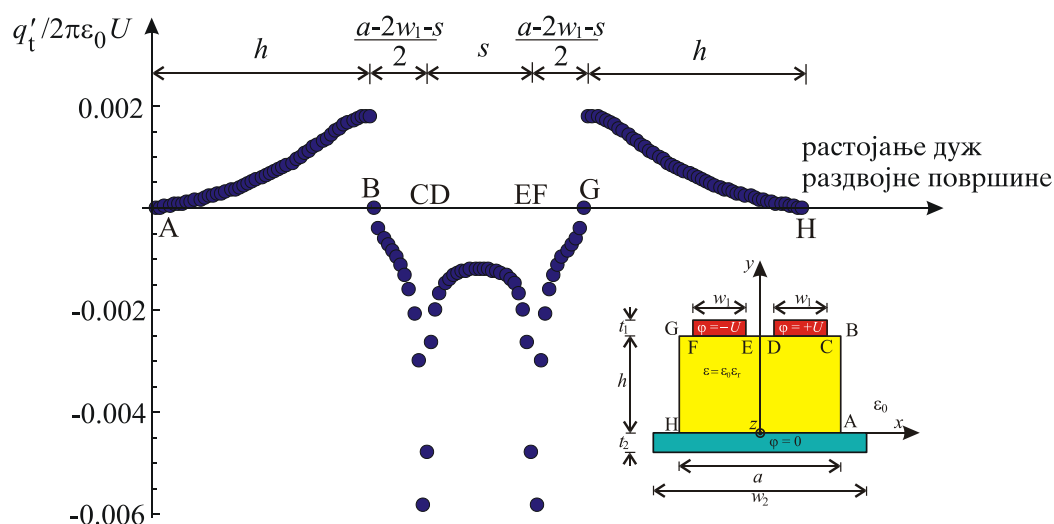
Слика 7.23 – Еквипотенцијале: паран режим.



Слика 7.24 – Еквипотенцијале: непаран режим.



Слика 7.25 – Нормализована расподела везаног подужног наелектрисања дуж раздвојне површине два диелектрика (паран режим).



Слика 7.26 – Нормализована расподела везаног подужног наелектрисања дуж раздвојне површине два диелектрика (непаран режим).

Како би проверили тачност добијених резултата применом хибридног метода граничних елемената, симулиран је идентичан проблем у програмском пакету *FEMM*, [56], и у Табелама 7.15-7.17 упоређени су добијени резултати. Број непознатих је око 1200.

Остварено је изузетно добро слагање резултата. Одступање је мање од 0.6 %, што се види из Табеле 7.15. Утицај димензија спрегнутог микротракастог вода на карактеристичну импедансу и ефективну релативну диелектричну константу се такође уочава из приложених табела.

Табела 7.15 – Поређење вредности за карактеристичну импедансу вода са променом параметара t_2/t_1 и h/w_1 , када је:

$$\varepsilon_r = 3, a/w_1 = 4.0, t_1/w_1 = 0.05, s/w_1 = 1.0 \text{ и } w_2/w_1 = 6.0.$$

$\frac{t_2}{t_1}$	$\frac{h}{w_1}$	Паран режим			Непаран режим		
		<i>HBEM</i> Z_c [Ω]	<i>FEMM</i> Z_c [Ω]	δ [%]	<i>HBEM</i> Z_c [Ω]	<i>FEMM</i> Z_c [Ω]	δ [%]
1	0.8	84.950	84.864	0.10	64.218	63.942	0.43
	1.6	138.000	137.829	0.12	77.198	76.805	0.51
	2.4	182.116	181.851	0.15	81.055	80.626	0.53
	3.2	220.428	220.066	0.16	82.450	81.983	0.57
	4.0	254.371	253.892	0.19	83.020	82.518	0.61
2	0.8	84.935	84.783	0.18	64.215	63.948	0.42
	1.6	137.901	137.624	0.20	77.192	76.801	0.51
	2.4	181.901	181.526	0.21	81.048	80.618	0.53
	3.2	220.107	219.602	0.23	82.457	81.981	0.58
	4.0	253.950	253.368	0.23	83.016	82.545	0.57
4	0.8	84.878	84.739	0.16	64.212	63.939	0.42
	1.6	137.677	137.412	0.19	77.184	76.792	0.51
	2.4	181.465	181.083	0.21	81.039	80.600	0.54
	3.2	219.468	218.918	0.25	82.449	81.973	0.58
	4.0	253.120	252.483	0.25	83.010	82.548	0.56

Табела 7.16 – Поређење вредности за карактеристичне параметре вода са променом параметра w_2/w_1 , за: $\varepsilon_r = 3, a/w_1 = 4.0, t_1/w_1 = 0.05, h/w_1 = 2.0, s/w_1 = 1.0$ и $t_2/t_1 = 2.0$.

$\frac{w_2}{w_1}$	Паран режим				Непаран режим			
	$\varepsilon_r^{\text{eff}}$	Z_c [Ω]	$\varepsilon_r^{\text{eff}}$	Z_c [Ω]	$\varepsilon_r^{\text{eff}}$	Z_c [Ω]	$\varepsilon_r^{\text{eff}}$	Z_c [Ω]
4.5	2.2100	168.392	2.2120	168.080	1.8799	80.064	1.8915	79.655
5.0	2.1823	165.314	2.1845	165.004	1.8784	79.885	1.8899	79.479
5.5	2.1605	162.805	2.1630	162.490	1.8772	79.743	1.8888	79.344
6.0	2.1430	160.759	2.1458	160.438	1.8749	79.656	1.8876	79.242
8.0	2.0981	155.589	2.1026	155.229	1.8718	79.427	1.8858	78.982
10.0	2.0753	152.991	2.0805	152.606	1.8670	79.352	1.8848	78.898
15.0	2.0492	150.340	2.0575	149.885	1.8598	79.343	1.8598	78.843

Табела 7.17 – Поређење вредности за карактеристичне параметре вода са променом параметра t_1/w_1 за:

$$\varepsilon_r = 3, a/w_1 = 4.0, w_2/w_1 = 6.0, h/w_1 = 2.0, s/w_1 = 1.0 \text{ и } t_2/t_1 = 2.0.$$

t_1 w_1	Паран режим				Непаран режим			
	HBEM		FEMM		HBEM		FEMM	
	$\varepsilon_r^{\text{eff}}$	$Z_c [\Omega]$	$\varepsilon_r^{\text{eff}}$	$Z_c [\Omega]$	$\varepsilon_r^{\text{eff}}$	$Z_c [\Omega]$	$\varepsilon_r^{\text{eff}}$	$Z_c [\Omega]$
0.01	2.1768	162.282	2.1632	162.257	1.9031	82.453	1.9251	81.744
0.02	2.1600	161.998	2.1583	161.804	1.8971	81.628	1.9147	81.052
0.03	2.1526	161.595	2.1537	161.316	1.8899	80.913	1.9051	80.416
0.04	2.1474	161.167	2.1496	160.857	1.8827	80.257	1.8963	79.801
0.05	2.1430	160.759	2.1458	160.438	1.8749	79.656	1.8876	79.242
0.06	2.1388	160.362	2.1422	160.021	1.8679	79.074	1.8800	78.670
0.07	2.1352	159.976	2.1388	159.641	1.8610	78.519	1.8754	78.222
0.08	2.1319	159.605	2.1356	159.271	1.8543	77.985	1.8645	77.640
0.09	2.1288	159.250	2.1264	158.700	1.8447	77.470	1.8577	77.130
0.10	2.1258	158.909	2.1293	158.592	1.8413	76.973	1.8507	76.655

Однос t_2/t_1 не утиче у великој мери на вредност карактеристичне импедансе за разлику од дебљине супстрата, чијим повећањем расте карактеристична импеданса за паран и непаран режим на воду, при чему је њена вредност већа за случај парног режима на воду.

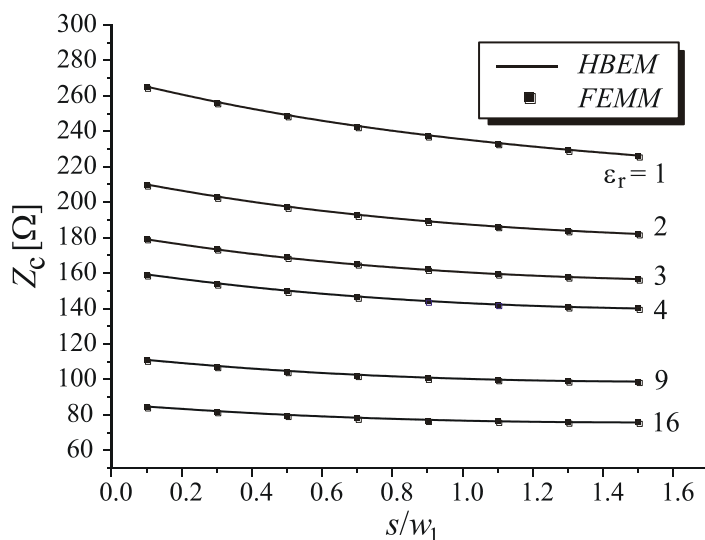
Повећање вредности односа ширина проводних трака (параметар w_2/w_1), доводи до смањења вредности карактеристичне импедансе за паран и непаран режим, док се утицај дебљине метализације (параметар t_1/w_1) огледа у смањењу карактеристичне импедансе за оба режима, са порастом дебљине проводне траке.

Утицај параметра s/w_1 , за различите вредности диелектричне константе ε_r , на расподелу карактеристичне импедансе приказан је на Слици 7.27 за:

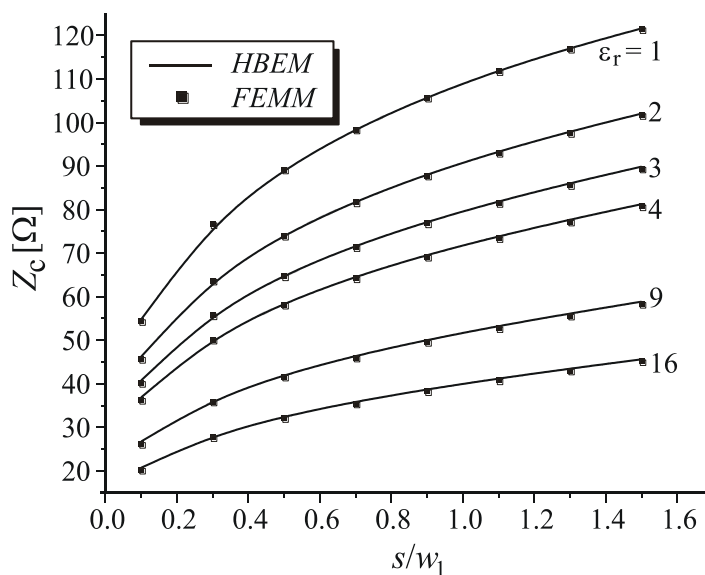
$$a/w_1 = 4.0, h/w_1 = 2.0, t_1/w_1 = 0.1, w_2/w_1 = 6.0 \text{ и } t_2/t_1 = 2.0.$$

Слика 7.27а приказује да повећање вредности параметра s/w_1 , доводи до опадања вредности карактеристичне импедансе за паран режим. Међутим, код непараног режима, Слика 7.27б, повећање параметра s/w_1 , доводи до пораста вредности карактеристичне импедансе. Најмање вредности за карактеристичну импедансу су добијене за највеће вредности диелектричне константе.

Добијени резултати су такође упоређени са FEMM-ом и приказани на овим сликама. Остварено је изузетно добро слагање резултата.



а)

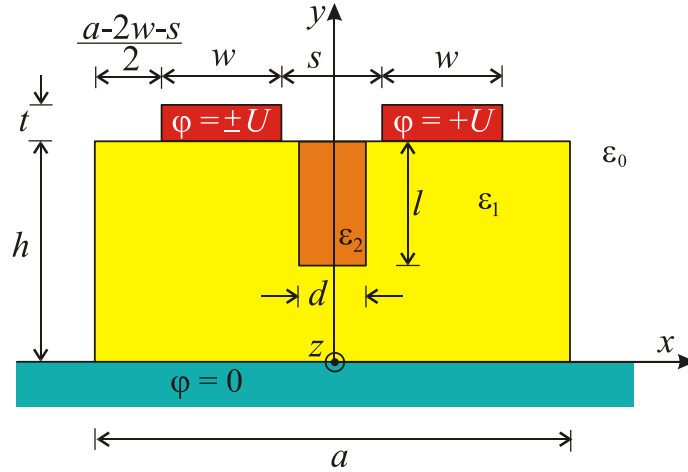


б)

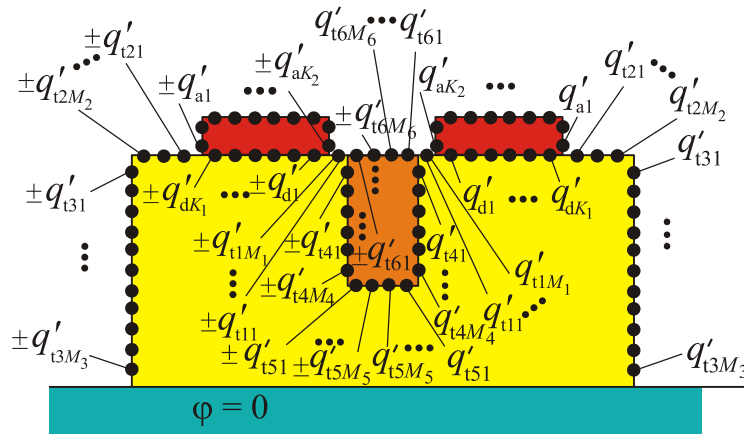
Слика 7.27 – Распореда карактеристичне импедансе са променом параметра s/w_1 за различите вредности диелектричне константе за паран (а) и непаран (б) режим.

7.6. Спрегнут микротракасти вод са уметком од диелектрика

Један од начина за смањење ефекта спреге између проводних трака спрегнутог микротракастог вода остварује се уметањем диелектрика правоугаоног попречног пресека између проводника, [94], Слика 7.28. Применом *НВЕМ*-а, формиран је одговарајући модел, Слика 7.29. Уз примену теореме лика у равном огледалу, коришћењем постојеће симетрије и процедуре описане у Поглављу 4, формира се систем једначна и одређују карактеристични параметри спрегнутог микротракастог вода.



Слика 7.28 – Спрегнут микротракасти вод са уметком од диелектрика.



Слика 7.29 – Одговарајући НВЕМ модел.

Потенцијал у произвољној тачки система са Сликае 7.29 дат је изразом:

$$\begin{aligned}
 \varphi^{(e, o)} = & \sum_{k=1}^{K_1} \frac{q'_{dk}}{2\pi\epsilon_1} \left[\ln \sqrt{\frac{(x-x_{dk})^2 + (y+y_{dk})^2}{(x-x_{dk})^2 + (y-y_{dk})^2}} \pm \ln \sqrt{\frac{(x+x_{dk})^2 + (y+y_{dk})^2}{(x+x_{dk})^2 + (y-y_{dk})^2}} \right] + \\
 & + \sum_{j=1}^{K_2} \frac{q'_{aj}}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln \sqrt{\frac{(x-x_{aj})^2 + (y+y_{aj})^2}{(x-x_{aj})^2 + (y-y_{aj})^2}} \pm \ln \sqrt{\frac{(x+x_{aj})^2 + (y+y_{aj})^2}{(x+x_{aj})^2 + (y-y_{aj})^2}} \right] + \\
 & + \sum_{i=1}^6 \sum_{m=1}^{M_i} \frac{q'_{tim}}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln \sqrt{\frac{(x-x_{tim})^2 + (y+y_{tim})^2}{(x-x_{tim})^2 + (y-y_{tim})^2}} \pm \ln \sqrt{\frac{(x+x_{tim})^2 + (y+y_{tim})^2}{(x+x_{tim})^2 + (y-y_{tim})^2}} \right],
 \end{aligned}
 \tag{7.9}$$

при чему знак "+" одговара парном режиму ("even" – e), док је знак "-" за непарни ("odd" – o) режим.

- Индекси "d", "a" и "t" уз ознаке наелектрисања еквивалентних електрода су скраћенице од енглеских речи "dielectric", "air" и "total", респективно.

- K_i ($i = 1, 2$) је број еквивалентних електрода на металним проводним тракама са слободним наелектрисањима q'_{dk} ($k = 1, \dots, K_1$), која су смештена у средини ε_1 , и са слободним наелектрисањима q'_{aj} ($j = 1, \dots, K_2$), која су смештена у вакууму.
- M_i ($i = 1, \dots, 6$) је број еквивалентних електрода на раздвојној површини вакуума и средине диелектричне константе ε_1 (за $i = 1, \dots, 3$), две средине диелектричних константи ε_1 и ε_2 (за $i = 4, 5$) и вакуума и средине диелектричне константе ε_2 (за $i = 6$), са везаним наелектрисањима q'_{tim} , која су смешена у вакууму ($m = 1, \dots, M_i$),
- (x_{dk}, y_{dk}) , (x_{aj}, y_{aj}) , (x_{tim}, y_{tim}) су позиције еквивалентних електрода ($k = 1, \dots, K_1$, $j = 1, \dots, K_2$, $i = 1, \dots, 6$, $m = 1, \dots, M_i$)

Са $N_{tot} = \sum_{i=1}^2 K_i + \sum_{i=1}^6 M_i$ означен је укупан број непознатних наелектрисања.

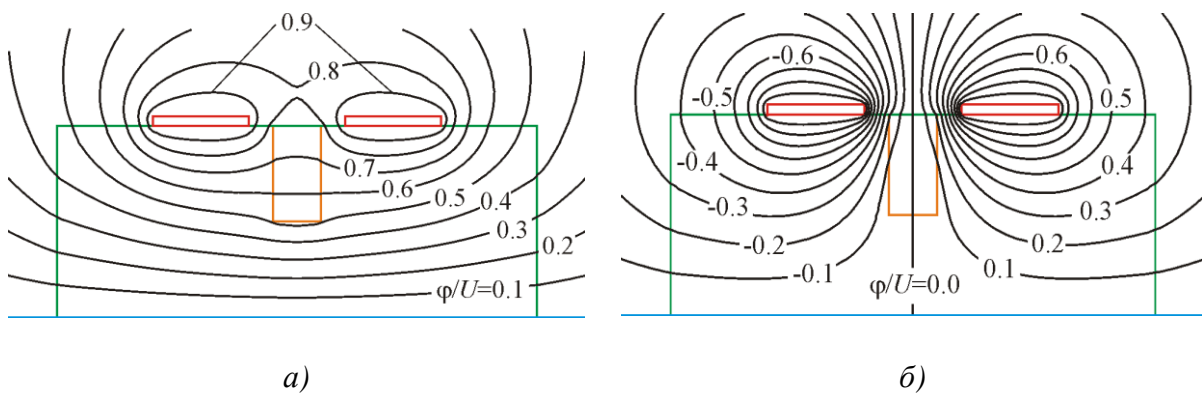
Подужна капацитивност спрегнутог микротракастог вода са уметком од диелектрика одређује се из

$$C^{(e, o)} = \frac{1}{U} \left(\sum_{k=1}^{K_1} q'_{dk} + \sum_{k=1}^{K_2} q'_{ak} \right), \quad (7.10)$$

док се карактеристична импеданса вода одређује применом (2.42).

Еквипотенцијале су приказане на *Слици 7.30* за паран и непаран режим, респективно, за параметаре:

$$\varepsilon_{r1} = 2, \quad \varepsilon_{r2} = 6, \quad h/w = 2.0, \quad t/w = 0.1, \quad d/w = 0.5, \quad l/w = 1.0, \quad a/w = 5.0 \quad \text{и} \quad s/w = 1.0.$$



Слика 7.30 – Еквипотенцијале: паран (а) и непаран (б) режим.

Поређење резултата за ефективну релативну диелектричну константу и карактеристичну импедансу који су добијени за различите вредности параметара h/w и l/w је дато у Табелама 7.18 и 7.19, за паран и непаран режим, респективно.

Табела 7.18 – Поређење вредности за карактеристичну импедансу и ефективну релативну диелектричну константу микротракастог вода (паран режим) са променом односа h/w и l/w за: $\epsilon_{r1} = 2$, $\epsilon_{r2} = 6$, $t/w = 0.1$, $d/w = 0.5$, $a/w = 5.0$ и $s/w = 1.0$.

$\frac{h}{w}$	$\frac{l}{w}$	HBEM		FEMM		δ [%]
		ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	
1.0	0.2	1.6755	109.739	1.6795	109.451	0.26
	0.4	1.6921	109.201	1.6962	108.922	0.26
	0.6	1.7188	108.349	1.7232	108.052	0.27
	0.8	1.7560	107.194	1.7609	106.889	0.28
1.5	0.2	1.6194	140.515	1.6240	140.121	0.28
	0.4	1.6293	140.088	1.6340	139.689	0.29
	0.6	1.6449	139.420	1.6498	139.018	0.29
	0.8	1.6653	138.565	1.6704	138.157	0.29
2.0	0.2	1.5720	165.671	1.5767	165.194	0.29
	0.4	1.5788	165.308	1.5837	164.829	0.29
	0.6	1.5903	164.733	1.5947	164.258	0.29
	0.8	1.6036	164.028	1.6087	163.543	0.30

Резултати добијени применом HBEM-а (са $N_{\text{tot}} = 1000$) се веома добро слажу са вредностима које је дала примена програмског пакета FEMM (са неколико стотина хиљада коначних елемената). Релативно одступање резултата, δ , дефинисано изразом (4.13), мање је од 0.45 %.

Резултати за ефективну релативну диелектричну константу и карактеристичну импедансу са променом параметара s/w и d/w су приказани у Табели 7.20, за паран и непаран режим, респективно. Повећавајући ширину диелектричног уметка, вредности карактеристичне импедансе опадају, а вредности ефективне релативне диелектричне константе расту за оба режима.

Расподела карактеристичне импедансе са променом параметра l/w за различите вредности параметра d/w приказана је на Слици 7.31.

Табела 7.19 – Поређење вредности за карактеристичну импедансу и ефективну релативну диелектричну константу микротракастог вода (непаран режим) са променом односа h/w и l/w за:

$$\varepsilon_{r1} = 2, \varepsilon_{r2} = 6, t/w = 0.1, d/w = 0.5, a/w = 5.0 \text{ и } s/w = 1.0.$$

$\frac{h}{w}$	$\frac{l}{w}$	HBEM		FEMM		δ [%]
		$\varepsilon_r^{\text{eff}}$	Z_c [Ω]	$\varepsilon_r^{\text{eff}}$	Z_c [Ω]	
1.0	0.2	1.5468	74.972	1.5529	74.687	0.38
	0.4	1.5670	74.486	1.5732	74.204	0.38
	0.6	1.5748	74.302	1.5811	74.020	0.38
	0.8	1.5773	74.244	1.5836	73.956	0.39
1.5	0.2	1.5186	81.525	1.5258	81.191	0.41
	0.4	1.5440	80.850	1.5513	80.516	0.41
	0.6	1.5559	80.542	1.5631	80.218	0.40
	0.8	1.5613	80.402	1.5686	80.071	0.41
2.0	0.2	1.5042	84.592	1.5118	84.238	0.42
	0.4	1.5318	83.826	1.5395	83.480	0.41
	0.6	1.5455	83.455	1.5531	83.117	0.41
	0.8	1.5523	83.271	1.5600	82.926	0.42

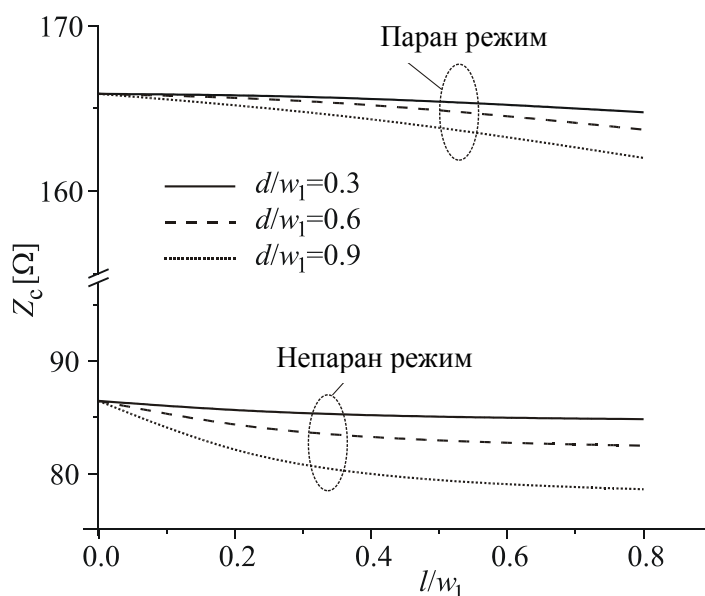
Табела 7.20 – Вредности за карактеристичну импедансу и ефективну релативну диелектричну константу микротракастог вода са променом односа s/w и d/w за параметре:

$$\varepsilon_{r1} = 2, \varepsilon_{r2} = 6, h/w = 2.0, t/w = 0.1, l/w = 1.0 \text{ и } a/w = 5.0.$$

$\frac{s}{w}$	$\frac{d}{w}$	Паран режим		Непаран режим	
		$\varepsilon_r^{\text{eff}}$	Z_c [Ω]	$\varepsilon_r^{\text{eff}}$	Z_c [Ω]
1.0	0.2	1.5916	164.643	1.4793	85.302
	0.4	1.6099	163.705	1.5264	83.974
	0.6	1.6302	162.687	1.5902	82.273
	0.8	1.6564	161.395	1.6838	79.953
1.5	0.2	1.5681	157.601	1.4609	95.976
	0.4	1.5795	157.029	1.4857	95.172
	0.6	1.5912	156.450	1.5162	94.210
	0.8	1.6048	155.788	1.5542	93.050
2.0	0.2	1.5386	152.934	1.4416	103.708
	0.4	1.5463	152.555	1.4565	103.177
	0.6	1.5539	152.183	1.4741	102.556
	0.8	1.5622	151.777	1.4952	101.833

За случај када је $l/w = 0$ (спрегнути микротракасти вод без диелектричног уметка) искоришћени су резултати добијени у Одељку 7.4. Идентични резултати се добијају стављањем да је $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2} = 2$, при чему d/w и l/w могу да буду произвољне вредности које задовољавају релације да је $d/w < s/w$ и $l/w < h/w$.

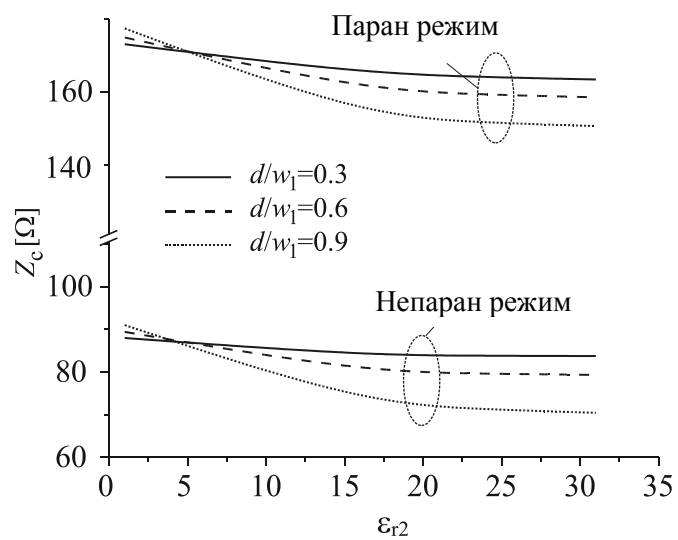
Са Сlike 7.31 може се закључити да карактеристична импеданса опада са порастом параметра l/w . Параметри вода су: $\varepsilon_{r1} = 2$, $\varepsilon_{r2} = 6$, $h/w = 2.0$, $t/w = 0.1$, $a/w = 5.0$ и $s/w = 1.0$.



Слика 7.31 – Расподела карактеристичне импедансе са променом параметра l/w за различите вредности параметра d/w .

Утицај параметра ε_{r2} за различите вредности параметра d/w приказан је на Сlici 7.32. Са графика је очигледно да повећањем вредности ε_{r2} , док је ε_{r1} константно, карактеристична импеданса опада. За веће вредности параметра ε_{r2} , карактеристична импеданса постаје готово константна. Повећавајући ширину диелектричног уметка, карактеристична импеданса опада. Ови закључци важе за оба режима.

Параметри вода су: $\varepsilon_{r1} = 2$, $h/w = 2.0$, $t/w = 0.1$, $l/w = 1.0$, $a/w = 5.0$ и $s/w = 1.0$.



Слика 7.32 – Распореда карактеристичне импедансе са променом параметра ϵ_{r2} за различите вредности параметра d/w_1 .

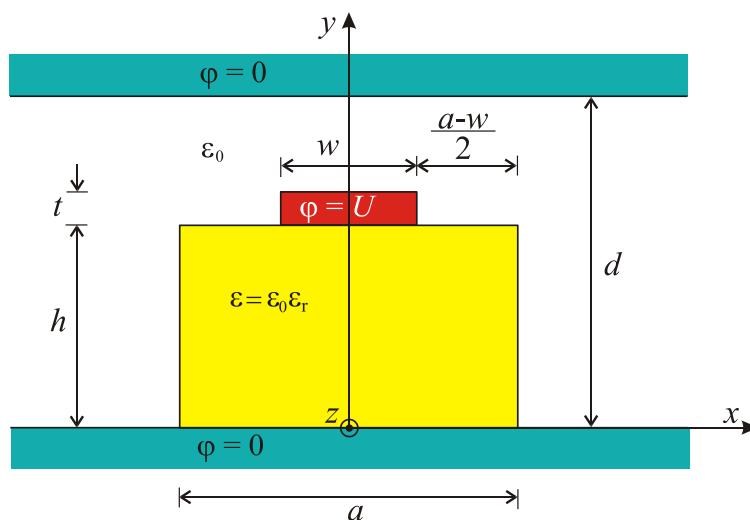
8

Прекривени микротракасти водови

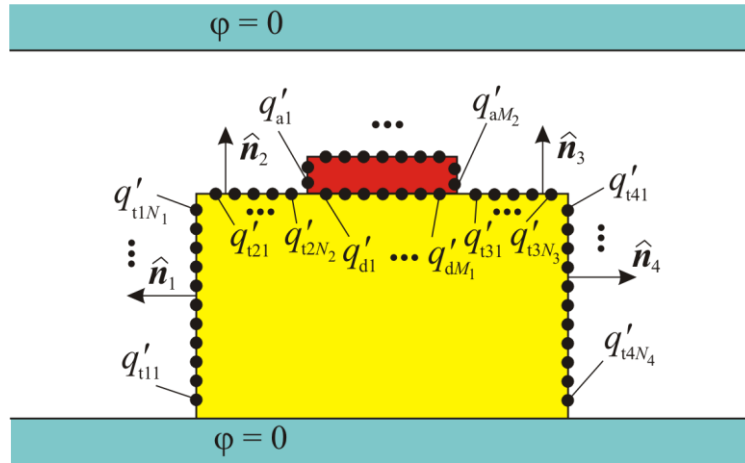
Прекривени микротракасти вод може да се посматра као прелазна структура између тракастог и микротракастог вода. У тракастим водовима, анализираним у Поглављу 6, уземљене проводне равни биле су неограничене дужине. То није случај у пракси, па ће у наставку бити анализирани примери једноструких и спрегнутих прекривених микротракастих водова са уземљеним равнима коначне ширине.

8.1. Микротракасти вод између неограничено широких уземљених равни

Геометрија микротракастог вода постављеног између савршено проводних равни неограничене ширине нултог потенцијала и одговарајући *HVEM* модел приказани су на *Сликама 8.1* и *8.2*, респективно.



Слика 8.1 – Микротракасти вод између неограничено широких уземљених равни.



Слика 8.2 – НВЕМ модел.

Као и у Поглављу 6, неопходно је код одређивања потенцијала у произвољној тачки система користити Гринуову функцију за потенцијал подужног наелектривања смештеног између паралелних, неограничено широких равни нултог потенцијала, дату изразом (6.1).

Користећи ову Гринуову функцију, може се одредити електрични скалар потенцијал система са Сlike 8.2:

$$\begin{aligned}
 \varphi = & \sum_{m=1}^{M_1} \frac{q'_{dm}}{2\pi\epsilon} \ln \sqrt{\frac{\cosh\left[\frac{\pi}{d}(x-x_{dm})\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y+y_{dm})\right]}{\cosh\left[\frac{\pi}{d}(x-x_{dm})\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y-y_{dm})\right]}} + \\
 & + \sum_{m=1}^{M_2} \frac{q'_{am}}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{\frac{\cosh\left[\frac{\pi}{d}(x-x_{am})\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y+y_{am})\right]}{\cosh\left[\frac{\pi}{d}(x-x_{aik})\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y-y_{aik})\right]}} + \\
 & + \sum_{i=1}^4 \sum_{n=1}^{N_i} \frac{q'_{tin}}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{\frac{\cosh\left[\frac{\pi}{d}(x-x_{tin})\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y+y_{tin})\right]}{\cosh\left[\frac{\pi}{d}(x-x_{tin})\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y-y_{tin})\right]}} ,
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

где су:

- Индекси "d", "a" и "t" уз ознаке наелектривања еквивалентних електрода су скраћенице од енглеских речи "*dielectric*", "*air*" и "*total*", респективно.
- M_i ($i=1,2$) је број еквивалентних електрода на металним проводним тракама са слободним наелектривањима q'_{dm} ($m=1,\dots,M_1$), која су смештена у средини ϵ ,

и са слободним наелектрисуњима q'_{am} ($m=1, \dots, M_2$), која су смештена у вакууму.

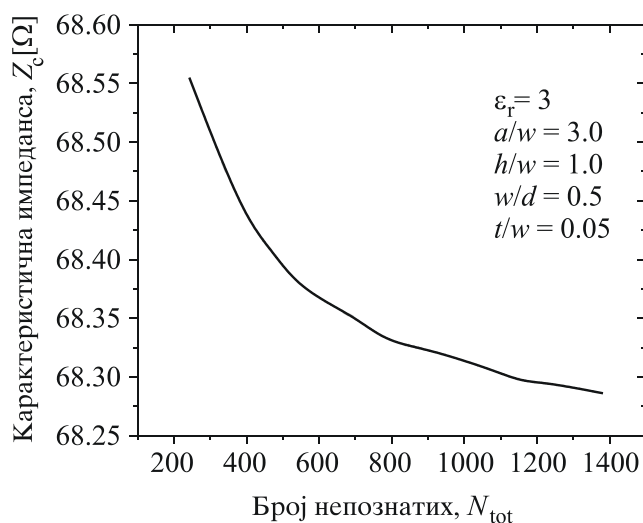
- N_i ($i=1, \dots, 4$) је број еквивалентних електрода на раздвојној површини два диелектрика са везаним наелектрисуњима q'_{tin} , која су смештена у вакууму ($n=1, \dots, N_i$).
- (x_{dm}, y_{dm}) , (x_{am}, y_{am}) , (x_{tin}, y_{tin}) су позиције еквивалентних електрода.

Укупан број непознатих N_{tot} , се одређује као:
$$N_{tot} = \sum_{i=1}^2 M_i + \sum_{i=1}^4 N_i .$$

За прорачун ефективне релативне диелектричне константе и карактеристичне импедансе прекривеног микротракастог вода написан је одговарајући програмски код. За параметре микротракастог вода: $\epsilon_r = 3$, $a/w = 3.0$, $h/w = 1.0$, $w/d = 0.5$ и $t/w = 0.05$ одређени су карактеристични параметри, као и време израчунавања. Ти резултати су приказани у Табели 8.1 и на Слици 8.3.

Табела 8.1 – Конвергенција резултата и време израчунавања.

N_{tot}	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	$t(s)$
388	1.9059	68.438	16.2
468	1.9087	68.408	23.5
546	1.9114	68.375	32.3
694	1.9137	68.352	52.1
772	1.9151	68.333	65.0
852	1.9158	68.326	79.0
926	1.9164	68.321	93.0
1078	1.9176	68.306	128.6
1156	1.9184	68.296	149.1
1230	1.9186	68.295	167.8
1382	1.9194	68.286	211.8

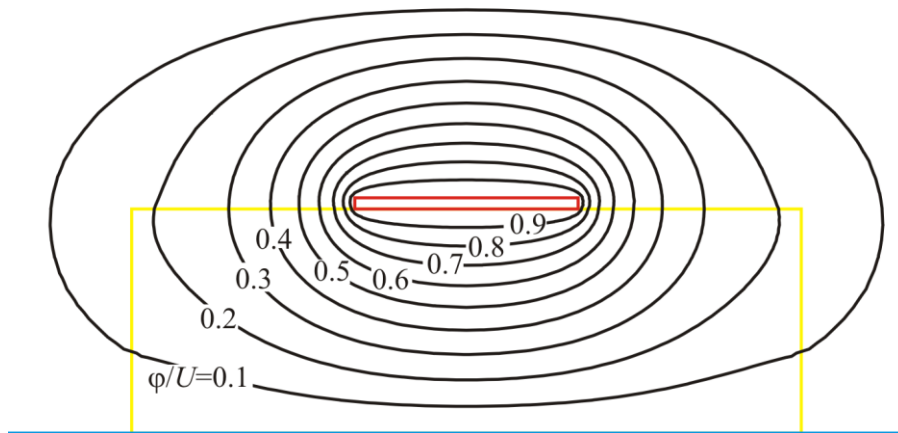


Слика 8.3 – Конвергенција резултата за карактеристичну импедансу.

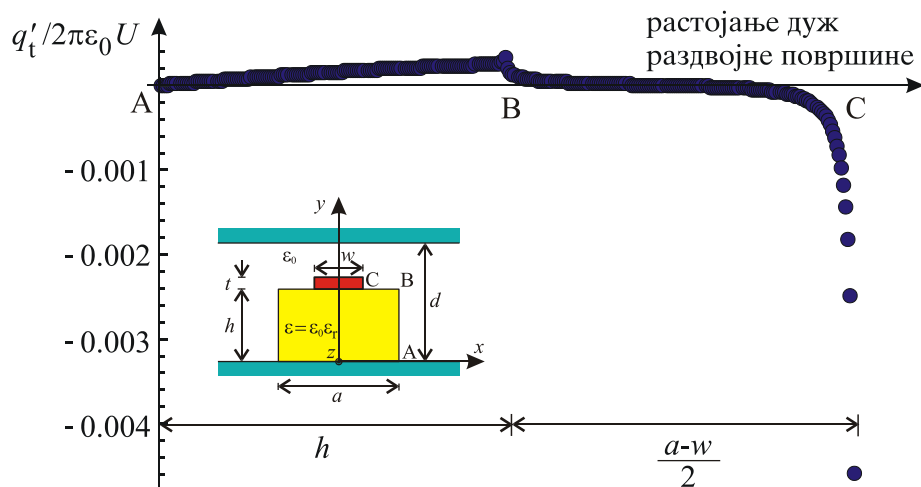
Остварена је веома добра конвергенција резултата, као што се може уочити из табеле, као и са слике, за веома кратко време израчунавања. Максимално време израчунавања је 211.8 секунди за решавање система једначина димензија 1382×1382 и одређивање карактеристичних параметара микротракастог вода. То време је много мање од 8 минута, колико је потребно за симулацију проблема у програму *FEMM*, [56], са

мрежом од неколико стотина хиљада коначних елемената. Применом *FEMM*-а, карактеристична импеданса разматраног вода је $Z_c = 67.914\Omega$.

Еквипотенцијале и нормализована расподела везаног подужног наелектрисања дуж раздвојне површине диелектрика дати су на *Сликама* 8.4 и 8.5, респективно за: $\epsilon_r = 3$, $a/w = 3.0$, $h/w = 1.0$, $w/d = 0.5$ и $t/w = 0.05$.



Слика 8.4 – Еквипотенцијале.



Слика 8.5 – Нормализована расподела везаног подужног наелектрисања дуж раздвојне површине два диелектрика.

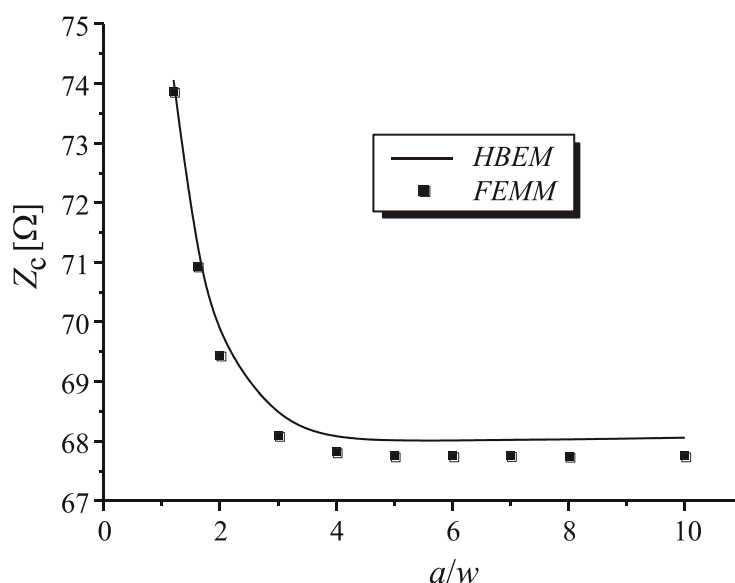
Вредности ефективне релативне диелектричне константе и карактеристичне импедансе добијене применом *НВЕМ*-а и *FEMM*-а, као и одговарајућа релативна грешка приказани су у *Табели* 8.2.

Зависност карактеристичне импедансе од односа a/w , добијена применом *НВЕМ*-а и *FEMM*-а, приказана је на *Слици* 8.6 за: $\epsilon_r = 3$, $h/w = 1.0$, $w/d = 0.5$ и $t/w = 0.05$. Из табеле је очигледно да се вредности добијене применом хибридног метода граничних

елемената и програмским пакетом *FEMM*, који се заснива на примени метода коначних елемената, веома добро слажу. Максимално одступање је 0.54 %.

Табела 8.2 – Поређење резултата за карактеристичну импедансу микротракастог вода за различите вредности параметра h/w за: $\epsilon_r = 3$, $w/d = 0.5$, $a/w = 3$ и $t/w = 0.05$.

$\frac{h}{w}$	<i>HBEM</i>		<i>FEMM</i>		δ [%]
	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	
0.2	2.4754	29.435	2.4763	29.420	0.05
0.4	2.2901	46.759	2.2943	46.680	0.17
0.6	2.1565	57.947	2.1626	57.818	0.22
0.8	2.0358	64.911	2.0436	64.733	0.27
1.0	1.9164	68.321	1.9257	68.100	0.32
1.2	1.7932	68.162	1.8036	67.914	0.36
1.4	1.6599	63.812	1.6722	63.539	0.43
1.6	1.5059	53.598	1.5202	53.333	0.50
1.8	1.2963	33.110	1.3135	32.932	0.54

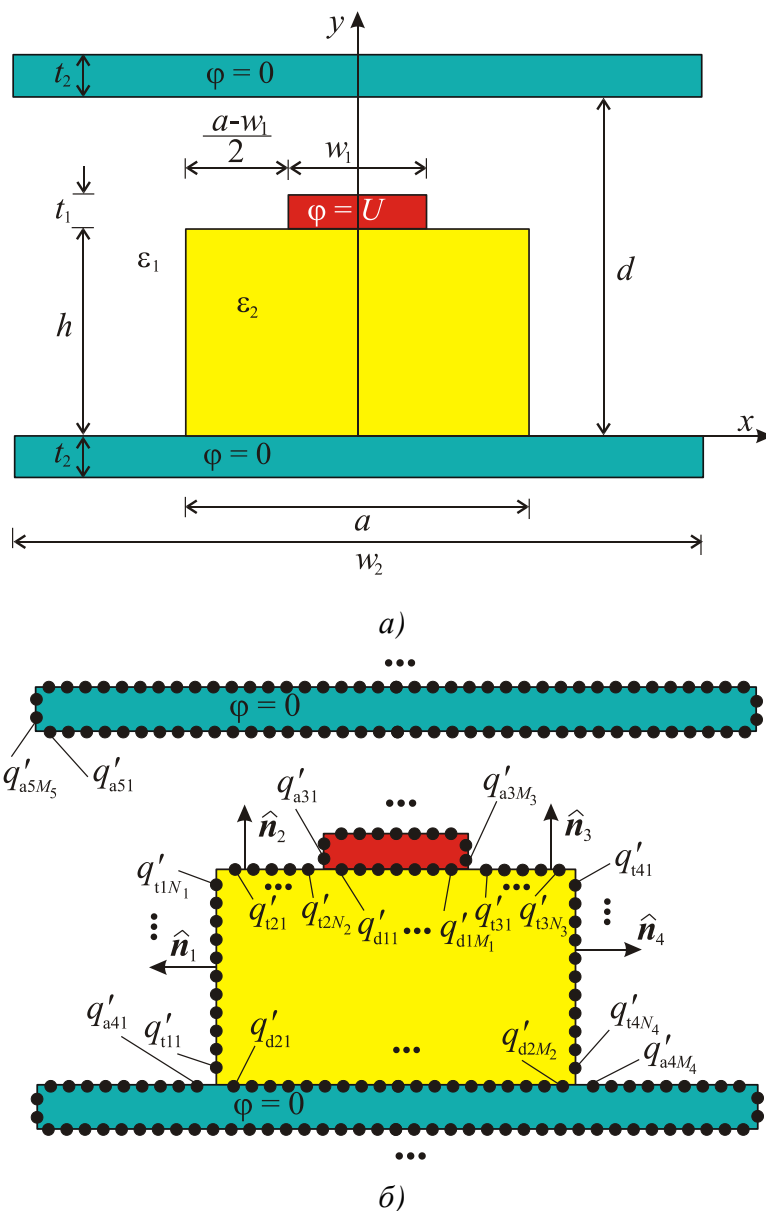


Слика 8.6 – Зависност карактеристичне импедансе микротракастог вода од односа a/w .

Као што се може уочити са *Слике 8.6*, уколико је $a/w > 4$, повећање ширине подлоге од диелектрика нема значајнијег утицаја на вредност карактеристичне импедансе.

8.2. Микротракасти вод између две уземљене равни коначне ширине

Геометрија разматраног прекривеног микротракастог вода приказана је на *Слици 8.7а*, док је одговарајући *HBEM* модел приказан на *Слици 8.7б*.



Слика 8.7 – Микротракасти вод постављен између две уземљене равни коначне ширине (а) и одговарајући модел (б).

Потенцијал у произвољној тачки система са Сликe 8.7б дат је изразом

$$\begin{aligned}
 \varphi = \varphi_0 & - \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^{M_i} \frac{q'_{dim}}{2\pi\epsilon_2} \ln \sqrt{(x - x_{dim})^2 + (y - y_{dim})^2} - \\
 & - \sum_{i=3}^5 \sum_{m=1}^{M_i} \frac{q'_{aim}}{2\pi\epsilon_1} \ln \sqrt{(x - x_{aim})^2 + (y - y_{aim})^2} - \\
 & - \sum_{i=1}^4 \sum_{n=1}^{N_i} \frac{q'_{tin}}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{(x - x_{tin})^2 + (y - y_{tin})^2}
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

где су:

- Индекси "d", "a" и "t" уз ознаке наелектрисања еквивалентних електрода су скраћенице од енглеских речи "*dielectric*", "*air*" и "*total*", респективно.
- M_i ($i=1,2$) је број еквивалентних електрода на металним проводним тракама са слободним наелектрисањима q'_{dim} ($m=1,\dots,M_i$), која су смештена у средини ε_2 .
- M_j ($j=3,\dots,5$) је број еквивалентних електрода на металним проводним тракама са слободним наелектрисањима q'_{ajm} ($m=1,\dots,M_j$), која су смештена у средини ε_1 .
- N_i ($i=1,\dots,4$) је број еквивалентних електрода на раздвојној површини два диелектрика са везаним наелектрисањима q'_{tin} , која су смештена у вакууму ($n=1,\dots,N_i$).
- (x_{dim}, y_{dim}) , (x_{aim}, y_{aim}) , (x_{tin}, y_{tin}) су позиције еквивалентних електрода у Декартовом правоуглом координатном систему.
- φ_0 је непозната адитивна константа, која зависи од изабране референтне тачке нултог потенцијала.

Укупан број непознатих N_{tot} је $N_{tot} = \sum_{i=1}^5 M_i + \sum_{i=1}^4 N_i + 1$, док је услов електричне

неутралности система дат изразом

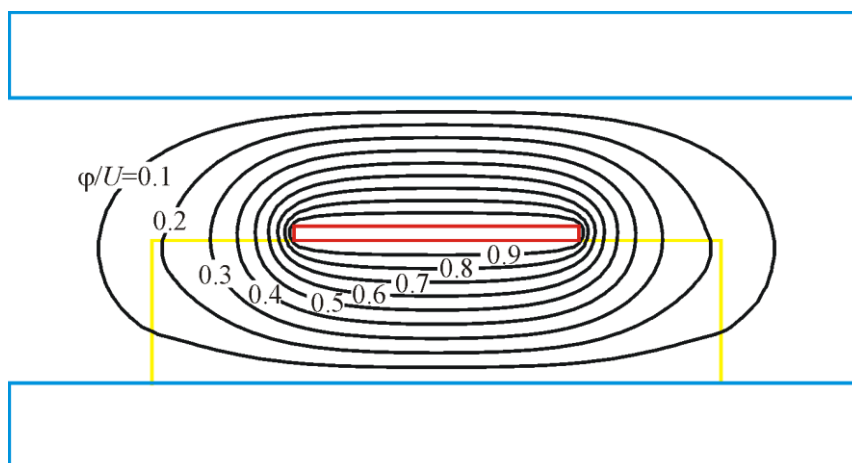
$$\sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^{M_i} q'_{dim} + \sum_{i=3}^5 \sum_{m=1}^{M_i} q'_{aim} = 0. \quad (8.3)$$

Решавањем система линеарних једначина и одређивањем непознатих вредности еквивалентних електрода, одређује се капацитивност микротракастог вода

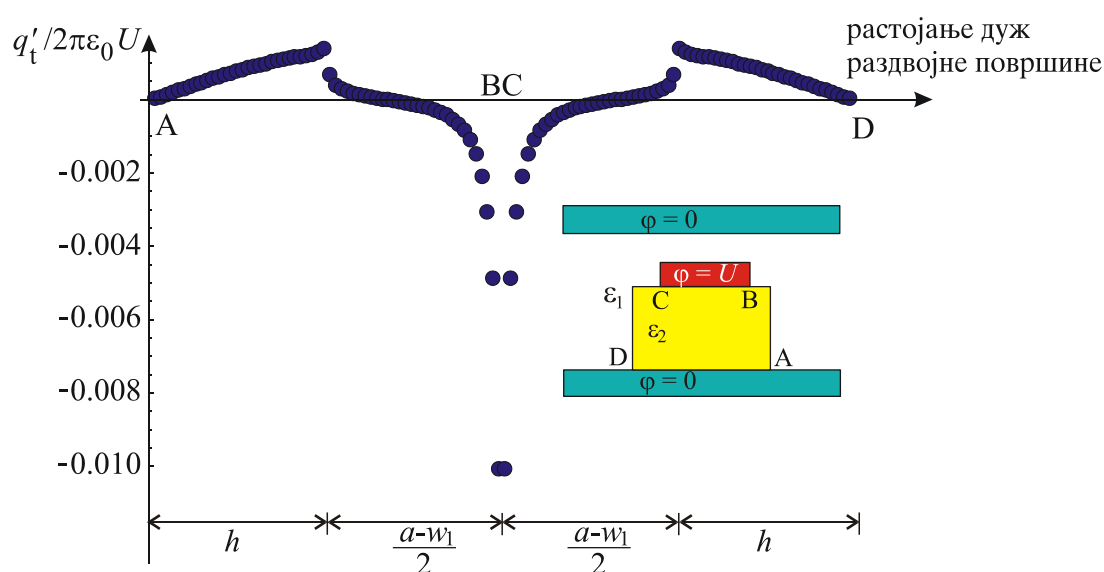
$$C' = \frac{1}{U} \left(\sum_{k=1}^{M_1} q'_{d1k} + \sum_{k=1}^{M_3} q'_{a3k} \right). \quad (8.4)$$

Са циљем да се провере и упореде добијени резултати, примењен је метод коначних елемената, симулирањем микротракастог вода у програмском пакету *FEMM*, [56].

Еквипотенцијале су приказане на *Слици 8.8* за: $\varepsilon_{r1}=1$, $\varepsilon_{r2}=3$, $w_1/d=1.0$, $t_1/w_1=0.05$, $w_2/d=3.0$, $t_2/w_2=0.1$, $h/d=0.5$ и $a/d=2.0$. Расподела везаног наелектрисања дуж раздвојних површина вакуум-диелектрик приказана је на *Слици 8.9*.



Слика 8.8 – Еквипотенцијале.



Слика 8.9 – Нормализована расподела везаног подужног наелектрисања дуж раздвојне површине два диелектрика.

За све приказане резултате узето је да је број непознатих 1000.

У Табели 8.3 приказане су вредности за ефективну релативну диелектричну константу и карактеристичну импедансу за различите вредности параметара h/d . Релативна грешка резултата је мања од 0.6 %. Расподела вредности карактеристичне импедансе за различите вредности параметара приказана је на Сликама 8.10-8.13.

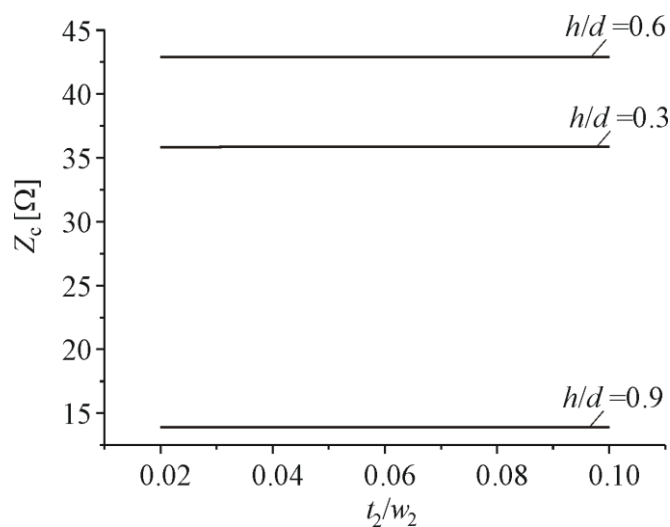
Слика 8.10 приказује утицај дебљине уземљене равни на карактеристичну импедансу овог микротракастог вода. Параметри вода су: $\epsilon_{r1} = 1$, $\epsilon_{r2} = 3$, $w_1/d = 1.0$, $t_1/w_1 = 0.05$, $w_2/d = 3.0$ и $a/d = 2.0$. Са слике је очигледно да карактеристична импеданса микротракастог вода не зависи од дебљине уземљених паралелних равни.

Табела 8.3 – Поређење вредности за карактеристичну импедансу и ефективну релативну диелектричну константу прекривеног микротракастог вода са променом односа h/d за:

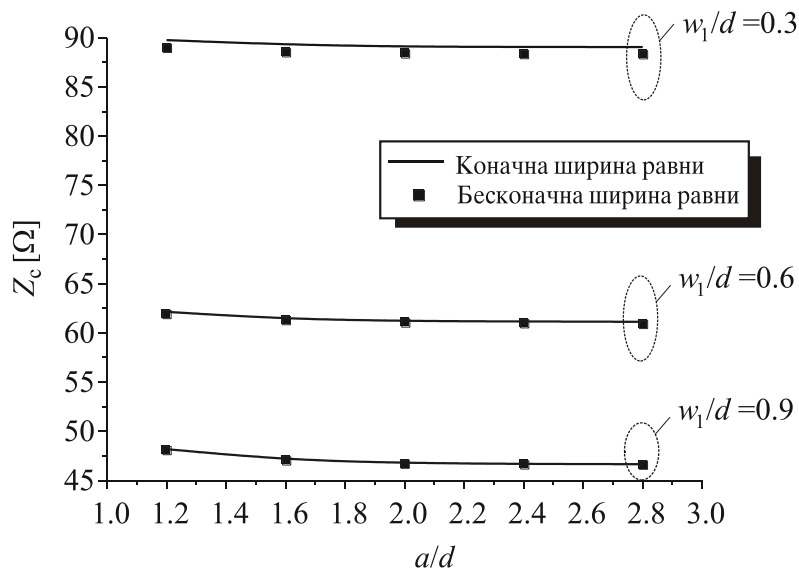
$$\varepsilon_{r1} = 1, \varepsilon_{r2} = 3, w_1/d = 1.0, t_1/w_1 = 0.05, w_2/d = 3.0, t_2/w_2 = 0.1 \text{ и } a/d = 2.0.$$

$\frac{h}{d}$	HBEM		FEMM		$\delta[\%]$
	$\varepsilon_r^{\text{eff}}$	$Z_c [\Omega]$	$\varepsilon_r^{\text{eff}}$	$Z_c [\Omega]$	
0.2	2.3745	27.897	2.3740	28.056	0.57
0.3	2.2007	35.847	2.2089	35.895	0.13
0.4	2.0424	40.946	2.0568	40.883	0.15
0.5	1.8866	43.355	1.9068	43.208	0.34
0.6	1.7286	42.904	1.7530	42.702	0.47
0.7	1.5588	39.030	1.5898	38.812	0.50
0.8	1.3685	30.462	1.4072	30.320	0.47

Међутим, карактеристична импеданса зависи од растојања проводне траке од ових равни (параметар h/d). Повећавајући ово растојање, карактеристична импеданса најпре расте, а затим опада. Максимална вредност се добија када је проводна трака подједнако удаљена од равни. Расподела карактеристичне импедансе са променом параметара w_1/d и a/d је приказана на Слици 8.11 за: $\varepsilon_{r1} = 1$, $\varepsilon_{r2} = 3$, $t_1/w_1 = 0.05$, $w_2/d = 3.0$, $t_2/w_2 = 0.1$ и $h/d = 0.5$. Такође, на истом графику је приказана и расподела карактеристичне импедансе овог микротракастог вода постављеног између равни неограничене ширине, нултог потенцијала, анализирана у Одељку 8.1.

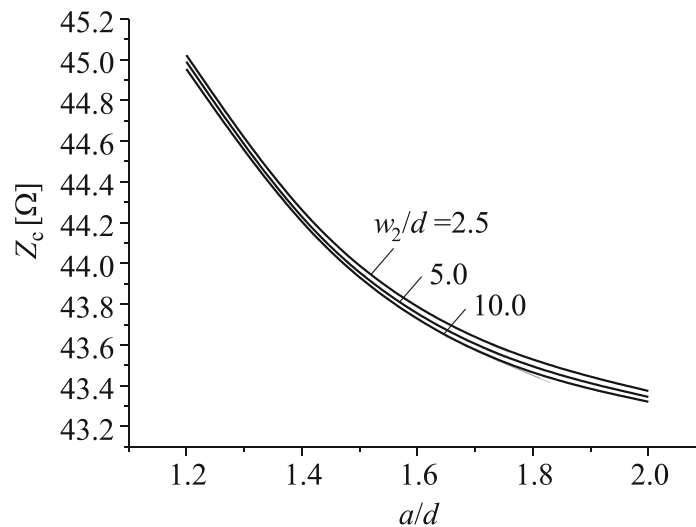


Слика 8.10 – Расподела карактеристичне импедансе са променом параметра t_2/w_2 за различите вредности параметра h/d .



Слика 8.11 – Расподела карактеристичне импедансе са променом параметра a/d за различите вредности параметра w_1/d .

Утицај ширине подлоге од диелектрика, као и дебљине уземљених равни дат је на Слици 8.12 за: $\epsilon_{r1} = 1$, $\epsilon_{r2} = 3$, $w_1/d = 1.0$, $t_1/w_1 = 0.05$, $t_2/w_2 = 0.1$ и $h/d = 0.5$.

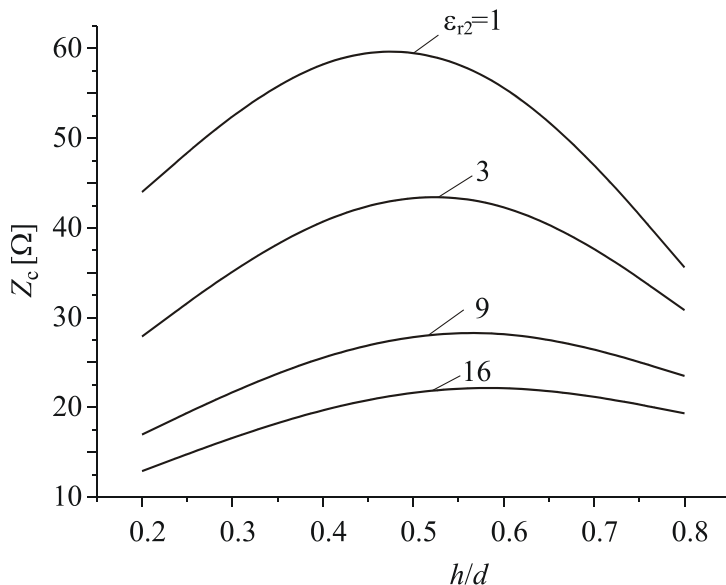


Слика 8.12 – Расподела карактеристичне импедансе са променом параметра a/d за различите вредности параметра w_2/d .

Са слике се може закључити да повећавајући ширину слоја диелектрика, вредност карактеристичне импедансе опада. Утицај дебљине проводних равни нултог потенцијала постоји, али се може занемарити.

Повећавајући висину подлоге од диелектрика, карактеристична импеданса најпре расте, а онда опада како се проводна трака приближава горњој равни, Слика 8.13. Вредност диелектричне константе материјала од кога је направљена подлога од диелектрика

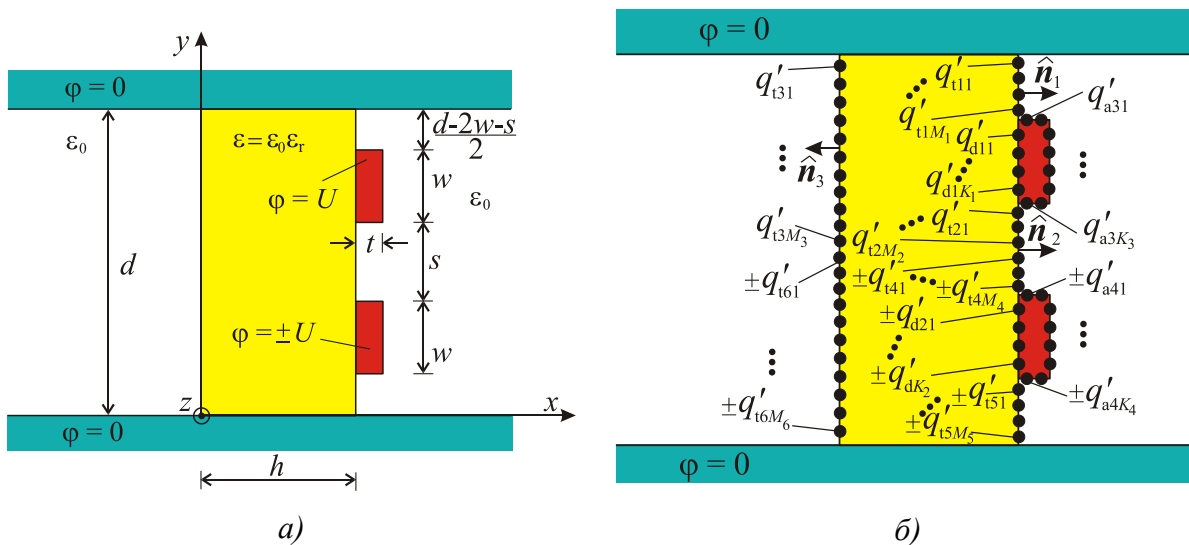
такође утиче на вредност карактеристичне импедансе. Повећавајући вредност диелектричне константе, опада вредност карактеристичне импедансе. Параметри вода су: $\epsilon_{r1} = 1$, $w_1/d = 1.0$, $t_1/w_1 = 0.05$, $w_2/d = 3.0$, $t_2/w_2 = 0.1$ и $a/d = 2.0$.



Слика 8.13 – Расподела карактеристичне импедансе са променом параметра h/d за различите вредности параметра ϵ_{r2} .

8.3. Симетрично спрегнут вертикални микротракасти вод између две неограничено дуге уземљене равни

Посматра се симетрично спрегнут вертикални микротракасти вод постављен између две неограничено дуге равни нултог потенцијала, Слика 8.14а. Одговарајући НВЕМ модел приказан је на Слици 8.14б. Биће анализирана оба режима: паран и непаран.



Слика 8.14 – Симетрично спрегнут вертикални микротракасти вод постављен између две неограничене уземљене равни (а) и одговарајући НВЕМ модел (б).

Електрични скалар потенцијал за систем са *Слике 8.14б*:

$$\begin{aligned}
 \varphi^{(e, o)} = & \sum_{k=1}^{K_1} \frac{q'_{d1k}}{2\pi\epsilon} \ln \sqrt{\frac{\cosh\left[\frac{\pi}{d}(x-x_{d1k})\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y+y_{d1k})\right]}{\cosh\left[\frac{\pi}{d}(x-x_{d1k})\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y-y_{d1k})\right]}} \pm \\
 & \pm \sum_{k=1}^{K_2} \frac{q'_{d2k}}{2\pi\epsilon} \ln \sqrt{\frac{\cosh\left[\frac{\pi}{d}(x-x_{d2k})\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y+y_{d2k})\right]}{\cosh\left[\frac{\pi}{d}(x-x_{d2k})\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y-y_{d2k})\right]}} + \\
 & + \sum_{k=1}^{K_3} \frac{q'_{a3k}}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{\frac{\cosh\left[\frac{\pi}{d}(x-x_{a3k})\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y+y_{a3k})\right]}{\cosh\left[\frac{\pi}{d}(x-x_{a3k})\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y-y_{a3k})\right]}} \pm \\
 & \pm \sum_{k=1}^{K_4} \frac{q'_{a4k}}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{\frac{\cosh\left[\frac{\pi}{d}(x-x_{a4k})\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y+y_{a4k})\right]}{\cosh\left[\frac{\pi}{d}(x-x_{a4k})\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y-y_{a4k})\right]}} + \\
 & + \sum_{i=1}^3 \sum_{m=1}^{M_i} \frac{q'_{tim}}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{\frac{\cosh\left[\frac{\pi}{d}(x-x_{tim})\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y+y_{tim})\right]}{\cosh\left[\frac{\pi}{d}(x-x_{tim})\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y-y_{tim})\right]}} \pm \\
 & \pm \sum_{i=4}^6 \sum_{m=1}^{M_i} \frac{q'_{tim}}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{\frac{\cosh\left[\frac{\pi}{d}(x-x_{tim})\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y+y_{tim})\right]}{\cosh\left[\frac{\pi}{d}(x-x_{tim})\right] - \cos\left[\frac{\pi}{d}(y-y_{tim})\right]}}.
 \end{aligned} \tag{8.5}$$

при чему знак "+" одговара парном режиму ("even" – e), док је знак "-" за непарни ("odd" – o) режим.

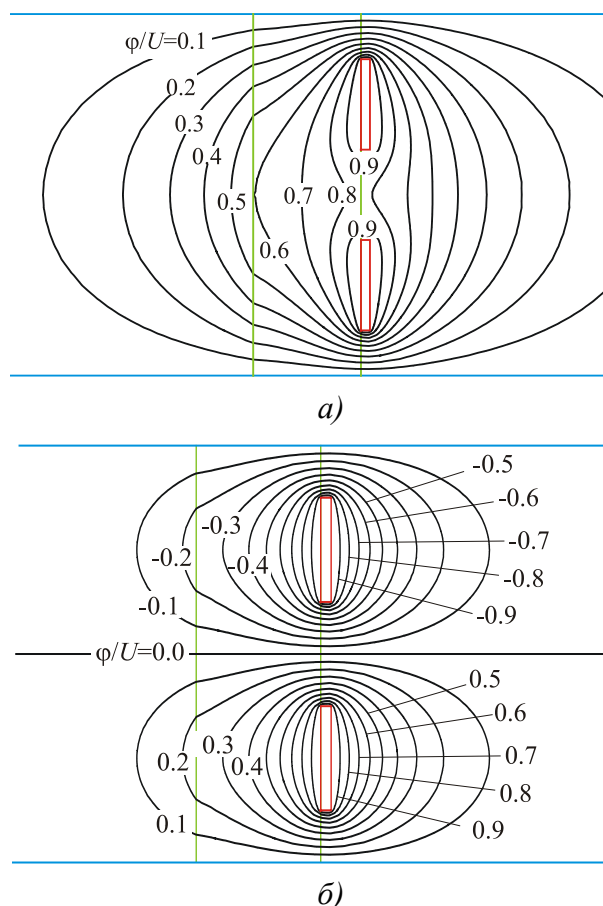
- Индекси "d", "a" и "t" уз ознаке наелектрисања еквивалентних електрода су скраћенице од енглеских речи "dielectric", "air" и "total", респективно.
- K_i ($i=1,2$) је број еквивалентних електрода на металним проводним тракама са слободним наелектрисањима q'_{dik} ($k=1, \dots, K_i$), која су смештена у средини ϵ .
- K_i ($i=3,4$) је број еквивалентних електрода на металним проводним тракама са слободним наелектрисањима q'_{aj} ($k=1, \dots, K_i$), која су смештена у вакууму.

- M_i ($i=1,\dots,6$) је број еквивалентних електрода на раздвојној површини два диелектрика са подужним наелектрисињама q'_{tim} , смештених у вакууму ($m=1,\dots,M_i$).
- (x_{dik}, y_{dik}) , (x_{aik}, y_{aik}) , (x_{tim}, y_{tim}) су позиције еквивалентних електрода у Декартовом правоуглом координатном систему.

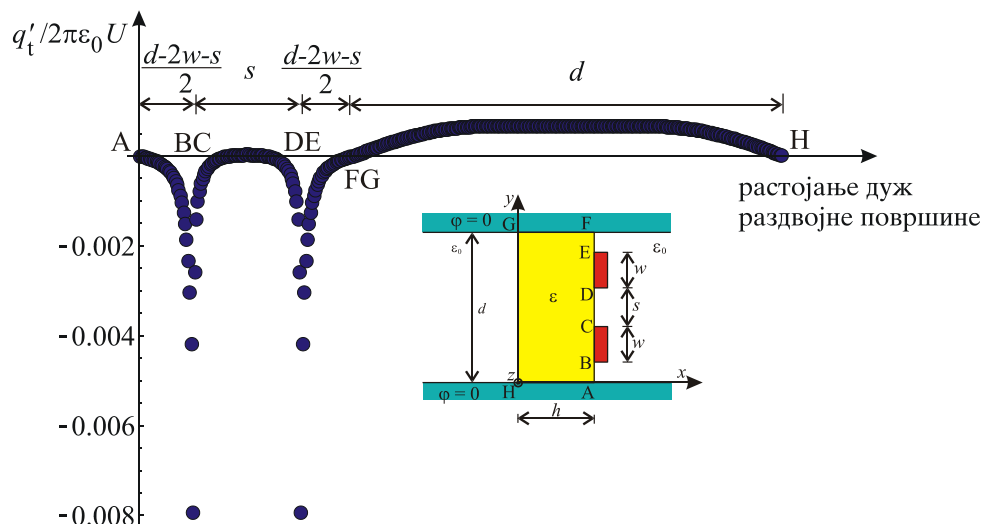
Укупан број непознатих, N_{tot} , се одређује као:
$$N_{tot} = \sum_{i=1}^4 K_i + \sum_{i=1}^6 M_i .$$

Према процедури која је описана у Поглављу 4, користећи метод подешавања у тачкама потенцијала и нормалне компоненте вектора јачине електричног поља, формиран је систем линеарних једначина, чијим се решавањем одређују непозната наелектрисиња а самим тим и подужна капацитивност, (4.11), као и карактеристична импеданса, (4.12), вертикално постављеног спрегнутог микротракастог вода.

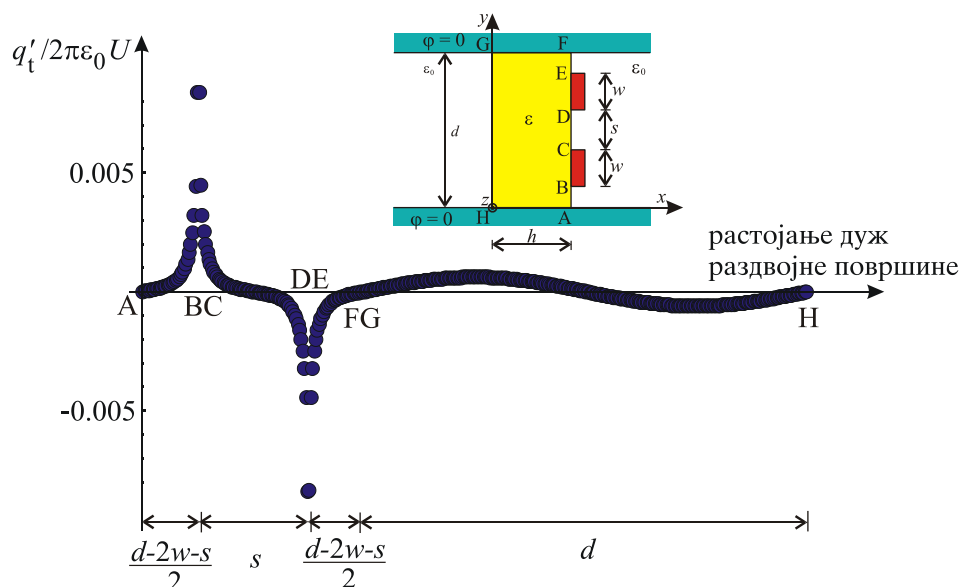
Еквипотенцијале и нормализоване расподеле везаног подужног наелектрисиња дуж раздвојне површине диелектрика приказани су на *Сликама 8.15-8.17* за вредности параметара вода: $\epsilon_r = 3$, $h/d = 0.3$, $w/d = 0.25$, $t/w = 0.1$, $s/d = 0.25$ и $N_{tot} = 1000$.



Слика 8.15 – Еквипотенцијале: паран (а) и непаран (б) режим.



Слика 8.16 – Нормализована расподела везаног подужног наелектрисања дуж раздвојне површине два диелектрика – паран режим.



Слика 8.17 – Нормализована расподела везаног подужног наелектрисања дуж раздвојне површине два диелектрика – непаран режим.

Провера тачности *НВЕМ*-а дата је у Табелама 8.3-8.5. У њима је извршено поређење *НВЕМ*-а са резултатима добијеним применом програмског пакета *FEMM* за $N_{\text{tot}} = 1000$. У табелама је приказано изузетно добро слагање добијених резултата.

Релативна грешка је мања од 0.8 %. Из табела са може уочити да повећањем вредности параметра h/d опадају вредности за карактеристичну импедансу за паран, као и за непаран режим. Са повећањем параметра s/d вредности карактеристичне импедансе за паран режим опадају, док за непаран расту. Утицај дебљине траке проводника представљен је у последњој табели, одакле се види да са повећањем дебљине траке опадају вредности карактеристичне импедансе за оба режима.

Табела 8.3 – Поређење вредности за карактеристичну импедансу и ефективну релативну диелектричну константу за различите вредности параметара h/d за:

$$s/d = 0.25, w/d = 0.25, t/w = 0.1 \text{ и } \epsilon_r = 3.$$

$\frac{h}{d}$	Паран режим					Непаран режим				
	HBEM		FEMM		$\delta[\%]$	HBEM		FEMM		$\delta[\%]$
	ϵ_r^{eff}	$Z_c[\Omega]$	ϵ_r^{eff}	$Z_c[\Omega]$		ϵ_r^{eff}	$Z_c[\Omega]$	ϵ_r^{eff}	$Z_c[\Omega]$	
0.2	1.648	94.34	1.658	93.90	0.47	1.784	62.23	1.795	61.99	0.39
0.4	1.828	89.59	1.839	89.19	0.45	1.872	60.81	1.883	60.53	0.46
0.6	1.883	88.27	1.893	87.88	0.44	1.879	60.69	1.890	60.40	0.48
0.8	1.899	87.90	1.909	87.52	0.43	1.880	60.68	1.891	60.40	0.46
1.0	1.903	87.79	1.914	87.42	0.42	1.880	60.68	1.891	60.39	0.48

Табела 8.4 – Поређење вредности за карактеристичну импедансу и ефективну релативну диелектричну константу за различите вредности параметара s/d за:

$$h/d = 0.5, w/d = 0.25, t/w = 0.1 \text{ и } \epsilon_r = 3.$$

$\frac{s}{d}$	Паран режим					Непаран режим				
	HBEM		FEMM		$\delta[\%]$	HBEM		FEMM		$\delta[\%]$
	ϵ_r^{eff}	$Z_c[\Omega]$	ϵ_r^{eff}	$Z_c[\Omega]$		ϵ_r^{eff}	$Z_c[\Omega]$	ϵ_r^{eff}	$Z_c[\Omega]$	
0.05	1.872	119.54	1.881	119.08	0.39	1.797	43.43	1.811	43.14	0.67
0.10	1.870	111.42	1.880	110.96	0.41	1.849	52.45	1.861	52.18	0.52
0.15	1.869	103.74	1.878	103.31	0.42	1.868	57.33	1.879	57.04	0.51
0.20	1.867	96.26	1.877	95.84	0.44	1.876	59.90	1.887	59.62	0.47
0.25	1.864	88.73	1.873	88.30	0.49	1.878	60.71	1.889	60.42	0.48
0.30	1.859	80.88	1.870	80.50	0.47	1.876	59.90	1.887	59.62	0.47

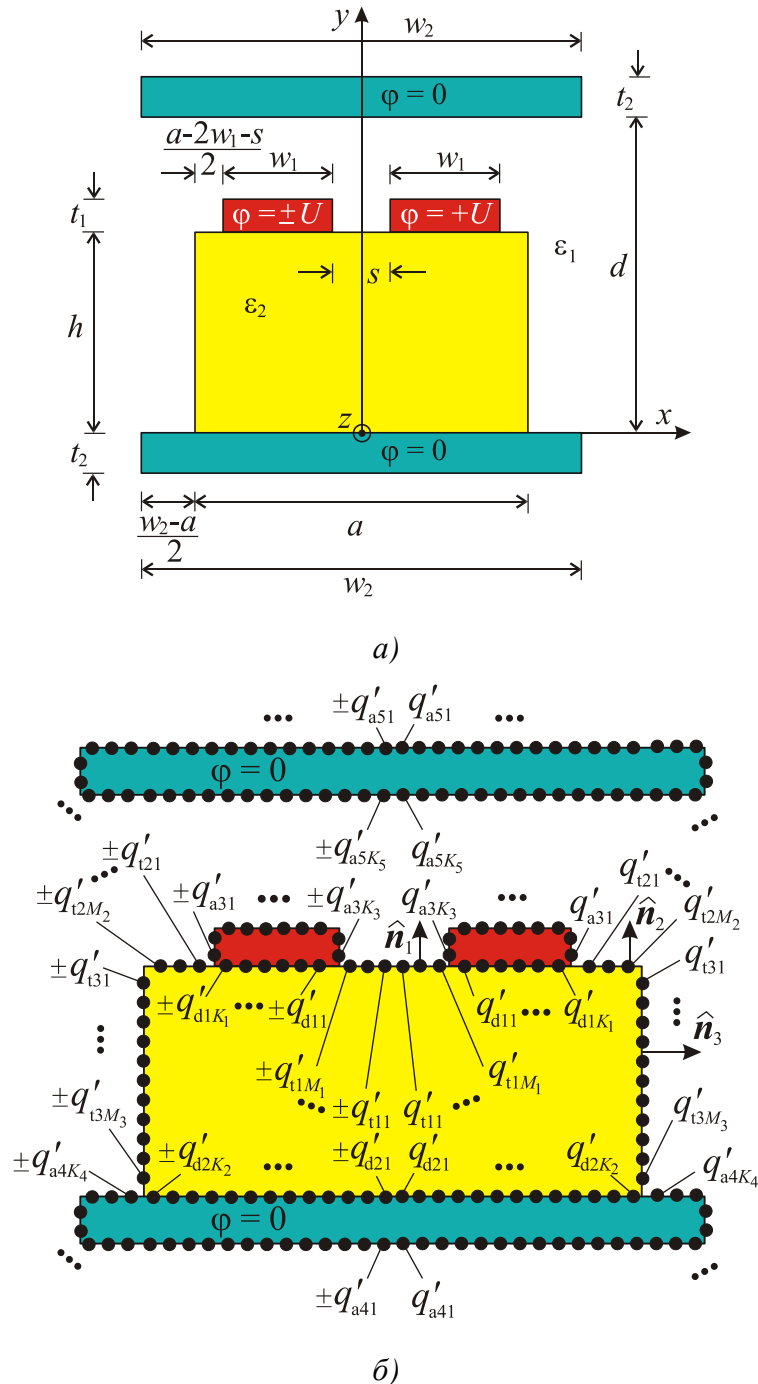
Табела 8.5 – Поређење вредности за карактеристичну импедансу и ефективну релативну диелектричну константу за различите вредности параметара t/w за:

$$h/d = 0.5, w/d = 0.25, s/d = 0.25 \text{ и } \epsilon_r = 3.$$

$\frac{t}{w}$	Паран режим					Непаран режим				
	HBEM		FEMM		$\delta[\%]$	HBEM		FEMM		$\delta[\%]$
	ϵ_r^{eff}	$Z_c[\Omega]$	ϵ_r^{eff}	$Z_c[\Omega]$		ϵ_r^{eff}	$Z_c[\Omega]$	ϵ_r^{eff}	$Z_c[\Omega]$	
0.02	1.913	93.92	1.934	93.20	0.77	1.947	65.31	1.968	64.79	0.80
0.04	1.901	92.39	1.917	91.82	0.62	1.929	63.96	1.946	63.54	0.66
0.05	1.895	91.71	1.909	91.18	0.58	1.920	63.35	1.935	62.97	0.60
0.06	1.888	91.06	1.901	90.58	0.53	1.911	62.78	1.925	62.44	0.54
0.08	1.876	89.85	1.887	89.42	0.48	1.894	61.71	1.906	61.39	0.52
0.10	1.864	88.73	1.873	88.30	0.49	1.878	60.71	1.889	60.42	0.48

8.4. Спрегнут микротракасти вод између две уземљене равни коначне ширине

Геометрија спрегнутог микротракастог вода приказана је на *Слици 8.18a*, док је одговарајући *НВЕМ* модел, формиран помоћу поступка описаног у Поглављу 4, приказан на *Слици 8.18б*.



Слика 8.18 – Спрегнут микротракасти вод постављен између две уземљене равни коначне ширине (а) и одговарајући модел (б).

Електрични скалар потенцијал у произвољној тачки овог система дат је изразом:

$$\begin{aligned}
 \varphi^{(e, o)} = \varphi_0^{(e, o)} - \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{K_i} \frac{q'_{dik}}{2\pi\epsilon_2} & \left[\ln \sqrt{(x - x_{dik})^2 + (y - y_{dik})^2} \pm \right. \\
 \pm \ln \sqrt{(x + x_{dik})^2 + (y - y_{dik})^2} & \left. \right] - \sum_{i=3}^5 \sum_{k=1}^{K_i} \frac{q'_{aik}}{2\pi\epsilon_1} \left[\ln \sqrt{(x - x_{aik})^2 + (y - y_{aik})^2} \pm \right. \\
 \pm \ln \sqrt{(x + x_{aik})^2 + (y - y_{aik})^2} & \left. \right] - \sum_{i=1}^3 \sum_{m=1}^{M_i} \frac{q'_{tim}}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln \sqrt{(x - x_{tim})^2 + (y - y_{tim})^2} \pm \right. \\
 \pm \ln \sqrt{(x + x_{tim})^2 + (y - y_{tim})^2} & \left. \right],
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

при чему знак "+" треба узети за паран ("even" – e), а знак "-" за непаран ("odd" – o) режим.

- Индекси "d", "a" и "t" уз ознаке наелектрисања еквивалентних електрода су скраћенице од енглеских речи "dielectric", "air" и "total", респективно.
- K_i је број еквивалентних електрода на металним проводним тракама са слободним наелектрисањима q'_{dik} ($k=1, \dots, K_i$, $i=1, 2$), која су смештена у средини ϵ_2 , и са слободним наелектрисањима q'_{aik} ($k=1, \dots, K_i$, $i=3, 4, 5$), која су смештена у средини ϵ_1 .
- M_i ($i=1, \dots, 3$) је број еквивалентних електрода на раздвојној површини два диелектрика са везаним наелектрисањима q'_{tim} , која су смештена у вакууму ($m=1, \dots, M_i$),
- (x_{dik}, y_{dik}) , (x_{aik}, y_{aik}) , (x_{tim}, y_{tim}) су позиције еквивалентних електрода ($k=1, \dots, K_i$, $i=1, \dots, 5$, $m=1, \dots, M_j$, $j=1, \dots, 3$).
- $\varphi_0^{(e, o)}$ је непозната адитивна константа, која зависи од изабране референтне тачке нултог потенцијала.

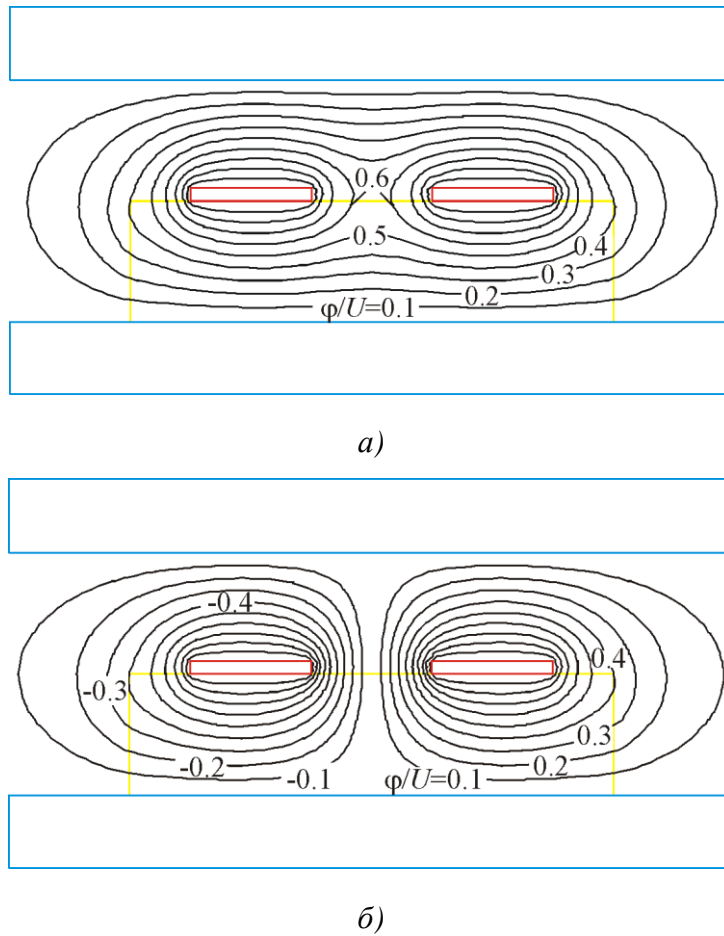
$$\text{Укупан број непознатих је } N_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^5 K_i + \sum_{i=1}^3 M_i + 1.$$

Након решавања формираног система једначина на начин описан у Поглављу 4, одређује се и подужна капацитивност спрегнутог микротракастог вода, дата изразом:

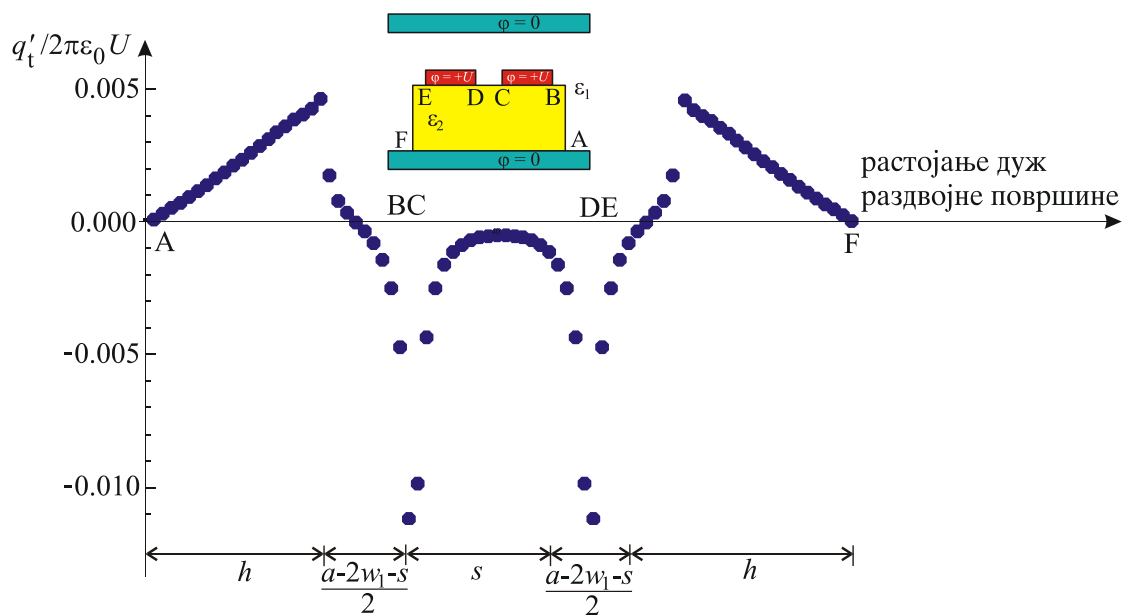
$$C'^{(e, o)} = \frac{1}{U} \left(\sum_{k=1}^{K_1} q'_{d1k} + \sum_{k=1}^{K_3} q'_{a3k} \right). \tag{8.8}$$

Еквипотенцијале и расподела везаног наелектрисања дуж раздвојних површина приказане су на *Сликама 8.19-8.21* за: $\epsilon_{r1} = 1$, $\epsilon_{r2} = 3$, $w_1/d = 0.5$, $t_1/w_1 = 0.1$, $w_2/d = 3.0$,

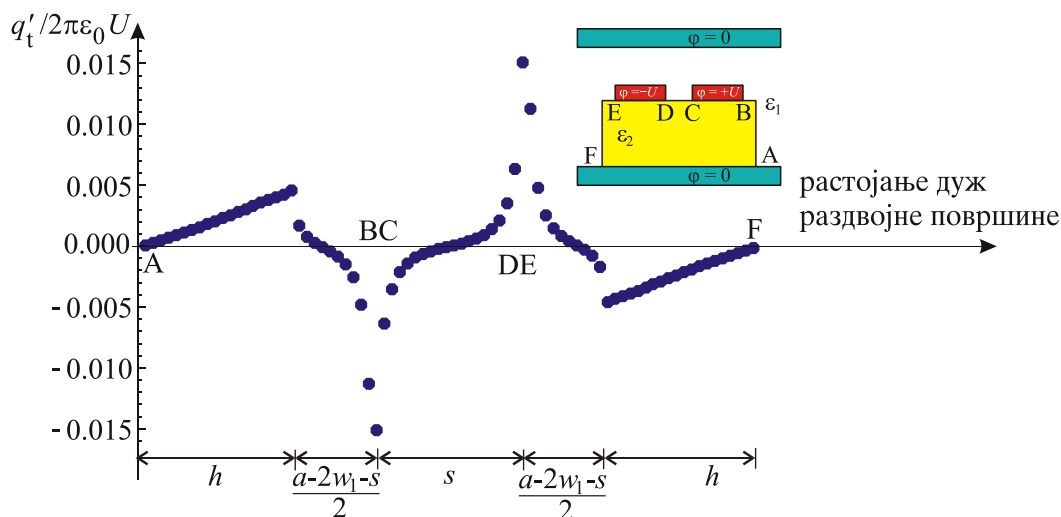
$t_2/w_2 = 0.1$, $h/d = 0.5$, $a/d = 2.0$ и $s/d = 0.5$. Сви резултати дати графички и табеларно одређени су када је број непознатих 1340.



Слика 8.19 – Еквипотенцијале: паран (а) и непаран (б) режим.



Слика 8.20 – Нормализована расподела везаног подужног наелектрисања дуж раздвојне површине два диелектрика – паран режим.



Слика 8.21 – Нормализована расподела везаног подужног наелектрисања дуж раздвојне површине два диелектрика – непаран режим.

Поређење резултата за карактеристичну импедансу и ефективну релативну диелектричну константу са променом параметра w_1/d дато је у Табелама 8.6 и 8.7, за паран и непаран режим, респективно. Нумерички резултати за ефективну диелектричну константу и карактеристичну импедансу добијени применом *НВЕМ*-а се веома добро слажу са вредностма које је дала примена програмског пакета *FEMM*. Релативна грешка резултата је мања од 3 %.

Табела 8.6 – Поређење вредности за карактеристичну импедансу микротракастог вода (паран режим) са променом односа w_1/d за: $\epsilon_{r1} = 1$, $\epsilon_{r2} = 3$, $t_1/w_1 = 0.1$, $w_2/d = 3.0$, $t_2/w_2 = 0.1$, $h/d = 0.5$, $a/d = 2.0$ и $s/d = 0.5$.

$\frac{w_1}{d}$	<i>НВЕМ</i>		<i>FEMM</i>		δ [%]
	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	
0.1	1.8588	147.722	1.9503	143.895	2.65
0.2	1.8832	113.646	1.9325	112.200	1.29
0.3	1.8804	94.232	1.9138	93.466	0.82
0.4	1.8657	80.990	1.8910	80.528	0.57
0.5	1.8431	71.241	1.8608	70.961	0.39
0.6	1.8050	63.848	1.8187	63.670	0.28
0.7	1.7485	58.190	1.7590	58.087	0.18

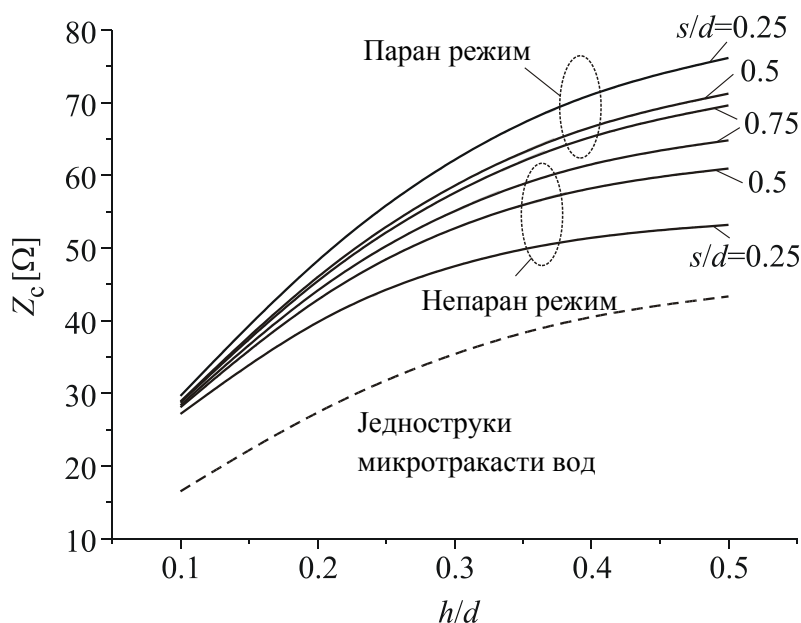
Расподела карактеристичне импедансе са променом параметра h/d за различите вредности параметра s/d приказана је на Слици 8.22. Осим резултата добијених за па-

ран и непаран режим, на слици је приказана промена карактеристичне импедансе код микротракастог вода са једном проводном траком, који је анализиран у Одељку 8.2.

Табела 8.7 – Поређење вредности за карактеристичну импедансу микротракастог вода (непаран режим) са променом односа w_1/d за: $\epsilon_{r1} = 1$, $\epsilon_{r2} = 3$, $t_1/w_1 = 0.1$, $w_2/d = 3.0$, $t_2/w_2 = 0.1$, $h/d = 0.5$, $a/d = 2.0$ и $s/d = 0.5$.

$\frac{w_1}{d}$	HBEM		FEMM		$\delta[\%]$
	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$	
0.1	1.8503	120.527	1.9433	117.441	2.63
0.2	1.8766	93.324	1.9233	92.086	1.34
0.3	1.8701	78.474	1.9032	77.755	0.92
0.4	1.8605	68.342	1.8804	67.930	0.61
0.5	1.8316	60.917	1.8514	60.606	0.51
0.6	1.7939	55.180	1.8123	54.942	0.43
0.7	1.7425	50.704	1.7575	50.540	0.32

Са слике се види да је карактеристична импеданса спрегнутих микротракастих водова за паран и непаран режим већа од карактеристичне импедансе микротракастог вода са једном проводном траком. Параметри вода су: $\epsilon_{r1} = 1$, $\epsilon_{r2} = 3$, $w_1/d = 0.5$, $t_1/w_1 = 0.1$, $w_2/d = 3.0$, $t_2/w_2 = 0.1$ и $a/d = 2.0$.



Слика 8.22 – Расподела карактеристичне импедансе са променом параметра h/d за различите вредности параметра s/d .

9

Примена хибридног метода граничних елемената у биизотропним срединама

У претходним поглављима хибридни метод граничних елемената примењен је за анализу хомогених, изотропних, вишеслојних средина, једноструких и спрегнутих, оклопљених и отворених микроталасних водова. Метод се показао као веома једноставан, брз и довољно тачан.

Изазов за даља истраживања аутора ове дисертације била је анализа микроталасних водова са подлогом од биизотропног материјала. У не тако великом броју истраживања, [61], [120]-[124], [168], аутори су анализирали водове са подлогом од биизотропног материјала, али углавном уз одређена ограничења. Микроталасни вод углавном има неограничено широки супстрат и/или бесконачно танку проводну траку или су предмет анализе оклопљене структуре.

9.1. Биизотропне средине

Као што је у Уводу и напоменуто, биизотропне средине се састоје од елемената који поседују и електричне и магнетне диполе. За ове средине је карактеристично да се под утицајем електричног, односно магнетног поља, истовремено и поларишу и магнетишу, тако да је приликом анализе, осим електричних оптерећења, неопходно узети у обзир и постојање магнетних оптерећења.

Конститутивне релације између вектора који описују електрично и магнетно поље код биизотропних средина приказане су у [198] и [199] изразима

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \xi \mathbf{H} \text{ и} \quad (9.1)$$

$$\mathbf{B} = \zeta \mathbf{E} + \mu \mathbf{H} , \quad (9.2)$$

где су ξ и ζ параметри који описују биизотропна својства средине.

Ова два параметра се најчешће представљају у облику

$$\zeta = (\chi + jk)\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \quad \text{и} \quad (9.3)$$

$$\xi = (\chi - jk)\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} . \quad (9.4)$$

Замењујући ове параметре у једначине (9.1) и (9.2), добија се

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + (\chi - jk)\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\mathbf{H} \quad \text{и} \quad (9.5)$$

$$\mathbf{B} = (\chi + jk)\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\mathbf{E} + \mu\mathbf{H} . \quad (9.6)$$

Овако дефинисаним изразима, конститутивне везе (9.1) и (9.2) добијају јасније физичко појашњење. Параметри k и χ су бездимензионе величине. Параметром k описују се жирална својства средине. Нпр. за средину која није жирална параметар k је једнак нули, $k = 0$. Параметар χ дефинише нерципрочна својства средине. Средина је реципрочна уколико је $\chi = 0$.

У част научницима који су дали допринос истраживању магнетоелектричних материјала, реципрочна жирална средина ($\chi = 0$, $k \neq 0$) назива се и Пастерова, док је нерципрочна нежирална средина ($\chi \neq 0$, $k = 0$) названа Телегенова. За Телегенову средину важи да је $\zeta = \xi$, па конститутивне везе добијају облик,

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + \xi\mathbf{H} \quad \text{и} \quad (9.7)$$

$$\mathbf{B} = \xi\mathbf{E} + \mu\mathbf{H} . \quad (9.8)$$

Максвелове једначине за стационарно електромагнетно поље у биизотропним срединама имају облик, [125],

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} , \text{ rot } \mathbf{E} = 0 , \text{ div } \mathbf{D} = \rho , \text{ div } \mathbf{B} = 0 . \quad (9.9)$$

Код система код којих постоји само запреминско наелектрисање, $\rho \neq 0$, $\mathbf{J} = 0$, уводе се функције електричног, φ , и магнетног, φ_m , скалар потенцијала. Електрично и магнетно поље се одређују из израза

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi \quad \text{и} \quad \mathbf{H} = -\text{grad } \varphi_m , \quad (9.10)$$

а функције потенцијала задовољавају Пуасонове једначине,

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_e} \quad \text{и} \quad \Delta\varphi_m = \xi\frac{\rho}{\mu\varepsilon_e} , \quad \text{где је } \varepsilon_e = \varepsilon(1 - \xi^2 / \mu\varepsilon) . \quad (9.11)$$

У системима где постоје само стационарне струје, $\rho = 0$, $\mathbf{J} \neq 0$, дефинишу се функције: магнетног вектор потенцијала, \mathbf{A} , и електричног вектор потенцијала, \mathbf{F} . Вектор магнетне индукције и вектор диелектричног помераја се одређују као

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad \text{и} \quad \mathbf{D} = \text{rot } \mathbf{F} , \quad (9.12)$$

при чему су

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \text{ и } \Delta \mathbf{F} = -\xi \mathbf{J}, \quad (9.13)$$

док су поља функција потенцијала безизворна

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \text{ и } \operatorname{div} \mathbf{F} = 0. \quad (9.14)$$

Како би се применио хибридни метод граничних елемената за анализу биизотропних средина било је најпре неопходно дефинисати граничне услове на раздвојној површини две средине. Хибридни метод граничних елемената је до сада примењиван за појединачну анализу проблема у електричним и магнетним срединама. Магнетоелектричне средине су, по први пут, у овој дисертацији анализирани применом хибридног метода граничних елемената.

Како би се илустровала примена хибридног метода граничних елемената за анализу биизотропних средина, посматра се пример подужног наелектрисања смештеног у двослојној биизотропној средини Телегеновог типа. Приказана је расподела електричног и магнетног површинског оптерећења добијена применом теореме лика у биизотропном огледалу. Исти пример реализован је применом хибридног метода граничних елемената.

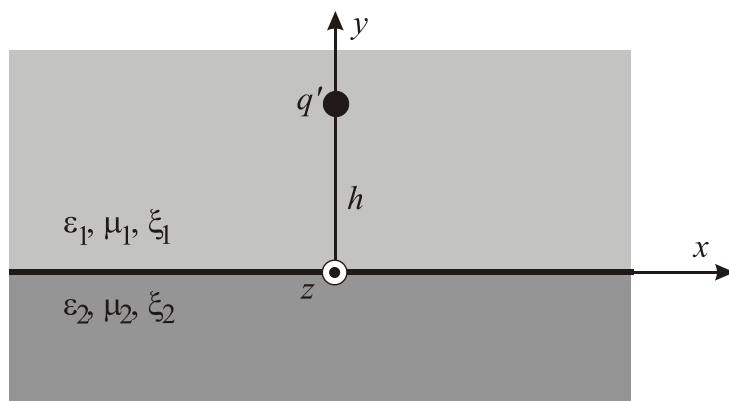
За разлику од класичне примене *НВЕМ*-а, описане у Поглављу 4, где се искључиво анализирају диелектричне средине, с обзиром на природу магнетоелектричних средина, овде је било неопходно узети у обзир постојање фиктивних магнетних оптерећења, [200]. Често се у литератури примењује појам „фиктивни магнетни извори“, чиме се врши симетрирање Максвелових једначина, а затим изводе и одговарајуће еквивалентне теореме за решавање и анализу проблема у електромагнетици.

9.2. Подужно наелектрисање у двослојној биизотропној средини – теорема лика

Изрази за електрични и магнетни скалар потенцијал у околини подужног наелектрисања са *Слике 9.1* дати су у [117] и имају облик:

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_0 + A(\ln \sqrt{x^2 + (y-h)^2} + \alpha \ln \sqrt{x^2 + (y+h)^2}), & y \geq 0; \\ \varphi_0 + A(1 + \alpha) \ln \sqrt{x^2 + (y-h)^2}, & y \leq 0, \end{cases} \quad (9.15)$$

$$\varphi_m = \begin{cases} \varphi_{0m} + A_1(\ln \sqrt{x^2 + (y-h)^2} + \alpha_1 \ln \sqrt{x^2 + (y+h)^2}), & y \geq 0; \\ \varphi_{0m} + A_1(1 + \alpha_1) \ln \sqrt{x^2 + (y-h)^2}, & y \leq 0. \end{cases} \quad (9.16)$$



Слика 9.1 – Подужно наелектрисање у биизотропној средини.

Константе које се јављају у овим изразима су:

$$A = -\frac{\mu_1 q'}{2\pi(\epsilon_1 \mu_1 - \xi_1^2)} \text{ и } A_1 = \frac{\xi_1 q'}{2\pi(\epsilon_1 \mu_1 - \xi_1^2)}, \quad (9.17)$$

$$\alpha = \frac{\xi_2^2 - \xi_1^2 + (\epsilon_1 - \epsilon_2)(\mu_1 + \mu_2) + 2\frac{\xi_1}{\mu_1}(\xi_2 \mu_1 - \xi_1 \mu_2)}{\delta}, \quad (9.18)$$

$$\alpha_1 = \frac{\xi_2^2 - \xi_1^2 + (\epsilon_1 + \epsilon_2)(\mu_1 - \mu_2) + 2\frac{\mu_1}{\xi_1}(\xi_2 \epsilon_1 - \xi_1 \epsilon_2)}{\delta} \text{ и } (9.19)$$

$$\delta = (\epsilon_1 + \epsilon_2)(\mu_1 + \mu_2) - (\xi_1 + \xi_2)^2, \quad (9.20)$$

а φ_0 и φ_{0m} су одговарајуће адитивне константе, које зависе од избора референтне тачке нултог потенцијала.

Одговарајуће компоненте вектора електричног и магнетног поља су:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \begin{cases} -A \left[\frac{x}{x^2 + (y-h)^2} + \alpha \frac{x}{x^2 + (y+h)^2} \right], & y \geq 0; \\ -A(1+\alpha) \frac{x}{x^2 + (y-h)^2}, & y \leq 0. \end{cases} \quad (9.21)$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{cases} -A \left[\frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2} + \alpha \frac{y+h}{x^2 + (y+h)^2} \right], & y \geq 0; \\ -A(1+\alpha) \frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2}, & y \leq 0. \end{cases} \quad (9.22)$$

$$H_x = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} = \begin{cases} -A_1 \left[\frac{x}{x^2 + (y-h)^2} + \alpha_1 \frac{x}{x^2 + (y+h)^2} \right], & y \geq 0; \\ -A_1(1+\alpha_1) \frac{x}{x^2 + (y-h)^2}, & y \leq 0. \end{cases} \quad (9.23)$$

$$H_y = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial y} = \begin{cases} -A_1 \left[\frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2} + \alpha_1 \frac{y+h}{x^2 + (y+h)^2} \right], & y \geq 0; \\ -A_1(1 + \alpha_1) \frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2}, & y \leq 0. \end{cases} \quad (9.24)$$

У циљу одређивања расподеле електричног и магнетног површинског наелектрисања неопходно је најпре дефинисати везу између нормалних компоненти вектора јачине електричног и магнетног поља на раздвојној површини две биизотропне средине.

9.2.1. Одређивање везе између нормалних компоненти електричног и магнетног поља на раздвојној површини две биизотропне средине

Имајући у виду да је

$$\mathbf{D}_1 = \varepsilon_1 \mathbf{E}_1 + \xi_1 \mathbf{H}_1, \quad (9.25)$$

$$\mathbf{D}_2 = \varepsilon_2 \mathbf{E}_2 + \xi_2 \mathbf{H}_2, \quad (9.26)$$

$$\mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H}_1 + \xi_1 \mathbf{E}_1 \text{ и} \quad (9.27)$$

$$\mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_2 + \xi_2 \mathbf{E}_2, \quad (9.28)$$

и заменом у граничне услове за нормалне компоненте вектора електричне и магнетне индукције на раздвојној површини две средине:

$$D_{1n} = D_{2n} \text{ и} \quad (9.29)$$

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad (9.30)$$

добија се:

$$\varepsilon_1 E_{1n} + \xi_1 H_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} + \xi_2 H_{2n} \text{ и} \quad (9.31)$$

$$\mu_1 H_{1n} + \xi_1 E_{1n} = \mu_2 H_{2n} + \xi_2 E_{2n}. \quad (9.32)$$

Решавајући формирану систем једначина по E_{2n} и H_{2n} , добија се

$$E_{2n} = \frac{\varepsilon_1 \mu_2 - \xi_1 \xi_2}{\varepsilon_2 \mu_2 - \xi_2^2} E_{1n} + \frac{\xi_1 \mu_2 - \xi_2 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2 - \xi_2^2} H_{1n} \text{ и} \quad (9.33)$$

$$H_{2n} = \frac{\xi_1 \varepsilon_2 - \xi_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_2 \mu_2 - \xi_2^2} E_{1n} + \frac{\varepsilon_2 \mu_1 - \xi_1 \xi_2}{\varepsilon_2 \mu_2 - \xi_2^2} H_{1n}. \quad (9.34)$$

9.2.2. Одређивање електричног и магнетног површинског оптерећења на раздвојној површини две биизотропне средине

Електрично везано површинско наелектрисање на раздвојној површини две средине одређује се из израза

$$\eta_v = P_{2n} - P_{1n}, \quad (9.35)$$

при чему су вектори поларизације дефинисани као:

$$P_{1n} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)E_{1n} + \xi_1 H_{1n} \text{ и} \quad (9.36)$$

$$P_{2n} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)E_{2n} + \xi_2 H_{2n}. \quad (9.37)$$

Заменом (9.33) и (9.34) у (9.36) и (9.37), добија се да је електрично везано површинско оптерећење

$$\eta_v = \frac{\varepsilon_0[\mu_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \xi_2^2 + \xi_1\xi_2]}{\varepsilon_2\mu_2 - \xi_2^2} E_{1n}^{(0+)} + \frac{\varepsilon_0[\xi_2\mu_1 - \xi_1\mu_2]}{\varepsilon_2\mu_2 - \xi_2^2} H_{1n}^{(0+)}. \quad (9.38)$$

Магнетно површинско наелектрисање на раздвојној површини две средине одређује се из израза

$$\eta_m = M_{2n} - M_{1n}, \quad (9.39)$$

при чему су вектори магнетизације дефинисани у облику:

$$M_{1n} = \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1 \right) H_{1n} + \frac{\xi_1}{\mu_0} E_{1n} \text{ и} \quad (9.40)$$

$$M_{2n} = \left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1 \right) H_{2n} + \frac{\xi_2}{\mu_0} E_{2n}. \quad (9.41)$$

Заменом (9.33) и (9.34) у (9.40) и (9.41), добија се да је магнетно површинско оптерећење

$$\eta_m = \frac{\xi_2\varepsilon_1 - \xi_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2\mu_2 - \xi_2^2} E_{1n}^{(0+)} + \frac{\varepsilon_2(\mu_2 - \mu_1) - \xi_2^2 + \xi_1\xi_2}{\varepsilon_2\mu_2 - \xi_2^2} H_{1n}^{(0+)}. \quad (9.42)$$

Изрази (9.38) и (9.42) имају опште важење за расподелу електричног и магнетног површинског оптерећења на раздвојној површини две средине.

За конкретан пример са *Слике 9.1*, расподела електричног и магнетног површинског оптерећења биће одређена када се у изразе (9.22) и (9.24) стави да је $y=0$, јер су нормалне компоненте вектора јачине електричног и магнетног поља управо y -компоненте.

Нормална компонента вектора јачине електричног поља, (9.22), на раздвојној површини, у овом случају, има облик:

$$E_{1n}^{(0+)} = A \frac{h}{x^2 + h^2} (1 - \alpha), \quad (9.43)$$

док је одговарајућа компонента вектора јачине магнетног поља, дата изразом (9.24), облика

$$H_{1n}^{(0+)} = A_1 \frac{h}{x^2 + h^2} (1 - \alpha_1). \quad (9.44)$$

Заменом вредности константи A , A_1 , α и α_1 , (9.17)-(9.20), у (9.43) и (9.44), а затим и њиховом заменом у (9.38) и (9.42), добија се

$$\eta_v = \frac{q'h}{\pi(x^2 + h^2)} \frac{\varepsilon_0[2\xi_1\xi_2\mu_1 - \xi_1^2(\mu_1 + 2\mu_2) + \mu_1(\xi_2^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\mu_1 + \mu_2))]}{(\varepsilon_1\mu_1 - \xi_1^2)[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\mu_1 + \mu_2) - (\xi_1 + \xi_2)^2]} \quad (9.45)$$

$$\eta_m = \frac{q'h}{\pi(x^2 + h^2)} \frac{\xi_1^3 - 2\varepsilon_1\mu_1\xi_2 + \xi_1[\varepsilon_2(\mu_1 + \mu_2) + \varepsilon_1(\mu_2 - \mu_1) - \xi_2^2]}{(\varepsilon_1\mu_1 - \xi_1^2)[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\mu_1 + \mu_2) - (\xi_1 + \xi_2)^2]}. \quad (9.46)$$

Нормализоване вредности електричних и магнетних површинских оптерећења су $\frac{\eta_v h}{q'}$ и $\frac{\eta_m \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} h}{q'}$, респективно.

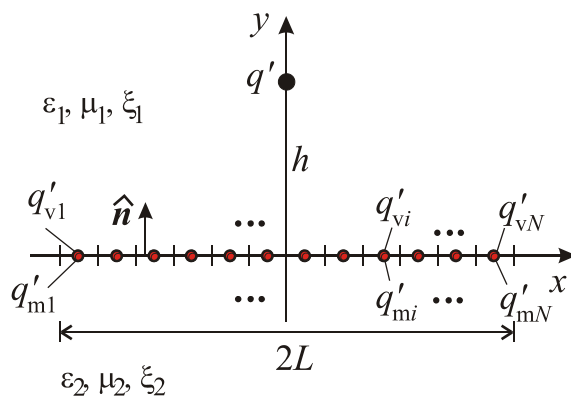
У практичним прорачунима се користи величина $p = \frac{\xi^2}{\varepsilon\mu}$ ($0 < p < 1$), која представља меру биизотропије. За средине код којих је $p = 0.1$ каже се да су са слабо израженим ефектом биизотропије, док се у случају $p = 0.9$ ради о срединама са јако израженим ефектом биизотропије.

9.3. Примена хибридног метода граничних елемената

Раздвојна површина две биизотропне средине ширине $2L$, *Слика 9.2*, сегментира се на N трака, чија је ширина $\Delta l = 2L/N$. Према хибридном методу граничних елемената, сваки од сегмената замењује се еквивалентном електродом⁴ полупречника $a_e = \frac{\Delta l}{\pi}$, смештеном дуж осе траке и са подужним везаним наелектрисањима q'_{vi} ($i = 1, 2, \dots, N$), која су на раздвојној површини смештена у вакууму.

С обзиром да обе средине имају магнетоелектрични карактер, неопходно је претпоставити и постојање фиктивних магнетних подужних оптерећења q'_{mi} ($i = 1, 2, \dots, N$) на раздвојној површини две средине. Магнетна оптерећења налазе се на истим позицијама као и електрична везана оптерећења.

⁴ Полупречник еквивалентних електрода одређен је на идентичан начин као и у случају класичне примене хибридног метода граничних елемената (Прилог IV).



Слика 9.2 – Примена хибридног модела граничних елемената.

За овако формиран систем, електрични и магнетни скалар потенцијали у произвољној тачки $M(x, y)$ дати су изразима

$$\varphi = -\frac{q'}{2\pi\epsilon_1(1-p_1)} \ln \sqrt{x^2 + (y-h)^2} - \sum_{i=1}^N \frac{q'_{vi}}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{(x-x_i)^2 + y^2}, \quad (9.47)$$

$$\varphi_m = \frac{\xi_1 q'}{2\pi\epsilon_1\mu_1(1-p_1)} \ln \sqrt{x^2 + (y-h)^2} - \sum_{i=1}^N \frac{q'_{mi}}{2\pi} \ln \sqrt{(x-x_i)^2 + y^2}, \quad (9.48)$$

где су положаји везаних наелектрисања: $x_i = -L + (2i-1)\frac{\Delta l}{2}$ и $y_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$), док је $p_1 = \xi_1^2 / \epsilon_1\mu_1$.

Да би вредности непознатих наелектрисања биле одређене, неопходно је формирати систем линеарних једначина подешавајући граничне услове за нормалне компоненте вектора јачине електричног и магнетног поља у тачкама на површини електрода. Ове компоненте, на основу релација (9.38) и (9.42), имају облик

$$\begin{aligned} \hat{n}\mathbf{E}_{i0}^{(0+)} &= \frac{\epsilon_2(\mu_1 - \mu_2) - \xi_1\xi_2 + \xi_2^2}{\epsilon_0[(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\mu_2 - \mu_1) + (\xi_1 - \xi_2)^2]} \eta_{vi} + \\ &+ \frac{\mu_1\xi_2 - \mu_2\xi_1}{(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\mu_2 - \mu_1) + (\xi_1 - \xi_2)^2} \eta_{mi}, \end{aligned} \quad (9.49)$$

$$\begin{aligned} \hat{n}\mathbf{H}_{i0}^{(0+)} &= \frac{\epsilon_1\xi_2 - \epsilon_2\xi_1}{\epsilon_0[(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\mu_2 - \mu_1) + (\xi_1 - \xi_2)^2]} \eta_{vi} + \\ &+ \frac{\mu_2(\epsilon_1 - \epsilon_2) - \xi_1\xi_2 + \xi_2^2}{(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\mu_2 - \mu_1) + (\xi_1 - \xi_2)^2} \eta_{mi}, \end{aligned} \quad (9.50)$$

где су са $\eta_{vi} = \frac{q'_{vi}}{\Delta l}$ и $\eta_{mi} = \frac{q'_{mi}}{\Delta l}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) обележена електрична и магнетна површинска наелектрисања за i -ти сегмент, док је орт нормале на раздвојну површину

$\hat{n} = \hat{y}$. Изражавајући q'_{vi} и q'_{mi} у функцији нормалних компоненти електричног и магнетног поља, добија се

$$q'_{vi} = \frac{\varepsilon_0[\mu_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \xi_2^2 + \xi_1\xi_2]}{\varepsilon_2\mu_2 - \xi_2^2} \Delta E_y^{(0+)} + \frac{\varepsilon_0[\xi_2\mu_1 - \xi_1\mu_2]}{\varepsilon_2\mu_2 - \xi_2^2} \Delta H_y^{(0+)} \quad \text{и} \quad (9.51)$$

$$q'_{mi} = \frac{\xi_2\varepsilon_1 - \xi_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2\mu_2 - \xi_2^2} \Delta E_y^{(0+)} + \frac{\varepsilon_2(\mu_2 - \mu_1) - \xi_2^2 + \xi_1\xi_2}{\varepsilon_2\mu_2 - \xi_2^2} \Delta H_y^{(0+)}. \quad (9.52)$$

Подешавање у тачкама неопходно је извршити на површини и i -тог електричног везаног наелектрисања и i -тог магнетног наелектрисања. То значи да је укупан број непознатих $2N$, а систем линеарних једначина који се формира димензија $2N \times 2N$. Подешавање на површини i -тог везаног наелектрисања се врши узимајући у обзир:

- утицај њега самог (у питању је електрично или магнетно подужно наелектрисање), са тачкама подешавања $x_p = x_i$, $y_p = a_e$,
- утицај оптерећења које се налази на истој позицији (у питању је магнетно или електрично везано подужно наелектрисање), са тачкама подешавања $x_p = x_i$, $y_p = a_e$,
- утицај осталих електричних и магнетних подужних наелектрисања, са тачкама подешавања $x_p = x_i$, $y_p = 0$,
- утицај примарног слободног оптерећења, са тачкама подешавања $x_p = x_i$, $y_p = 0$.

На тај начин се формира систем линеарних једначина облика:

$$\begin{aligned} q'_{vi} = & A \Delta l \left[\frac{q'}{2\pi\varepsilon_1(1-p_1)} \frac{-h}{x_i^2 + h^2} + \frac{q'_{v1}}{2\pi\varepsilon_0} 0 + \frac{q'_{v2}}{2\pi\varepsilon_0} 0 + \dots + \frac{q'_{vi}}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{a_e} + \dots + \frac{q'_{vN}}{2\pi\varepsilon_0} 0 \right] + \\ & + B \Delta l \left[\frac{\xi_1 q'}{2\pi\varepsilon_1\mu_1(1-p_1)} \frac{h}{x_i^2 + h^2} + \frac{q'_{m1}}{2\pi} 0 + \frac{q'_{m2}}{2\pi} 0 + \dots + \frac{q'_{mi}}{2\pi} \frac{1}{a_e} + \dots + \frac{q'_{mN}}{2\pi} 0 \right], \\ q'_{mi} = & C \Delta l \left[\frac{q'}{2\pi\varepsilon_1(1-p_1)} \frac{-h}{x_i^2 + h^2} + \frac{q'_{v1}}{2\pi\varepsilon_0} 0 + \frac{q'_{v2}}{2\pi\varepsilon_0} 0 + \dots + \frac{q'_{vi}}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{a_e} + \dots + \frac{q'_{vN}}{2\pi\varepsilon_0} 0 \right] + \\ & + D \Delta l \left[\frac{\xi_1 q'}{2\pi\varepsilon_1\mu_1(1-p_1)} \frac{h}{x_i^2 + h^2} + \frac{q'_{m1}}{2\pi} 0 + \frac{q'_{m2}}{2\pi} 0 + \dots + \frac{q'_{mi}}{2\pi} \frac{1}{a_e} + \dots + \frac{q'_{mN}}{2\pi} 0 \right], \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, N, \quad (9.53)$

где су:

$$A = \frac{\varepsilon_0[\mu_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \xi_2^2 + \xi_1\xi_2]}{\varepsilon_2\mu_2 - \xi_2^2}, \quad (9.54)$$

$$B = \frac{\varepsilon_0[\xi_2\mu_1 - \xi_1\mu_2]}{\varepsilon_2\mu_2 - \xi_2^2}, \quad (9.55)$$

$$C = \frac{\xi_2\varepsilon_1 - \xi_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2\mu_2 - \xi_2^2} \text{ и} \quad (9.56)$$

$$D = \frac{\varepsilon_2(\mu_2 - \mu_1) - \xi_2^2 + \xi_1\xi_2}{\varepsilon_2\mu_2 - \xi_2^2}. \quad (9.57)$$

Након сређивања израза (9.53) увођењем нормализација $\frac{q'_{vi}}{q'}$, $\frac{q'_{mi}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{q'}$, $\frac{x_i}{h}$ и узимајући у обзир да је $a_e = \Delta l / \pi = 2L / \pi N$, формиран је систем једначина

$$\frac{q'_{vi}}{q'} \left(1 - \frac{A}{\varepsilon_0 2}\right) - \frac{q'_{mi}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{q'} \frac{B}{2\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \left(-A + B \frac{\xi_1}{\mu_1}\right) \frac{\frac{L}{h}}{\pi\varepsilon_1(1-p_1)N \left(1 + \left(\frac{x_i}{h}\right)^2\right)} \text{ и}$$

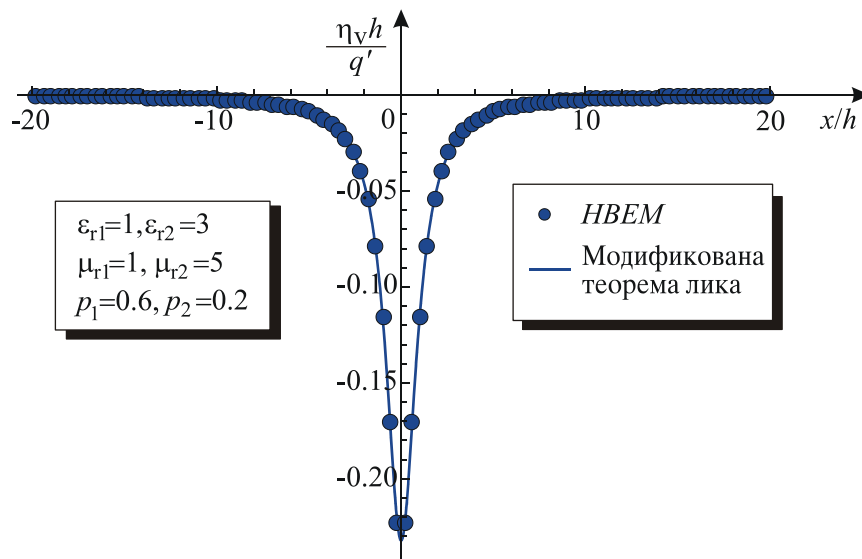
$$-\frac{q'_{vi}}{q'} \frac{C}{\varepsilon_0 2} + \frac{q'_{mi}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{q'} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \left(1 - \frac{D}{2}\right) = \left(-C + D \frac{\xi_1}{\mu_1}\right) \frac{\frac{L}{h}}{\pi\varepsilon_1(1-p_1)N \left(1 + \left(\frac{x_i}{h}\right)^2\right)},$$

$$i = 1, 2, \dots, N, \quad (9.58)$$

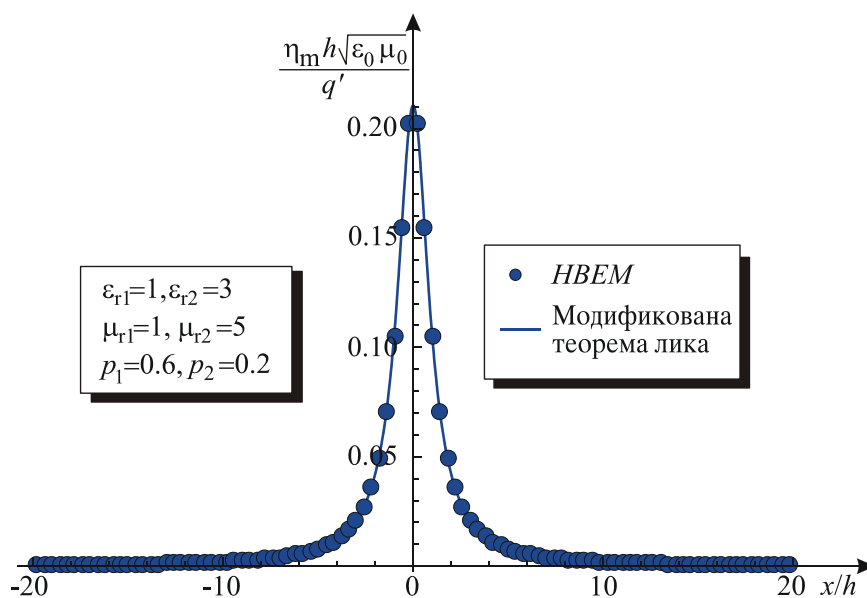
чијим су решавањем одређене вредности електричног и магнетног подужног наелектрисања на раздвојној површини две биизотропне средине.

Расподеле електричног везаног површинског и магнетног површинског наелектрисања дуж раздвојне површине приказне су на *Сликама 9.3-9.8*, на којима су дате и расподеле електричног и магнетног површинског оптерећења одређене применом модификоване теореме lika, дате изразима (9.45) и (9.46), за различите вредности параметара. Анализирани су случајеви средина са јако, средње и слабо израженим ефектом биизотропије.

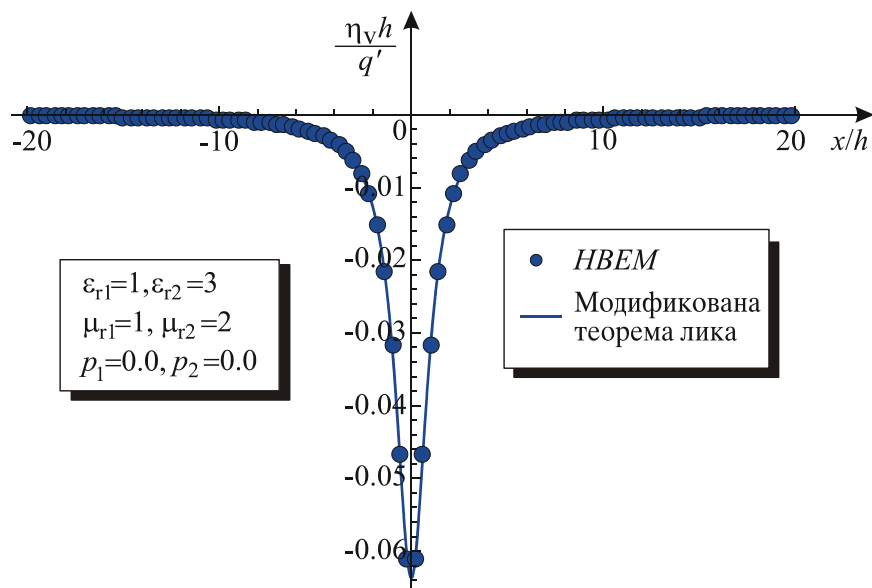
За случај изотропне средине, када је $p_1 = p_2 = 0$, *Слике 9.5 и 9.6*, на раздвојној површини постоје само електрична везана површинска оптерећења, док су магнетна једнака нули, што се и види на слици. Остварено је изузетно поклапање резултата добијених аналитичким путем и применом хибридног метода граничних елемената.



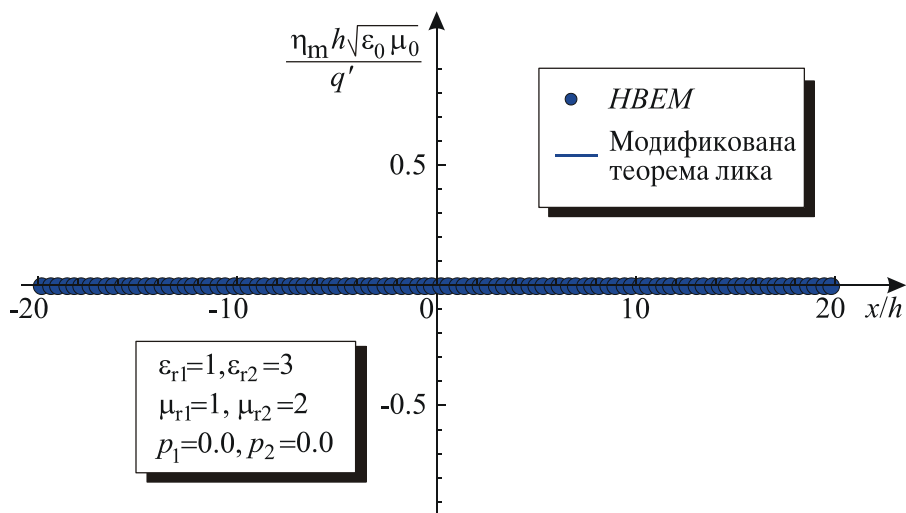
Слика 9.3 – Нормализована расподела електричног везаног површинског оптерећења дуж раздвојне површине средина са слабо и средње израженим ефектом биизотропије.



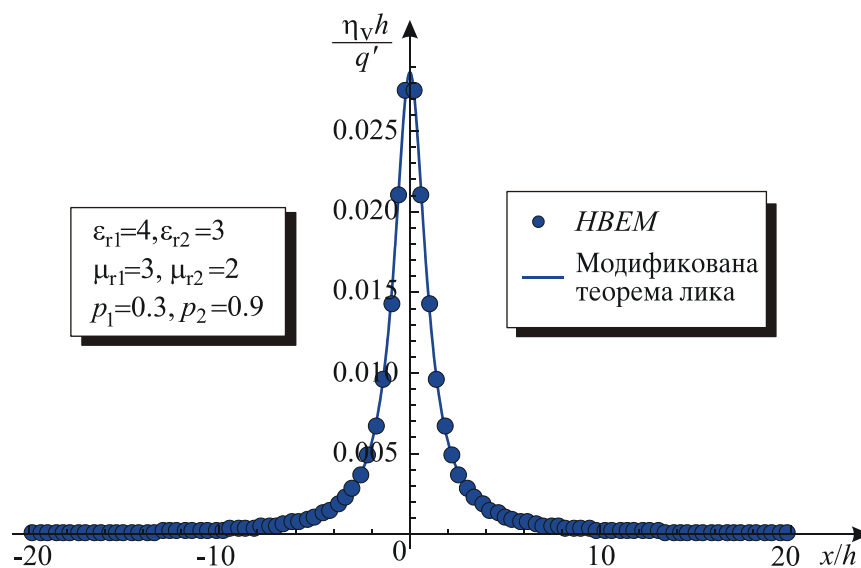
Слика 9.4 – Нормализована расподела магнетног површинског оптерећења дуж раздвојне површине средина са слабо и средње израженим ефектом биизотропије.



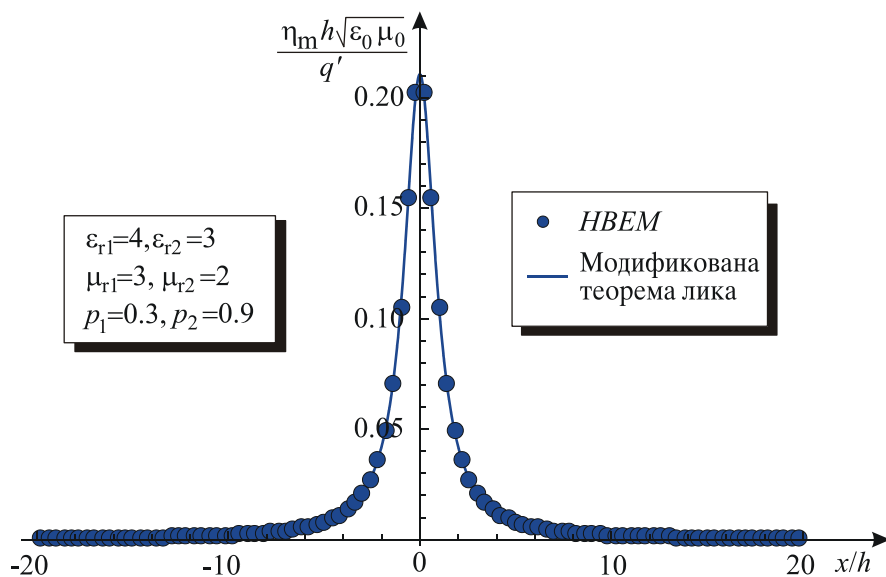
Слика 9.5 – Нормализована расподела електричног везаног површинског оптерећења дуж раздвојне површине две изотропне средине.



Слика 9.6 – Нормализована расподела магнетног површинског оптерећења дуж раздвојне површине две изотропне средине.



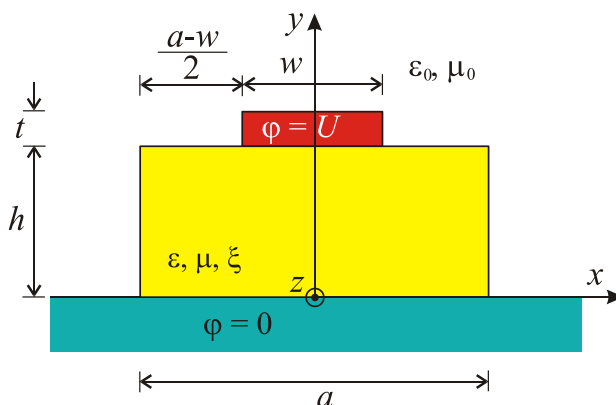
Слика 9.7 – Нормализована расподела електричног везаног површинског оптерећења дуж раздвојне површине средина са слабо и јако израженим ефектом биизотропије.



Слика 9.8 – Нормализована расподела магнетног површинског оптерећења дуж раздвојне површине средина са слабо и јако израженим ефектом биизотропије.

9.3.1. Анализа микротракастог вода применом хибридног метода граничних елемената

Посматрамо микротракасти вод са подлогом од биизотропног материјала Телегеновог типа, постављеног изнад неограничено широке савршено проводне равни нултог потенцијала, *Слика 9.9*.



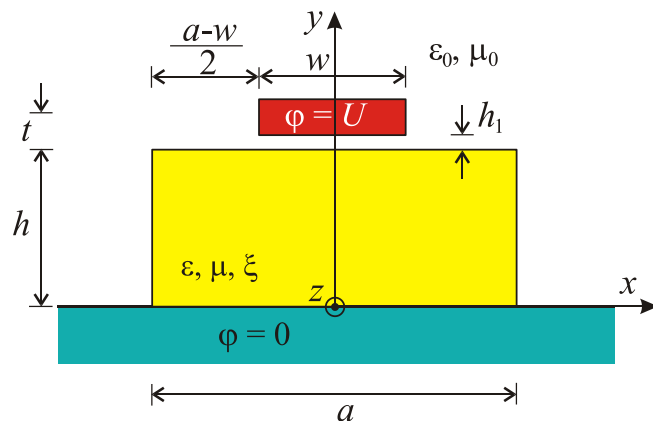
Слика 9.9 – Микротракасти вод са подлогом од биизотропног материјала.

Према хибридном методу граничних елемената, раздвојна површина две средине, у овом случају биизотропне и вакуума, сегментира се и свака од формираних трака замењује еквивалентном електродом, полупречника $a_e = \Delta l / \pi$, где је Δl ширина сегмента.

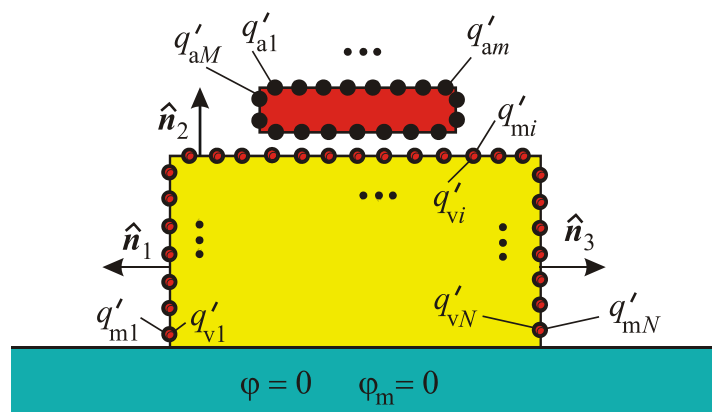
Проблем који се јавио у примени *НВЕМ*-а огледа се у немогућности налажења адекватног решења за постављање еквивалентних електрода на раздвојну површину металне траке и биизотропне средине. Да ли треба узети у обзир само слободна електрична оптерећења или тотална електрична и магнетна оптерећења, само су нека од питања која су се наметнула током примене метода. Да подсетимо, у Поглављу 4, на раздвојну површину изотропне средине и металне траке, уместо тоталних, постављају се само слободна оптерећења смештена у одговарајућем диелектрику. Та апроксимација метода се показала задовољавајуће тачно. Међутим, њу није могуће применити у овом случају, јер метална трака налаже на подлогу од биизотропног материјала.

У циљу формирања еквивалентног система, а у тренутку писања ове дисертације недостатка налажења адекватнијег решења, метод је примењен у изворном облику тако што се проводна трака поставља на висину h_1 , *Слика 9.10*.

Површина траке се сегментира и сваки сегмент замењује еквивалентним електродама постављеним у вакууму. Еквивалентне електроде на траци су слободна подужна наелектрисања, док се на раздвојној површини налазе електрична везана и магнетна подужна оптерећења. Овако формиран еквивалентан систем приказан је на *Слици 9.11*.



Слика 9.10 – Микротракасти вод са подлогом од биизотропног материјала и проводном траком на висини h_1 .



Слика 9.11 – Еквивалентни НВЕМ модел.

С обзиром да се систем наелектрисања налази изнад савршено проводне равни нултог потенцијала, након примене теореме lika у равном огледалу, електрични и магнетни скалар потенцијали у произвољној тачки $M(x, y)$ су:

$$\begin{aligned} \varphi = & \sum_{m=1}^M \frac{q'_{am}}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{\frac{(x-x_{am})^2 + (y+y_{am})^2}{(x-x_{am})^2 + (y-y_{am})^2}} + \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{q'_{vi}}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{\frac{(x-x_{vi})^2 + (y+y_{vi})^2}{(x-x_{vi})^2 + (y-y_{vi})^2}} \end{aligned} \quad (9.59)$$

$$\varphi_m = \sum_{i=1}^N \frac{q'_{mi}}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{(x-x_{mi})^2 + (y+y_{mi})^2}{(x-x_{mi})^2 + (y-y_{mi})^2}}, \quad (9.60)$$

где су:

- M је број еквивалентних електрода на металној траци са слободним подужним наелектрисањима q'_{am} , која су смештена у вакууму.

- N је број еквивалентних електрода на раздвојној површини две средине са електричним везаним и магнетним подужним наелектрисањима q'_{vi} и q'_{mi} , респективно.
- (x_{am}, y_{am}) , (x_{vi}, y_{vi}) и (x_{mi}, y_{mi}) су позиције еквивалентних електрода ($m = 1, \dots, M$, $i = 1, \dots, N$).

На основу поступка описаног у Поглављу 4 и уводу овог одељка, примењује се метод подешавања у тачкама на површини металне проводне траке и метод подешавања у тачкама за нормалну компоненту вектора електричног, (9.38), и магнетног поља, (9.42), на раздвојној површини две средине. На тај начин је формиран систем линеарних једначина, чијим се решавањем одређују непозната слободна подужна електрична, електрична везана и магнетна подужна наелектрисања. Самим тим, могуће је израчунати подужну капацитивност микротракастог вода, (4.11), а затим и остале карактеристичне параметре.

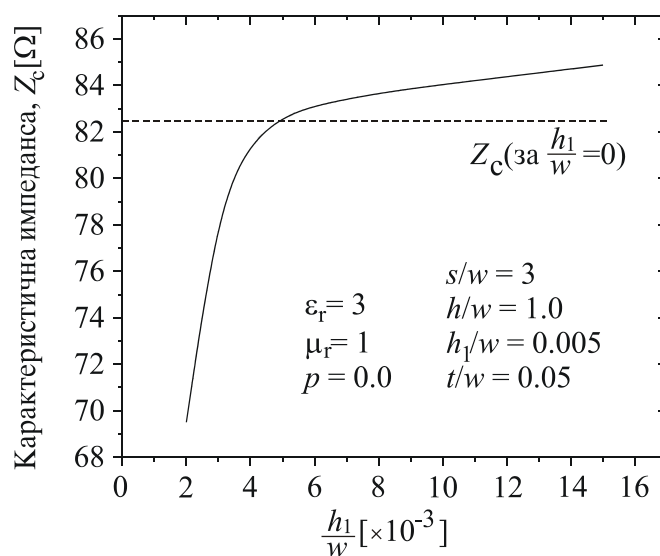
У наставку ће бити одређене и анализирани вредности за карактеристичну импедансу и ефективну релативну диелектричну константу микротракастог вода са изотропним диелектриком. Најпре ће бити испитан утицај растојања проводне траке, h_1 , на вредност карактеристичне импедансе. Резултати су приказани у Табели 9.1 за микротракасти вод димензија: $a/w = 3$, $h/w = 1.0$, $t/w = 0.05$, док су параметри подлоге: $\epsilon_r = 3$, $\mu_r = 1$ и $p = 0$, а број непознатих ($N_{\text{tot}} = M + 2N$) око 1800.

Табела 9.1 – Карактеристична импеданса и ефективна релативна диелектрична константа микротракастог вода за различите вредности параметра h_1/w за:

$$h/w = 1.0, a/w = 3, t/w = 0.05, \epsilon_r = 3, \mu_r = 1 \text{ и } p = 0.$$

$\frac{h_1}{w}$	ϵ_r^{eff}	$Z_c [\Omega]$
0.015	2.0886	84.872
0.010	2.1206	84.042
0.008	2.1355	83.673
0.006	2.1588	83.144
0.005	2.1838	82.630
0.004	2.2400	81.550
0.003	2.3975	78.789
0.002	3.0787	69.498

Из табеле се види да карактеристична импеданса опада са приближавањем траке супстрату. Када је растојање траке и супстрата мало, смањује се растојање између еквивалентних електрода које се налазе на раздвојној површини две средине испод траке и оних на металној траци, па долази чак и до њиховог преклапања, што доводи до велике грешке у резултату. Како би се одредило растојање при коме се остварује задовољавајућа тачност, добијене вредности упоређене су на *Слици 9.12* са решењем које је дала примена хибридног метода граничних елемената у Поглављу 7 (Одељак 7.1). То решење је приказано испрекиданом линијом. Карактеристична импеданса микротракастог вода са проводном траком која налаже на диелектрик је $Z_c = 82.35\Omega$, за случај када је број непознатих 1382. Приближна вредност, као што се може видети из *Табеле 9.1* и са *Слике 9.12*, остварена је за случај када је $h_1/w = 0.005$. Одступање тог резултата од оног добијеног у Одељку 7.1 је око 0.3 %, па ће надаље вредност $h_1/w = 0.005$ бити узета за растојање проводне траке и супстрата за све прорачуне.

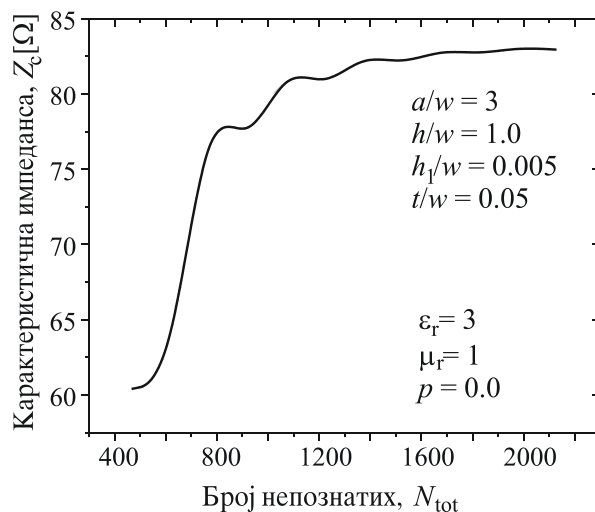


Слика 9.12 – Промена карактеристичне импедансе за различита растојања проводне траке и изотропне подлоге.

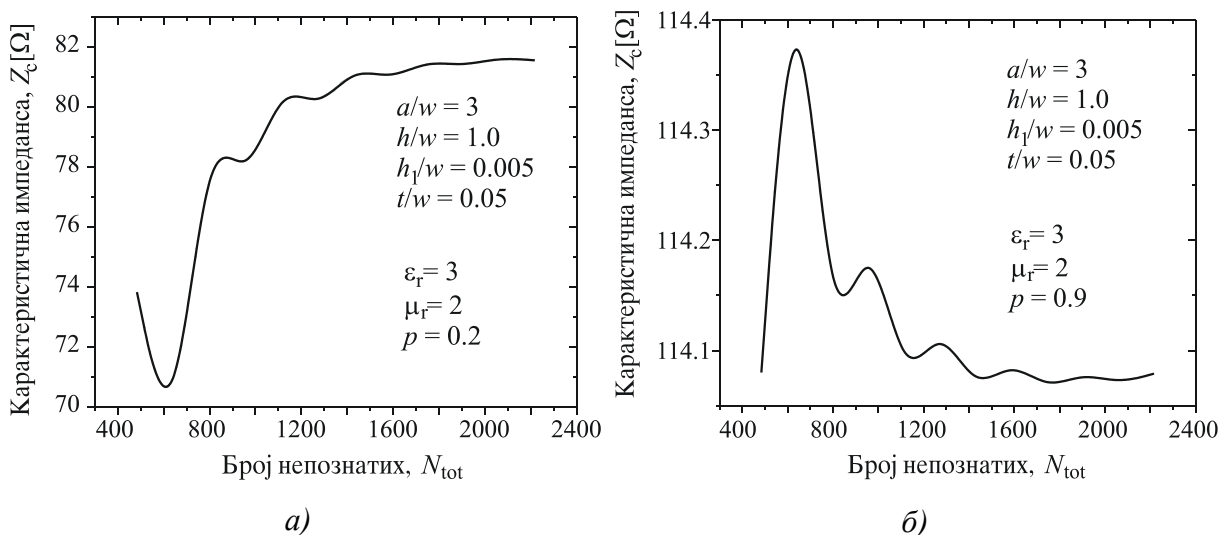
На *Слици 9.13* приказана је конвергенција резултата за карактеристичну импедансу. Уочава се брза конвергенција резултата са порастом броја непознатих. Сви даљи резултати биће приказани за случај када је њихов број око 1800.

За случај када је подлога од биизотропног материјала различитог степена биизотропије, конвергенција резултата је приказана на *Слици 9.14*.

У Табели 9.2 извршено је поређење резултата са онима које је дала примена програмског пакета *FlexPDE*, [59], јер се програмом *FEMM*, [56], који је у дисертацији углавном коришћен за верификацију резултата, не могу анализирати биизотропне средине. Као што се из табеле види, одступање резултата је мање од 0.4 %. Програмски пакет *FlexPDE* се, попут програмског пакета *FEMM* базира на примени метода коначних елемената.



Слика 9.13 – Конвергенција резултата за карактеристичну импедансу микротракастог вода са изотропном подлогом.



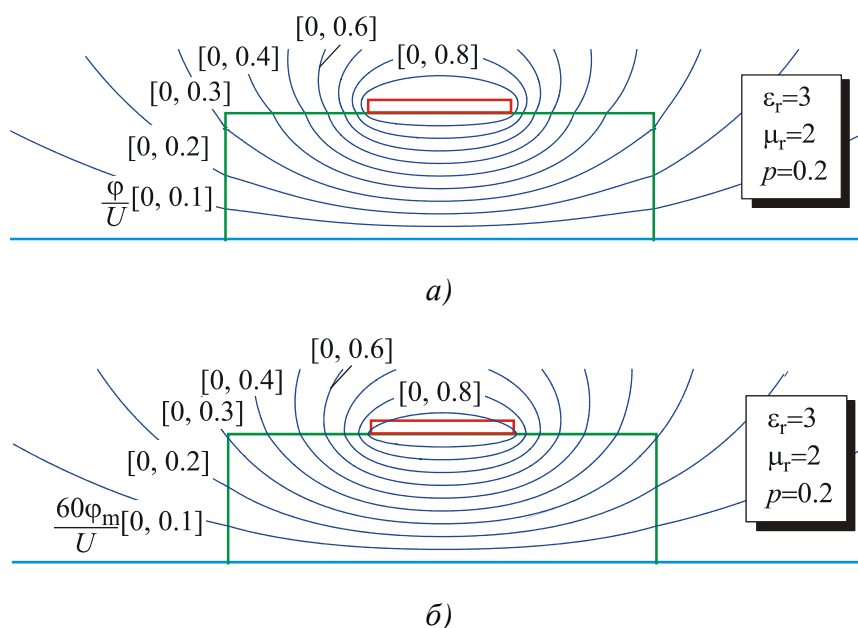
Слика 9.14 – Конвергенција резултата за карактеристичну импедансу микротракастог вода, за случај: (а) слабо и (б) јако изражене биизотропије.

Табела 9.2 – Поређење вредности за карактеристичну импедансу и ефективну релативну диелектричну константу микротракастог вода са резултатима програма *FlexPDE*, за $h/w=1.0$, $h_1/w=0.005$, $a/w=3$, $t/w=0.3$ и $\epsilon_r=3$, $\mu_r=2$.

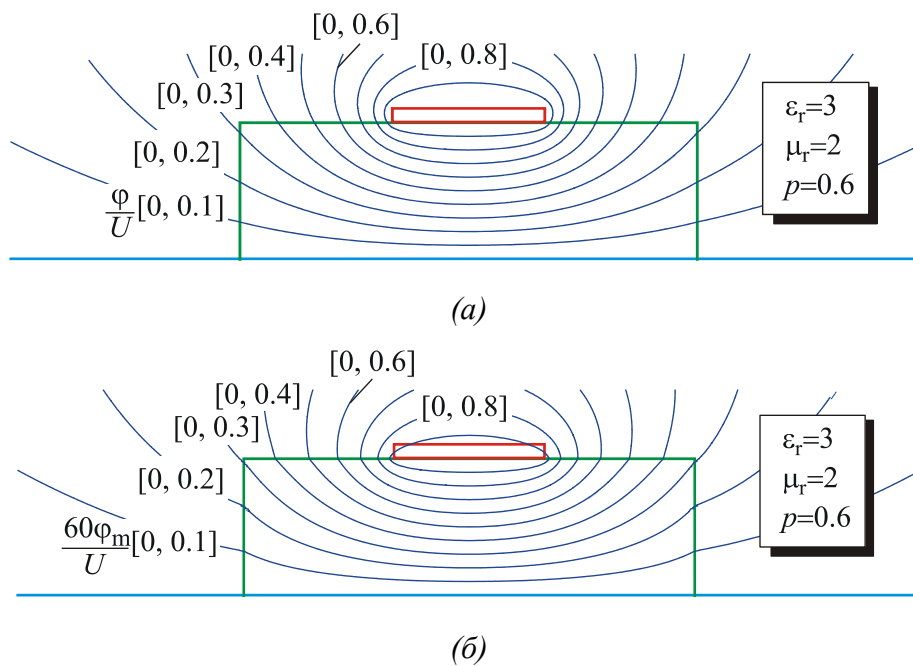
p	<i>HBEM</i>		<i>FlexPDE</i>		δ [%]
	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	ϵ_r^{eff}	Z_c [Ω]	
0.2	1.8410	81.346	1.8470	81.137	0.26
0.6	1.3341	95.550	1.3360	95.389	0.17
0.9	0.9360	114.080	0.9359	113.694	0.34

Нормализована расподела електричног и магнетног скалар потенцијала приказана је на *Сликама 9.15-9.17* за подлогу са слабо, средње и јако израженим ефектом биизотропије, респективно. Димензије разматраног микротракастог вода су: $h/w=1.0$, $h_1/w=0.005$, $a/w=3$ и $t/w=0.1$.

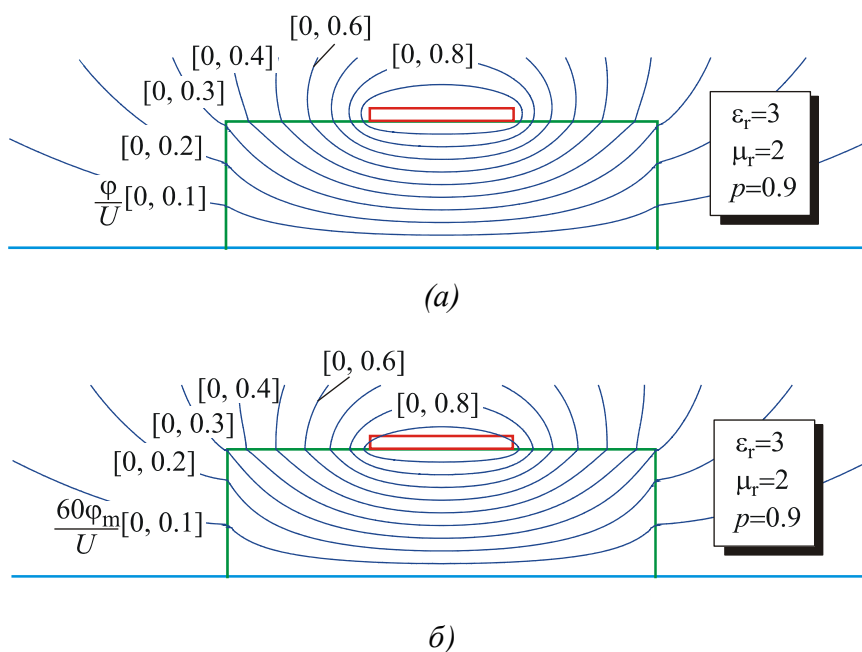
Литература која се бави анализом микротракастих водова са биизотропном подлогом је доста оскудна, као што је и наведено у уводу овог поглавља. У раду [123] приказани су резултати за карактеристичну импедансу микротракастог вода са неограничено дугом подлогом од биизотропног материјала Телегеновог типа са променом параметра $\chi = \sqrt{p\epsilon_r\mu_r}$, када је $h/w=1.0$. На *Слици 9.18* резултати из [120] и [123] упоређени су са онима добијеним применом хибридног метода граничних елемената за случај биизотропне подлоге коначне ширине.



Слика 9.15 – Електрични (а) и магнетни (б) скалар потенцијали за случај средине са слабо израженом биизотропијом.



Слика 9.16 – Електрични (а) и магнетни (б) скалар потенцијали за случај средине са средње израженом биизотропијом.

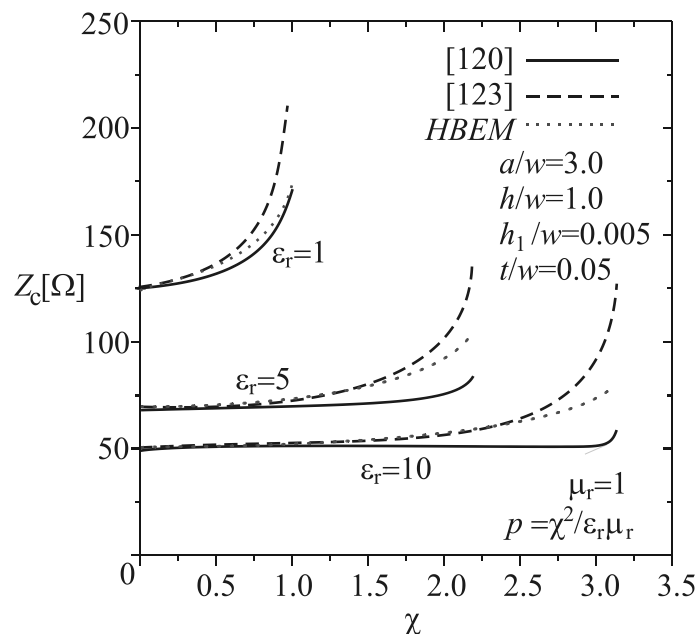


Слика 9.17 – Електрични (а) и магнетни (б) скалар потенцијали за случај средине са јако израженом биизотропијом.

У раду [123] је наведено да је у [120] претпостављено да електрична наелектрисања не стварају магнетни флуks, као ни да магнетни диполи не утичу на расподелу електричног потенцијала. Тиме је објашњено велико одступање резултата саопштених у ова два рада.

Што се тиче одступања од резултата добијених применом *НВЕМ*-а разлог треба тражити у чињеницама да је овим методом анализиран микротракасти вод са подлогом коначне ширине, као и проводном траком коначне дебљине. Његове димензије су: $h/w=1.0$, $h_1/w=0.005$, $a/w=3$ и $t/w=0.05$.

Као што је напоменуто у [123], може се уочити да карактеристична импеданса микротракастог вода постаје бесконачно велика када је $\chi = \sqrt{\epsilon_r}$.



Слика 9.18 – Расподела карактеристичне импедансе са променом параметра χ .

10

Закључак

Анализа микроталасних водова предмет је светских истраживања већ више од шест деценија. Од првих дана настанка тракастог вода, давне 1949. године, а затим и свих његових модификација које су уследиле у наредним годинама, "армија" научника покушавала је да што једноставније анализира и пројектује ове структуре које су, због својих карактеристика, нашле широку примену у микроталасним интегрисаним колима, за реализацију микроталасних филтара и антена, линија за кашњење, усмерених спрежњака, итд.

Дати допринос у једној области која је толико експлоатисана, свакако је био прави изазов. Обимна доступна литература и увек актуелна тема, колико год да су олакшале аутору дисертације, толико су представљале потешкоћу, јер је у мору истраживања било потребно унети неку новину и дати допринос. Проучавајући радове из ове области, закључено је да су применом највећег броја аналитичких и нумеричких метода углавном анализиране структуре микроталасних водова уз одређена ограничења, која не одговарају ситуацији са којом се срећемо при њиховој практичној реализацији. Анализирајући микротракасте водове, истраживачи углавном разматрају конфигурације код којих је уземљена равна, на коју се ослања подлога од диелектрика, неограничене ширине. Поред тога, често се приликом анализе не узима у обзир дебљина металizacione тј. сматра се да је проводна трака бесконачно танка, а често је и супстрат неограничено широк. Такође, код оклопљених водова, који су коначних димензија, најчешће су оклоп и дебљина металizacione бесконачно танки.

Ипак, примена неких метода, пре свега метода коначних елемената, метода граничних елемената / метода момената и метода еквивалентне електоде, са успехом је омогућила анализу микроталасних водова који одговарају реалној ситуацији.

Примена метода еквивалентне електроде не захтева никакву нумеричку интеграцију током решавања проблема, док је код метода граничних елемената нумеричка интеграција готово увек присутна. То доводи до тога да се приликом решавања одређених геометрија применом метода граничних елемената могу јавити интегрални са сингуларном или квазисингуларном подинтегралном функцијом. Са друге стране, метод еквивалентне електроде захтева познавање Гринове функције за посматрани проблем, па његова примена постаје ограничавајућа уколико је компликовано или немогуће одредити Гринову функцију.

У покушају да се створи метод који ће задржати добре карактеристике метода еквивалентне електроде, а превазићи његове недостатке, заједничким напорима чланова Катедре за теоријску електротехнику током 2010. године настао је хибридни метод граничних елемената, као комбинација метода еквивалентне електроде и метода граничних елемената.

Као и код метода еквивалентне електроде, еквивалентне електроде у *HBEM*-у, зависно од геометрије проблема, су: тороидалне електроде код анализе дводимензионалних проблема са аксијалном симетријом, танке цилиндричне електроде код планпаралелних проблема, док се сферне електроде користе као еквивалентне електроде за анализу тродимензионалних система.

Са циљем да се прошири област примене овог метода, по први пут је у овој дисертацији он употребљен за квазистационарну анализу микроталасних водова. У примерима који су приказани у Поглављима 5-8, метод је примењен за одређивање карактеристичних параметара једноструких и спрегнутих, оклопљених и отворених микроталасних водова са хомогеним, изотропним, једнослојним и вишеслојним диелектрицима. Анализиране су структуре са неограничено широком уземљеном равни, али и реални случајеви – геометрије са уземљеном траком коначне ширине, коначном дебљином метализације и коначном ширином супстрата.

Метод се показао као веома једноставан, брз и довољно тачан у анализи микроталасних водова. Формирани систем линеарних једначина је увек добро условљен, јер су елементи на главној дијагонали матрице увек доминантни.

Веома добра конвергенција резултата остварена је са 700-1500 непознатих величина (еквивалентних електрода), зависно од разматране геометрије микроталасног вода. За највећи број примера, табеларно и графички, приказани су конвергенција резултата и време израчунавања. Време израчунавања обухвата период неопходан за одређивање броја еквивалентних електрода, њихово позиционирање, формирање матрице система,

решавање система линеарних једначина и одређивање карактеристичних параметара вода. Највише времена одлази на попуњавање матрице система.

Нпр. у случају анализе микротракастог вода постављеног између две уземљене траке коначне дебљине и ширине (Одељак 8.2), када је укупан број непознатих око 1000, време потребно за одређивање броја еквивалентних електрода и њихово позиционирање је око 0.2 s, док се матрица испуњава елементима за 32 s. Систем линеарних једначина, димензија 1000×1000 , програм решава за 3.3 s, док је за израчунавање карактеристичних параметара вода потребно око 0.5 s.

Уколико постоји потреба да се смањи број елемената у матрици система и побољша конвергенција резултата (ако су у питању оштре ивице), препоручљиво је користити неравномерну сегментацију површине, која даје бржу конвергенцију.

Са циљем да се верификују резултати за карактеристичне параметре вода, добијени применом хибридног метода граничних елемената, искоришћени су резултати из доступне литературе, као и резултати које је дала примена програмских пакета *FEMM* и *FlexPDE*.

Последњих десетак година у свету је развијен велики број програмских пакета за решавање проблема из електромагнетике. Они олакшавају анализу, а представљају и веома добар начин за проверу резултата добијених применом аналитичких и нумеричких метода. Неки од тих програма могу се наћи преко интернета, тако да су доступни широком кругу корисника. Пре свега ту су студентске верзије програма, које имају лимитиран опсег примене, што наравно утиче и на тачност добијених резултата. Са друге стране, постоје потпуне верзије које су знатно прецизније, попут програмског пакета *FEMM*, који је и искоришћен за проверу резултата добијених применом хибридног метода граничних елемената.

Резултати за сваки од анализираних примера у овој дисертацији верификовани су применом *FEMM*-а и приказани табеларно и графички. Одступање добијених резултата је мање од 0.8 %, чак је у највећем броју примера мање и од 0.5 %. Такође, време израчунавања применом хибридног метода граничних елемената је знатно краће у односу на време потребно за анализу применом *FEMM*-а. Код симулације у *FEMM*-у, са мрежом од више стотина хиљада коначних елемената, време израчунавања је било и до десет пута дуже у односу на анализу применом хибридног метода граничних елемената. Појам "поређења" брзине ова два метода, а самим тим и "поређења" резултата нема право значење и није адекватан, зато што се методи примењују под различитим условима. Број непознатих у примени хибридног метода граничних елемената, као што

је споменуто, кретао се од 700-1500, док је одговарајући *FEMM* модел симулиран са више стотина хиљада коначних елемената. Без обзира на дуго време извршавања програма, *FEMM* је ипак био незамењив за верификацију добијених резултата. Треба напоменути да се код метода коначних елемената мрежа поставља у целом простору, док се код хибридног метода граничних елемената сегментира само раздвојна површина и самим тим је и број потребних елемената за анализу система мањи. Поред тога, хибридни метод граничних елемената омогућава анализу и отворених система, што у највећем броју до сада коришћених метода није био случај, већ је било неопходно на неки начин затворити систем.

Проблем међусобног утицаја проводника двојичних микротракастих водова и могућност да се тај ефекат смањи убацивањем једног или више додатних слојева диелектрика у подлогу, анализиран је у Одељку 7.6. С обзиром да се у том случају ради о вишеслојним срединама, предност коришћења хибридног метода граничних елемената је посебно дошла до изражаја.

Ипак, прави изазов током рада на дисертацији био је применити хибридни метод граничних елемената за анализу микротракастих водова са биизотропном подлогом. Анализирани су биизотропни материјали Телегеновог типа. За разлику од широког спектра литературе која се бави анализом микроталасних водова са изотропним диелектриком, биизотропне средине, због њихове комплексности, нису тако чест предмет истраживања.

Како би се применио хибридни метод граничних елемената било је најпре неопходно дефинисати граничне услове на раздвојној површини две биизотропне средине. Поступак њиховог одређивања приказан је у Одељку 9.2.1. Наредни корак био је одређивање полупречника еквивалентних електрода на раздвојној површини две биизотропне средине, јер се кренуло од претпоставке да се можда разликује од оног за случај изотропних средина. Провером је утврђено да је и у овом случају, еквивалентни полупречник једнак оном одређеном код примене "класичног" хибридног метода граничних елемената.

С обзиром на природу биизотропне средине, било је неопходно осим електричних везаних, увести и појам фиктивних магнетних наелектрисања на раздвојној површини две биизотропне средине. Питање које се даље наметнуло у процесу истраживања односило се на положај електричних везаних и магнетних подужних наелектрисања. Анализом система утврђено је да положаји ових наелектрисања треба да буду идентични

тј. да се преклапају. У супротном, њихов међусобни утицај не постоји, што, наравно, није случај.

Када су решене недоумице које су се јавиле, приступило се примени метода за анализу најједноставнијег примера за који већ постоји решење у затвореном облику. То је пример подужног наелектрисања у биизотропној средини, које се налази у средини 1 на висини h од раздвојне површине две биизотропне средине.

Добијено је изузетно слагање резултата, чиме је метод потврђен за примену у биизотропним срединама.

Даљи корак био је анализа микротракастог вода са уземљеном равни неограничене ширине. Проблем који се јавио у примени метода огледа се у немогућности налажења адекватног решења за постављање еквивалентних електрода на раздвојну површину металне траке и биизотропне средине. У тренутку писања ове дисертације није пронађено елегантније решење, па је у циљу формирања еквивалентног система метод примењен на тај начин што је проводна трака постављена изнад супстрата на висини h_1 . Анализом, извршеном у Поглављу 9, утврђено је да се задовољавајуће решење добија када је растојање траке и подлоге $h_1/w = 0.005$, где је w ширина проводне траке.

Добијене вредности за карактеристичне параметре разматраног микротракастог вода упоређене су са оскудним резултатима који се могу наћи у литератури, као и онима које је дала примена програмског пакета. Добијено је одступање резултата од 0.5 %. На тај начин је потврђена могућност примене хибридног метода граничних елемената за анализу микроталасних водова, што отвара читав спектар геометрија којима ће се у даљем истраживању бавити аутор дисертације.

Такође, један од корака у даљем раду биће налажење погоднијег решења за примену хибридног метода граничних елемената, које неће захтевати "издизање" проводне траке у односу на биизотропну подлогу. У даљем истраживању, примена метода биће проширена и на друге биизотропне материјале, а не само оне који су Телегеновог типа.

Хибридни метод граничних елемената показао се као веома моћан метод, којим могу да се брзо, једноставно и довољно тачно анализирају сложене конфигурације микроталасних водова са изотропном и биизотропном подлогом, чиме ова дисертација представља мали допринос у историји развоја метода за анализу микроталасних водова дугој већ више од 60 година.

Literatura

- [1] Dragović M., *Antene i prostiranje radio talasa*. Akademska misao, Beograd, 2003.
- [2] Pathak R., *Characterizing losses in microstrip transmission lines*. M. Sc. thesis, University of Wisconsin-Madison, USA, 2005.
- [3] Capsoni C., *Telecommunication Systems*. Politecnico di Milano, 2011, [Online]: <ftp://ftp.elet.polimi.it/users/Carlo.Capsoni/Telecommunication%20Systems/transmission%20lines.pdf>.
- [4] Maloratsky L. G., "Using Modified Microstrip Lines to Improve Circuit Performance," *High Frequency Electronics*, pp. 36–52, March 2011.
- [5] Itoh T., R. Mittra., *Analysis of microstrip transmission lines*. Scientific Report, Antenna Laboratory Report No. 72-5, 1972.
- [6] Grieg D. D, H. F. Engelmann, "Microstrip – A new transmission technique for the kilomegacycle range," *IRE Proceedings*, Vol. 40, No. 12, pp. 1644-1650, 1952.
- [7] Petrović V., D. Tošić, A. Đorđević., *Mikrotalasna pasivna kola*. Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 2010.
- [8] Pozar D., *Microwave Engineering*. New York: John Wiley & Sons, 2011.
- [9] Niehenke E., R. Pucel, I. Bahl, "Microwave and Millimeter-Wave Integrated Circuits," *IEEE Transactions Microwave Theory and Techniques*, Vol. 50, No. 3, pp. 846-857, 2002.
- [10] Maloratsky L. G., "Reviewing the basic of microstrip lines," *Microwaves & RF*, pp. 79–88, March 2000.
- [11] Radanović S., V. Radonić, V. Crnojević-Bengin, "Mikrostrip peč antenna na bazi Sijerpinski fraktalne krive," *16. Telekomunikacioni forum – TELFOR*, pp. 535-538, 2008.

- [12] Rosu I., *Microstrip, Stripline and CPW Design*. [Online]:
http://www.qsl.net/va3iul/Microstrip_Stripline_CPW_Design/Microstrip_Stripline_and_CPW_Design.pdf.
- [13] Wadell B. C., *Transmission Line Design Handbook*, Artech House, Inc., pp. 125-137, 1991.
- [14] Gupta K.C., R. Garg, I. Bahl, P. Bhartia., *Microstrip lines and slotlines*. 2nd Edition, Artech House, 1996.
- [15] Baždar M. B, A. R. Đorđević, R. F. Harrington, T. K. Sarkar, “Evaluation of Quasi-Static Matrix Parameters for Multiconductor Transmission Lines using Garlekin’s Method,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 42, No. 7, pp. 1223-1228, 1994.
- [16] Fukuda T., T. Sugie, K. Wakino, Y.-D. Lin, T. Kitazawa, “Variational method of coupled strip lines with an inclined dielectric substrate,” *Asia Pacific Microwave Conference – APMC 2009*, pp. 866-869, 2009.
- [17] Yamashita E., R. Mittra, “Variational method for the analysis of microstrip lines,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-16, pp. 251-256, Apr. 1968.
- [18] Yamashita E., “Variational method for the analysis of microstrip-like transmission lines,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-16, No. 8, pp. 529-535, Aug. 1968.
- [19] Bryant T. G., J. A. Weiss, “Parameters of microstrip transmission lines and of coupled pairs of microstrip lines,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-16, pp. 1021-1027, 1968.
- [20] Chang T., C. Tan, “Analysis of a shielded microstrip line with finite metallization thickness by the boundary element method,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 38, No. 8, pp. 1130-1132, 1990.
- [21] Farrar A., A. T. Adams, “Characteristic impedance of microstrip by the method of moments,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 18, pp. 65-66, 1970.
- [22] Harrington R. F. *Field computation by Moment Methods*. New York: Macmillan, 1968.
- [23] Li K., Y. Fujii, “Indirect boundary element method of applied to generalized microstrip line analysis with applications to side-proximity effect in MMICs,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 40, pp. 237–244, 1992.

- [24] Smith C.E., R.S. Chang, "Microstrip transmission line with finite width dielectric and ground plane," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 33, pp. 835–839, 1985.
- [25] Wei W., L. Kai, C. Dan, L. Wencheng, "Analysis of the dispersion characteristics of microstrip lines on anisotropic substrate with spectral-domain method," *IEEE Int. Symposium on Microwave, Antenna, Propagation and EMC Technologies for Wireless Communications*, China, pp. 907-910, 2009.
- [26] Chen T. S., "Determination of the capacitance, inductance, and characteristic impedance of rectangular lines," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 8, Issue 5, pp. 510–519, 1960.
- [27] Wheeler H. A., "Transmission-line properties of parallel strips separated by a dielectric sheet," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-13, pp. 172-185, Mar. 1965.
- [28] Mittra R., T. Itoh, "Charge and potential distributions in shielded striplines," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-18, pp. 149-156, Mar. 1970.
- [29] Smith C.E., R.S. Chang, "Microstrip transmission line with finite width dielectric," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 28, pp. 90–94, 1980.
- [30] Svacina J., "Analytical models of width-limited microstrip lines," *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol. 36, pp. 63–65, 2003.
- [31] Svacina J., "New method for analysis of microstrip with finite-width ground plane," *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol. 48, No. 2, pp. 396-399, 2006.
- [32] Gentili G. G., G. Macchiarella, "Quasi-Static analysis of shielded planar transmission lines with finite metallization thickness by a mixed spectral-space domain method," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 42, No. 2, pp. 249-255, 1994.
- [33] Itoh T. A. S. Herbert, "A generalized spectral domain analysis for coupled suspended microstriplines with tuning septums," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-26, pp. 820-826, 1978.
- [34] Wheeler H. A. "Transmission-Line Properties of a Strip on a Dielectric Sheet on a Plane," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-25, No. 8, pp. 631-647, Aug. 1977.

- [35] Wheeler H. A. “Transmission line properties of a strip line between parallel planes,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-26, No. 11, pp. 866-876, Nov. 1978.
- [36] Wheeler H. A., “Transmission-line properties of parallel wide strips by a conformal-mapping approximation: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-12, pp. 280-289, May 1964.
- [37] Wan C., “Analytically and accurately determined quasi-static parameters of coupled microstrip lines,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 44, No.1, pp. 75-79, 1996.
- [38] Callarotti R. C., A. Gallo, “On the solution of a microstrip line with two dielectrics,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-32, pp. 333-338, 1983.
- [39] Black K. G., T. J. Higgins, “Rigorous determination of the parameters of microstrip transmission lines,” *IRE Trans. Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-3, pp. 93-113, 1955.
- [40] Akhtarzada S., T. Rowbotham, P. Johns, “The design of coupled microstrip lines,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 23, pp. 486-492, 1975.
- [41] Hinton J. H., “On design of coupled microstrip lines,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-28, pp. 272, 1980.
- [42] Homentcovschi D., “A Cylindrical Multiconductor Stripline-Like Microstrip Transmission Line,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 37, No. 3, pp. 497–503, 1989.
- [43] Homentcovschi D., “An Analytical Solution to the Microstrip Line Problem,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 38, No. 6, pp. 766–769, 1990.
- [44] Homentcovschi D., G. Ghione, C. Naldi, R. Oprea, “Analytic Determination of the Capacitance Matrix of Planar or Cylindrical Multiconductor Lines on Multilayered Substrates,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 43, No. 2, pp. 363–373, 1995.
- [45] Homentcovschi D., “High Accuracy Formulas for Calculation of the Characteristic Impedance of Microstrip Lines,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 43, No. 9, pp. 2132–2137, 1995.

- [46] Amirhosseini M. K., “Determination of capacitance and conductance matrices of lossy shielded coupled microstrip transmission lines,” *Progress In Electromagnetics Research, PIER 50*, pp. 267-278, 2005.
- [47] Homentcovschi D., R. Oprea, “Analytic Determined Quasi-Static Parameters of Shielded or Open Multiconductor Microstrip Lines,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 46, No. 1, pp. 18–24, 1998.
- [48] Bedair S. S., M. I. Sobhy, “Tolerance Analysis of Shielded Microstrip Lines,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-32, No. 5, pp. 544-547, 1984.
- [49] Fikioris J. G., J. L. Tsalamengas, G. J. Fikioris, “Exact solution for shielded printed microstrip lines by Carleman-Vekua method,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-37, pp. 21-23, 1989.
- [50] Itoh T., *Numerical techniques for microwave and millimeter-wave passive structures*. J. Wiley&Sons Inc., USA, 1989.
- [51] Ponchak G., et al., “Coupling between microstrip lines with finite width ground plane embedded in thin-film circuits,” *IEEE Transactions on Advanced Packaging*, Vol. 28, No. 2, pp. 320-327, 2005.
- [52] Chen H. H., “Finite-Element Method Coupled with Method of Lines for the Analysis of Planar or Quasi-Planar Transmission Lines,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 51, No. 3, pp. 848-855, 2003.
- [53] Khebir A., A. B. Kuoki, R. Mittra, “Asymptotic boundary condition for finite element analysis of threedimensional line discontinuities,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-38, No. 10, pp. 1427-1431, 1990.
- [54] Khebir A., A. B. Kuoki, R. Mittra, “Higher order asymptotic boundary condition for the finite element modeling of two-dimensional transmission line structures,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-38, No. 10, pp. 1433-1437, 1990.
- [55] Pantić Z., R. Mittra, “Quasi-TEM analysis of microwave transmission lines by the finite element method,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-34, No. 11, pp. 1096-1103, Nov. 1986.
- [56] FEMM 4.2, Meeker D., [Online] <http://www.femm.info/wiki/Download>.
- [57] COMSOL Multiphysics, <http://www.comsol.com>.
- [58] Quickfield, <http://www.quickfield.com>.
- [59] FlexPDE, <http://www.pdesolutions.com>.

- [60] Mančić Ž. J., V. V. Petrović, “Strong FEM Formulation for the Square Coaxial Line”, *Proceedings of Full Papers of the 9th International Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services – TELSIS 2009*, pp. 343-346, 2009.
- [61] Mančić Ž. J., V. V. Petrović, “Strong and Weak FEM Formulations of Higher Order for Quasi-Static Analysis of the Shielded Planar Transmission Lines”, *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol. 53, No. 5, pp. 1114-1119, 2011.
- [62] Mančić Ž. J., V. V. Petrović, “Strong FEM Formulations for Quasi-Static Analysis of Shielded Striplines in Anisotropic Homogeneous Dielectrics”, *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol. 54, No. 4, pp. 1001-1006, 2012.
- [63] Mančić Ž. J., V. V. Petrović, “Quasi-Static Analysis of the Shielded Microstrip Line with Bi-isotropic Substrate by the Strong FEM Formulation”, *Proceedings of Full Papers of the 11th International Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services – TELSIS 2013*, Serbia, Niš, pp. 513-516, 2013.
- [64] Musa S. M., M. N. O. Sadiku, “Analysis of rectangular coaxial lines,” *2007 IEEE Region 5 Technical Conference*, Fayetteville, AR, USA, pp. 323-325, 2007.
- [65] Kaur N., M. Manna, R. Dewan, “Modeling and Computation of Capacitance Matrix for Shielded Vertical Microstrip-Lines using FEM,” *International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering*, Vol. 3, No. 7, 2013.
- [66] Musa S. M., M. N. O. Sadiku, “Modeling and Simulation of Shielded Microstrip Lines,” *The Technology Interface*, pp. 1-22, 2007.
- [67] Kumar D. et al., “Calculation of the characteristic impedance of coupled microstrip lines,” *Int. J. Electronics*, Vol. 40, No. 4, pp. 341-343, 1976.
- [68] Yamashita E. and K. Atsuki, “Analysis of thick-strip transmission lines,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-19, pp. 120–122, Jan. 1971.
- [69] Xiao F., “A Fast Frequency-Domain Method for Lossless Multiconductor Transmission Line Equations and its Application,” *Proceedings of Asia-Pacific Microwave Conference 2010*, pp. 610-613, 2010.
- [70] Brebbi C. A., J. C. F. Telles, L. C. Wrobel., *Boundary element techniques. Theory and applications in engineering*. Berlin, Springer, 1984.
- [71] Đorđević A. R., M. B. Badžar, T. K. Sarkar, R. F. Harrington, *LINPAR for Windows: Matrix Parameters for Multiconductor Transmission Lines, Software and User's Manual*. Artech House Publishers, 1996.

- [72] Venkataraman J., S. N. Rao, A. R. Đorđević, T. K. Sarkar, Y. Naiheng, “Analysis of arbitrarily oriented microstrip transmission lines in arbitrarily shaped dielectric media over a finite ground plane,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-33, pp. 952–959, Oct. 1985.
- [73] Cruzan O. R., R. V. Garver, “Characteristic Impedance of Coaxial Transmission Rectangular Lines,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 12, No. 5, pp. 488 – 495, 1964.
- [74] Garver R. V., J. A. Rosado, “Broad-band TEM diode limiting,” *IRE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 10, pp. 302–310, 1962.
- [75] Gunston M., *Microwave Transmission - Line Impedance Data*. Van Nostrand Reinhold Company LTD, New York, Cincinnati, Toronto, Melbourne, 1972.
- [76] Levy R., “New coaxial-to-stripline transformers using rectangular lines,” *IRE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 9, pp. 273–274, 1961.
- [77] Sansalone F. J., E. G. Spencer, “Low temperature microwave power limiter,” *IRE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, No. 9, pp. 272–273, 1961.
- [78] Amirhosseini M. K., A. Cheldavi, “Time domain analysis of circulant symmetric coupled transmission lines,” *IEE Microwaves, Antennas and Propagation Proceedings*, Vol. 150, No. 5, pp. 325-331, 2003.
- [79] Chen D., Y. Shen, Y. Lu, “Coupled mode analysis of forward and backward coupling in multi conductor transmission lines,” *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Vol. 47, No. 3, pp. 463-470, 2005.
- [80] Llamas-Garro I., M. J. Lancaster, P. S. Hall, “Air-filled square coaxial transmission line and its use in microwave filters,” *Microwaves, Antennas and Propagation, IEE Proceedings*, Vol. 152, No. 3, pp. 155-159, 2005.
- [81] Sun S., & L. Zhu, “Guided-wave characteristics of periodically nonuniform coupled microstrip lines-even and odd modes,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 53, No. 4, pp. 1221-1227, 2005.
- [82] Tseng C. H., Y. C. Hsiao, “A new broadband marchand balun using slot-coupled microstrip lines,” *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, Vol. 20, No. 3, pp. 157-159, 2010.
- [83] Silvester P., “TEM wave properties of microstrip transmission lines,” *Proc. Inst. Elec. Eng.*, Vol. 115, pp. 43-48, Jan. 1968.
- [84] Mančić, Ž. J., D. M. Veličković, “O analizi trakastih vodova”, *Zbornik radova XL konferencije za ETRAN*, Budva, Sveska II, pp. 419-422, 1996.

- [85] Singer H., H. Steinbigler, P. Weiss, "A charge simulation method for the calculation of high voltage fields," *IEEE Trans.*, PAS-73, pp.1660-1668, 1974.
- [86] Marković V., *Novi numerički pristup za analizu spregnutih mikrotrakastih linija sa višeslojnim dielektrikom*. Magistarski rad, Elektronski fakultet u Nišu, Niš, 1985.
- [87] Marković V., *Kvazistatička analiza transmisionih linija i njihovih diskontinuiteta u mikrotalasnim integrisanim kolima*. Doktorska disertacija, Elektronski fakultet u Nišu, Niš, 1992.
- [88] Surutka J. V., D. M. Veličković, "Jedan novi numerički metod za rešavanje problema elektrostatike," *Zbornik radova XXI Jugoslovenske konferencije za ETAN*, Banja Luka, sveska II, pp. 240-247, 1977.
- [89] Veličković D. M., A. Veličković, D. Vučković, "Jedan numerički postupak za određivanje karakterističnih impedansi trakastih vodova," *INFORMATICA*, Bled, B/VII, pp. 1-6, 1979.
- [90] Veličković D. M.: "Charge Simulation Method in Electromagnetic Field Computations", *Summer School "Modern Aspects of Theoretical Electrical Engineering" – SOZOPOL 2002*, Sozopol, Bulgaria, pp. 23-30, 29 September – 3 October 2002.
- [91] Surutka J. V., D. M. Veličković, "Some improvements of the Charge Simulation Method for Computing Electrostatic Fields," *Bulletin LXXIV de l'Academie Serbe des Sciences et des Arts, Class des Sciences technique*, No. 15, pp. 27-44, 1981.
- [92] Sadasiva M. R, T. K. Sarkar, R. F. Harrington, "The Electrostatic Field of Conducting bodies in Multiple Dielectric Media," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, pp, 1441-1449, November 1984.
- [93] Elsherbeni A. "Quasi-Static Characteristics of a Two-conductor Multi-Layer Microstrip Transmission Line with Dielectric Overlay and a Notch between the Strips," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol. 7, No. 6, pp. 769-789, 1993.
- [94] He S., A. Elsherbeni, C. Smith, "Decoupling between two conductor microstrip transmission line," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 41, No. 1, pp. 53–61, 1993.
- [95] Elsherbeni A. Z., C. E. Smith, B. Moumneh, "Minimization of the coupling between a two conductor microstrip transmission line using finite difference method – Summary," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol. 10, No. 4, pp. 509-513, 1996.
- [96] Phromlounsri R., M. Chongcheawchamnan, I. D. Robertson, "Inductively Compensated Parallel coupled Microstrip Lines and Their Application," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 54, No. 9, pp. 3571-3582, 2006.

- [97] Chin K-S., M-C. Ma, Y-P. Chen, Y-C. Chiang, “Closed-form Equations of conventional Microstrip Couplers Applied to Design Couplers and Filters Constructed with Floating-Plate Overlay,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 56, No. 5, pp. 1172-1179, 2008.
- [98] Abbosh A. M., “Design Method for Ultra-Wideband Bandpass Filter with Wide Stopband using Parallel-Coupled Microstrip Lines,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 60, No. 1, pp. 31-38, 2012.
- [99] Dib N. A. Omar, “Dispersion analysis of multilayer cylindrical transmission lines containing magnetized ferrite substrates,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 50, No. 7, pp. 1730-1736, 2002.
- [100] Hornsby J. S., A. Gopinath, “Numerical analysis of a dielectric-loaded waveguide with a microstrip line – Finite difference method,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, MTT-17, pp. 684–690, 1969.
- [101] Daly P., “Hybrid-mode analysis of microstrip by finite-element method,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-19, pp. 19–25, 1971.
- [102] Homentcovschi D., “An Analytical Approach to the Analysis of Dispersion Characteristics of Microstrip Lines,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 39, No. 4, pp. 740–743, 1991.
- [103] Mittra R., T. Itoh, “A new technique for the analysis of the dispersion characteristics of microstrip lines,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-19, pp. 47-56, 1971.
- [104] Yamashita E. and K. Atsuki, “Analysis of microstrip-like transmission lines by non-uniform discretization of integral equations,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-24, pp. 195–200, 1976.
- [105] Shin C., R. B. Wu, S. K. Jeng, C. H. Chen, “A full wave analysis of microstrip lines by variational conformal mapping technique,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 36, pp. 576-581, 1988.
- [106] El-Shanawee M., A. Elsherbeni, “Method of lines analysis of coupled microstrip transmission line with a notch,” *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, Montreal, Quebec, Canada, Vol.1, pp. 194 – 197, 1997.
- [107] Gao B., X. Gong, L. Tong, “Analysis of the Microstrip Lines with a Finite Substrate,” *IEEE Circuits and Systems International Conference on Testing and Diagnosis*, pp. 1-4, 2009.

- [108] Khouliji S., M. Essaaidi, "Quasi-Static analysis of microstrip lines with variable-thickness substrates considering finite metallization thickness," *Microwave and Optic Technology Letters*, Vol. 33, No. 1, pp. 19-22, 2002.
- [109] Getsinger W. J., "Microstrip Dispersion Model," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 21, pp. 34-39, 1973.
- [110] Verma A., C. Fumeaux, B. Bates, "Modified Getsinger's model for accurate determination of effective permittivity dispersion in multilayered microstrip lines," *International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*, Australia, pp. 325-328, 2010.
- [111] Lucido M. "A New High-Efficient Spectral-Domain Analysis of Single and Multiple Coupled Microstrip Lines in Planarly Layered Media," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 60, No. 7, pp. 2025-2034, 2012.
- [112] Ooi B.-L., P.-S. Kooi, M.-S. Leong, "Application of Sonie-Schafheitlin formula and sampling theorem in spectral-domain method," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 49, No. 1, pp. 210-213, 2001.
- [113] Wei C., R. Harrington, J. Mautz, T. Sarkar, "Multiconductor transmission lines in multilayered dielectric media," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 32, no. 4, pp. 439-450, April 1984.
- [114] Yanmin W., G. Bo, C. Yan, T. Yu, "Analysis of Microstrip Lines with Finite Conductor Strip Thickness by Spectral-Domain Approach," *Global Symposium on Millimeter Waves*, pp. 271-274, 2008.
- [115] Ilić S. S., N. B. Raičević, "TEM Analysis of Broadside Coupled Strip Lines With Anisotropic Substrate," *Proc. 9th International Conference on Applied Electromagnetics – IIEC 2009*, Niš, Serbia, 31 August – 02 September, CD ROM: O4-4, 2009.
- [116] Kitazava T., "Variational method for planar transmission lines with anisotropic magnetic media," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-37, pp. 1749-1754, 1989.
- [117] Mančić Ž. J., *Primena metoda ekvivalentne elektrode na proračun trakastih vodova*. Magistarska teza, Elektronski fakultet u Nišu, Niš, 1996.
- [118] Raičević N. B., S. S. Ilić, "One Hybrid Method Application on Anisotropic Strip Lines Determination," *23rd Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics – ACES*, Verona, Italy, pp. 8-13, 2007.
- [119] Matsunaga M., "A coupled-mode theory-based analysis of coupled microstrip lines on a ferrite substrate," *Progress in Electromagnetics Research, PIER 42*, pp. 219-232, 2003.

- [120] Koivisto P., J. Sten, "Quasi-Static Image Method Applied to Bi-Isotropic Microstrip Geometry," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 43, No. 1, pp. 169–175, 1995.
- [121] Lindell J. V., "Duality Transformations for General Bi-Isotropic (Nonreciprocal Chiral) Media," *IEEE Transactions on Antennas and Propagations*, Vol. 40, No. 1, pp. 91-95, 1992.
- [122] Olyslager F., E. Laermans, D. De Zutter, "Rigorous Quasi-TEM Analysis of Multiconductor Transmission Lines in Bi-Isotropic Media – Part I: Theoretical Analysis for General Inhomogeneous Media and Generalization to Bianisotropic Media," *IEEE Transactions Microwave Theory and Techniques*, Vol. 43, No. 7, pp. 1409-1415, 1995.
- [123] Olyslager F., E. Laermans, D. De Zutter, "Rigorous Quasi-TEM Analysis of Multiconductor Transmission Lines in Bi-Isotropic Media – Part II: Numerical Solution for Layered Media," *IEEE Transactions Microwave Theory and Techniques*, Vol. 43, No. 7, pp. 1416-1423, 1995.
- [124] Raicevic N. B., S. S. Ilic, "One Method for Chiral and Metamaterial Strip Lines Determination," *International Conference on European Electromagnetics, EUROEM 2008*, Lausanne, Switzerland, p. 44, 21-25 July 2008.
- [125] Veličković D. M., Ž. Mančić, "Low Frequency Electromagnetic Field Analysis in Bi-anisotropic Media," *3rd International Magnetic Conference IEEE INTERMAG 93*, pp. (EQ)11-14, Stockholm, Sweden, 1993.
- [126] Veličković D. M., Ž. J. Mančić, "Trakasti vodovi sa bianizotropnom podlogom," *II Telekomunikacioni forum - TELFOR 94*, Beograd, Srbija, 1994.
- [127] Krowne C. M., "Electromagnetic-field theory and numerically generated results for propagation in left-handed guided-wave single-microstrip structures," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 51, No. 12, pp. 2269–2283, 2003.
- [128] Mao S.-G., S.-L. Chen, C.-W. Huang, "Effective electromagnetic parameters of novel distributed left-handed microstrip lines," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 53, No. 4, pp. 1515-1521, 2005.
- [129] Petrović M., D. Veličković, "Jedan jednostavan numerički metod za izračunavanje karakterističnih impedansi trakastih vodova," *Zbornik radova XXVIII Jugoslovenske konferencije ETRAN*, pp. 234-245, Split, 1984.
- [130] Raicevic N. B., S. S. Ilic, "One hybrid method application on complex media strip lines determination," *3rd International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics, METAMATERIALS 2009*, London, UK, pp. 698-700, 2009.

- [131] Veličković D. M., “Opšti numerički program za proračun trakastih vodova,” *Zbornik radova XXXIV Jugoslovenske konferencije za ETRAN*, Zagreb, Sveska V-VI, pp. 277-282, 1990.
- [132] Veličković D. M., “Slit cable calculation,” *European Electromagnetics - EUROEM Conf.*, Bordeaux, France, pp. THp-04-06, 1994.
- [133] Veličković D. M., “TEM Analysis of Transmission Lines using Equivalent Electrodes Method,” *3rd International Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services – TELSIS 97*, Niš, Serbia, pp. 13-22 (64-74?), 1997.
- [134] Veličković D. M., Z. J. Mančić, D. G. Zulkić, “Rectangular coax with axial slit and with rectangular or circular center conductor,” *Electromagnetic compatibility Conf. - EMC'98 ROMA*, Roma, Italy, pp. 384-389, 1998.
- [135] Veličković D. M., D. G. Zulkić, S. S. Ilić, “Electromagnetic field of coaxial lines with axial slit in a tunnel, in a enclosed bridge or in a mine pit,” *5th International Conf. on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services - TELSIS 2001*, Niš, Yugoslavia, Vol. 2, pp. 613-623, 2001.
- [136] Veličković D. M., S. S. Ilić, “Shielded slot line of two dielectric layers-theoretical analysis”, *6th International Conf. on Applied Electromagnetics PES 2003*, Niš, Serbia and Montenegro, pp. 297-300, 2003.
- [137] Veličković D. M., S. S. Ilić, “Shielded slot line of two dielectric layers-numerical results”, *Proc. 6th International Conf. on Applied Electromagnetics PES 2003*, Niš, Serbia and Montenegro, pp. 301-304, 2003.
- [138] Veličković D. M., Saša S. Ilić, “Shielded Strip Line,” *Proceedings of Mediterranean Microwave Symposium (MMS'2003)*, Cairo, Egypt, pp. 101-106, 6-8 May 2003.
- [139] Veličković D. M., Z. Ž. Pantić, “A new numerical method for calculating the equivalent radius of uniform antennas,” *Sixth Colloquium on Microwave Communication*, Budapest, pp. III-4.25.4, 1978.
- [140] Aleksić S., M. Perić, S. Ilić, “Capacitance Calculation Using EEM,” *Acta Elektrotechnica et Informatica*, Faculty of Electrical Engineering and Informatics, Košice, Slovakia, Vol. 9, No. 2, pp. 15-23, 2009.
- [141] Veličković D. M., “Equivalent electrodes method,” *Scientific Review*, No. 21–22, pp. 207–248. 1996.
- [142] Veličković D. M., “General numerical program for plan-parallel electrostatic fields solving,” *International Conference of Electrostatic ELSTAT*, Wroclaw, Poland, pp. 17-22, 1990.

- [143] Raičević N. B., *Modelovanje električnog polja kod kablovskog pribora*. Doktorska disertacija, Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet u Nišu, 2010.
- [144] Veličković D, M., “Equivalent electrodes method application for grounding problems solving,” *ELEKTROTEHNIKA ELTHB*, Vol. 32, No. 3-4, pp. 149-160, 1989.
- [145] Veličković D. M., “The equivalent electrode method application in electroheat,” *3rd International Conference on Mathematical Modeling in Electroheat*, Sarajevo, 1991.
- [146] Veličković D. M. “Application of equivalent electrodes method in multilayer media,” *5th International Conf. on Applied Electromagnetics PES 2001*. Niš, Serbia & Montenegro, pp. 873–878, 2001.
- [147] Raičević N. B., S. R. Aleksić, “One method for electric field determination in the vicinity of infinitely thin electrode shells,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, No. 34, pp. 97-104, 2010.
- [148] Ilić S. S., S. R. Aleksić, N. B. Raičević, “TEM Analysis of Multilayered Transmission Lines using New Hybrid Boundary Element Method,” *Proceedings of Full Papers of the 10th International Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services – TELSIS 2011*, October 5-8, Niš, Serbia, Vol. 2, pp. 428-431, 2011.
- [149] Raicevic N. B., S. R. Aleksic, S. S. Ilic, “A hybrid boundary element method for multilayer electrostatic and magnetostatic problems,” *Electromagnetics*, Vol. 30, No. 6, pp. 507-524, 2010.
- [150] Raičević N. B., S. S. Ilić, S. R. Aleksić, “Application of new hybrid boundary element method on the cable terminations,” *14th International IGTE'10 Symposium*, Graz, Austria, pp. 56-61, 2010.
- [151] Ilić S. S., N. B. Raičević, S. R. Aleksić, “Application of new hybrid boundary element method on grounding systems,” *14th International IGTE'10 Symposium*, Graz, Austria, pp. 160-165, 2010.
- [152] Vučković A. N., N. B. Raičević, M. T. Perić, S. R. Aleksić, “Magnetic force calculation of permanent magnet systems using hybrid boundary element method,” *The Sixteenth Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation CEFC 2014*, Grenoble Electrical Engineering Laboratory (G2Elab), France, CD proceedings 113/PB3:17, Annecy, France, 25-28 May 2014.
- [153] Ilić S., M. Perić, S. Aleksić, N. Raičević, “Quasi TEM Analysis of Symmetrically Coupled Strip Line using New Hybrid Boundary Element Method,” *19th Telecommuni-*

- cations Forum – TELFOR 2011*, Belgrade, Serbia, CD-proceedings, Session 8.18, pp. 1008-1011, 2011.
- [154] Ilić S. S., M. T. Perić, S. R. Aleksić, N. B. Raičević, “Quasi TEM analysis of 2D symmetrically coupled strip lines with infinite grounded plane using HBEM,” *Proc. XVII-th International Symposium on Electrical Apparatus and Technologies SIELA 2012*, Bourgas, Bulgaria, 28–30 May, pp.147-155, 2012.
- [155] Ilić S. S., M. Perić, S. Aleksić, N. Raičević, “Quasi TEM Analysis of 2D Symmetrically Coupled Strip Lines with Finite Grounded Plane using HBEM,” *The 15th International IGTE Symposium*, Graz, Austria, 17 – 19 September 2012, Graz University of Technology, pp. 73-77, 2012.
- [156] Ilić S., M. Perić, S. Aleksić, N. Raičević, “Hybrid Boundary Element Method and Quasi-TEM Analysis of Two-Dimensional Transmission Lines – Generalization,” *Electromagnetics*, Taylor & Francis, Vol. 33, No. 4, pp. 292-310, 2013.
- [157] Perić M., S. Ilić, S. Aleksić, N. Raičević, “Analysis of 2D symmetrically coupled vertical microstrip lines between two infinite grounded planes,” *Annals of the University of Craiova (Electrical Engineering series)*, No. 36, pp. 1-5, 2012.
- [158] Perić M., Ilić S. S., Aleksić, S., Raičević, N., “Examples of HBEM application for multilayer problems solving,” *International Symposium on Theoretical Electrical Engineering*, Pilsen, Czech Republic, Faculty of Electrical Engineering, University of West Bohemia, I-31, 2013.
- [159] Perić M., Ilić, S. S., Aleksić, S., Raičević, N., “Examples of HBEM application for microstrip lines analysis,” *7th International PhD-Seminar on Computational electromagnetics and bioeffects of electromagnetic fields – CEMBEF 2013*, Niš, Serbia, pp. 37-40, 28-31 August 2013.
- [160] Perić M., Ilić, S. S., Aleksić, S., Raičević, N., Bichurin, M., Tatarenko, A., Petrov, R., “Covered microstrip line with ground planes of finite width,” *11th International Conference on Applied Electromagnetics – IIEC 2013*, Faculty of Electronic Engineering of Niš, Niš, Serbia, CD-proceedings, Session O2.2, 01-04 September 2013.
- [161] Perić M. T., Ilić, S. S., Aleksić, S. R., Raičević, N. B., Petrov R. V., Tatarenko A. S., Bichurin M. I., “Analysis of stripline placed vertically between two parallel infinite grounded planes using Hybrid boundary element method,” *The Fundamental Research*, Academy of natural history, Moscow, Russia, No. 1, Vol. 1, pp. 185-190, 2013.

- [162] Perić M., Ilić, S., Aleksić, S., Raičević, N., “Application of Hybrid boundary element method to 2D microstrip lines analysis,” *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, IOS Press, Vol. 42, No. 2, pp. 179-190, 2013.
- [163] Perić M., Ilić, S. S., Aleksić, S., Raičević, N., Vučković, A., “Covered Coupled Microstrip Lines with Ground Planes of Finite Width,” *11th International Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services – TELSIS 2013*, Faculty of Electronic Engineering of Niš, Niš, Serbia, CD-proceedings, pp. 37-40, 16-19 October 2013.
- [164] Perić M., Ilić, S., Aleksić, S., Raičević, N., “Characteristic Parameters Determination of Different Striplines Configurations using HBEM,” *ACES journal*, The Applied Computational Electromagnetic Society, Mississippi, USA, Vol. 28, No. 9, pp. 858-865, 2013.
- [165] Perić M., S. Ilić, S. Aleksić, N. Raičević, M. Bichurin, A. Tatarenko, R. Petrov, “Covered microstrip line with ground planes of finite width,” *FACTA Universitatis (Series: Electronics and Energetics)*, Serbia, Vol. 27, No. 4, pp. 589-600, 2014.
- [166] Perić M., Ilić, S. S., Aleksić, S., Raičević, N., Vučković, A., “Examples of HBEM application for microstrip lines analysis,” *8th International PhD-Seminar on Computational electromagnetics and electromagnetic compatibility – CEM&EMC 2014*, Faculty of Electrical Engineering, University of Timisoara, Timisoara, Romania, CD-Proceedings – O3.2, 02-04 September 2014.
- [167] Perić M., Ilić S. S., Aleksić S., Raičević N., Monsefi F., Rančić M., Silvestrov S., “Analysis of shielded coupled microstrip line with partial dielectric support,” *XVIII-th International Symposium on Electrical Apparatus and Technologies SIELA 2014*, Bourgas, Bulgaria, pp.165-168, 29–31 May, 2014.
- [168] Veličković D. M., B. Milovanović, Ž. Mančić, “O izjednačavanju faznih brzina parnog i neparnog moda kod simetrično spregnutih trakastih vodova,” *IV Telekomunikacioni forum - TELFOR 96*, Beograd, Srbija, pp. 496-497, 1996.
- [169] Veličković D. M., B. Milovanović, Ž. Mančić, “New approach for equalizing phase velocities in coupled microstrip lines,” *Electronics letters*, Vol. 33, No. 17, pp. 1444-1445, 1997.
- [170] Mathematica 5.0, WolframResearch, Inc., 1988-2003, <http://wolfram.com>.
- [171] Veličković D. M., *Elektromagnetika – prva sveska*. Elektronski fakultet Niš, 2004.
- [172] Sobol H., “Application of Integrated Circuit Technology to Microwave Frequencies,” *Proc. IEEE*, Vol. 59, pp. 1200-1211, 1971.

- [173] Svacina J., "Analysis of Multilayer Microstrip Lines by Conformal Mapping," *IEEE Trans.*, Vol. MTT-40, No. 4, pp. 769-782, 1992.
- [174] Hammerstad E., O. Jensen, "Accurate Models for Microstrip Computer-Aided Design," *IEEE MTT-S International Microwave Symposium*, pp. 407-409, 1980.
- [175] Schneider M. V., "Microstrip Lines for Microwave Integrated Circuits," *Bell System Technical Journal*, Vol. 48, pp. 1421-1444, 1969.
- [176] Živanić, J. M., *Prilog rešavanju elektrostatičkih polja u anizotropnim sredinama sa posebnim osvrtom na primenu metoda fiktivnih izvora*. Doktorska disertacija, Elektronski fakultet Niš, 1986.
- [177] Poljak D., *Advanced Modeling in Computational Electromagnetic Compatibility*. Wiley & Sons, 2007.
- [178] Sadiku M. N. O., *Numerical Techniques in Electromagnetics*. CRC Press, 2001.
- [179] Pokryvailo A., C. Carp, C. Scapellati, "Comparative testing of simple terminations of high-voltage cables," *IEEE Electrical Insulation Magazine*, Vol. 26, No. 1, pp. 7-14, 2010.
- [180] Surutka J. V., *Elektromagnetika*. Akademska misao, Beograd, 2006.
- [181] Veličković D. M. i saradnici, *Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz Elektromagnetike – prvi deo*. Elektronski fakultet Niš, 2000.
- [182] Costamagna E., A. Fanni, "Analysis of rectangular coaxial structures by numerical inversion of the Schwarz-Christoffel transformation," *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 28, pp. 1454-1457, 1992.
- [183] Duncan J. W., V. P. Minerva, "Bandwitch balun transformer," *Proc. IRE*. Vol. 48, pp. 156-164, 1960.
- [184] Gish D. L., O. Graham, "Characteristic impedance and phase velocity of a dielectric-supported air strip transmission lines with side walls," *IEEE Transactions Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-18, pp. 131-148, 1970.
- [185] Lau K. H., "Loss calculation for rectangular coaxial lines," *IEE Proceedings*, Vol. 135, No. 3, pp. 207-209, 1988.
- [186] Zheng Q., W. Lin, F. Xie, M. Li, "Multipole theory analysis of a rectangular transmission line family," *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol. 18, No. 6, pp. 382-384, 1998.
- [187] Rančić M., *Application of Finite Difference Method (FDM) to Analysis of Guided Structures*. Semestral work, Malardalen University, Vasteras, Sweden, 2013.

- [188] Cockcroft J. D., "The effect of curved boundaries on the distribution of electrical stress round conductors," *J. IEE*, Vol. 66, pp. 385-409, 1926.
- [189] Bowan F., "Notes on two dimensional electric field problems," *Proc. London Mathematical Society*, Vol. 39, No. 211, pp. 205-215, 1935.
- [190] Green H. E., "The characteristic impedance of square coaxial line," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-11, pp. 554-555, 1963.
- [191] Ivanov S. A., G. L. Djankov, "Determination of the characteristic impedance by a step current density approximation," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-32, pp. 450-452, 1984.
- [192] Riblet H. J., "Expansions for the capacitance of a square in a square with a comparison," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 44, No. 2, pp. 338 – 340, 1996.
- [193] Ilić S. S., S. R. Aleksić, N. B. Raičević, "TEM analysis of strip line with finite width of dielectric substrate by using new hybrid boundary element method," *10th International Conf. on Applied Electromagnetics – IIEC 2011*, Niš, Serbia, CD Proc. O8-4, 2011.
- [194] Abbosh A. M., "Analytical closed-form solutions for different configurations of parallel-coupled microstrip lines," *IET Microwaves, Antennas & Propagation*, Vol. 3, No. 1, pp. 137-147, 2009.
- [195] Popović B., *Elektromagnetika*. Građevinska knjiga, Beograd, 1990.
- [196] Smith C. E., "A coupled integral equation solution for microstrip transmission lines," *IEEE G-MTTT Microwave Symp. Dig.*, 284-286, 1973.
- [197] Chramiec J., B.J. Janiczak, "Design of impedance-transforming microstrip-balanced stripline tapered transition," *Electron. Letters*, Vol. 29, No. 3–4, 1993.
- [198] Barba I. et al., "Numerical Modeling of Electromagnetic Wave Propagation Through Bi-isotropic Materials," *Solutions and Applications of Scattering, Propagation, Radiation and Emission of Electromagnetic Waves* (edited by Ahmed Kishk), InTech, pp. 59-95, 2012.
- [199] Sihvola A. H., "Electromagnetic Modeling of Bi-isotropic Media," *Progress in Electromagnetic Research, PIER*, No. 9, pp. 45-86, 1994.
- [200] Rothwell E., M. Cloud, *Electromagnetics*. CRC Press, 2001.

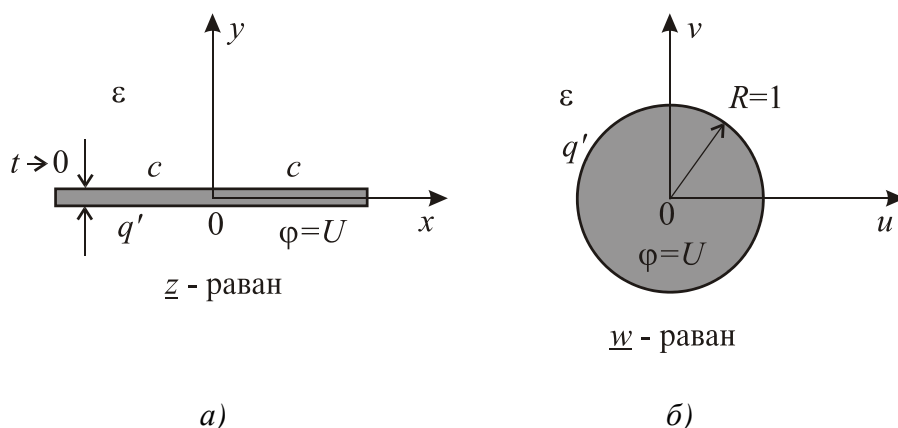
Прилози

Прилог I: Одређивање еквивалентног полупречника тракастог проводника

Користећи трансформацију Жуковског

$$\underline{z} = x + jy = \frac{c}{2} \left(\underline{w} + \frac{1}{\underline{w}} \right), \quad (\text{I.1})$$

где је $\underline{w} = u + jv = Re^{j\psi}$, трака правоугаоног попречног пресека, неограничене дужине и занемарљиве дебљине и ширине $2c$, оптерећена подужним наелектрисањем q' , која се налази на потенцијалу $\varphi = U$, пресликава се, као што је приказано у [181], на цилиндрични проводник кружног попречног пресека, јединичног полупречника, *Слика I.1.*



Слика I.1 – Танак тракаст проводник (а) и цилиндрични проводник кружног попречног пресека (б).

Наиме, уколико се комплексна променљива \underline{z} прикаже у алгебарском, $\underline{z} = x + jy$, а \underline{w} у тригонометријском облику, $\underline{w} = Re^{j\psi}$, добијају се једначине пресликавања

$$x = \frac{c}{2} \left(R + \frac{1}{R} \right) \cos \psi \text{ и} \quad (\text{I.2})$$

$$y = \frac{c}{2} \left(R - \frac{1}{R} \right) \sin \psi . \quad (\text{I.3})$$

Овим трансформацијама се кружница јединичног полупречника, $R = 1$, *Слика I.1б*, из w -равни пресликава на дуж

$$y = 0, \quad -c \leq x \leq c, \quad (\text{I.4})$$

којом се дефинише попречни пресек тракастог проводника у z -равни. Простор изван тракастог проводника пресликава се на спољашњост цилиндра чији је попречни пресек кружница јединичног полупречника.

Пошто се стави да је $R = e^p$, једначине пресликавања (I.2) и (I.3) се могу приказати као

$$x = c \cosh p \cos \psi \text{ и} \quad (\text{I.5})$$

$$y = c \sinh p \sin \psi, \quad (\text{I.6})$$

где је

$$\cosh p = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + c^2 + \sqrt{(x^2 + y^2 - c^2)^2 + 4c^2 y^2}}{2c^2}}, \quad (\text{I.7})$$

$$\sinh p = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - c^2 + \sqrt{(x^2 + y^2 - c^2)^2 + 4c^2 y^2}}{2c^2}}, \quad (\text{I.8})$$

$$R = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + c^2 + \sqrt{(x^2 + y^2 - c^2)^2 + 4c^2 y^2}}{2c^2}} + \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - c^2 + \sqrt{(x^2 + y^2 - c^2)^2 + 4c^2 y^2}}{2c^2}}, \quad (\text{I.9})$$

$$\cos \psi = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + c^2 + \sqrt{(x^2 + y^2 - c^2)^2 + 4c^2 y^2}}} \text{ и} \quad (\text{I.10})$$

$$\sin \psi = \frac{y\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + y^2 - c^2 + \sqrt{(x^2 + y^2 - c^2)^2 + 4c^2 y^2}}}. \quad (\text{I.11})$$

Због тога што се у процесу конформног пресликавања не мењају наелектрисање и потенцијал електроде, комплексни потенцијал у околини цилиндричног проводника се може приказати као

$$\underline{\Phi} = U - \frac{q'}{2\pi\epsilon} \ln \underline{w}. \quad (\text{I.12})$$

На великим удаљеностима од траке је $\underline{z} \gg c$, тј. $\underline{z} \approx \frac{c}{2} \underline{w}$, па је комплексни потенцијал

$$\underline{\Phi} = U - \frac{q'}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{2\underline{z}}{c}\right) = U - \frac{q'}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{\underline{z}}{a_e}\right), \quad (\text{I.13})$$

при чему је

$$a_e = \frac{2c}{4} = \frac{c}{2} \quad (\text{I.14})$$

еквивалентни полупречник тракастог проводника, а ширина траке $2c$.

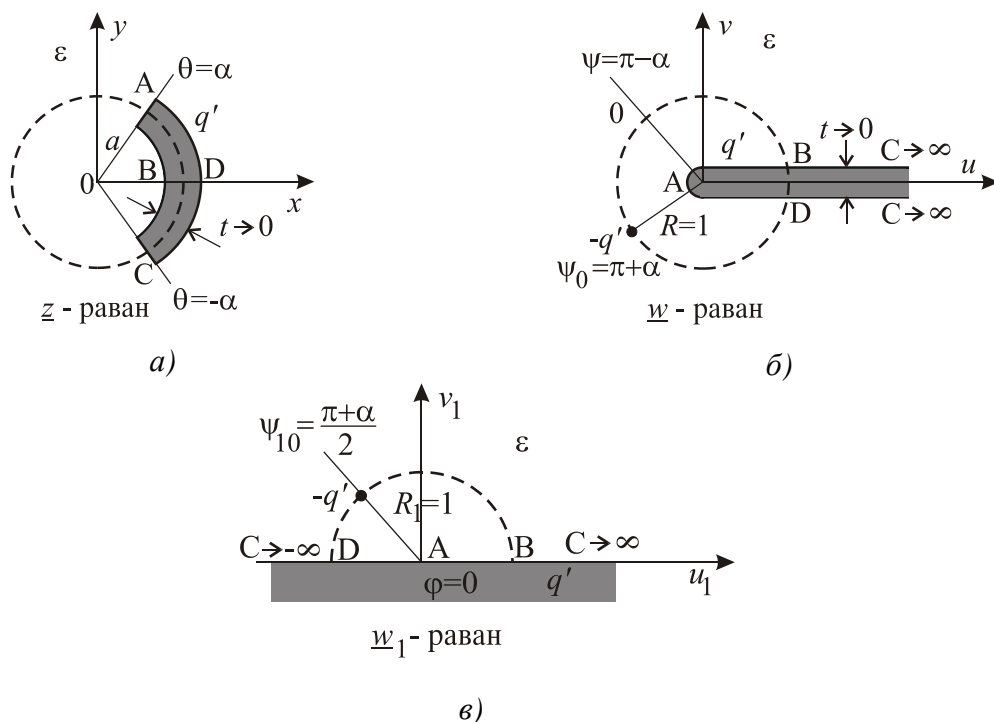
Прилог II: Одређивање еквивалентног полупречника танке цилиндричне љуске

Одређивање еквивалентног полупречника танке цилиндричне љуске полупречника a и угаоног отвора 2α , Слика II.1а, заснива се на следећа два конформна пресликавања, [181]:

$$\underline{w}_1 = R_1 e^{j\psi_1} = u_1 + jv_1 = \sqrt{\underline{w}} \quad (\text{II.1})$$

и

$$\underline{w} = u + jv = R e^{j\psi} = e^{j\alpha} \frac{\underline{a}^* - \underline{z}}{\underline{z} - \underline{a}}, \quad \underline{a} = a e^{j\alpha}, \quad \underline{z} = x + jy = r e^{j\theta}. \quad (\text{II.2})$$



Слика II.1 – Танка цилиндрична љуска (а) и поступак конформног пресликавања (б) и (в).

Помоћу билинеарне трансформације (II.2) спољашњост љуске из z -равни,

$$r = a, \quad -\alpha \leq \theta \leq \alpha, \quad (\text{II.3})$$

се пресликава на спољашњост танке полубесконачне плоче у w -равни, Слика II.2б,

$$0 \leq u < \infty, \quad v = 0. \quad (\text{II.4})$$

При томе је

$$u = \frac{2ra \cos \theta - (r^2 + a^2) \cos \alpha}{r^2 + a^2 - 2ra \cos(\theta - \alpha)}, \quad (\text{II.5})$$

$$v = \frac{(a^2 - r^2) \sin \alpha}{r^2 + a^2 - 2ra \cos(\theta - \alpha)}, \quad (\text{II.6})$$

$$R = \sqrt{\frac{r^2 + a^2 - 2ra \cos(\theta + \alpha)}{r^2 + a^2 - 2ra \cos(\theta - \alpha)}} \text{ и} \quad (\text{II.7})$$

$$\tan \psi = \frac{(a^2 - r^2) \sin \alpha}{2ra \cos \theta - (r^2 + a^2) \cos \alpha}. \quad (\text{II.8})$$

Подужно наелектрисање $-q'$ се из бесконачности ($z \rightarrow \infty$) пресликава на место

$$R = 1, \psi = \psi_0 = \pi + \alpha. \quad (\text{II.9})$$

Помоћу пресликавања

$$\underline{w}_1 = R_1 e^{j\psi_1} = \sqrt{\underline{w}}, R_1 = \sqrt{R}, \psi_1 = \psi/2, \quad (\text{II.10})$$

систем из \underline{w} -равни се пресликава на подужно наелектрисање изнад проводне равни, на правцу

$$R_1 = 1, \psi_1 = \psi_{10} = (\pi + \alpha)/2, \quad (\text{II.11})$$

како је то приказано на *Слици II.2в*, па је комплексни потенцијал

$$\underline{\Phi} = \frac{q'}{2\pi\epsilon} \ln \left(\frac{\underline{w}_1 - \underline{w}_{10}}{\underline{w}_1 - \underline{w}_{10}^*} \right), \quad (\text{II.12})$$

где је

$$\underline{w}_{10} = e^{j\psi_{10}} = e^{j\frac{\pi+\alpha}{2}}. \quad (\text{II.13})$$

На великим удаљеностима од љуске ($r \gg d$) је

$$\underline{w} \approx e^{j(\pi+\alpha)} \left(1 + \frac{a - a^*}{z} \right), \quad (\text{II.14})$$

$$\underline{w}_1 \approx \underline{w}_{10} \left(1 + \frac{a - a^*}{2z} \right), \quad (\text{II.15})$$

$$\underline{\Phi} = \frac{q'}{2\pi\epsilon} \ln \left(\frac{\underline{w}_{10}(a - a^*)}{2(\underline{w}_{10} - \underline{w}_{10}^*)z} \right) \text{ и} \quad (\text{II.16})$$

$$\varphi = \text{Re}\{\underline{\Phi}\} = \frac{q'}{2\pi\epsilon} \ln \left(\frac{a_e}{r} \right), \quad (\text{II.17})$$

где је

$$a_e = \frac{1}{2} \left| \frac{\underline{w}_{10}(a - a^*)}{\underline{w}_{10} - \underline{w}_{10}^*} \right| = a \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \quad (\text{II.18})$$

еквивалентни полупречник проводника чији је попречни пресек овална љуска.

Прилог III: Одређивање полупречника еквивалентних електрода на раздвојној површини два диелектрика

С обзиром да хибридни метод граничних елемената представља комбинацију метода еквивалентне електроде и метода граничних елемената, полазно становиште код одређивања еквивалентног полупречника електроде, којом се замењује сегментирана раздвојна површина два диелектрика, је да је $a_e = \text{mod} \frac{\Delta l}{4}$, где је Δl ширина траке, $\frac{\Delta l}{4}$ еквивалентни полупречник траке одређен приликом примене метода еквивалентне електроде, док је са "mod" обележен фактор који врши модификацију изворних вредности полупречника еквивалентних електрода одређених у претходна два прилога.

Са циљем одређивања фактора "mod" кренуло се од израза (4.31) који произилази из граничног услова за нормалну компоненту вектора јачине електричног поља, (4.28). Израз (4.31) је облика

$$\frac{q'_v i}{q'} \left(1 + \frac{\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r2}} \frac{L}{\pi N a_e} \right) = \frac{\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} \epsilon_{r2}} \frac{\frac{L}{h}}{N \pi \left(1 + \left(\frac{x_i}{h} \right)^2 \right)}, i = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{III.1})$$

Имајући у виду да је тачно решење (4.26)

$$\frac{\eta_v h}{q'} = \frac{\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})} \frac{1}{\pi \left(1 + \left(\frac{x}{h} \right)^2 \right)}, \quad (\text{III.2})$$

заменом у (III.1) добија се

$$\frac{\eta_v i h}{q'} \Delta l \left(1 + \frac{\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r2}} \frac{L}{\pi N a_e} \right) = \frac{\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} \epsilon_{r2}} \frac{L}{N \pi \left(1 + \left(\frac{x_i}{h} \right)^2 \right)}, i = 1, 2, \dots, N, \quad (\text{III.3})$$

тј.

$$\frac{\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})} \frac{1}{\pi \left(1 + \left(\frac{x_i}{h} \right)^2 \right)} \Delta l \left(1 + \frac{\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r2}} \frac{L}{\pi N a_e} \right) = \frac{\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} \epsilon_{r2}} \frac{L}{N \pi \left(1 + \left(\frac{x_i}{h} \right)^2 \right)},$$

$$i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{III.4})$$

С обзиром да је $\Delta l = \frac{2L}{N}$ и $a_e = \text{mod} \frac{\Delta l}{4}$ заменом у (III.4) и решавањем једначине добија се да је

$$\text{mod} = \frac{4}{\pi}, \quad (\text{III.5})$$

па је еквивалентан полупречник електроде којом се замењује свака трака сегментиране раздвојне површине два диелектрика

$$a_e = \frac{\Delta l}{\pi}. \quad (\text{III.6})$$

У случају када је трака танка цилиндрична љуска полупречника a и угаоног отвора 2α , еквивалентан полупречник је

$$a_e = \text{mod} a \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{4}{\pi} a \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (\text{III.7})$$

Прилог IV: Одређивање полупречника еквивалентних електрода на раздвојној површини две биизотропне средине

Као и у случају одређивања полупречника еквивалентних електрода постављених на раздвојној површини два диелектрика, са циљем одређивања фактора "mod" за случај еквивалентних електрода које се налазе на раздвојној површини две биизотропне средине, на основу поступка описаног у Прилогу III, кренуло се од израза (9.53), који се може написати у облику система једначина

$$\frac{q'_{vi}}{q'} \left(1 - A \frac{\Delta l}{2\pi\epsilon_0 a_e} \right) - \frac{q'_{mi}}{q'} B \frac{\Delta l}{2\pi a_e} = \left(-A + B \frac{\xi_1}{\mu_1} \right) \frac{\Delta l}{2\pi\epsilon_1 (1-p_1) \left(1 + \left(\frac{x_i}{h} \right)^2 \right)} \text{ и}$$

$$-\frac{q'_{vi}}{q'} C \frac{\Delta l}{2\pi\epsilon_0 a_e} + \frac{q'_{mi}}{q'} \left(1 - D \frac{\Delta l}{2\pi a_e} \right) = \left(-C + D \frac{\xi_1}{\mu_1} \right) \frac{\Delta l}{2\pi\epsilon_1 (1-p_1) \left(1 + \left(\frac{x_i}{h} \right)^2 \right)},$$

$$i = 1, 2, \dots, N, \quad (\text{IV.1})$$

где су константе A, B, C и D дефинисане изразима (9.54)-(9.57).

Имајући у виду да је тачно решење дато изразима (9.45) и (9.46), као и да је $\Delta l = 2L/N$ и $a_e = \text{mod } \Delta l/4$, заменом у (IV.1), добијају се линеарне једначине са јединственим решењем за "mod". Фактор којим се врши модификација изворних вредности полупречника еквивалентних електрода је

$$\text{mod} = \frac{4}{\pi}. \quad (\text{IV.2})$$

Самим тим закључујемо да се еквивалентан полупречник електроде којом се замењује свака трака сегментиране раздвојне површине две биизотропне средине одређује применом израза

$$a_e = \frac{\Delta l}{\pi}. \quad (\text{IV.3})$$

БИОГРАФИЈА АУТОРА

Мирјана Перић је рођена 12.09.1976. године у Нишу, где је завршила основну и средњу електротехничку школу “Никола Тесла”. Електронски факултет у Нишу уписала је 1995. године, смер Електроника и телекомуникације, а дипломирала 04.12.2000. Дипломски рад “Жичане антене у присуству савршено проводне земље” радила је под менторством проф. др Славољуба Алексића.

Последипломске студије уписала је новембра 2001. године на смеру Теоријска електротехника. Магистарску тезу “Продирање спољашњих електричних поља у шупља тела” одбранила је 16.02.2006. године, под менторством проф. др Славољуба Алексића.

Од 01.07.2001. ангажована је на Електронском факултету у Нишу као истраживач приправник. Изабрана је за асистента приправника на Катедри за теоријску електротехнику Електронског факултета у Нишу 01.07.2002. године, а у звање асистент 05.10.2009.

Била је ангажована на извођењу рачунских и лабораторијских вежби из предмета Основи електротехнике, Основи електротехнике I и II, као и рачунских вежби из предмета Теорија електричних кола, Електромагнетика и Електромагнетика – одабрана поглавља.

Током 2001. и 2003. године остварила је студијске боравке на Техничком универзитету Илменау (Немачка) у оквиру пројекта “*Theoretical Electrical Engineering*” подржаног од стране DAAD програма “*Academic reconstruction of South Eastern Europe*“.

Члан је међународних удружења *IEEE* (од 2005. године) и *ACES* (од 2012. године), као и организационог одбора Међународне конференције из примењене електромагнетике – ПЕС од 2003. године. Од априла 2011. године је секретар *IEEE EMC/Serbia & Montenegro Section*.

Учесник је многобројних летњих школа и семинара из области електромагнетике, као и међународних и домаћих конференција. У току свог досадашњег рада била је ангажована на три пројекта Министарства за науку Републике Србије и два међународна пројекта.

Аутор и коаутор је 71 рада, штампаних у зборницима са међународних и домаћих конференција и у часописима. Коаутор је једног помоћног уџбеника и монографије.

Њена област истраживања обухвата нумеричку електромагнетичку, електромагнетну компатибилност и анализу микроталасних водова.



Прилог 1.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом
Квазистационарни приступ за анализу микроталасних водова

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација, ни у целини, ни у деловима, није била предложена за добијање било које дипломе, према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

У Нишу, 20.03.2015.

Аутор дисертације: Мирјана Т. Перић

Потпис докторанда:



Прилог 2.

**ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКЕ
ДИСЕРТАЦИЈЕ**

Име и презиме аутора: Мирјана Т. Перић

Студијски програм: Теоријска електротехника

Наслов рада: Квазистационарни приступ за анализу микроталасних водова

Ментор: проф. др Славољуб Алексић

Изјављујем да је штампана верзија моје докторске дисертације истоветна електронској верзији, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 20.03.2015.

Аутор дисертације: Мирјана Т. Перић

Потпис докторанда:



Прилог 3.

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да, у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, унесе моју докторску дисертацију, под насловом:
Квазистационарни приступ за анализу микроталасних водова

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство – некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да подвучете само једну од шест понуђених лиценци; кратак опис лиценци је у наставку текста).

У Нишу, 20.03.2015.

Аутор дисертације: Мирјана Т. Перић

Потпис докторанда:
